Módulo 3 • Matemática • Unidade 23

Prismas e Cilindros

Para início de conversa...

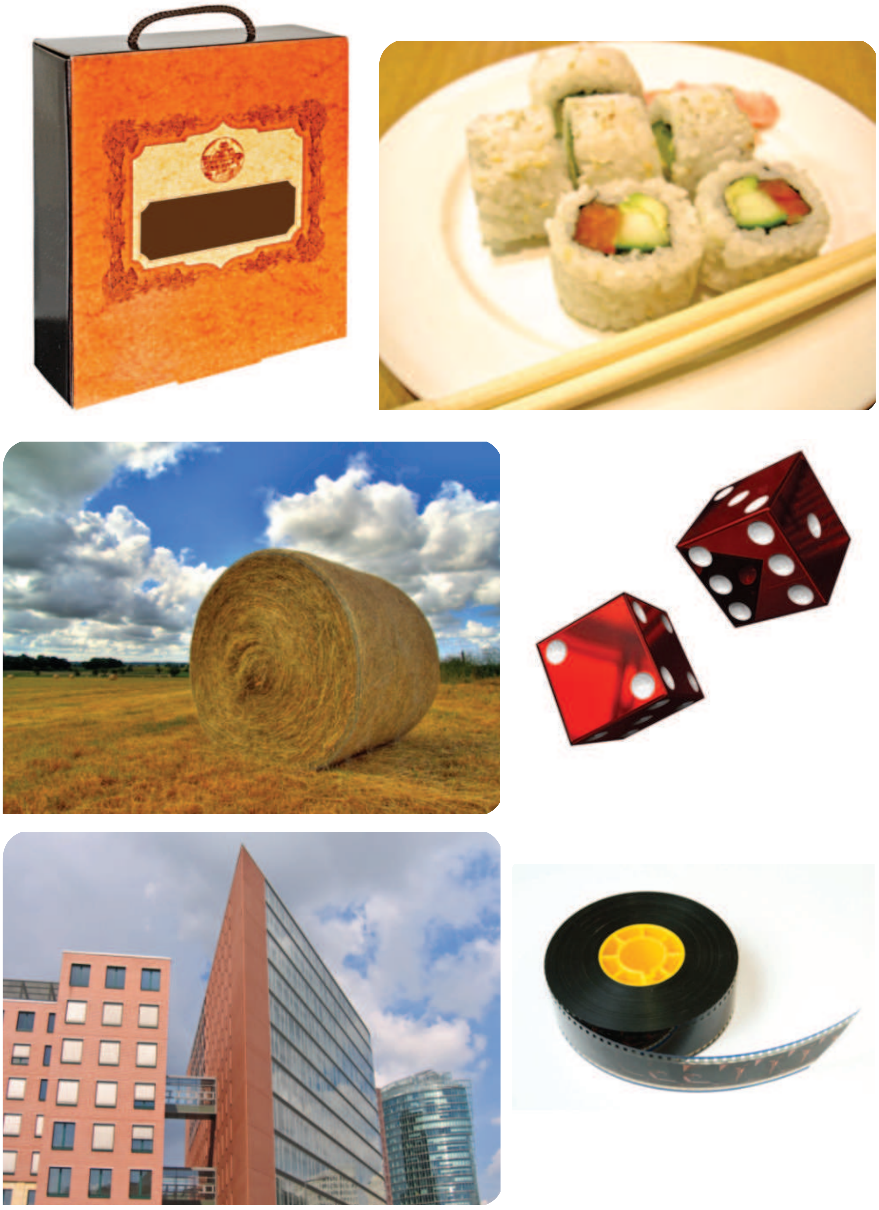


Figura 1 – De cima para baixo e da esquerda para a direita: caixa de presente, comida japonesa, rolo de feno, dados, prédio triangular em Berlim, Alemanha e um rolo de filme.
Fonte: http://sxc.hu

Cilindros e prismas, esses serão os nossos companheiros dessa unidade. A esta altura, você já deve ter imaginado que muitos objetos do dia a dia podem ser considerados exemplos de prismas e cilindros – dê uma olhada nos que trouxemos nesta primeira imagem! Mas além de serem importantes para o dia a dia, essas formas geométricas são muito importantes também na Física.

