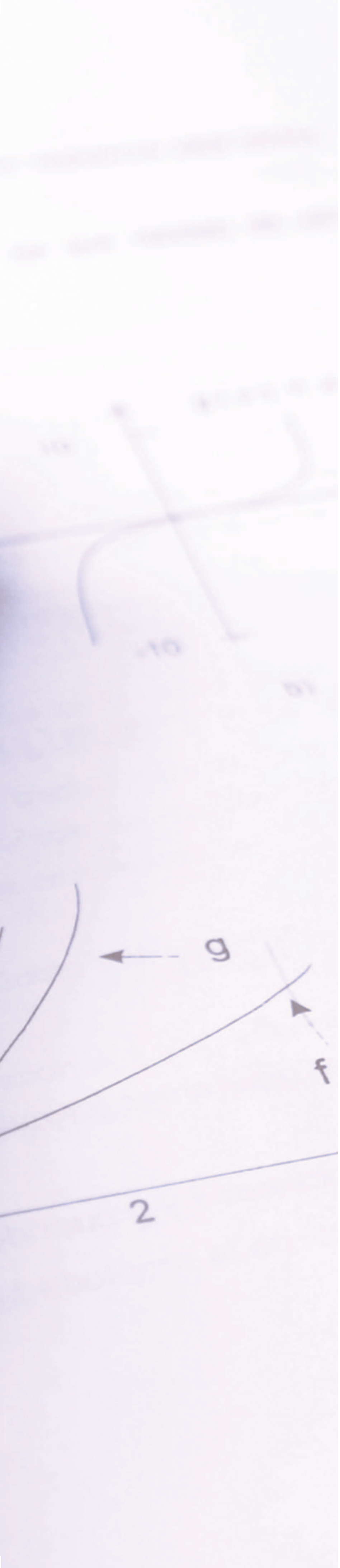


Módulo 3 • Matemática • Unidade 25

Esfera

Para início de conversa...

Um dos mais populares esportes do mundo é o Futebol. Apesar de sua prática ter sido introduzida em nosso país por Charles Miller em 1894, existem registros da prática de atividades similares ao futebol moderno desde 3000 anos aC.

Conta-se que na China os soldados após as batalhas disputavam partidas utilizando as cabeças dos adversários mortos como bolas. Com o passar do tempo utilizaram bolas de couro revestidas de cabelo.

Você deve torcer para algum time, e vibra quando o atacante do seu time consegue fazer a bola transpor a meta adversária. Este ato, no futebol, se chama gol.

Como você deve saber, o maior jogador de todo os tempos é um brasileiro. Edson Arantes do Nascimento, o Pelé. Um mineiro nascido na cidade de Três Corações. Ele foi campeão do mundo aos 17 anos e é reconhecido como o atleta do século, o mais vitorioso e competente esportista de todos os tempos.

Certa, vez, em uma entrevista ele disse: "Se eu pudesse me chamaria Edson Arantes do Nascimento Bola. Seria a única maneira de agradecer o que ela fez por mim..." Mas por que ele enaltece tanto a bola? Bem, se você já viu uma partida de futebol, este esporte, capaz de mover milhões de pessoas, apaziguar nações e também provocar brigas acirradas, gira em torno de um único objeto. A bola.

Figura 1: Uma bola de futebol.

Agora imagine, o atacante de seu time, nos acréscimos do segundo tempo quando a partida está zero a zero. Corre livre de marcação para receber a bola e a bola não pode ser passada porque... ela não gira. Que tristeza. Ainda bem que não é assim.

A bola de futebol precisa ter uma característica fundamental. Ela deve girar sobre seu próprio eixo. Conseguem imaginar uma bola que não seja esférica.

Objetivos desta unidade:

- Reconhecer os elementos de uma esfera
- Calcular a área da superfície esférica e o volume da esfera.
- Calcular a área de um fuso esférico e o volume de uma cunha esférica

Seção 1
O que é uma esfera?

Você já ouviu o termo "esfera"? Sabe dizer exatamente ou, pelo menos, com mais precisão, o que é uma esfera? As figuras seguintes representam objetos muito comuns em nosso cotidiano cuja forma se assemelha ao que chamamos de esferas. Você sabe dizer o que eles têm em comum?

Fonte: http://sxc.hu

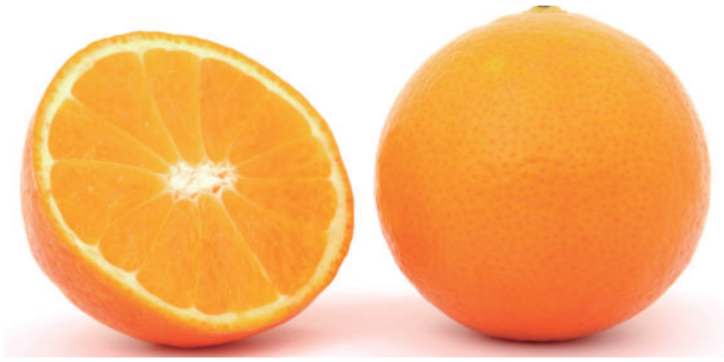
Figura 2: Uma limão, uma lima e uma laranja; bolas de natal; bolas de boliche e bola de futebol

E então, conseguiu descrever precisamente o que é uma esfera? Conseguiu identificar seus elementos principais? Aliás, você sabe como calcular a área e o volume de uma esfera? Nas próximas seções iremos responder a estas perguntas!

Vendo esferas onde não podia ver...

Vamos agora refletir um pouco sobre os objetos que vimos representados pelas figuras das páginas anteriores? O que eles têm em comum uns com os outros?

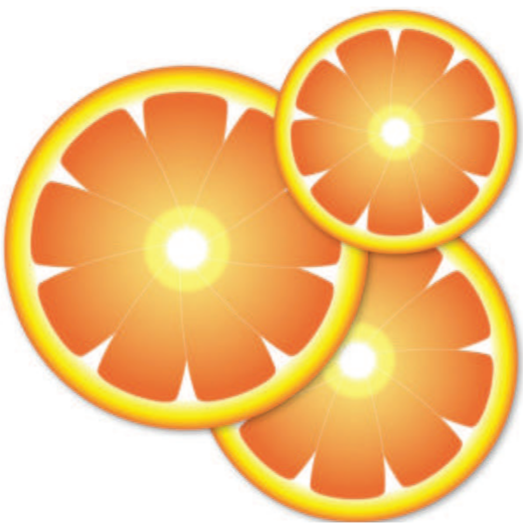
Bom, imagine se cortássemos ao meio todos estes "objetos". O que veríamos na parte cortada? Um círculo, concordam? Vejam na figura seguinte.



Fonte: http://sxc.hu

Figura 3: À direita, uma laranja inteira. À esquerda, a laranja cortada exatamente ao meio.

E se não cortarmos ao meio, se cortarmos em qualquer outra parte, o que veremos na seção cortada? São círculos também, só que menores que os que podemos ver quando imaginamos os cortes pelo meio. Vejam na figura seguinte



Fonte: http://sxc.hu

Figura 4: Seções produzidas quando cortamos uma laranja sem passar exatamente pelo seu centro.

Pois é isso o que todos têm em comum! Quando os cortamos com um plano em qualquer lugar, o que vemos são círculos!

Agora, vamos voltar ao assunto que é paixão nacional. O futebol. Abaixo, segue a imagem da bola de futebol que nos referimos no inicio. Assim, poderemos entender mais algumas coisas sobre a definição de esfera.

No passado a bola de futebol era construída com couro animal. Atualmente existem materiais diversos com os quais é possível fazer este objeto, o principal deles é o couro sintético. Elas são cheias de ar para que possam se manter infladas

Figura 5: Outra bola de futebol", nos mesmos moldes da primeira: uma esfera de vidro contendo gás com baixa pressão e um eletrodo no centro.

A capa de couro sintético constitui numa superfície curva, no formato de uma bola. Esta superfície recebe o nome de casca esférica. Sua função é a de limitar o ar necessário para manter o objeto inflado que vimos na figura anterior.

Se adicionarmos a capa de couro – que, repetimos, é apenas uma borda, uma casca – tudo aquilo que está em seu interior, teremos o que chamamos de esfera.

Importante

Casca esférica é apenas a borda – em nosso caso, a superfície curva de couro que tem o formato de uma bola. Esfera é o conjunto que contem a casca esférica e tudo que está em seu interior – em nosso caso, capa de couro mais o ar.

Podemos fazer uma analogia com uma laranja com formato redondo, esférico. A casca da laranja é a superfície esférica enquanto toda a laranja (casca mais gomos) é a esfera.

Uma propriedade muito importante é que, em toda a esfera, há sempre um ponto central, sua distância até a cada ponto da casca esférica (capa de couro) é constante.

Podemos formalizar um pouco os conceitos até agora discutidos da seguinte forma:

Dado um ponto O e uma distância r, chamamos de esfera ao conjunto de pontos cuja distância até o ponto O é menor ou igual ao raio r. Se essa distância for exatamente igual a r, chamamos o conjunto de pontos de superfície da esfera, pois, neste caso, estaremos tomando somente a "casca" da esfera (em cinza escuro). Se a distância for menor do que r, teremos apenas o "miolo" da esfera (em cinza claro). Vejam na figura seguinte

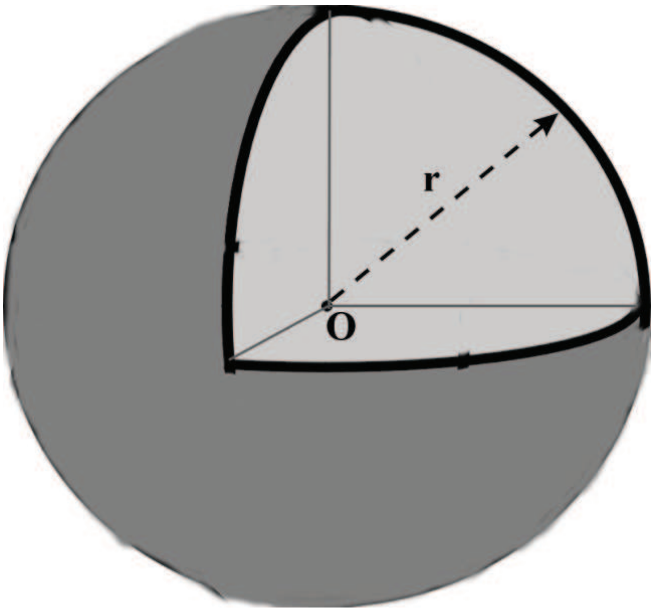


Figura 6: Esfera, com centro O e raio r destacados

A superfície esférica e a esfera podem ser definidas também como superfície ou sólido de revolução, respectivamente. Se girarmos uma semicircunferência completamente – ou seja, 360º – em torno de um eixo que contém seu diâmetro obtemos uma superfície esférica.

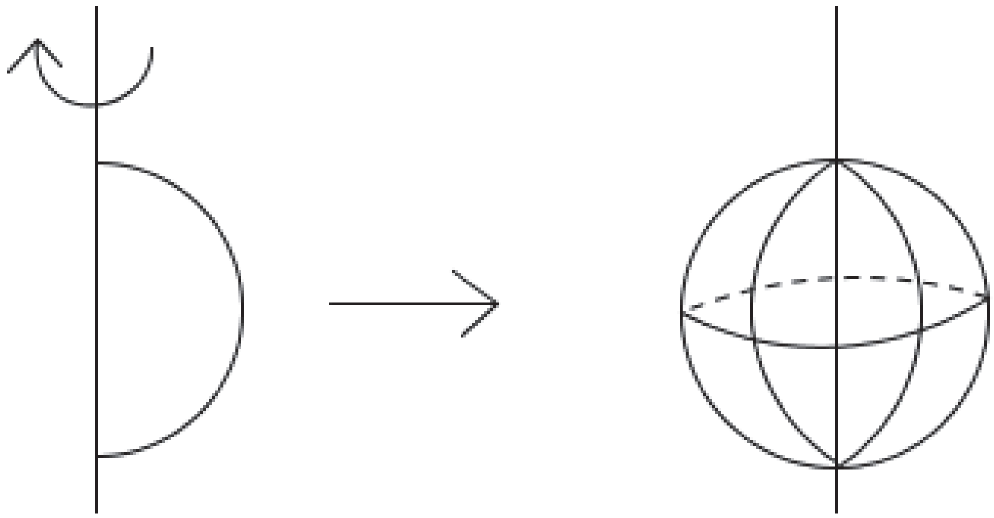


Figura 7: Superfície esférica gerada por rotação da semicircunferência em torno do eixo

Vale relembrar aqui que a circunferência é, por assim dizer, apenas a borda do círculo – e que semicircunferência é metade de uma circunferência. Agora, se girarmos um semicírculo completamente – ou seja, 360º – em torno de um eixo que contém o seu diâmetro, obteremos uma esfera. Lembramos aqui que um semicírculo é a metade de um círculo – que é a figura completa, miolo mais borda.

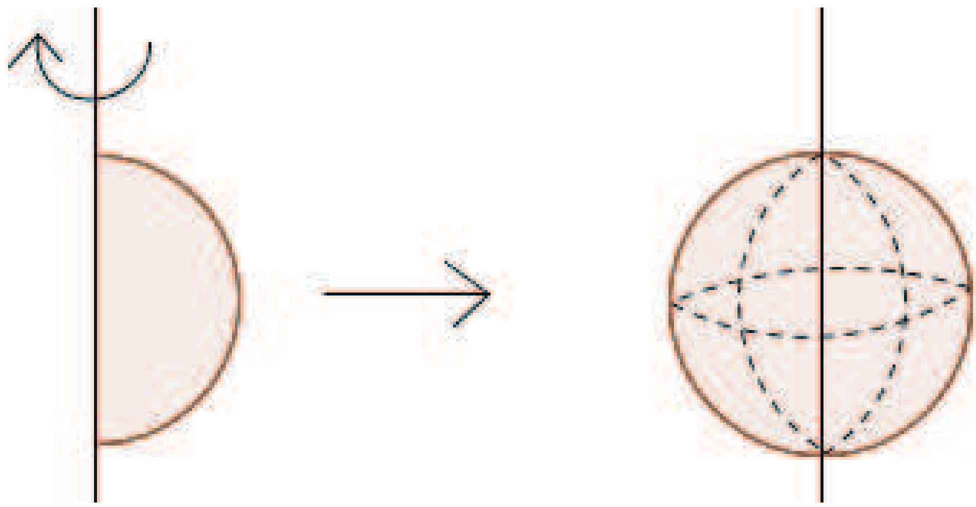


Figura 8: Esfera gerada por rotação do semicírculo em torno do eixo

Atividade 1

Dê exemplos de objetos reais que podem ser considerados superfícies esféricas e outros que podem ser considerados esferas.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção de uma esfera

Alguém quer um coco aí?

Fonte: http://sxc.hu

Figura 9: Também podemos considerar que um coco tem uma forma que se assemelha à de uma esfera.

O coco é uma fruta muito apreciada pelos frequentadores das praias de todo o nosso estado. Os vendedores de coco têm uma habilidade incrível para cortá-lo e deixa-lo tal como na imagem anterior

Se considerarmos um coco como uma esfera, o tampo retirado pelo vendedor para que a gente possa beber sua água é chamado de seção da esfera. Como havíamos comentado no início desta unidade, esta seção (sendo plana) deixa uma marca circular no coco. Será que a gente consegue saber mais informações sobre essa seção circular?

Vamos dar uma olhada no esquema a seguir:

Se tomarmos o coco como uma esfera de raio R e centro O e fizermos um corte (com o facão do vendedor, para abrir o coco), como mostra a figura abaixo, então a interseção deste plano com a esfera será um círculo de raio R' e centro O'.