Em 1974, Frank Tipler, da Universidade Tulane, investigando a possibilidade de viagem no tempo, calculou que um cilindro maciço, infinitamente comprido, girando em torno do seu eixo em velocidades próximas à da luz, permitiria visões do passado, mais uma vez porque a luz seria puxada em torno do cilindro, formando um círculo.

Já em 2002, a revista Physics World realizou uma enquete junto aos físicos, pedindo que elegessem os 10 mais belos experimentos da Física. O quarto experimento mais votado foi justamente o da decomposição da luz solar, realizada por Newton, no século XVII. A experiência é extraordinariamente simples, necessitando apenas de luz solar e de um prisma de vidro. Como ilustra a figura a seguir. Ao passar por um prisma, a luz solar, que é branca, se decompõe nas cores do arco-íris.

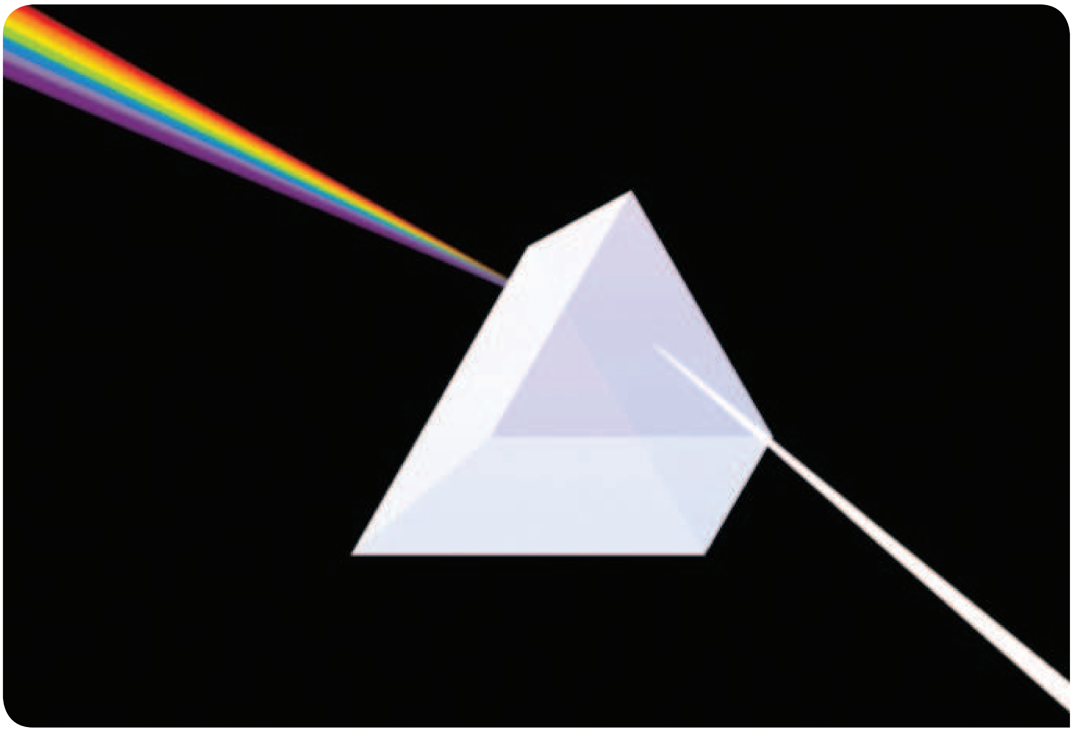


Figura 2 – Decomposição da luz branca por um prisma de vidro.
Fonte: http://sxc.hu

No caso do arco-íris, são as gotículas de água que fazem o papel do prisma. Newton demonstrou que combinando adequadamente dois ou mais prismas, é possível decompor e recompor a luz branca. A separação é possível porque cada cor tem um índice de refração diferente. Isto é, apresenta um desvio diferente quando passa de um meio (ar) para outro (vidro).

Saiba Mais

Para conhecer melhor as investigações teóricas sobre viagem no tempo, acesso o link

http://www2.uol.com.br/sciam/reportagens/como_construir_uma_maquina_do_tempo_5.html

Já para conhecer melhor o experimento de Newton sobre a decomposição da luz, acesse o link http://www.if.ufrgs.br/historia/newton.html

Então, vamos conhecer melhor cilindros e prismas? Mãos a obra!

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e diferenciar prismas e seus elementos
- Identificar e diferenciar cilindros e seus elementos
- Calcular diagonal do prisma e da face de um prisma.
- Conhecer o princípio de Cavalieri
- Calcular a área lateral, total e o volume de um prisma.
- Calcular a área lateral, total e o volume de um cilindro.

Seção 1
Os elementos

Todos os objetos do dia a dia que apresentamos na Figura 1 são exemplos de prismas ou de cilindros. Assim, começamos nossa aula já com uma atividade, em que convidamos você a tentar apontar as diferenças e semelhanças entre eles – o que é importantíssimo para a identificação de ambos. Para ajudar um pouco, damos uma dica: os dados, a caixa de presente e o edifício são exemplos de prismas. Já os rolos de filme, de feno e de comida japonesa, são exemplos de cilindro. Vamos à atividade?

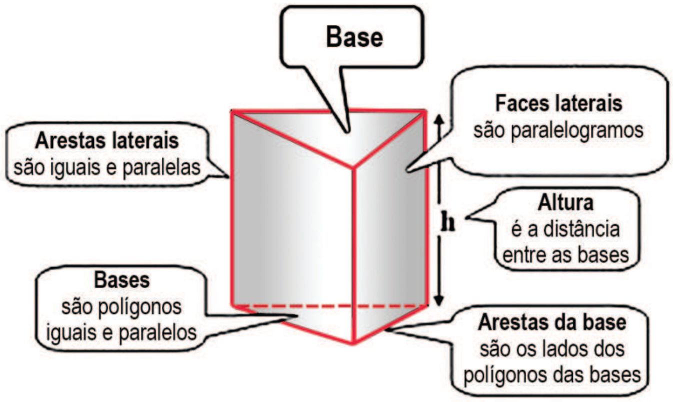
Atividade 1

Veja os objetos representados na Figura 1: os dados, a caixa de presente e o edifício são exemplos de prismas. Os rolos de filme, de feno e de comida japonesa, são exemplos de cilindro. Agora observe atentamente estes objetos e procure identificar as principais semelhanças e diferenças entre cilindros e prismas.

Anote suas respostas em seu caderno

No início da unidade, vimos a experiência de Newton sobre decomposição da luz utilizando um prisma. Agora que já temos uma boa noção das principais características dos prismas, é hora de formalizarmos mais um pouco a nomenclatura dos elementos do prisma, sempre com o intuito de facilitar a identificação destes elementos e a comunicação entre nós.

É importante relembrar que os prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais). Dele, podemos destacar alguns elementos tais como as arestas e a altura. Os prismas podem ser retos ou oblíquos. Quando ele for reto, a altura será igual à aresta lateral. Veja na figura seguinte o exemplo de um prisma reto:



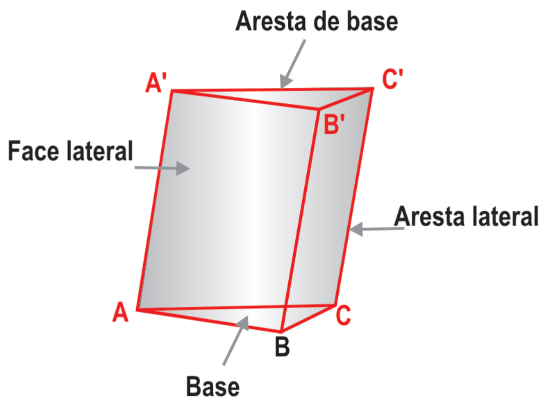
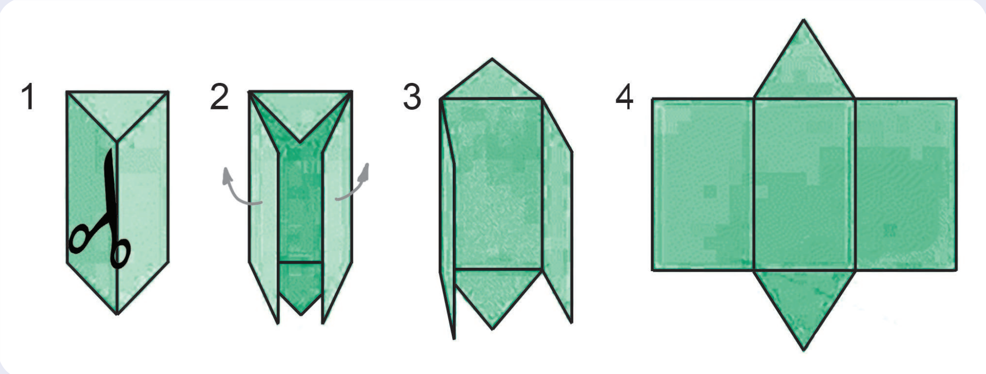


Figura 3 – Prismas reto e obliquo de base triangular com principais elementos destacados.

Atividade 2

Podemos, mais informalmente, dizer que a planificação de um sólido geométrico consistiria em "passar uma tesoura" por algumas de suas arestas de maneira a produzir uma figura plana. Essa figura plana, uma vez remontada, daria origem novamente ao sólido. Vejam na figura:



Nessa planificação que acabamos de mostrar, identifique as bases, as faces laterais e as arestas do prisma planificado – que, cumpre observar, é similar ao usado no experimento de refração da luz.

Anote suas respostas em seu caderno

Na primeira figura desta aula, vimos três exemplos de objetos que podem ser considerados prismas: o edifício triangular de Berlim, de base triangular, um dado e uma caixa de presente, ambos de base quadrangular. É importante dizer aqui que não há restrições quanto ao número de lados do polígono que serve de base ao prisma: assim, poderemos ter prismas pentagonais (cujas bases são pentágonos), hexagonais (cujas bases são hexágonos), dodecagonais, e assim por diante. É importante também destacar que, entre os prismas quadrangulares, os prismas retos cujas bases são retângulos recebem o nome de paralelepípedos retângulos. Já os prismas retos que têm bases quadradas e arestas laterais com o mesmo tamanho dos lados da base (o que termina acarretando que todas as suas arestas sejam iguais) são chamados de cubos. Veja na figura.