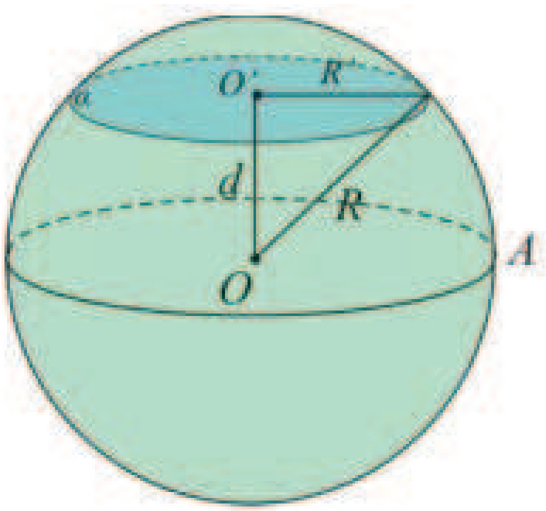
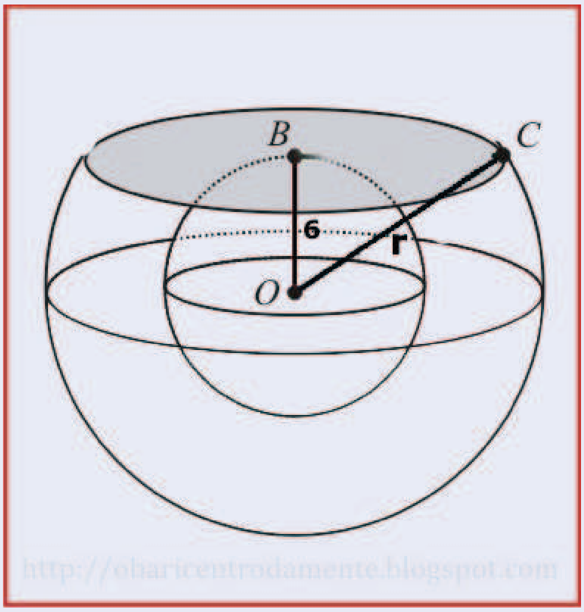


Figura 10: Esfera com centro O, raio R e seção α, com centro O' e raio R' destacados.

Desta figura podemos obter a seguinte relação: $R^2 = d^2 + R'^2$ (teorema de Pitágoras), onde d é a distância do ponto O ao ponto O'.

Atividade 2



Observe o coco representado na figura. Note que ele é constituído de uma parte exterior, uma parte interior e, bem no centro, há uma outra esfera onde fica a água. Vamos considerar que as duas esferas são concêntricas (têm o mesmo centro) e que a menor tem raio igual a 6 cm. Um vendedor passa um facão de forma plana e tangente à esfera menor. Na esfera maior, fica determinada uma seção – marcada em cinza – cuja área é igual a 64π cm^2. Determine o raio r da esfera maior.

Anote suas respostas em seu caderno

Os elementos de uma esfera

Na seção 1.1, falamos um pouco sobre os elementos principais de uma esfera, a partir da bola de futebol que encanta tantos brasileiros. Agora, vamos dar uma olhada de uma maneira mais formal nestes elementos e aproveitar o ensejo para apresentar outros. Acompanhe na figura a seguir!

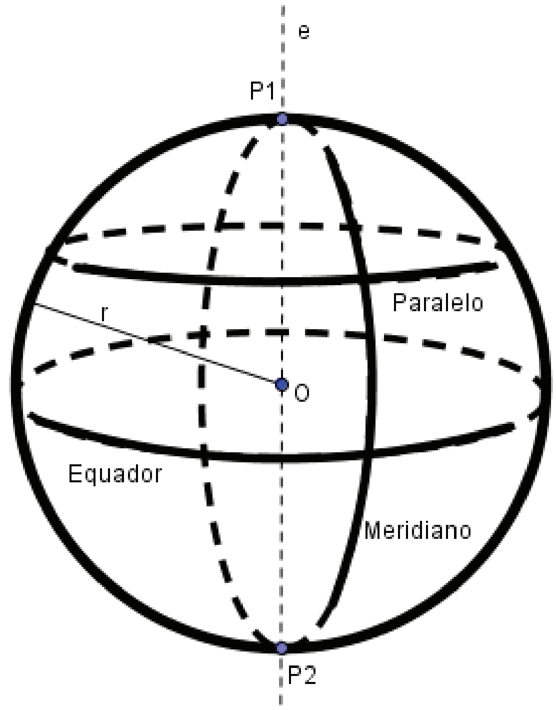


Figura 11: Esfera com os principais elementos destacados

Considerando a esfera acima temos os seguintes elementos:

- O ponto O é o centro da esfera
- O raio r é a distância do ponto da superfície da esfera até o centro
- O eixo e é a reta que contém o diâmetro
- Pólos P1 e P2 são as interseções da superfície com o eixo
- Equador é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo e que contém o centro da esfera.
- Paralelo é uma seção (circunferência) perpendicular ao eixo e que não contém o centro da esfera.
- Meridiano é uma seção (circunferência) que contém o eixo.

Seção 2
Como calcular área e volume de esferas?

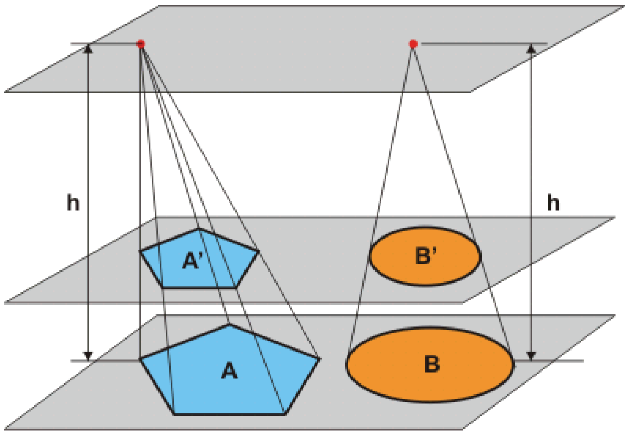
Volume da esfera

Qual seria a quantidade necessária de ar para que a bola de futebol fique inflada? Como podemos saber o quanto de gás pode ser colocado dentro da bola de futebol para mantê-la em condições de uso? Qual é essa capacidade? Para responder a essas perguntas, precisamos calcular o volume de uma esfera. Volume, convém lembrar, é a capacidade interna de um objeto, seja ele de que formato for.

Como a esfera é um corpo redondo, não podemos fazer aproximações por cubos como fazemos em um paralelepípedo. Então como podemos calcular seu volume? Uma forma de realizarmos este cálculo é usarmos o princípio de **Cavalieri** estudado anteriormente e compararmos as seções de uma esfera com as de uma anticlépsidra.

Cavalieri

O princípio de Cavalieri foi estabelecido no século XVII pelo matemático Italiano Bonaventura Cavalieri e, até os dias de hoje, serve como base para uma grande quantidade de estratégias de cálculo de volumes de sólidos. De acordo com esse princípio, sólidos que 1) tenham a mesma altura e 2) tenham a mesma área de seção transversal para todas as alturas intermediárias terão o mesmo volume. Na figura acima, como os dois sólidos têm a mesma altura h, basta que as áreas das seções A´e B´ sejam sempre iguais para que os sólidos tenham o mesmo volume.



Uma anticlépsidra, antes que você pergunte, é um sólido geométrico obtido retirando uma clépsidra de dentro de cilindro equilátero. E, antes que você diga que a explicação mais atrapalhou do que ajudou, lembramos a você que uma clépsidra é o sólido obtido com a união de dois cones invertidos. Lembramos também que um cilindro equilátero é aquele cujo diâmetro da base é igual à altura. Veja na figura

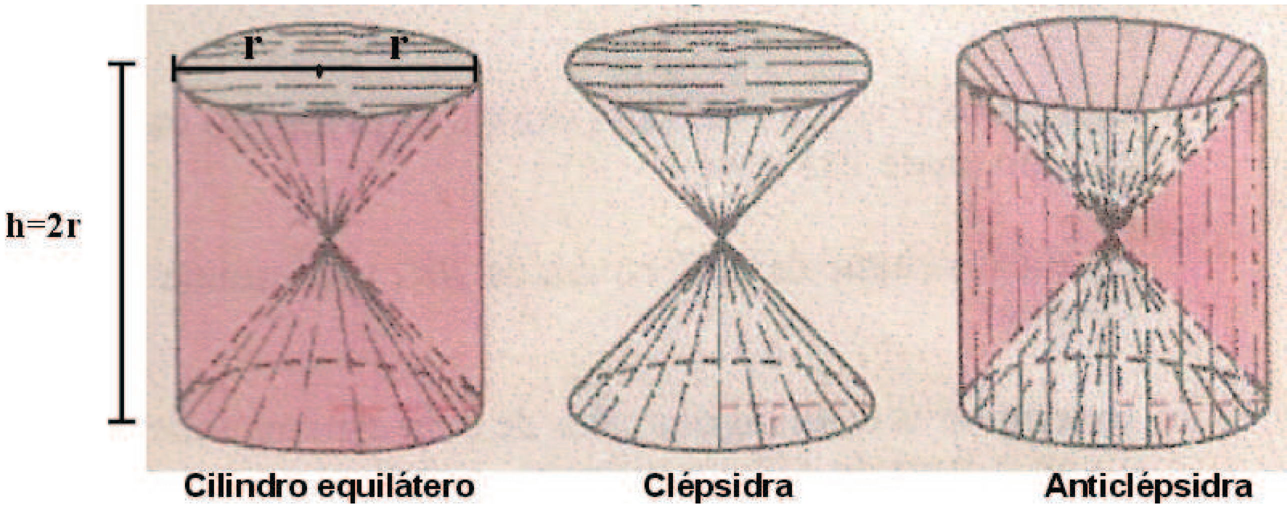


Figura 12: Cilindro equilátero, clepsidra e anticlépsidra.

Então vamos lá: o sólido à esquerda é um cilindro equilátero, cuja altura h é igual ao diâmetro 2r da circunferência da base. O sólido do centro é a clepsidra, união de dois cones invertidos, cujas bases coincidem com as do cilindro. E, se fizéssemos uma espécie de escultura no cilindro, removendo exatamente a parte da clepsidra, o sólido resultante seria a anticlépsidra, representada na direita da figura. Entenderam? Ótimo!

Agora, você pode estar se perguntando, e muito justamente, como é que nós vamos fazer para juntar uma esfera com uma anticlépsidra para usar o princípio de Cavalieri – afinal, são sólidos a princípio bem diferentes! Nossa resposta é franca: a forma de relacionar a esfera com a anticlépsidra nem é assim tão complexa, mas envolve umas contas que fariam com que nossa aula perdesse seu rumo.

Assim, vamos combinar o seguinte: para efeito da nossa aula, o importante é entender que, após alguns cálculos, podemos demonstrar que o volume de uma esfera é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Caso você tenha curiosidade acerca da demonstração desta fórmula, consulte o boxe a seguir.

Saiba Mais

A interessante demonstração da fórmula do volume da esfera via princípio de Cavalieri tem por base o fato de que a área da seção transversal da anticlépsidra é sempre idêntica à área da seção transversal de uma esfera de mesma altura. Ela está bem detalhada no livro "Fundamentos da Matemática elementar, volume 10", escrito por Oswaldo Dolce e José Nicolau Pompeo e publicado pela Editora Atual. Outra boa dica é procurar o site http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1601.htm#GEO160102.

Vamos dar uma olhada nesta fórmula: o volume V da esfera vale 4/3 (uma constante) multiplicado por π (outra constante), multiplicado pelo valor do raio elevado ao cubo. Assim, podemos afirmar o volume de uma esfera depende exclusivamente da medida do seu raio. Isto é muito simples, não acham?! Vamos aqui pensar uns dois problemas e fazer umas contas para conferir.

O primeiro problema é o seguinte: se duplicarmos o raio de uma esfera, seu volume fica duplicado também? O que você acha? A resposta é sim?

Bom, a verdade é que a resposta é não. Acompanhe a gente aqui: se uma esfera tem raio R então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$, ok? Então se duplicarmos o raio desta esfera teremos um novo volume $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot (2R)^3$, ou seja, $V' = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

Isto significa que o volume desta esfera fica multiplicado por 8.

O segundo problema é assim: três esferas de gelo, todas de raio 2cm, são derretidas. Julião comprou um recipiente com raio três vezes maior que as esferas de gelo para que, ao final da fusão, toda a água fosse despejada nele preenchendo-o completamente. Julião conseguiu o que pretendia?

Figura 13: Cuba de gelo

Bom, acompanhe as contas aqui: o volume de cada esfera de gelo é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, ou seja, $v = \frac{32}{3} \cdot \pi$. Como temos 3 esferas de gelo então o volume total de água produzido foi de $v = 32\pi\ cm^3$. Por outro lado, o volume do recipiente comprado por Julião é $v = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3$, ou seja, $v = \frac{216}{3} \cdot \pi = 72.\pi$ cm³. Assim, o recipiente comprado por Julião não foi completamente preenchido – e, se lembramos que a metade de 72 é 36, poderíamos ainda dizer que a água resultante do derretimento das 3 esferas, de volume total igual a 32 π cm³, não foi suficiente para preencher nem a metade dos 72 π cm³ do recipiente comprado por Julião. Para calcular o raio do recipiente que seria completamente preenchido pela água advinda do derretimento das esferas, fazemos assim: para ser completamente preenchido, o recipiente precisaria ter 32π cm³, certo? Então teríamos que $32\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, onde R é o raio do recipiente esférico. E, desenvolvendo, teríamos que $R = \sqrt[3]{24}$, ou seja,. $R \cong 2{,}89\ cm$

É importante ressaltarmos neste exemplo que ao juntarmos 3 esferas de raio 2 cm não obtemos uma esfera de raio 6cm, mas sim uma nova esfera de raio aproximadamente 2,89 cm. O que mostra que devemos tomar muito cuidado com as deduções precipitadas!

Área da esfera

E como poderíamos calcular a quantidade de couro, mesmo que de uma camada muito fina, necessário para fazer a bola de futebol? É como se quiséssemos calcular a área de toda a casca de uma laranja cortada. Em outras palavras, estamos querendo discutir sobre como podemos calcular a área de uma superfície esférica.

Aqui, seguiremos o mesmo caminho da seção sobre volume: apresentaremos uma ideia básica dessa demonstração, a fórmula – que nos interessa mais diretamente – e um box para os que se interessarem na demonstração em mais detalhes.

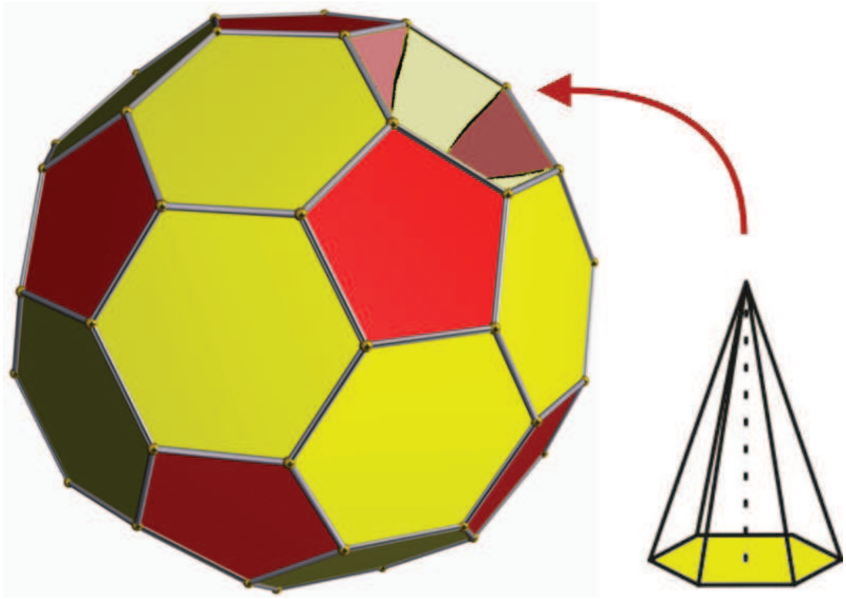


Figura 14: O icosaedro da figura pode representar uma das etapas da aproximação do volume de uma esfera pela soma dos volumes de pirâmides cujo vértice coincide com o centro da esfera e cuja base coincide com a superfície da esfera.