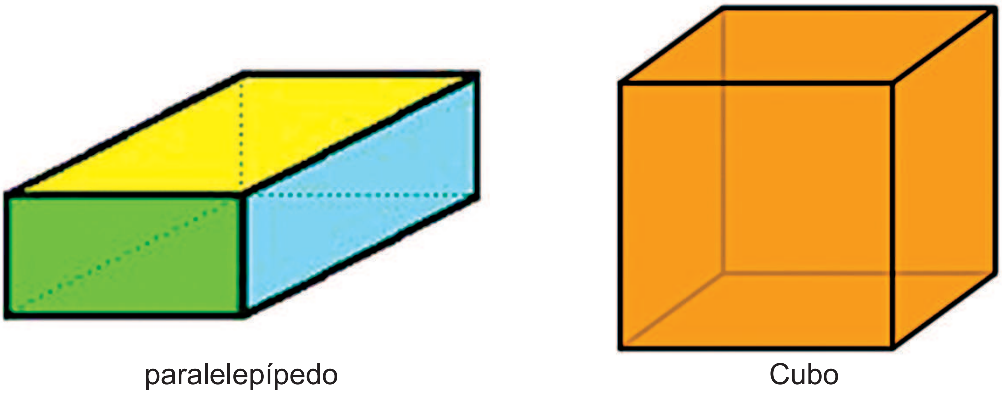


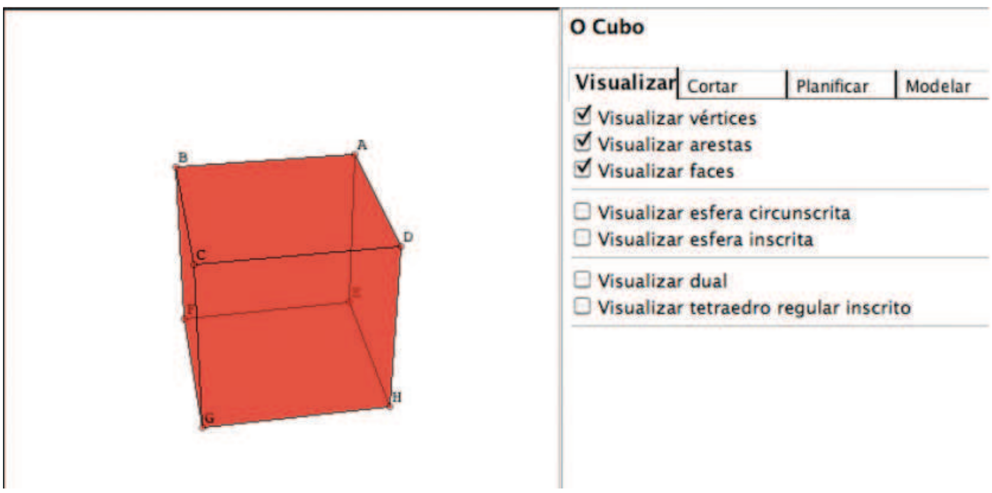
Figura 4 – Paralelepípedo (à esquerda) e cubo (à direita)

Outra ideia interessante: como o quadrado é um caso especial de retângulo, podemos dizer que o cubo é um caso particular de paralelepípedo. Muito bem? Então está, vamos em frente!

Multimídia

Que tal explorar mais os cubos? Acessando esse interessante link - http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/cubo-br.html

, você pode visualizar os elementos, cortar, planificar e modelar o cubo.



Retomando o assunto da Atividade 1 – ou seja, as diferenças e semelhanças entre prismas e cilindros – hora de falarmos mais formalmente dos cilindros. O cilindro é o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas paralelos a reta s que unem um ponto do círculo C (pertencente a α) a um ponto de β.

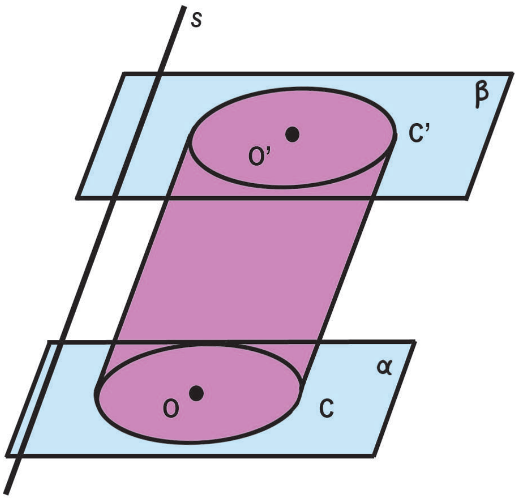


Figura 5 – Cilindro

A altura h do cilindro é dada por meio da distância entre os planos das bases.

A reta r que passa pelo centro das bases (pontos O e O´) é chamada eixo do cilindro. As geratrizes são segmentos paralelos ao eixo cujas extremidades são pontos da circunferência.

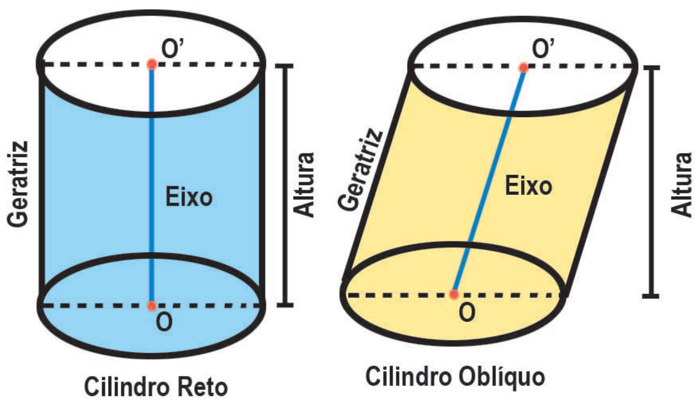
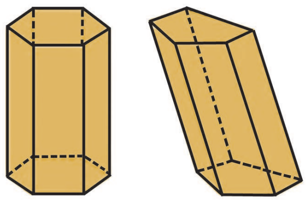


Figura 6 – Cilindro cujo eixo é perpendicular ao plano da base (à esquerda) e cilindro cujo eixo não é perpendicular ao plano da base (à direita)

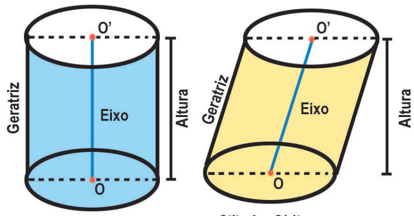
Como podemos observar nos exemplos, no cilindro em que o eixo é perpendicular ao plano da base, a geratriz tem o mesmo tamanho da altura. Já nos cilindros em que o eixo não faz noventa graus com o plano da base, o tamanho da geratriz é maior do que o tamanho da altura.

Outro ponto em comum entre prismas e cilindros é a classificação em retos e oblíquos. Prismas retos são aqueles cujas arestas laterais são perpendiculares ao plano da base, enquanto cilindros retos são aqueles em que as geratrizes são perpendiculares aos planos da base.

Já os prismas e cilindros cujas arestas e geratrizes são oblíquas ao plano da base são chamados de prismas e cilindros oblíquos.



Prisma Reto | Prisma Oblíquo



Cilindro Reto | Cilindro Oblíquo

No que diz respeito à superfície de prismas e cilindros, novos pontos em comum e divergências. A parte em comum é que a área da superfície total de ambos é a soma das áreas das bases com a da superfície lateral. Como as bases são congruentes, a superfície total é duas vezes a área da base mais a área da superfície lateral. No prisma a base é um polígono, no cilindro a base é um círculo. A diferença está justamente na área lateral: enquanto no prisma a área lateral é formada pelas várias faces (veja a planificação da Atividade 1, por exemplo), no cilindro a área lateral é contínua e tem a forma de um retângulo. Uma maneira simples de ilustrar a área lateral é destacar o rótulo de uma lata de leite. A superfície ocupada pelo rótulo de papel é a área lateral. Veja na planificação a seguir