Muito basicamente, a ideia é tentar aproximar o volume da esfera pela soma do volume de várias pirâmides cujos vértices coincidam com o centro da esfera e cujas bases coincidam com a superfície da esfera. Evidente que, como a superfície da esfera é curva e a base da pirâmide é plana, sempre haverá uma diferença de volume. No entanto, na medida em que a quantidade de pirâmides for aumentando e sua base diminuindo, essa diferença de volume irá diminuindo. Quando a base de cada pirâmide for muito pequena – e eis o que nos interessa aqui – a área da esfera será $A = 4p\,.r^2$. Curiosos em relação aos detalhes da demonstração? Vejam no boxe seguinte:

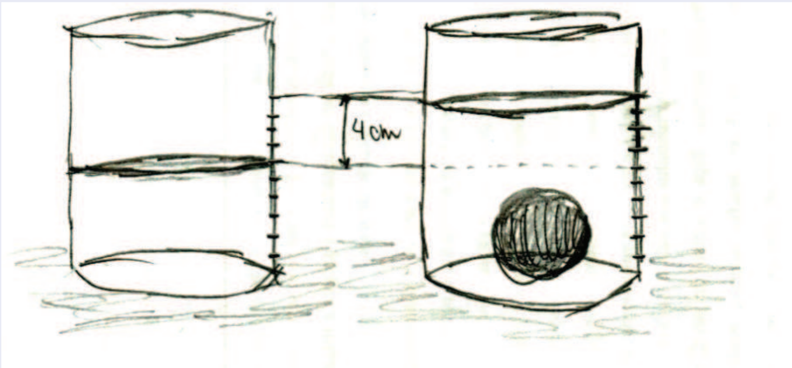
A dedução completa da fórmula da área da esfera a partir da aproximação com as pirâmides pode ser encontrada no livro "Matemática" do autor Luiz Roberto Dante, da editora Ática, volume único, na página 394 da 1ª edição. Caso queira conhece-la online, a sugestão é o site http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/09/area-da-superficie-esferica-partir-de.html.

Vamos fazer juntos um exemplo? Pois bem, a situação é a seguinte. Márcio está numa festa e deseja encher uma bola com água. Para isso precisa saber aproximadamente seu volume. No entanto, ele não consegue encontrar essa informação. A única coisa que ele sabe é o diâmetro da bola: 18 cm. Será que ele tem como calcular o volume a partir do diâmetro?

Bom, como você já deve estar imaginando a resposta é sim – afinal, não usaríamos como exemplo um problema sem solução! Então veja lá: como a bola possui 18 cm de diâmetro então seu raio mede 9 cm. Usando a fórmula de volume temos: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3$. Logo $V = 972$. p. Logo, o volume é de 972.π cm^3. Se tomarmos o valor de π como aproximadamente 3,14, teremos que o volume total da bola é algo em torno de 3052 cm^3. Como 1000 cm^3 equivalem a 1 litro, a bola teria capacidade para aproximadamente 3 litros de líquido.

Entenderam? Ótimo! Que tal tentarem fazer uma atividade sozinhos agora?

Atividade 3



João deseja determinar o volume de um objeto de formato esférico, mas não sabe a medida do raio deste objeto e não possui nenhum instrumento para medi-lo. No entanto, ele possui um recipiente em formato cilíndrico que possui marcações de 1 em 1cm. Ele então teve a seguinte ideia: colocou água até que ela atingisse uma altura maior do que a do objeto. Depois, colocou o objeto dentro do recipiente e percebeu que, nesse instante, a superfície da água havia se deslocado 4 cm para cima. Sabendo que tal recipiente tem formato cilíndrico com raio igual a 4 cm, determine o raio do objeto esférico.

Anote suas respostas em seu caderno

Agora, imagine que em vez de saber o volume da bola, quisesse embrulhá-la? Seria possível saber a quantidade mínima de papel de que precisa? Bom, novamente a resposta é sim: se usarmos a fórmula de área temos: $A = 4{\cdot}\pi{\cdot}9^2$, ou seja, $V = 324\ \pi\ cm^2$, aproximadamente. Se tomarmos novamente o valor de π como 3,14, teremos que a área da superfície da esfera é de aproximadamente 1017 cm^2. Para termos uma ordem de grandeza da quantidade de papel que essa área representa, basta lembrar que a área de um quadrado com 32 cm de lado seria de 1024 cm^2. Assim, os 1017 cm^2 seriam equivalentes à área de um quadrado com um pouco menos de 32 cm de lado.

Para fechar a seção, convidamos vocês a fazerem a próxima atividade.

Atividade 4

Ao encher uma bola de aniversário, uma pessoa percebeu que esta tomou um formato esférico e, medindo com um determinado instrumento chegou a conclusão que o diâmetro da bola era de 20 cm. Determine a área da superfície desta bola.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Fuso e cunha

Os assuntos desta seção, trataremos a partir de uma suposição – a saber, a existência de melancias perfeitamente esféricas – e de um problema bastante concreto – a saber, os custos de um feirante. Prontos? Então vamos.

Fonte: http://sxc.hu

Figura 15: Melancias inteiras e cortadas.

Um problema prático

Vamos imaginar que um feirante vende melancias perfeitamente esféricas e dividiu uma delas em 10 partes rigorosamente iguais, como sugere a figura anterior. Suponha que essa melancia tem 40 cm de diâmetro. O feirante precisa saber o volume de cada parte e a quantidade aproximada de plástico necessária para embalar essa parte – mas não tem muita ideia de como fazer para encontrar estes valores. Quando soube que você está estudando matemática, veio pedir sua ajuda.

Enquanto você, educadamente, agradece, vai pensando numa maneira de sair da sinuca. Bom, a quantidade de plástico deve ser a área do sólido formado. Mas o volume...Hummm...Já sei, vou fazer uma regra de três! Aí pede papel, lápis e mais uns instantes ao amigo feirante. Diz, confiante, que já tem a solução e só vai organizar as ideias.

Para a regra de três, você lembra da rotação do semicírculo em torno do eixo, que vimos no início dessa aula. Se uma rotação de 360º vai dar um volume de $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, então uma rotação de metade disso (180º) vai dar um volume que é justamente a metade desses $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$. Se a rotação for de um quarto do total (90°, que é um quarto dos 360°), o volume final será de um quarto do volume total (um quarto dos $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$) – e por aí vai !

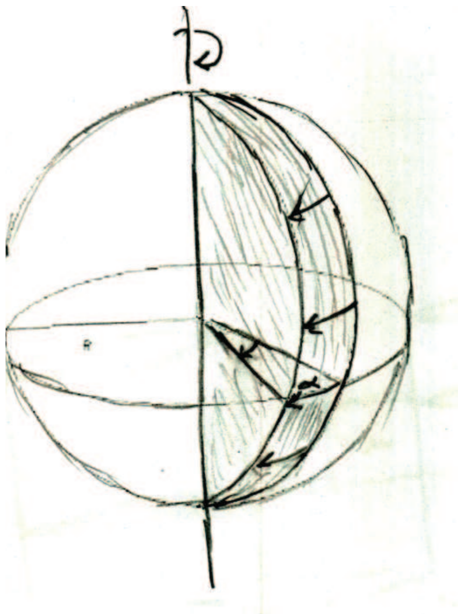


Figura 16: sólido gerado por rotação de α graus de um semicírculo em torno de um eixo que passa pelo seu diâmetro.

Assim, de uma maneira geral, para um ângulo α – veja na figura ! – teremos

Ângulo (em graus) ---------- Volume

360° --------------- $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$

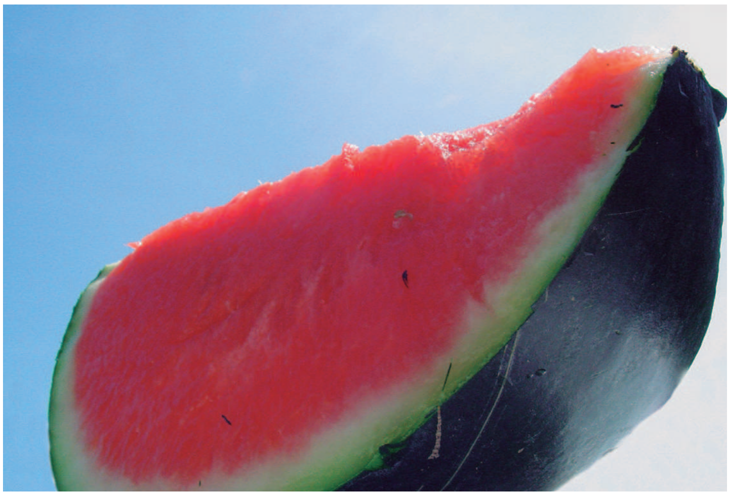
α --------------- V

Neste caso, como a melancia tem 40 cm de diâmetro então R = 20 cm, e como foi dividida em 10 partes iguais então α = 36°.

Substituindo estes valores temos: $360\cdot V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 20^3\cdot 36$ ou seja, $V=\frac{3200\pi}{3}$, tomando π como 3,14, temos o volume aproximado de: $V\cong 3349$ cm^3

Se lembramos que 1000 cm^3 equivalem a 1 litro, teremos um volume de aproximadamente 3,3 litros.

Vencido o desafio do volume, você parte para a questão da área. Para isso, olha mais atentamente para a parte da melancia que o feirante pretende embalar. Identifica, então, três áreas – veja na figura abaixo:



Fonte: http://sxc.hu

Figura 17: Fatia de melancia a ser embalada

A primeira área é aquela vermelha e branca, do interior da melancia e que está em destaque na imagem. Fazendo aquela nossa correspondência, ela seria equivalente justamente ao semicírculo. A segunda área é aquela da casca – que, na melancia, é a parte externa, verde e branca. Já a terceira área é rigorosamente igual à primeira – parte interna da melancia, vermelha e branca. Na imagem, corresponderia, por assim dizer à parte de trás da fatia, idêntica à primeira mas oculta pelo ângulo da foto. Essa parte também corresponde a um semicírculo. Na figura seguinte, fizemos uma representação, já usando elementos matemáticos:

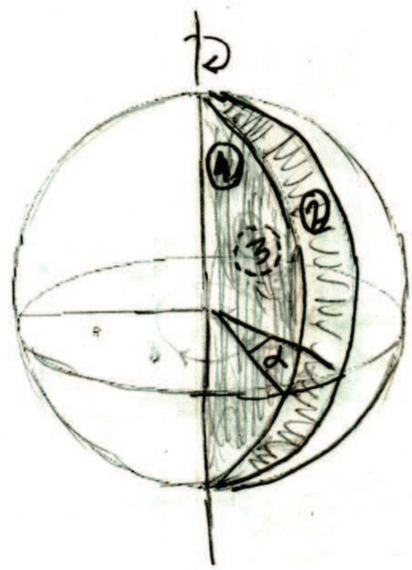


Figura 18: Sólido que representa a melancia a ser embalada: área 1, semicírculo da frente; área 2, parte da superfície da esfera e área 3 semicírculo de trás.

Então muito bem: nossa área total a ser embalada é a soma das áreas 1, 2 e 3 $A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

O primeiro movimento será o seguinte: as áreas A_1 e $A_{3,}$ são dois semicírculos idênticos. E, portanto, somadas, dão um círculo inteiro, de área total igual a πR^2 – onde R é o raio do círculo. A questão é justamente a área 2. Que fazer com ela? Você pensa mais um pouco e lembra, novamente, do início dessa aula. Só que, desta vez, lembra da rotação de que a casca esférica é obtida pela rotação de 360° de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Novamente, uma regra de três !

Se uma rotação de 360° gera uma superfície de área igual a $4\pi R^2$, então uma rotação de 180° (metade da rotação total) vai gerar uma área de $2\pi R^2$ (metade da área total), uma rotação de 90° (um quarto da rotação total) vai gerar uma área de πR^2 (um quarto da área total) e assim sucessivamente. De uma maneira geral, uma rotação de α vai gerar uma área igual a A. Teremos então:

Ângulo (em graus) -------------- Área

360°- --------------- $4\pi R^2$

α --------------- A

Excelente! Agora é só inserir os valores!

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 + A_{3\,=}$ círculo de raio R

Como a melancia tem 40cm de diâmetro, então R=20 cm. A área de um círculo de raio 20cm é $A_{círculo} = \pi \cdot 20^2 = 400.\ \pi \cdot cm^2$. Maravilha! Vamos à casca da melancia

$A_{2\,=}$ área da parte da superfície esférica

Ângulo (em graus) -------------- Área

360° --------------- $4\pi R^2$

α --------------- A

Como já vimos anteriormente, o valor de α é igual a 36° (melancia de 360° dividida em 10 partes iguais) e o valor de R é igual a 20cm (melancia esférica com diâmetro igual a 40 cm). Substituindo os valores, temos:

$360A = 4 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 36$, ou seja, $A = 160\pi\ cm^2$

Assim,

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

$A_{total} = 160\ \pi\ cm^2 + 400.\ \pi \cdot cm^2$

$A_{total} = 560\ \pi\ cm^2$

Com π = 3,14 teremos que a área total a ser embalada é de aproximadamente 1758,4 cm^2 – área de um quadrado com aproximadamente 42 cm de lado.

Ufa! Quanta conta! Mas tenha certeza de que a informação que você levou ao feirante foi muito útil. Parabéns !!!

Conceituando

Vamos agora ver isso sob um ponto de vista mais formal? A ideia aqui é dar nomes e conceituações mais precisas aos elementos que usamos para resolver o problema anterior. O primeiro conceito é o de fuso esférico. Vamos lá?

Fuso esférico é uma parte da superfície esférica cujas extremidades estão nos pólos. Uma definição mais precisa, mais rigorosa, é a superfície obtida pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Veja na figura

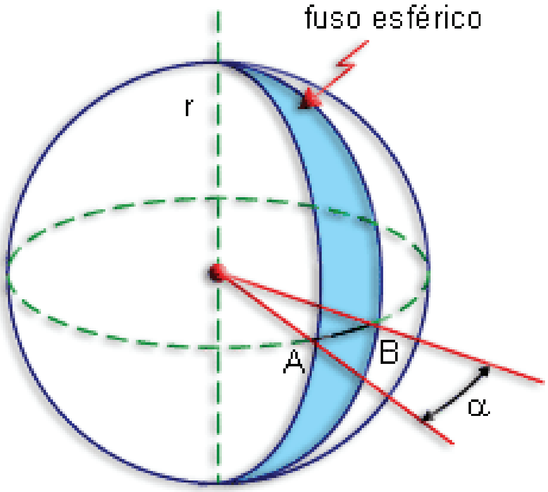


Figura 19: Esfera com fuso esférico destacado

Para calcularmos a área do fuso esférico, devemos fazer uma regra de três que relaciona a área da superfície esférica com o ângulo da superfície esférica, ou seja, quando temos uma superfície esférica sua área é de $4\pi R^2$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da superfície esférica então teremos um certo ângulo α e portanto uma área A:

Área --------------	Ângulo (em graus)	Área --------------	Ângulo (em radianos)
$4\pi R^2$ --------------	360°	$4\pi R^2$ --------------	2π rad
A --------------	α	A --------------	α rad

No exemplo do feirante, o fuso esférico corresponde à casca da fatia de melancia a ser embalada. Conseguiram associar? Se não conseguiram, dêem uma olhadinha com calma nas figuras anteriores. É muito importante que vocês consigam identificar a casca da fatia com o fuso esférico. Pronto? Ótimo, vamos em frente! O próximo conceito é o de cunha esférica

Cunha esférica é uma parte da esfera cujas extremidades estão nos pólos. Percebam aqui a diferença: o fuso é uma parte da superfície, da casca esférica. Já a cunha é parte da esfera, do sólido. Para definirmos de forma mais rigorosa, podemos dizer que cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.