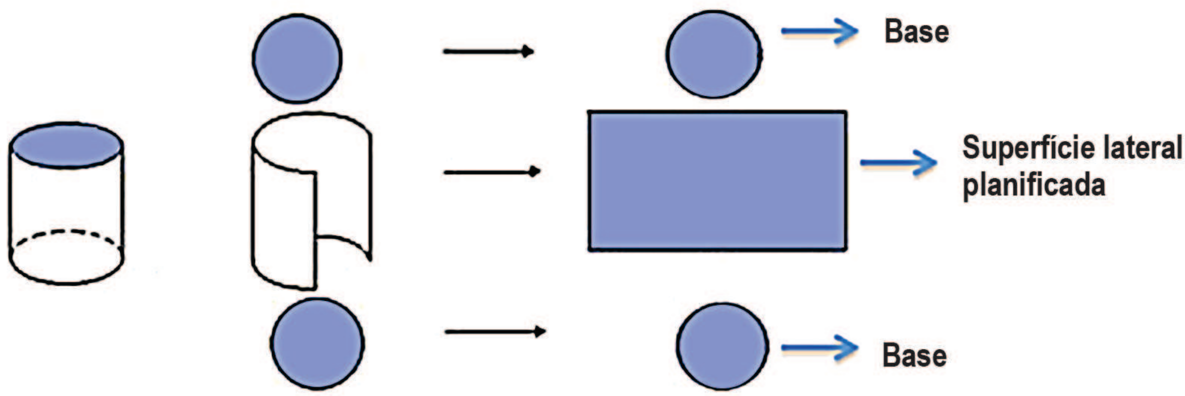


Figura 7 – Planificação de um cilindro

Muito bem, gente! Finalizamos aqui a primeira seção desta aula. Nas seções seguintes estudaremos áreas e volumes dos prismas, o interessante princípio de Cavalieri e áreas e volumes dos cilindros. Vamos lá?

Seção 2
Área e volume do paralelepípedo

Figura 8 – Piscina na beira da praia. O cartaz convida os usuários a tomarem banho e tirarem a areia antes de entrar na água.

Vamos tratar os conceitos de área e volume do prisma, a partir de uma situação concreta e bastante agradável: a construção de uma piscina! Vamos supor que o modelo de piscina da Figura 8 foi escolhido por você e pela sua família para ser construído na casa nova para onde estão se mudando. Ela terá 2 metros de profundidade, 4 metros de largura e 6 metros de comprimento.

Para realizar essa empreitada, você vai precisar de duas importantes informações: a primeira é a quantidade de material necessária para a realização da obra. Como por exemplo, quantos metros quadrados de azulejo serão necessários para ladrilhar a piscina. A segunda é a quantidade de água necessária para encher a piscina.

Para descobrir a primeira informação, vamos planificar o modelo da piscina escolhido por vocês. Esse modelo é um prisma de base retangular que, como já vimos anteriormente, é chamado de paralelepípedo.

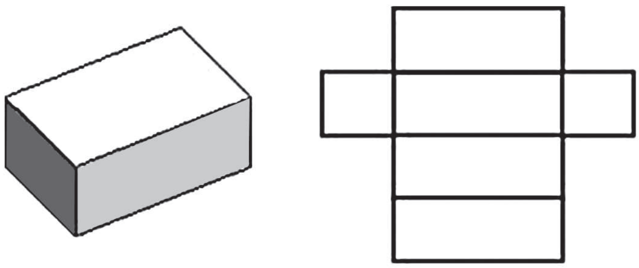


Figura 9 – À esquerda, o paralelepípedo que modela a piscina. À direita o mesmo paralelepípedo planificado.

O azulejo será colocado justamente nas faces do paralelepípedo. Para saber quantos metros quadrados de azulejo serão necessários, basta saber a área de cada um dos retângulos. Vale aqui relembrar que a área do retângulo é dada pela multiplicação da medida da base pela medida da altura

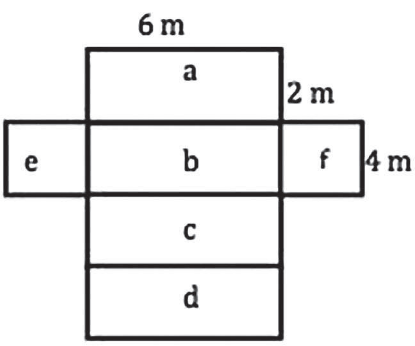


Figura 10 – Paralelepípedo planificado e já com as medidas da piscina

Assim, como podemos perceber da figura 10, os pares de retângulos a com c e b com d têm a mesma área.