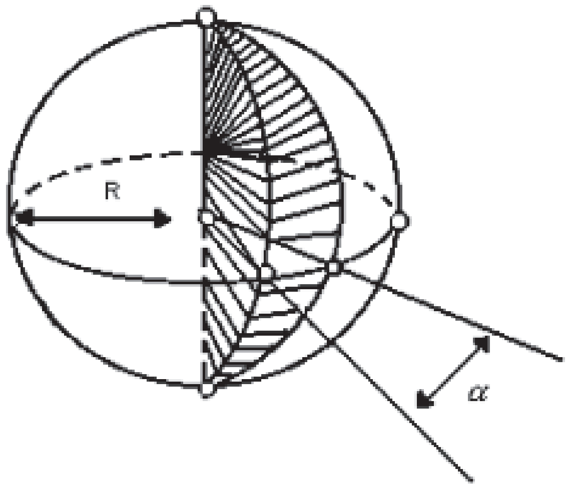


Figura 20: Esfera com cunha esférica destacada

Para calcularmos o volume da cunha esférica devemos fazer uma regra de três que relaciona o volume da esfera com o ângulo da cunha, ou seja, quando temos uma esfera completa seu volume é de $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da esfera então teremos um certo ângulo α e portanto um volume V:

Volume		Ângulo (em graus)	Volume		Ângulo (em radianos)
$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$	--------------	360°	$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$	--------------	2π rad
V	--------------	α	V	--------------	α rad

No exemplo do feirante, a cunha era justamente a fatia de melancia inteira e seu o volume era, portanto, o volume da fatia. Conseguiram ver? Muito bem!

No caso da cunha esférica podemos também calcular sua área total. Para isto, primeiramente, devemos notar que uma cunha esférica é composta da união de um fuso esférico com dois semicírculos de raios igual ao raio da esfera. Portanto, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo: Área(cunha) = Área(fuso) + Área(círculo).

E foi justamente essa área – a área da fatia de melancia (ou, mais formalmente, a da cunha esférica) – que calculamos na segunda parte do exemplo do feirante. Viram lá?

Muito bem! E, para finalizar a aula, deixamos vocês com a Atividade 5. Um abraço e até a próxima!

Atividade 2

Uma fruta de formato esférico foi cortada em partes iguais. Tomando uma parte, determine o ângulo da casca desta parte da fruta (fuso), sabendo que a área da superfície desta fruta é de 324π cm^2 e que a área da casca de uma das partes (fuso) é igual a 54π cm^2

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Esfera é o conjunto de pontos que estão a uma distância menor ou igual a uma distância r de um determinado ponto O.
- Superfície esférica é o conjunto de pontos que estão a uma distância igual a uma distância r de um determinado ponto O.
- O volume de uma esfera é dado pela fórmula $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
- A área da superfície esférica é igual a $A = 4p \, . \, r^2$
- Fuso esférico é a superfície obtida pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro
- Para calcular a área A do fuso de ângulo α, fazemos uma regra de três com a superfície total da esfera:

  Ângulo (em graus) -------------- Área

  360° --------------- $4\pi R^2$

  α --------------- A

- Cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.
- Para calcular o volume V da cunha esférica de ângulo α , fazemos uma regra de três com o volume total da esfera

  Ângulo (em graus) ---------- Volume

  360° --------------- $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

  α --------------- V

- A área total da cunha esférica é igual à soma da área da fuso com a área de dois semicírculos de raios iguais ao raio da esfera.

Veja ainda

Um dos primeiros matemáticos a se interessarem pelo cálculo dos volumes e áreas de sólidos foi ninguém menos que o grande Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C). No link a seguir, você encontra um interessante artigo sobre a forma como ele encontrou a relação entre as áreas e os volumes do cilindro e da esfera. O resultado foi importante a ponto de o próprio Arquimedes pedir para que sua família e amigos o gravassem no seu túmulo, como epitáfio. http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf

Os conteúdos de geometria espacial, por tratarem de objetos tridimensionais, terminam ficando um pouco mais difíceis de enxergar no papel, que é bidimensional. Nessa hora, vídeos e animações podem nos ajudar bastante. O endereço abaixo traz um interessante vídeo sobre o princípio de Cavalieri. http://www.youtube.com/watch?v=mxpwmQaCu7A

Referências

Livros

- Dante, L.R., Matemática, volume único. São Paulo: Ática, 2008.
- Dolce, O. Pompeo, J.N. Fundamentos da Matemática elementar, Volume 10. 6ª edição. São Paulo: Atual, 1993.
- Eves H. Introdução à história da matemática. Campinas: Unicamp, 1995.
- Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R., de Almeida, N. Matemática ciência e aplicações, vol.2. São Paulo: Atual, 2005.

Imagens


- Limão, lima e laranja – http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097243


- Bola de futebol http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1274886


- Bola de natal, http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=299082


- Bola de boliche, http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=304914.


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097244


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1022180


- http://www.t7.com.br/uploads/fotos_produtos/fotos/bola-de-futebol-_4025.jpg


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1212573


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=140277


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=231399

Respostas das Atividades

Atividades 1

Bom, gente, aqui as respostas são muitas! O importante é que superfície esférica é apenas a “casca”, enquanto a esfera consiste no conjunto “casca e interior”. Assim, seriam exemplos de superfície esférica a bolha de sabão e a bola de frescobol, ambos vazios por dentro. As bolas de futebol e de basquete (se considerarmos que, no limite, a câmara de ar e a parte de couro praticamente coincidem) além daquelas bolas de natal que são ocas (porque há umas que são inteiriças) também seriam exemplo de superfície esférica. Seriam exemplos de esfera a bolinha de gude e a bola de sinuca, justamente pelo fato de ambas serem completamente sólidas. As bolas de natal inteiriças e as bolas de boliche também seriam exemplos de esferas pelo mesmíssimo motivo. Frutas que não sejam ocas – vocês lembram de alguma outra fruta oca que não seja o coco? – laranja, limão, etc. também são bons exemplos de esferas.

Respostas das Atividades

Atividade 2

Bom, começamos a resolução aplicando um teorema de Pitágoras ao triângulo OBC – conseguem vê-lo na figura? Um dos catetos é o raio da esfera pequena, que mede 6cm. Já o outro cateto é o raio do círculo, marcado em cinza na figura, que se forma com o corte da "tampa" do coco. Esse raio chamaremos de R. A hipotenusa é o raio r da esfera maior, que queremos descobrir.

O teorema de Pitágoras fica então $6^2 + R^2 = r^2$. Como temos uma equação e duas incógnitas, precisaríamos do valor de uma para encontrar o valor de outra. Como queremos encontrar o valor de r, precisaremos encontrar o valor de R. Do enunciado, vemos que a área do círculo formado – marcado em cinza na figura – é de 64π cm^2 . Como sabemos que a área do círculo é πR^2, igualamos: $64\pi = \pi R^2$. Segue que $R^2 = 64$ e $R = 8$.

Aí, voltamos ao teorema de Pitágoras com o valor de R: $6^2 + R^2 = r^2$; $36 + 64 = r^2$; $100 = r^2$; $r = 10$. Assim, o raio r da esfera maior é de 10 cm.

Atividade 3

Aqui fazemos assim: o volume da água que "subiu" no recipiente é justamente igual ao volume inserido – ou seja, o volume da esfera. Noutras palavras, $V_{subiu}=V_{esfera.}$ Agora, o volume que do líquido que subiu é justamente o volume de cilindro de raio de base igual a 4 cm e de altura igual a 4 cm. E assim, temos $\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$. Note aqui que o raio r do cilindro é diferente do raio R da esfera. Seguimos com $\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$; $\pi 4^2 . 4 = \frac{4}{3} \pi R^3$. Dividindo por $4.\pi$ dos dois lados, teremos $4^2 = \frac{1}{3} R^3;\ 16.3 = R^3;\ R^3 = 48;\ R\sqrt[s]{48};\ R = \sqrt[s]{2^3.6};\ R = 2\sqrt[s]{6}$.
Assim, o raio tem medida igual a $2\sqrt[3]{6} \cong 10,9\ cm$

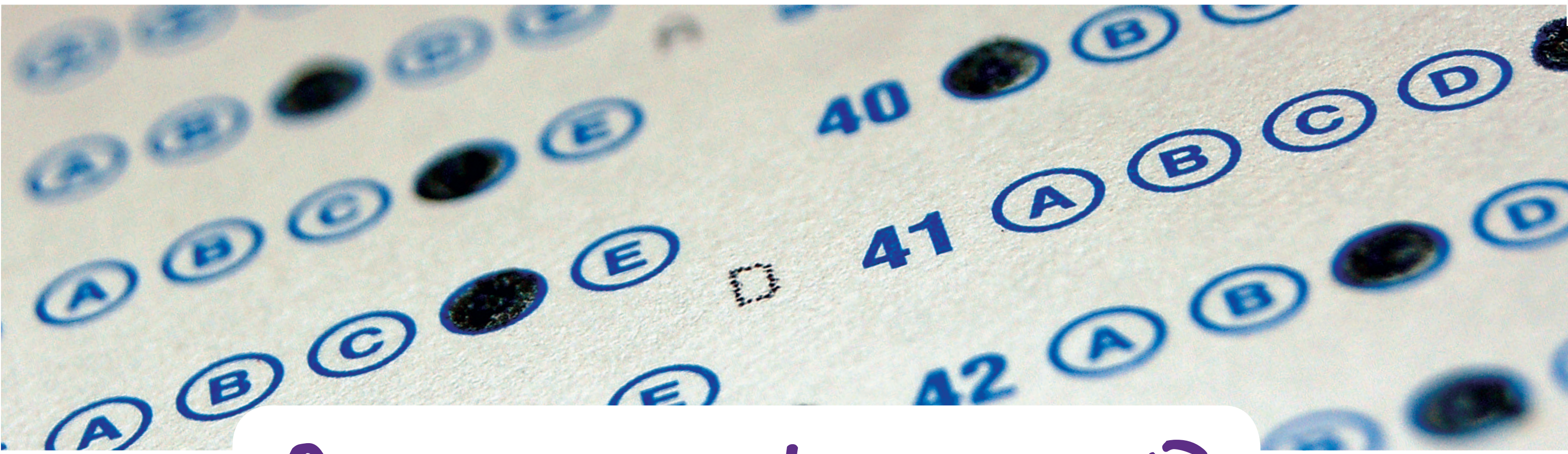
Atividade 4

Como o diâmetro é de 20 cm, então o raio mede 10 cm. Usando a fórmula de área de superfície esférica, temos que $S = 4{\cdot}\pi{\cdot}10^2$, ou seja, a área da superfície é de 400π cm^2, ou aproximadamente 1256 cm^2.

Respostas das Atividades

Atividade 5

Aqui, resolvemos com a regra de três! Se 324π cm^2 correspondem a 360°, 54π cm^2 corresponderão a x. Então, $x = \dfrac{360\ .\ 54\pi}{324\pi} = 60$. O ângulo então é de 60°.



O que perguntam por aí?

1. (UFRRJ) Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5 m, em homenagem ao anti-herói "Zeca Diabo".

   O cidadão "Nezinho do Jegue" foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento:

   a. menor que 50 mil reais e) entre 50 e 200 mil reais

   b. entre 50 e 200 mil reais

   c. entre 200 e 300 mil reais

   d. entre 300 e 400 mil reais

   e. acima de 400 mil reais

   Observação: Considere $\pi = 3{,}14$.

   Solução:

   O volume do pedestal é $V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 125$, ou seja, $v = 523{,}3$ m^3. Como o m^3 custa 260 reais então 523,3 m^3 custa R$ 136058,00. Tendo assim um superfaturamento de 500000 – 136058, ou seja, entre 330 e 400 mil reais.

2. Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. O recipiente v1 é um cone, a parte inferior do recipiente v2 é uma semi esfera e a parte superior cilíndrica, e o recipiente v3 é (uma clepsidra?). Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:

V_1 V_2 V_3

a. $V_1 = V_2 = V_3$

b. $V_1 < V_3 < V_2$

c. $V_1 = V_3 < V_2$

d. $V_3 < V_1 < V_2$

e. $V_1 < V_2 = V_3$

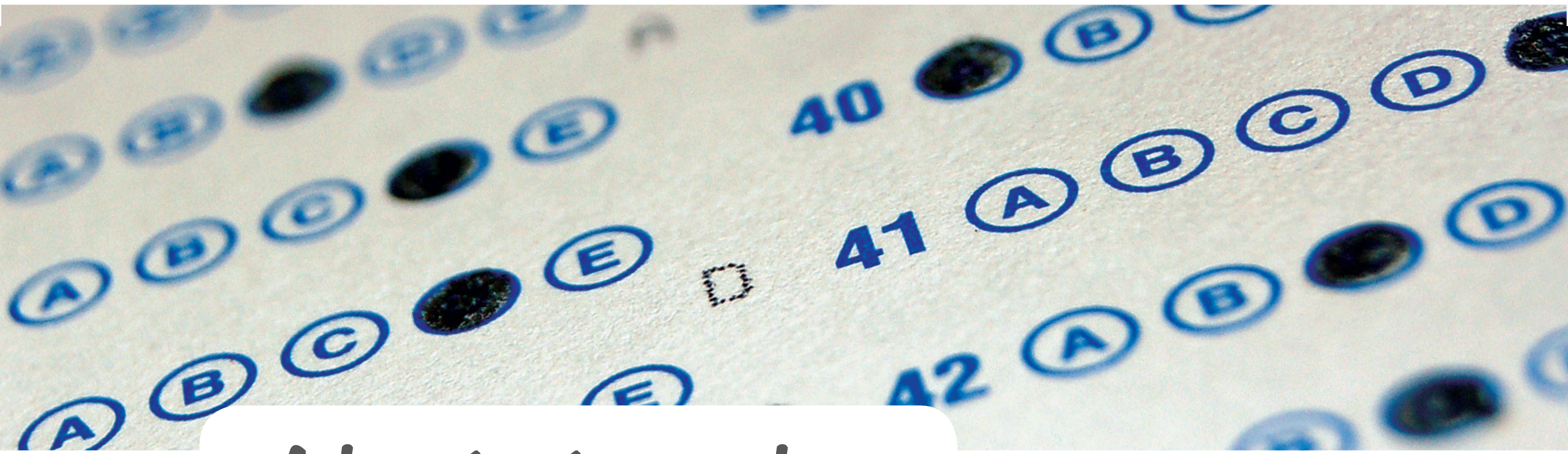
Solução:

A Letra correta é a B, pois nos três recipientes, a altura é a mesma, mas em V_1, a base é menor do que em V_2 e em V_3. Já comparando V_2 e em V_3, temos que a altura do cone é igual ao raio da semiesfera, as bases são iguais, mas a área de V_2 é calculada por $\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} \cong \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot R^3}{3} \cong 2{,}09 \cdot R^3$.

Já o volume de V_3 é calculado por $\dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \cong \dfrac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot R^3 \cong 1{,}05 \cdot R^3$.

(altura é igual a R).

Portanto, $V_1 < V_3 < V_{2.}$



Atividade extra

Módulo 3 • Matemática • Unidade 25

Esfera

Exercício 25.1 Duas esferas de raios distintos se interseptam formando um conjunto com mais de um ponto na interseção.

Qual a figura geométrica formada por esse conjunto de pontos?

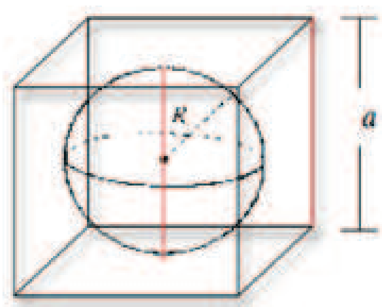
(a) Esfera

(b) Circunferência

(c) Reta

(d) Ponto

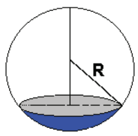
Exercício 25.2 Uma esfera de raio R está inscrita em um cubo de aresta a como ilustra a figura.



Qual a razão entre o volume da esfera e o volume do cubo?

(a) $\frac{\pi}{24}$ **(b)** $\frac{\pi}{8r}$ **(c)** $\frac{24}{\pi}$ **(d)** $\frac{\pi}{6}$

Exercício 25.3 Uma secção feita numa esfera por um plano alfa é um círculo de perímetro 2π cm. A distância do centro da esfera ao plano alfa é $2\sqrt{2}$ cm.



Qual é a medida r do raio da esfera?

(a) 1 **(b)** $\sqrt{2}$ **(c)** 2 **(d)** 3

Exercício 25.4 No mapa-*múndi* o Brasil possui aproximadamente a largura de três fusos esféricos, cada um com 15°. Considere que a superfície do planeta Terra seja perfeitamente esférica, e que o seu raio mede, aproximadamente, 6.400 km.

Qual é o volume aproximado, em km^3, da cunha esférica onde está localizado o Brasil?

(a) $8,32 \times 10^{11}$

(b) $3,73 \times 10^{11}$

(c) $1,37 \times 10^{11}$

(d) $1,07 \times 10^{11}$

Exercício 25.5 O volume V de uma bola de raio r é dado pela fórmula $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Calcule o volume de uma bola de raio $r = 3/4$ cm. Para facilitar os cálculos use $\pi = 22/7$.

(a) $1,87\,\text{cm}^3$ **(b)** $1,77\,\text{cm}^3$ **(c)** $1,67\,\text{cm}^3$ **(d)** $1,57\,\text{cm}^3$

Exercício 25.6 A Terra é um planeta que cuja superfície é coberta em 75% por oceanos, e o restante pelos continentes. Considere o planeta perfeitamente esférico, cujo raio mede aproximadamente 6.400 km.

Qual a área do planeta, em km^2, ocupada pelos continentes?

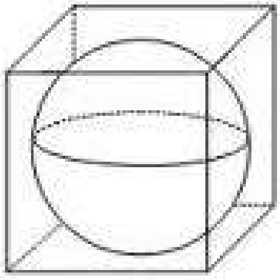
(a) 32153600

(b) 96460800

(c) 128614400

(d) 307200000

Exercício 25.7 Um lustre de vidro em formato esférico está acondicionado de maneira que sua superfície toque as seis faces de uma caixa em formato de cubo, cuja aresta mede 20 cm, tal como ilustra a figura.



Qual a área da superfície desse lustre, em cm^2?

(a) 314 **(b)** 628 **(c)** 952 **(d)** 1256

Exercício 25.8 Uma cunha esférica com ângulo de 10° tem volume igual a 1.078 m^3. Use $\pi = 22/7$.

Qual é a área total dessa cunha esférica, em m^2?

(a) 1.540 **(b)** 1.600 **(c)** 1.640 **(d)** 1.700

Exercício 25.9 Considere uma laranja como uma esfera composta de 12 gomos exatamente iguais, com 6 cm de diâmetro aproximadamente.

Qual é o volume de cada gomo em cm^3?

(a) $9,84$ **(b)** $9,42$ **(c)** $8,93$ **(d)** $8,34$

Exercício 25.10 Duas esferas de chumbo, com 3 cm e 6 cm de raio respectivamente, são fundidas e moldadas no formato de outra esfera.

Qual a área da nova esfera, em cm^2?

(a) $135,73\,\pi$ **(b)** $145,74\,\pi$ **(c)** $155,75\,\pi$ **(d)** $165,76\,\pi$

Exercício 25.11 Duas esferas de rios 2 cm e 3 cm foram postas dentro de um cilindro reto cuja base tem diâmetro 9 cm.

Qual volume de água deve ser adicionado ao cilindro para cobrir as duas esferas.

Exercício 25.12 Qual deve ser o raio de uma esfera para que a medida de sua área seja igual a medida de seu volume.

Exercício 25.13 Desejo embrulhar uma bola de futebol de raio 11 cm com apenas uma folha de papel de presente.

Qual deve ser a área mínima da folha de papel?

Exercício 25.14 A América é o segundo maior continente do mundo, constituído de 35 países independentes, e 11 fusos horários diferentes, correspondentes aos fusos esféricos que ocupam. Considere a Terra com um raio de aproximadamente 6400 km e 24 fusos esféricos.

Qual é a área aproximada em km^2 dos fusos esféricos relativos ao continente Americano?

Exercício 25.15 - Uma esfera tem seu volume três vezes maior que o valor da sua área.

Qual o valor do raio em cm dessa esfera?

Gabarito

Exercício 25.1 a

Exercício 25.2 d

Exercício 25.3 d

Exercício 25.4 c

Exercício 25.5 b

Exercício 25.6 c

Exercício 25.7 d

Exercício 25.8 a

Exercício 25.9 b

Exercício 25.10 c

Exercício 25.11 A questão é descobrir a altura do cilindro, fica aqui a informação, a altura é 8 cm calcule-a. De posse dessa altura a solução é volume do cilindro menos a soma dos volumes das esferas. Então,

$$\begin{aligned}
V_C &= \pi \cdot (4,5)^2 \cdot 8 = 162\pi \\
V_{E3} &= \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 36\pi \\
V_{E2} &= \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = 10,67\pi \\
V &= 162\pi - 36\pi - 10,67\pi
\end{aligned}$$

Portanto, $V = 115,33\pi$ cm^3.

Exercício 25.12 Basta igualar o volume à área, tem-se

$$V_E = A_E \Longrightarrow \frac{4\pi \cdot r^3}{3} = 4\pi \cdot r^2$$

Simplificando vem

$$\frac{r}{3} = 1 \Longrightarrow r = 3$$

Portanto, $r = 3$.

Exercício 25.13 Como a bola tem 11 cm de raio, sua área é $4\pi \cdot 11^1 = 1519,76$. Portanto a folha deve ter no mínimo $1519,76$ cm^2 de área.

Exercício 25.14 Um fuso corresponde a $1/24$ da superfície terrestre que mede $4\pi(6400)^2$. Como queremos descobrir a área relativa a 11 fusos esféricos faremos:

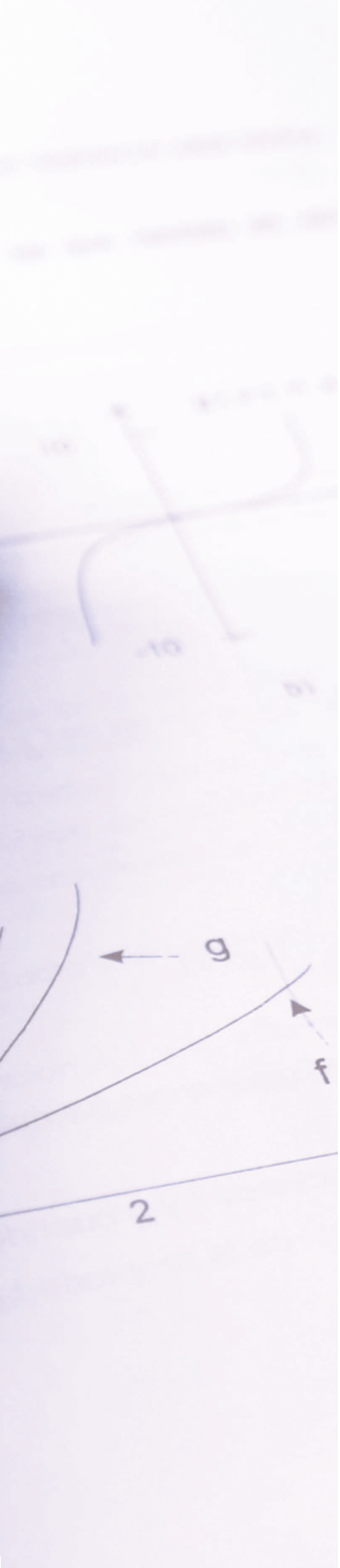
$$\frac{4\pi(6400)^2 \cdot 11}{24} = \frac{11\pi \cdot 40960000}{6}$$

Portanto 235793067 km^2.

Exercício 25.15 Volume da esfera $=3\times$ área da esfera. Então

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Simplificando a equação encontramos $r = 9$ cm.



Sequências

Para início de conversa...

Você já assistiu o filme O Código da Vinci (The Da Vinci Code) de 2006? Ou mesmo já leu o livro de mesmo nome? Pois esta interessante história mostra um simbologista de Harvard, Robert Langdon, tentando desvendar o mistério da morte do curador do museu do Louvre. Ao lado do corpo da vítima, havia uma mensagem cifrada:

13 – 3 – 2 – 21 – 1 – 1 – 8 – 5

Sophie Neveu, especialista em criptografia, verificou que se tratava de uma sucessão numérica muito famosa, porém fora de ordem: a Sequência de Fibonacci.

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21

Vocês já ouviram falar desta sequência? O que será que ela tem de interessante para ser tão famosa? Essas e outras informações a respeito das sequências serão discutidas por nós nesta unidade. Veremos como as sequências numéricas fazem parte do nosso dia-a-dia e aprenderemos a perceber algumas regularidades para tentarmos buscar algumas generalizações.

> Assista a cenas de O Código Da Vinci acessando o site oficial do filme, disponível em http://www.sonypictures.com/homevideo/thedavincicode/index.html
>
> Multimídia

E aí, estão preparados?

Então, vamos dar *sequência* a esta unidade mostrando seus objetivos.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar sequências numéricas e obter, quando existir, a expressão algébrica do seu termo geral;
- Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas;
- Diferenciar Progressão Aritmética (P.A.) de Progressão Geométrica(P.G.);
- Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas.

Seção 1

As sequências, regularidades e generalizações

Quando falamos de sequências, nem sempre estamos nos referindo às sequências numéricas. Uma sequência é uma lista ordenada de objetos, números ou elementos. Um exemplo muito simples é a lista de sucessão de todos os Presidentes do Brasil.

Tabela 1 – Lista com todos os presidentes do Brasil desde 1889.

1889 - 1891	Marechal deodoro da Fonseca
1891 - 1894	Marechal Floriano Peixoto
1894 - 1898	Prudente de Morais
1898 - 1902	Campos Sales
1902 - 1906	Rodrigues Alves
1906 - 1909	Afonso Penna
1909 - 1910	Nilo Peçanha
1910 - 1914	Marechal Hermes da Fonseca
1914 - 1918	Wenceslau Brás
1918 - 1919	Delfim Moreira
1919 - 1922	Epitácio Pessoa
1922 - 1926	Arthur Bernardes
1926 - 1930	Washington Luís
1930	Junta governativa: Gen. Tasso Fragoso, Gen. João de Deus Mena Barreto e Almirante Isaías de Noronha
1930 - 1945	Getúlio Vargas
1946 - 1951	General Eurico Dutra
1951 - 1954	Getúlio Vargas
1954 - 1955	Café Filho
1956 - 1961	Juscelino Kubitschek
1961 - 1961	Jânio Quadros
1961 - 1964	João Goulart - Jango
1964 - 1967	Marechal Castello Branco
1967 - 1969	Costa e Silva
1969 - 1974	General Medici
1974 - 1979	Ernesto Geisel
1979 - 1985	General João Figueiredo
1985 - 1990	José Sarney
1990 - 1992	Fernando Collor
1992 - 1995	Itamar Franco
1995 - 2002	Fernando Henrique Cardoso
2003 - 2010	Luiz Inácio Lula da Silva
2011	Dilma Rousseff

Ou, ainda, uma sucessão de figuras geométricas:

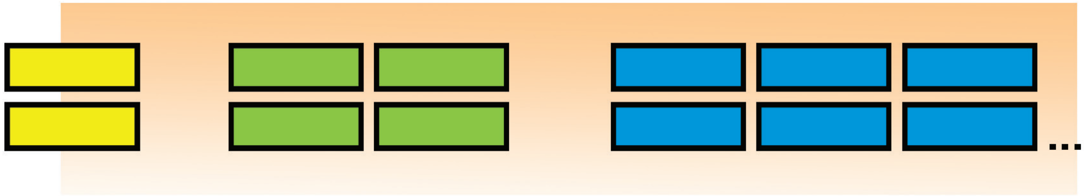


Figura 1 – Sucessão de retângulos

Em algumas sequências, podemos notar certo padrão, isto é, alguma informação ou característica que nos leve a entender como esta sucessão é construída e, sobretudo, nos permita determinar os elementos seguintes. Vejamos isso através dos exemplos dados.

Na sucessão de Presidentes do Brasil, é possível verificarmos alguma regularidade de elementos? Ou, ainda, é possível determinarmos quem será o próximo Presidente do nosso país? Bom, se fosse possível, não seriam necessários tantos investimentos em campanhas, não é mesmo?

Contudo, na sequência de retângulos que acabamos de mostrar, podemos perceber certa caraterística. Será que você consegue identificá-la? Para visualizarmos melhor essa sucessão, vamos fazer a primeira atividade?

Atividade 1

Veja a tabela a seguir, criada com base na sucessão de retângulos apresentada na figura anterior:

Posição do elemento na sequência	Número de retângulos
1	2
2	4
3	6
4	...
5	...
10	...
28	...
...	100

Anote esta tabela no seu caderno e termine de preenchê-la. Conseguiu estabelecer a relação entre o número de retângulos e a sua posição na sequência? Ótimo! Dê um pulo na seção de respostas e verifique se acertou.

Anote suas respostas em seu caderno

Pudemos notar nesta sequência que há uma sucessão numérica que respeita uma regra, que podemos chamar de "lei de formação". Conhecendo esta regra, somos capazes de escrever todos os elementos desta sequência. Certamente, vocês devem estar se perguntando: "Todos? E se a sequência for infinita? Como podemos escrever infinitos números? Não íamos terminar nunca!". Tenham calma! Tem um jeito! Vamos utilizar para isso uma ferramenta algébrica que conhecemos: as variáveis.

Figura 2 – Pirâmides de um painel na Secretaria de Relações Exteriores do Governo do México. Imagine conta-las uma a uma! As variáveis nos ajudam a lidar, dentre outras coisas, com quantidades muito grandes ou infinitas.

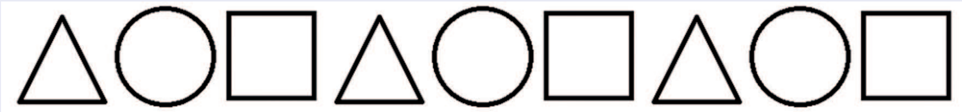
Mas o que são exatamente as variáveis? Bom, matematicamente falando, variável é uma representação, geralmente feita por letras – aquelas nossas conhecidas: x, y, z, a, b, etc - de diferentes valores ou quantidades em uma expressão algébrica ou em uma fórmula.

Como havíamos discutido na Atividade 1, o número de retângulos é sempre o dobro do número referente à posição do elemento na sequência. Isto é, o segundo elemento da sequência possui quatro retângulos, o terceiro possui seis retângulos. Então, o quarto terá oito, e assim por diante... Dessa forma, o número de retângulos presentes na posição n da sequência será o dobro desse número, ou seja, 2n.

Portanto, através da utilização de variáveis, conseguimos escrever todos os elementos da sequência, mesmo que seja infinita. Vejamos agora outro tipo de regularidade.

Atividade 2

Observe a sequência de figuras abaixo e responda:



a. Qual o próximo elemento da sequência?

b. Qual o 12º elemento da sequência?

c. Qual o 15º elemento da sequência?

d. Qual o 18º elemento da sequência?

e. Qual o 21º elemento da sequência?

f. Qual o 232º elemento da sequência? Anote em seu caderno o raciocínio que você utilizou para encontrar o resultado.

Anote suas respostas em seu caderno

Nesta sequência, podemos perceber uma regularidade na disposição das figuras geométricas. Esta regularidade nos auxilia a responder às perguntas da atividade sem que haja a necessidade de desenharmos todos os elementos dela. Imaginem só ter que desenhar 232 elementos para apenas responder à questão (f)! Isto seria loucura!

As duas atividades anteriores mostram alguns exemplos de sucessões ora numéricas, ora não. Nesta unidade, vamos nos concentrar mais sobre as sucessões numéricas, como a **sequência de Fibonacci**.

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci foi criada no século XIII pelo matemático Leonardo de Pisa, cujo apelido era Fibonacci. Ele criou a sequência para resolver um problema de crescimento populacional, que propôs em seu livro Liber Abaci, publicado pela primeira vez em 1202. O surpreendente é que a sequência de Fibonacci pode ser encontrada em muitas outras situações e padrões naturais, a princípio bastante distintos do crescimento de populações, como proporções do corpo humano, conchas do mar e nas sementes de girassol.

Conforme vimos na introdução, a sequência de Fibonacci é 1-1-2-3-5-8-13-21-... Vamos entender como a sequência é definida? Muito bem, ela se inicia por dois números 1. O que acontece se somarmos esses elementos? O resultado é 2, o terceiro elemento da sequência. Agora, o que acontece se somarmos o segundo e o terceiro elementos?

Ora, 1 + 2 = 3 é o quarto elemento da sequência. Somaremos agora o terceiro termo com o quarto: 2 + 3. Isso dá 5, que é o quinto elemento. Portanto, esta sequência é construída somando-se dois termos consecutivos da sequência e obtém-se o termo seguinte.

Isto é:

1+1=2

1+2=3

2+3=5

3+5=8

5+8=13

8+13=21

13+21=...

E assim, teremos a tão famosa sequência 1-1-2-3-5-8-13-21-...

Figura 3 – A distribuição das sementes de girassol e das pequenas pétalas que estão em primeiro plano na imagem também obedecem à sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci é mesmo fantástica! Mas existem outras sequências menos famosas que podem também fazer parte do nosso estudo. O nosso trabalho agora é tentar escrever expressões algébricas que representem determinadas situações. Vamos dar uma olhada nisso?

Quando falamos em expressões algébricas, estamos nos referindo ao uso de variáveis na escrita matemática. O uso dessa ferramenta nos permite generalizar as relações numéricas, isto é, nos ajuda a escrever fórmulas, o que, na matemática chamamos de **modelagem ou Modelo Matemático**.

Modelagem ou Modelo Matemático

Modelo matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão. (SWETZ, 1992, p. 65, GERTNER).

Vejamos agora um exemplo de modelagem matemática. Neste caso, vamos analisar a relação existente entre as idades de dois irmãos: Pedro e Paulo. Quando Pedro tinha 4 anos, Paulo tinha 1 ano. Já quando Pedro tinha 8 anos, Paulo tinha 5. Quando Pedro tinha 12 anos, Paulo tinha 9. A pergunta é: quantos anos Paulo terá quando Pedro tiver 25?

Podemos perceber que Pedro é mais velho que Paulo. Além disso, é mais velho 3 anos. Com isso, podemos garantir que quando Pedro tiver 25 anos, Paulo terá 3 anos a menos, ou seja, 22 anos.

Mas, se Pedro tem x anos, quantos anos Paulo tem?

Reparem que, neste caso, a idade não está definida como um número e sim como uma variável (x). Isto significa que a idade de Pedro é representada por um número natural qualquer. Para descobrirmos a idade de Paulo, é necessário que levemos em consideração a idade de Pedro. Ou seja, é importante utilizarmos a informação de que Pedro tem 3 anos a mais, ou então, que Paulo tem 3 anos a menos.

Dessa forma, como Pedro possui x anos e Paulo 3 anos a menos, Paulo possui, $x - 3$ anos.

Note que como não sabemos quantos anos Pedro tem, pois sua idade está representada por uma variável, fica impossível sabermos a idade exata de Paulo. Apenas somos capazes de gerarmos uma expressão, no caso $x - 3$, capaz de relacionar as idades dos irmãos. Quando quisermos escolher um valor para x, encontraremos as idades deles sem a menor dificuldade. Querem ver?

Se escolhermos, por exemplo, o valor 30 para x, temos que:

Pedro: x anos = 30 anos

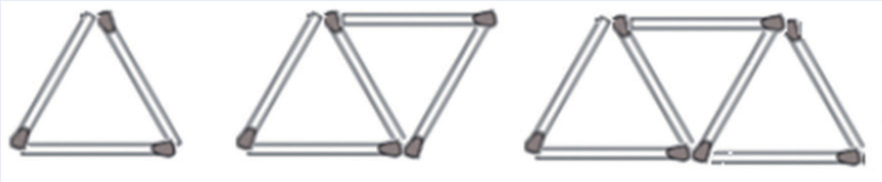
Paulo: $x - 3$ anos = $30 - 3$ anos = 27 anos.

Viram como é simples e prático?

Muito bem! Que tal praticar o que você já aprendeu na

Atividade 3

Observe a sequência de palitos



a. Pegue uma folha de seu caderno e desenhe como seria a próxima figura da sequência de triângulos com palitos.

b. Quantos palitos serão usados para fazer 5 triângulos?

c. Quantos palitos serão usados para fazer 6 triângulos?

d. Quantos palitos serão usados para fazer 10 triângulos?

e. Quantos palitos serão usados para fazer 36 triângulos?

f. Copie para o seu caderno a tabela seguinte e procure completa-la com os dados obtidos anteriormente:

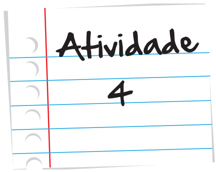
Nº de triângulos	Nº de palitos
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	
10	
36	

g. Você descobriu qual a regra matemática que relaciona o número de triângulos com o número de palitos? Caso já tenha encontrado, escreva com suas palavras esta regra matemática.

h. Escreva, agora, a expressão algébrica descrita no item anterior. Isto é, escreva a quantidade P de palitos necessária para fazer N triângulos.

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal! Essa atividade foi desafiadora, não é mesmo?! Em geral, escrever uma expressão algébrica que descreva alguma situação não é uma tarefa muito simples. Apesar disso, é muito importante enfrentarmos essas dificuldades. Então, que tal se déssemos uma olhada na próxima atividade?



Dona Maria lavou as camisas do time de futebol de seu neto Lulu e vai colocá-las para secar da seguinte maneira:

- cada camisa é presa por 2 pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

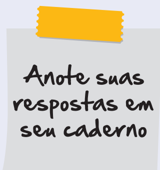
a. Quantos pregadores D. Maria usará para pendurar 3 camisas? E 4 camisas? E 8 camisas?

b. E 10 camisas? E 11 camisas?

c. D. Maria comprou duas cartelas de 12 pregadores cada. Esse número de pregadores será suficiente para prender as camisas de 22 jogadores? Justifique sua resposta.

d. Com base nos resultados acima, construa uma tabela colocando na primeira coluna o número de camisas (C) e na segunda, o número de pregadores utilizados (P).

e. Escreva uma expressão algébrica que represente o número P de pregadores necessário para pendurar um número C qualquer de camisas.



Nada mal, pessoal! Como poderíamos imaginar que até estender roupas no varal pudesse ter matemática no meio?! E tem! Assim como diversas outras situações do nosso cotidiano. Neste momento, vamos dar novamente uma olhadinha na sequência gerada pelo número de pregadores da atividade anterior:

Tabela 2 – Quantidade de camisas a serem penduradas e quantidade de pregadores necessários para prendê-las.

Nº de Camisas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº de Pregadores	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – ...Esta sequência possui algumas características que podemos explorar. Por exemplo, qual será o próximo elemento desta sequência? Certamente não houve dificuldades em descobrir que é o 11. Mas, vamos analisar o motivo que nos levou a definir que o próximo elemento era de fato o 11. Reparem que, nesta sucessão, para chegarmos ao termo seguinte, estamos sempre somando uma unidade ao termo anterior, não é mesmo?

2+1=3

31+2=4

4+1=5

E assim por diante.

Essas sucessões em que obtemos o elemento seguinte somando uma quantidade fixa – que, no caso do exemplo, foi o número 1 – ao elemento anterior são chamadas de progressão aritmética.

Vamos à próxima seção desta unidade para conhecermos melhor esta progressão.

Seção 2
As Progressões Aritméticas

Como havíamos dito anteriormente, as progressões aritméticas possuem a característica de que para "saltarmos" de um termo para o seguinte precisamos adicionar a ele sempre o mesmo valor numérico (no nosso exemplo, esse valor é 1).

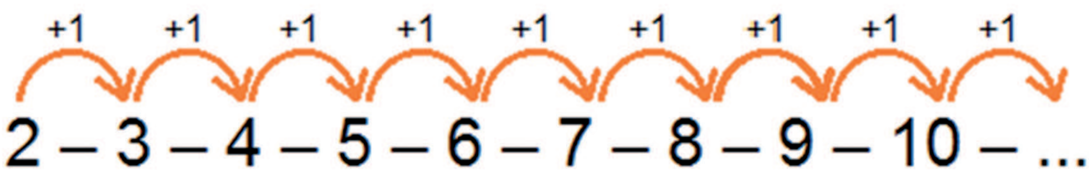


Figura 4 – Progressão aritmética.

Importante

Lembre-se de que adicionar um número não significa apenas aumentar as quantidades. Podemos adicionar um número negativo, o que faz os números seguintes diminuírem. Por exemplo, um termo da sequência (12, 10, 8, ...) é obtido somando-se (-2) ao termo anterior.

Observe esse outro exemplo. Na sequencia (3, 7, 11, 15, ...), o valor que está sendo somado é o 4. A este número que sempre é adicionado daremos o nome de razão. Agora, observem a sequência dos números ímpares: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – .... Nesta sequência, podemos identificar sua razão?

É claro que sim! Pois, sempre que quisermos escrever o termo seguinte desta sucessão, devemos somar o número 2. Dessa forma, a razão é 2 e ainda podemos dizer que estamos lidando com uma progressão aritmética. Se você teve alguma dificuldade de descobrir o valor da razão, aí vai uma dica muito boa: podemos calcular a razão, r , subtraindo um termo pelo seu anterior. Ou seja, r = 3 – 1 = 2, ou ainda, r = 9 – 7 = 2, ou então r = 11 – 9 = 2. Outra dica importantíssima: a progressão aritmética é carinhosamente chamada pelos matemáticos de P.A.

Atividade 5

Observe a sequência abaixo, verifique se é uma progressão aritmética e calcule o valor da razão.

30 – 26 – 22 – 18 – 14 – ...

Anote suas respostas em seu caderno

Suponham agora que quiséssemos descobrir o 10º termo da P.A. exibida na atividade anterior. Como faríamos? Bom, temos duas opções para solucionarmos esse problema:

1ª opção: Continuamos a escrever os números desta sucessão até chegarmos no décimo termo.

Assim: 30; 26; 22; 18; 14; (e entram os termos novos) **10; 6; 2; –2; –6**

Sendo assim, o décimo termo é – 6.

2ª opção: Podemos analisar de forma mais aprofundada o comportamento da P.A. Observem:

Vamos chamar cada termo desta sequência pela letra a . Com isso, o termo a_1 representará o primeiro elemento da P.A., o a_2 será o segundo e assim por diante. E a razão, vamos chamar de r. Então, podemos dizer que a P.A. se desenvolve da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&a_1\\
&a_2 = a_1 + 1.r\\
&a_3 = a_1 + 2.r\\
&a_4 = a_1 + 3.r\\
&a_5 = a_1 + 4.r\\
&a_6 = a_1 + 5.r\\
&a_7 = a_1 + 6.r
\end{aligned}
$$

Ou, como mostra a figura seguinte,

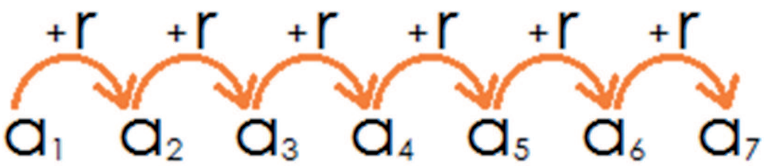


Figura 5 – Progressão aritmética com de termos a_n e razão r.

Observe que temos que somar a razão 6 vezes para sairmos do 1º termo e chegarmos ao 7º. E se quisermos chegar ao 20º termo, partindo do 1º? E ao 51º?

E aí? Perceberam alguma característica nesta sequência de termos? Qual seria, então, o termo a_n , mais conhecido como termo geral da P.A.?

E se partimos do 8º para chegar ao 13º? Quantas vezes a razão deverá ser adicionada? Reparem que a quantidade de razões somadas para cada elemento a partir do primeiro é uma unidade a menos do que o número n referente à posição do termo. Ou seja, para chegarmos ao quarto termo, somamos 3 razões ao primeiro termo. Para atingirmos o 7º termo, somaremos 6 razões ao primeiro termo. E assim, sucessivamente.

Portanto, para chegarmos ao termo n, deveremos somar n – 1 razões. E assim chegamos à importante fórmula do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Multimídia

Assista ao vídeo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1150. Esse vídeo é a respeito de um jovem atleta, que está preocupado com a distribuição de água ao logo da corrida. A questão enfrentada pelo atleta está diretamente relacionada aos conhecimentos que acabamos de adquirir sobre progressão aritmética.

Muito bem! Vamos a mais uma atividade?

Atividade 6

Observe esta sequência numérica e responda as perguntas:

2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 – ...

Responda:

a. Esta sequência é uma progressão aritmética? Justifique.

b. Qual será o 12º termo da sequência?

c. Qual será o 100º termo da sequência?

d. Qual o termo geral (a_n) da sucessão?

Anote suas respostas em seu caderno

Essas progressões são realmente interessantes, não é?! Podemos descobrir quaisquer termos delas sem muitos problemas.

Falando em problemas, uma história muito interessante é aquela de um menino que surpreendeu seu professor ao resolver em poucos minutos um problema apresentado envolvendo sequencias numéricas. Estamos falando do alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Vamos ver o que aconteceu?

Saiba Mais

Conheça um pouco mais a vida de Carl Friedrich Gauss, um importante personagem da história da matemática, acessando o endereço http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss.

O professor de Gauss havia ficado chateado com a turma e aplicou uma tarefa muito demorada como castigo: os alunos deveriam encontrar o valor da seguinte soma sob a pena de ficarem depois da hora em sala de aula. A soma era:

1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100.

O professor tinha a certeza de que os alunos demorariam longos minutos resolvendo a questão, garantindo assim a aplicação do castigo. Porém, acabou sendo surpreendido por Gauss que resolveu este problema em aproximadamente cinco minutos. Até mesmo para nós, que possuímos calculadoras eletrônicas, instrumento inexistente naquela época, resolver em cinco minutos seria espantoso. Então, vamos dar uma olhada no que ele fez?

Gauss percebeu que a sequência numérica 1, 2, 3 ... , 100 possuía uma característica interessante: a soma do primeiro termo com o último termo dava 101, assim como a soma do segundo termo e o penúltimo (2 + 99 = 101). E assim por diante. Dessa forma, ele teria 50 pares de números cuja soma é 101, e respondeu que a soma pedida era 50x101 = 5050.

Foi um sucesso! Não só porque ele soube responder rapidamente como, sem querer, descobriu uma maneira de somar os termos de uma progressão aritmética.

Notaram que esta progressão é uma P.A. de razão 1? Viram também que a soma dos termos desta P.A. foi obtida somando-se o primeiro termo com o último, em seguida multiplicando-se pela quantidade de termos desta sequência e, por fim, dividindo-se o resultado por 2? Muito bom! Então, vamos fazer uma generalização e propor a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A. Vejam só:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Em que S_n representa a soma dos n primeiros termos da sequência, a_1 é o primeiro termo, a_n o último considerado e n o número de termos da PA.

Vamos tentar fazer uma atividade para pôr este conhecimento em prática?

Atividade 7

Observe a sequência 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80. Determine o valor da soma dos termos desta sequência. Como este material será utilizado pelos colegas dos anos seguintes, peço que você não escreva nele! Copie o problema abaixo para o seu caderno e, aí sim, complete as lacunas e utilize a expressão que acabamos de estudar, OK?

$a_1 =$ ______________________________

$a_n =$ ______________________________

$n =$ ______________________________

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2} =$ ____________________

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

a. Em uma PA de razão 3, se o primeiro termo é 5, qual será o décimo termo?

b. O primeiro termo de uma PA é 5 e o quarto termo é -10. Qual é a razão?

c. São conhecidos o 5º e o 13º termos de uma PA. Se eles são, respectivamente, 2 e 10, qual será o primeiro termo dessa sequência?

Anote suas respostas em seu caderno

Estamos caminhando muito bem! Nossos conhecimentos estão cada vez mais apurados. Talvez possamos usá-los para dar uma passadinha no escritório do Osvaldo, pois está ocorrendo uma discussão séria a respeito de uma obra que sua empresa fará. Quem sabe, podemos ajudar! Vamos lá?!

Figura 6 – As passarelas são importantes recursos para a segurança e a circulação de pedestres tanto em ruas quanto em estradas.

Osvaldo, dono de uma empresa de engenharia está discutindo com seu engenheiro chefe, Ítalo, sobre a construção de uma rodovia de 300 quilômetros que liga as cidades de Miracema e Rio de Janeiro. Osvaldo comenta que é preciso colocar passarelas a partir do 3º quilômetro distantes entre si 0,6 km. Ítalo rebate a opinião argumentando que, mesmo iniciando as passarelas a partir do terceiro quilômetro, só há material disponível para a construção de 100 passarelas.

E agora, o que fazer? Como poderemos ajudar os dois cavalheiros, que se encontram em uma situação complicada?

Vamos analisar cada caso:

A proposta de Osvaldo é colocar uma passarela a cada 600 metros a partir do 3º quilômetro. Então, vejamos:

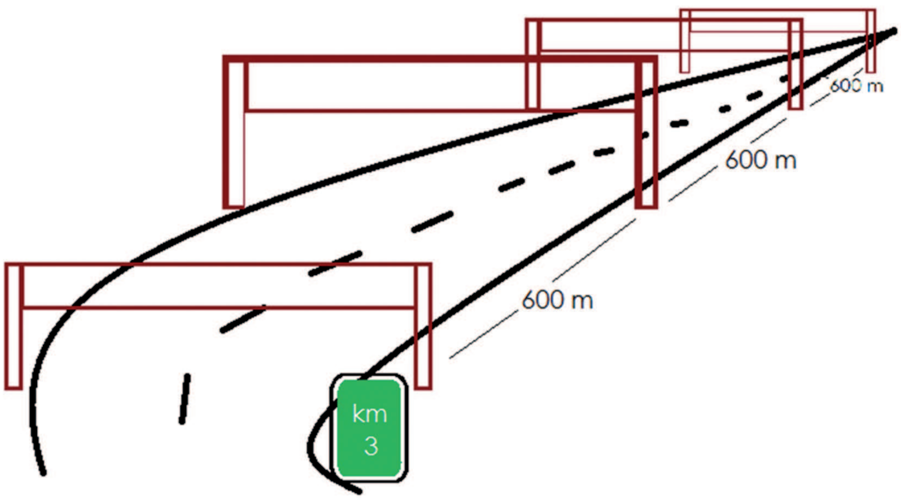


Figura 7 - Esboço da estrada com passarelas a cada 600m.

No quilômetro 3, teremos uma passarela. A seguinte será colocada a 3,6 km. Em seguida, a 4,2km. Depois, a 4,8km. Sendo assim, a sequência que conseguimos é:

3; 3,6 ; 4,2 ; 4,8 ; 5,4 ; 6 ; ... ; 300

Neste caso, podemos verificar que estamos diante de uma progressão aritmética, pois para conhecermos o termo seguinte, somamos sempre a mesma quantidade (0,6 quilômetros). Então, podemos esquematizar da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 3km \\
&a_n = 300km \\
&r = 0{,}6km \\
&n = ?
\end{aligned}
$$

Nesta situação, não sabemos quantas passarelas Osvaldo planeja construir. Mas, para descobrirmos, vamos utilizar a fórmula do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Substituindo os valores, temos:

$$
\begin{aligned}
&300 = 3 + 0{,}6n - 0{,}6 \\
&300 - 3 + 0{,}6 = 0{,}6n \\
&0{,}6n = 297{,}6km \\
&n = \frac{297{,}6}{0{,}6} = 496 \ passarelas
\end{aligned}
$$

A proposta de Ítalo ressalta que só há material para construírem 100 passarelas. Assim, teremos uma P.A. de 100 termos, onde $a_1 = 3$, $n = 100$ e $a_n = 300$. Só nos resta saber a razão desta progressão que representará a distância constante entre as passarelas. Dessa forma, as passarelas deverão ser construídas a que distâncias uma das outras?

(Dica: utilize a fórmula de termo geral para encontrar a razão)

Atividade 9

Anote suas respostas em seu caderno

Diante da solução dessas atividades e levando em consideração que se cada passarela tem um custo de 500 mil reais, talvez Ítalo tenha razão: Por um lado, temos passarelas demais e por outro temos passarelas distantes demais entre si. Fazer muitas passarelas sai caro demais, porém é necessário dar acesso e segurança às pessoas. E para vocês? O que é melhor? Pensem. Reflitam sobre o assunto e verão que ele dá uma boa discussão.

Atividade 10

Vejamos outras situações que envolvem progressões aritméticas:

a. Os anos bissextos possuem 366 dias e ocorrem a cada quatro anos. 2012 foi um ano bissexto; o próximo será 2016! Qual foi o primeiro ano bissexto do século 21? Qual será o vigésimo ano bissexto desse século?

b. Um medicamento deve ser tomado da seguinte forma: duas pílulas no 1º dia, quatro no 2º, seis no 3º, e assim por diante. Após quantos dias um paciente tomas as 72 pílulas contidas em um vidro desse medicamento?

Anote suas respostas em seu caderno

Agora, pessoal, vamos conhecer mais um tipo de progressão. Da mesma forma que as sequências numéricas que estamos estudando nesta unidade, este novo tipo de progressão possui uma característica peculiar. Vamos dar uma olhada?

Seção 3
Progressões Geométricas

Para entendermos melhor esta progressão, vamos acompanhar a seguinte situação:

Um programa de televisão de perguntas e respostas dá prêmios em dinheiro. Se o candidato acertar a primeira pergunta, recebe o prêmio de R$ 10,00. Se quiser continuar respondendo, a cada acerto o seu prêmio dobra. Isto é:

1ª pergunta: 10 reais

2ª pergunta: 20 reais

3ª pergunta: 40 reais

4ª pergunta: 80 reais

...

Esta sequência é uma progressão aritmética?

Reparem que não há um número constante, razão, que possa ser somada a cada elemento dessa sequência para se obter o seguinte. Todavia, a partir de cada termo desta sequência, há um número que pode ser multiplicado para se obter o seguinte. Neste caso, o número é o 2. Observem.

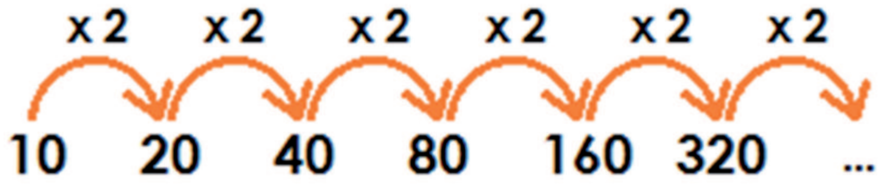
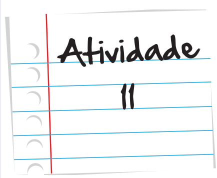


Figura 8 – Progressão geométrica.

Diferentemente de uma progressão aritmética, esta sequência é formada pela multiplicação de um mesmo número para se obter o seguinte. Este número também recebe o nome de razão e esta progressão é conhecida por progressão geométrica, ou simplesmente, P.G.

Vamos analisar melhor esta sequência.

Consideremos que um candidato, Joaquim, esteja participando deste programa de TV. Seu prêmio vai depender da quantidade de perguntas que acertar. Responda às perguntas a seguir, sempre atento ao comportamento desta P.G.



Joaquim está muito empolgado para começar o jogo. Estudou muito durante duas semanas, pois quer ganhar um prêmio bastante alto. De acordo com as regras do programa, acertando a primeira pergunta, receberá 10 reais de prêmio. Acertando as perguntas seguintes, seu prêmio irá dobrando. Diante disso, Joaquim precisa de algumas informações para ficar mais calmo e, assim, atingir seus objetivos.

a. A sequência formada pelos prêmios dados pelo programa é uma progressão geométrica. Qual a razão desta progressão?

b. Após ganhar 320 reais, qual o prêmio que Joaquim irá receber caso acerte a pergunta seguinte?

c. Quantas perguntas deverá acertar para ganhar 2.560 reais?

d. Como já disse anteriormente, este material será utilizado pelos colegas dos anos seguintes e, por isso, é importante que você não escreva nele! Por isso, peço que copie a tabela abaixo para o seu caderno e complete as lacunas:

Atividade 11

Questões respondidas corretamente	Cálculo do prêmio	Valor do prêmio
1	10	R$ 10,00
2	10×2^1	R$ 20,00
3	$10 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^2$	R$ 40,00
4	$10 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^3$	R$ 80,00
5	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^4$	R$ 160,00
6		R$...
10		R$...
n		

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bom ganhar prêmios, não é, pessoal? Ainda mais aprendendo. E nesta última atividade, aprendemos a expressão que gera todos os termos de uma P.G., ou seja, a expressão do termo geral da P.G. Note que

- para obtermos o 2º termo, multiplicamos o 1º termo uma vez pela razão (aqui denominada de q);
- para obtermos o 3º termo, multiplicamos o 1º termo pela razão q multiplicada duas vezes por si mesma;
- dessa forma, o n-ésimo termo será obtido, multiplicando-se o 1º termo pela razão q multiplicada n-1 vezes por por si mesma. Essa conclusão pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Em que a_n representa o termo geral na posição n da sequência, a1 é o primeiro termo, q é a razão e n é o número referente à posição do termo na sequência

Que tal se fizéssemos a próxima atividade para verificarmos o nosso aprendizado?

Atividade 12

Observe a sequência 1, 3, 9, 27, ...

a. Determine se esta sequência é uma P.A. ou uma P.G.

b. Determine sua razão.

c. Encontre o 8º elemento da sequência.

d. O número 19.683 aparece nesta sequência em que posição?

e. Qual é a fórmula do termo geral dessa sequencia?

Anote suas respostas em seu caderno

Esta atividade, além de nos ajudar a trabalhar os conceitos que aprendemos, permitiu ver que em uma progressão geométrica, os números podem crescer rapidamente. Porém, há outras possibilidades. Vejam:

Observe a sequência: 1000; 500; 250; 125; 62,5;.... Note que os números decrescem o tempo todo. Podemos dizer, então, que esta P.G. é decrescente. Vocês conseguem calcular a razão desta P.G.? Utilizemos uma dica: se cada termo é obtido multiplicando-se a razão pelo termo anterior, então o quociente entre um termo e seu antecedente nos dá o valor da razão, não é mesmo?! Observem:

Se $a_2 = a_1.q$, então: $\frac{a_2}{a_1} = q$

Portanto, no caso da sequência deste último exemplo, $q = \frac{1}{2}$.

Já na sequência 2; –4; 8; –16; ..., vemos que seus termos ficam alternando entre os positivos e os negativos. Não podemos dizer que é uma sequência crescente e nem decrescente, pois a cada momento, os números vão ficando cada vez maiores e, em seguida, cada vez menores. Verifique que se trata de uma PG de razão -2.

Legal! O estudo das sequências numéricas é mesmo muito rico em informações. Podemos explorar muitas situações e vermos o quanto esses conhecimentos podem ajudar, como no caso do laboratório do Dr. Loucus.

No laboratório químico do Dr. Loucus, está ocorrendo um experimento. Há um recipiente de vidro vazio que, no primeiro dia do mês, receberá 3 gotas de um elemento químico. No dia seguinte, observadas as possíveis reações, Dr. Loucus pinga 9 gotas. No terceiro dia, 27 gotas e assim por diante. No dia em que recebeu 2187 gotas, o recipiente ficou completamente cheio. Precisamos descobrir quantas gotas foram despejadas para encher este frasco.

Para isso, vamos observar a sequência formada pela quantidade de gotas:

3; 9; 27; 81; ...; 2187

Podemos verificar que esta sequência é uma P.G. cuja razão é 3. Conseguiu verificar? Muito bem. Não conseguiu? Tudo certo, também. Para identificar a razão de uma P.G., basta dividir um termo pelo seu antecessor : 81/27=3; 27/9=3; 9/3=3.

Contudo, ainda não sabemos quantos termos tem essa P.G.

Vamos calcular?

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$
$$2187 = 3.3^{n-1}$$
$$\frac{2187}{3} = 3^{n-1}$$
$$729 = 3^{n-1}$$
$$3^6 = 3^{n-1}$$
$$n-1 = 6$$
$$n = 7$$

Portanto, sabemos que a experiência terminou em 7 dias. Mas, ainda estamos longe de saber o total de pingos despejados no recipiente de vidro.

Precisamos encontrar um jeito de somar todos esses números sem ter que escrevê-los. Isto é, algum jeito mais simples de calcular a soma dos termos desta P.G. Será que é possível?

É sim! Da mesma forma que na progressão aritmética, existe uma fórmula que calcula a soma dos seus n primeiros termos.

Está fórmula é:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Pelo que podemos observar nesta fórmula, para calcularmos a soma dos n primeiros termos de uma P.G., precisamos utilizar apenas o valor do primeiro termo, a razão e o número de termos que estamos somando.

Saiba Mais

Curiosos para saber como chegamos nesta fórmula? Ótimo! Acessem o link http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/soma-dos-termos-uma-pg-finita.htm. Como vocês sabem, tudo na matemática tem uma justificativa e a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica também tem.

Portanto, vamos calcular o total de gostas despejadas no recipiente por Dr. Loucus.

Para isso, temos que:

$$a_1 = 3$$
$$n = 7$$
$$q = 3$$

Então,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{3(3^7 - 1)}{7-1} = \frac{3.(2187-1)}{6} = \frac{3.2186}{6} = \frac{6558}{6} = 1093$$

Assim, descobrimos que foi colocado um total de 1.093 gotas neste recipiente. Fácil, não é mesmo?!

Uma propriedade bem interessante da PG – e da soma de seus termos – é que ambas crescem muito rápido de um passo para outro. Lembram da Atividade 11? Pois então! Uma das lendas a respeito da criação do jogo de xadrez envolve essa propriedade das P.Gs e da soma de seus termos.

Figura 9 – Tabuleiro de xadrez.

De acordo com a história, o xadrez foi criado na Índia Antiga e seu criador, assim que terminou de fazer sua primeira versão completa do jogo foi mostrá-lo ao imperador. Depois de aprender a jogar, o imperador, felicíssimo, decidiu recompensar o inventor, que poderia escolher o que quisesse – jóias, cavalos, palácios, etc, oferecendo a ele o que ele quisesse.

O inventor agradeceu muito, mas disse queria receber o pagamento em grãos de arroz, de acordo com uma regra feita a partir do desenho do tabuleiro. Na primeira casa do tabuleiro, o imperador colocaria um grão. Na segunda casa, dois grãos. Na terceira, 4 grãos, na quarta oito grãos e assim até a 64ª casa. O imperador ficou um pouco surpreso e achou o preço por demasiado barato, mas aceitou o pedido e ordenou ao tesoureiro que fizesse as contas e pagasse o criador do jogo. Uma semana depois, o tesoureiro voltou dizendo que passara todo o tempo trabalhando e que, ao terminar a conta, verificou que não haveria no império riqueza suficiente para pagar o que foi pedido. Aqui as lendas variam: em umas o inventor do xadrez vira imperador, em outras é punido – e até morto - por ele. Sabem quantos grãos de arroz haveria ao todo no tabuleiro? 18.446.744.073.709.551.615 grãos, o que pesaria em torno de 461.168.602.000 toneladas e seria aproximadamente 1000 vezes mais pesado do que a produção mundial de arroz...no ano de 2010 ! ! !

Atividade 13

As situações-problema a seguir envolvem progressões geométricas. Vamos resolvê-las?

a. Uma empresa de cartão de crédito cobra juros de 10% ao mês. Uma pessoa adquiriu uma dívida de 1000 reais no cartão de ficou 5 meses sem pagá-lo. Qual é sua dívida após esses 5 meses?

b. De 2001 a 2010, uma empresa dobrou seu patrimônio a cada ano. Em que ano ela tinha a metade do seu patrimônio em 2008? Se em 2010 a empresa acumulava um patrimônio de 1 milhão de reais, qual era seu patrimônio em 2005?

Anote suas respostas em seu caderno

Veja ainda

Para quem é curioso e quer conhecer algumas histórias famosas que envolvem o conceito de sequências numéricas, indicamos conhecer o Paradoxo de Zenão. Ou, mais precisamente, o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga.

Acesse o endereço eletrônico abaixo e se divirta conhecendo esse paradoxo muito interessante que deixou o mundo intrigado por muitos e muitos séculos.

http://educacao.uol.com.br/filosofia/paradoxo-zenao-e-os-argumento-logicos-que-levam-a-conclusao-falsa.jhtm

Os paradoxos de Zenão motivam o estudo de sequencias cujos termos diminuem muito, assumindo valores cada vez mais próximos de zero. Ainda falando sobre a soma dos termos, embora pareça muito estranho, é possível somarmos os elementos de uma P.G. infinita, mas com uma condição: esta progressão precisa ser decrescente, isto é, uma razão maior que –1 e menor que 1.

Por exemplo:

A progressão 1000; 500; 250; ... que vimos anteriormente é um exemplo de P.G. decrescente. Apesar de parecer muito estranho, mesmo tendo infinitos termos, conseguimos calcular a soma desses infinitos números.

Para nos ajudar a encontrar essa soma, ou esse limite, utilizamos a fórmula abaixo:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Repare que levamos em consideração nesta fórmula apenas o valor do primeiro termo da sequência e a razão. O número de termos não é utilizado, pois estamos somando infinitos termos.

Então, vamos utilizá-la para determinarmos a soma dos termos da sequência dada no exemplo anterior.

Na sequência dada anteriormente, temos que:

$$a_1 = 1000$$

$$q = \frac{1}{2} = 0,5$$

Então,

$$S_\infty = \frac{1000}{0,5} = 2000$$

Podemos garantir que, mesmo tendo infinitos termos, a soma de todos os elementos dessa P.G. não ultrapassa o número 2000. Interessante, não é mesmo?! Então vamos colocar isso em prática!

Atividade 14

Vocês conhecem uma dízima periódica, não é?! Por exemplo, temos o número 0,333333....

Considerando que 0,33333..... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ..., escreva os termos dessa soma em sua forma fracionária e determine a soma desses números fracionários. Dessa forma, você descobrirá que essa dízima periódica pode ser escrita como uma fração, chamada de *fração geratriz* desta dízima.

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal! Pudemos perceber que é possível organizar os números em sequências numéricas e que essas podem ter diversas características. As progressões aritméticas e as geométricas nos permitem maior exploração matemática e aplicação em situações do dia-a-dia tal como os exemplos e atividades trabalhados nesta unidade.

É muito importante que vocês estudem bastante este assunto, pois é rico em informações e, devido a sua grande aplicabilidade, pode se tornar uma grande ferramenta para diversos outros temas.

Contudo, em relação a esta unidade, nosso trabalho está cumprido! Parabéns a todos nós e até a próxima!

Resumo

- Uma sequencia numérica em que um termo é obtido somando-se um fator constante ao termo anterior é chamada de progressão aritmética (PA).
- O termo geral de uma P.A. é dado por $a_n = a_1 + (n-1).r$.
- A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dado por é dado por $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$.
- Uma sequencia numérica em que um termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por um fator constante é chamada de progressão geométrica (PG).
- O termo geral de uma P.G. é dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$.

- A soma dos n primeiros termos de uma P.G. finita é $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.
- A soma dos termos uma P.G. infinita é dada por $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$

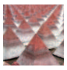
Referências

Livros

- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, p. 18.
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, p. 24.
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, Pp. 56 – 57
- TINOCO (2002), *Construindo o Conceito de Função*. 4. Ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, p. 33.

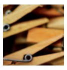
Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=630098

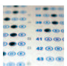
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=118870



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=847256

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=730723

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=477365



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528

Respostas das Atividades

Atividade 1

Posição do elemento na sequência	Número de retângulos
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
10	20
28	56
50	100

Através do preenchimento da tabela, podemos notar que o número de retângulos é sempre igual ao dobro do número referente à posição do elemento na sequência.

Atividade 2

a. triângulo

b. quadrado

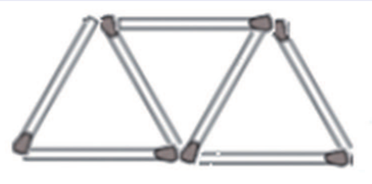
c. quadrado

d. quadrado

e. quadrado

f. Como, através das perguntas anteriores, percebemos que as posições múltiplas de 3 são sempre ocupadas por um quadrado, descobre-se que 231 é múltiplo de 3, ou seja, um quadrado. Logo, 232 é o seguinte, um triângulo. Ou ainda, como a sequência mostrada possui 9 elementos, podemos calcular quantas vezes essa sequência irá se repetir até encontrarmos o 232º elemento. Para isso, fazemos $232 \div 9 = 25$, resto 7. Portanto, a sequência se repete 25 vezes e ainda "pula" mais sete elementos, cuja figura que ocupa esta posição é o triângulo.

Atividade 3

a. 

b. 11

c. 13

d. 21

e. 73

f.

Nº de triângulos	Nº de palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
10	21
36	73

g. O número de palitos é o dobro do número de triângulos mais uma unidade.

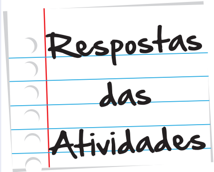
h. $P = 2N + 1$

Atividade 4

a. 4. 5. 9 pregadores.

b. 11 e 12 pregadores.

c. Sim, pois usará 23 pregadores, quando há disponíveis 24.



Respostas das Atividades

Atividade 4

d.

Nº de camisas	Nº de pregadores
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7

Atividade 5

A sequência ***30 – 26 – 22 – 18 – 14 – ...*** é uma progressão aritmética, pois para obtermos cada elemento, devemos somar – 4 ao termo anterior. O valor da razão é exatamente – 4, pois r = a2 – a1 = 26 – 30 = – 4.

Atividade 6

2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 –

a. Esta sequência é uma progressão aritmética, pois a partir do primeiro termo, somamos 3 unidades para obter o seguinte.

b. $a_{12} = a_1 + 11.r = 2 + 11.3 = 2 + 33 = 35$

c. $a_{100} = a_1 + 99.r = 2 + 99.3 = 2 + 297 = 299$

d. $a_n = a_1 + (n-1).r = 2 + (n-1).3 = 2 + 3n - 3 = -1 + 3n$

Atividade 7

$a_1 = 10$

$a_n = a_8 = 80$

$n = 8$

$$S_n = \frac{(10+80).8}{2} = \frac{90.8}{2} = 360$$

Respostas das Atividades

Atividade 8

a. Se, $r = 3$ e $a_1 = 5$, $a_{10} = 5 + 9.3 = 32.$

b. Sabemos que, $a_1 = 5$ e $a_4 = -10$. Como $a_4 = a_1 + 3r$, temos que

$-10 = 5 + 3r$

$-15 = 3r$

$r = -5$

c. Sabemos que $a_5 = 2$ e $a_{13} = 10$. Como, partindo do quinto termo, devemos somar a razão 8 vezes para obter o décimo terceiro termo, temos que $a_{13} = a_5 + 8r$

$10 = 2 + 8r$

$10 = 2 + 8r$

$8 = 8r$

$r = 1$

Agora, para obtermos o 1º termo da sequencia, basta observarmos que

$a_5 = a_1 + 4r$

$2 = a_1 + 4.1$

$2 = a_1 + 4$

$a_1 = -2$

Atividade 9

$300 = 3 + (100 - 1).r$
$300 = 3 + 99.r$
$99r = 300 - 3$
$99r = 297$
$r = \frac{297}{99} = 3\ quilômetros$

Respostas das Atividades

Atividade 10

Vejamos outras situações que envolvem progressões aritméticas:

a. Se 2012 foi um ano bissexto, foram bissextos os anos 2008, 2004, 2000, ... Logo, o primeiro ano bissexto desse século foi 2004. Esse problema pode ser modelado por uma PA em que a1 = 2004 e r = 4. O vigésimo bissexto será a20 = a1 + 19r = 2004 + 19.4 = 2080.

b. Note que, a cada dia, o número de pílulas a ser tomado é aumentado em duas. Esse problema pode ser modelado por uma PA em que a1 = 2 e r = 2. Contudo, deseja-se saber, após quantos dias o total de remédios tomados (a soma dos remédios tomados em todos os dias) é 72. Como an = 2 + (n-1).2 = 2 + 2n – 2 = 2n e Sn = 72, temos que

Sn = (a1+an)n/2

72=(2+2n).n/2

72=(1+n)n

n2 + n – 72 = 0

(n+9)(n-8)=0

Dessa forma, n = -9 ou n = 8. Como n deve ser positivo, o número de dias é 8.

Atividade 11

a. Esta progressão tem razão igual a 2.

b. R$ 320,00 x 2 = R$ 640,00.

c. 2.560 = 10 x 2^8. Logo, terá que acertar 9 perguntas, afinal, uma para ganhar 10 reais e outras 8 para que seu prêmio dobre 8 vezes (2^8).

d.

Questões respondidas corretamente	Cálculo do prêmio	Valor do prêmio
1	10	R$ 10,00
2	10 x 2^1	R$ 20,00
3	10 x 2 x 2 = 10 x 2^2	R$ 40,00
4	10 x 2 x 2 x 2 = 10 x 2^3	R$ 80,00
5	10 x 2 x 2 x 2 x 2 = 10 x 2^4	R$ 160,00
6	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 10 x 2^5	R$ 320,00
10	10 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 10 x 2^9	R$ 5.120,00
n	10 x 2^{n-1}	10 x 2^{n-1}

Atividade 12

a. Esta sequência é uma P.G., pois $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_3}$

b. A razão é igual a $r = \frac{a_2}{a_1} = 3$

c. $a_8 = a_1.q^{8-1} = 1.3^7 = 2.187$

d. $a_n = 1.3^{n-1} = 19683$

$3^{n-1} = 3^9$

$n = 10$

e. $a_n = 1.3^{n-1}$

Atividade 13

a. O problema pode ser modelado por uma PG em que a1 = 1000 e q = 1,10. Assim, a dívida será dada por $a^5 = a1.q^4 = 1000.1{,}10^4 = 1464{,}1$ reais.

b. Ela tinha a metade do seu patrimônio em 2007. O problema pode ser modelado por uma PG em que a10 (o patrimônio em 2010) é igual a 1000000 e q = 2. Para saber o seu patrimônio em 2005 (a5), temos que

$a10 = a5.q^4$

$1000000 = a5.2^4$

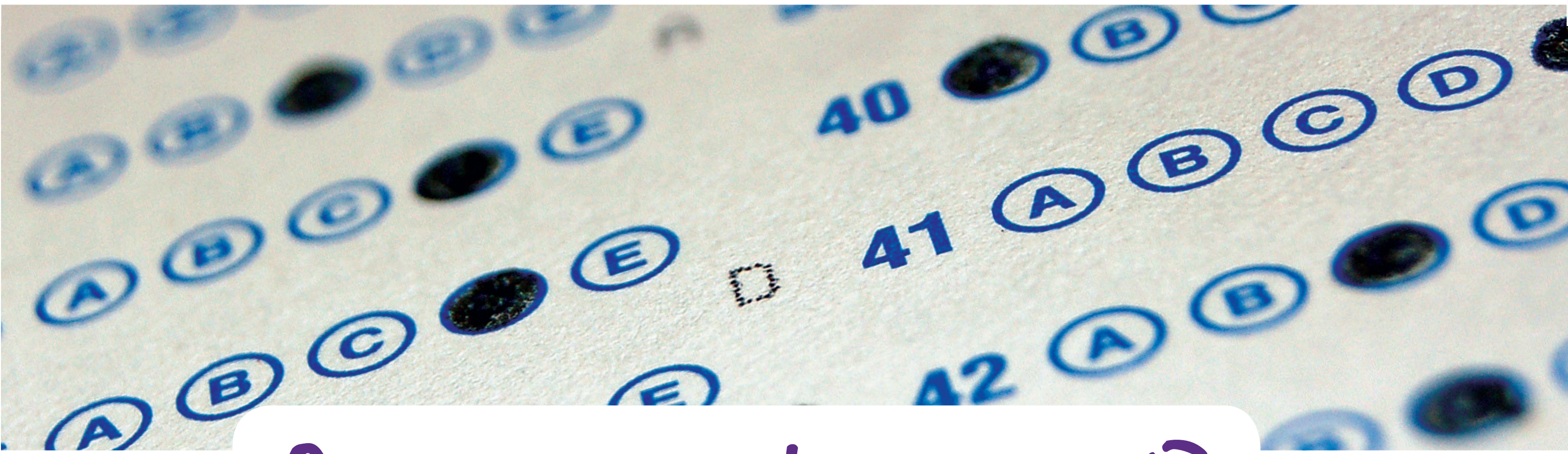
1000000 = a5.16

A5 = 1000000/16 = 62500 reais

Atividade 14

Com isso, temos que é a soma dos termos da P.G. ao lado, onde a_1 e a razão é 0,1. Logo, estamos diante de uma razão infinita. Portanto, a soma dos termos dessa razão é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$



O que perguntam por aí?

1. (PUC-SP/2003)

Os termos da seqüência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; …) obedecem a uma lei de formação. Se an, em que n pertence a N*, é o termo de ordem n dessa seqüência, então a30 + a55 é igual a:

a) 58

b) 59

c) 60

d) 61

e) 62

Solução: Letra B

Primeiro, observem que os termos de ordem ímpar da sequência formam uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 – (10; 11; 12; 13; …). Da mesma forma, os termos de ordem par formam uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 – (8; 9; 10; 11; …) . Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:

(1) ai = a1 + (i – 1).1 = a1 + i – 1

Para determinar a30 + a55 precisamos estabelecer a regra geral de formação da sequência, que está intrinsicamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:

- Se n (índice da sucessão) é impar temos que n = 2i – 1, ou seja, i = (n + 1)/2;
- Se n é par temos n = 2i ou i = n/2.

Daqui e de (1) obtemos que:

$a_n = 10 + [(n + 1)/2] - 1$ se **n** é ímpar

$a_n = 8 + (n/2) - 1$ se n é par

Logo:

$a_{30} = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22$

e

$a_{55} = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37$

E portanto:

$a_{30} + a_{55} = 22 + 37 = 59$

2. (UFLA/99) A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; ...) é:

a) 3,1

b) 3,9

c) 3,99

d) 3,999

e) 4

Solução: Letra e

Sejam **S** a soma dos elementos da sequência e $\mathbf{S_1}$ a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009; ...) de razão $q = 10^{-1} = 0{,}1$. Assim:

$S = 3 + S_1$

Como $-1 < q < 1$ podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter S1:

$S_1 = 0{,}9/(1 - 0{,}1) = 0{,}9/0{,}9 = 1 \Rightarrow S = 3 + 1 = 4$.