Os retângulos a e c tem área $6x2 = 12\ m^2$., enquanto os retângulos b e d tem área $6 \times 4 = 24\ m^2$. Viram? Muito bem! E os retângulos e e f têm a mesma área $4x2 = 8\ m^2$. Conseguiram perceber também? Ótimo!

Agora, existe aqui uma pequena diferença entre o modelo e a piscina: enquanto o paralelepípedo tem duas bases, a piscina é aberta e, por isso, sua parte de cima não será azulejada. Assim, o cálculo da metragem de azulejos será dado pela área lateral e a área de uma base apenas:

Metragem = 2 x 12 + 1 x 24 + 2 x 8

Metragem = 24 + 24 + 16 = 64 m^2

Agora, sempre que formos calcular a área do prisma propriamente dito, devemos calcular sua área lateral total e a área total das suas bases – com duas bases, e não uma, como fizemos no caso da piscina. Um pouco mais matematicamente, teremos:

Área Total Superfície Prisma = Área Lateral + 2 x Área da Base. Vejam só:

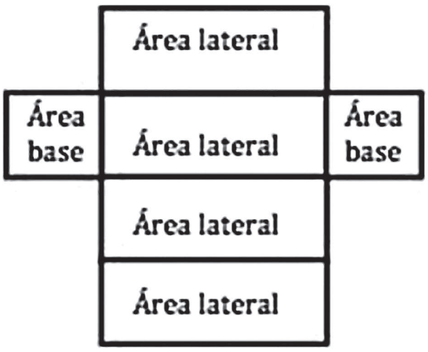


Figura 11 – Paralelepípedo planificado e com indicação das faces que compõem a área lateral e a área da base.

Lembra qual era a segunda informação importante para a construção da piscina? Exatamente: o volume de água necessário para enchê-la. Para isso, primeiramente temos que entender o que significa volume. Volume nada mais é que o espaço ocupado por um corpo. Logo, calcular o volume da piscina é encontrar o "tamanho" do espaço que a piscina ocupa.

Uma unidade de medida muito utilizada para medir volume é o metro cúbico, que corresponde ao volume de um cubo de um metro de lado. Veja na figura a seguir

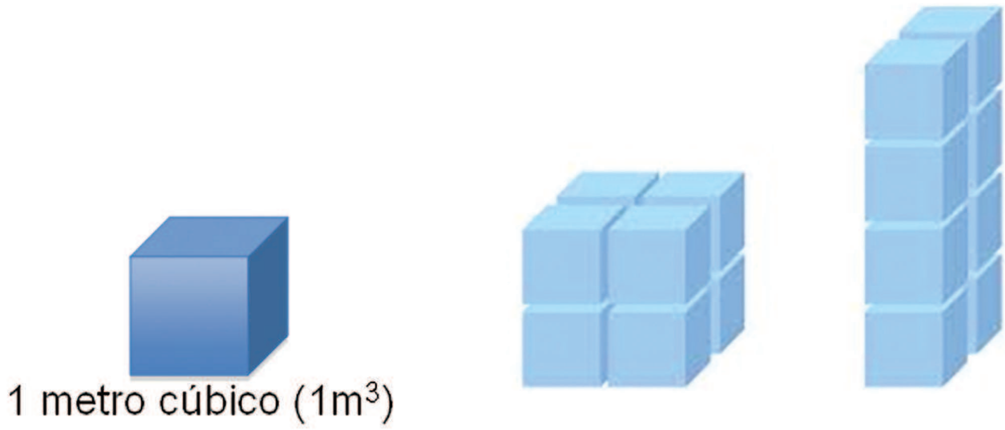


Figura 12 – À esquerda, vemos a representação de um cubo com um metro de aresta. Ao centro, um cubo formado por oito cubos de um metro de aresta. À direita, um paralelepípedo formado por oito cubos de um metro de aresta.

O fato interessante é que as duas pilhas da figura, apesar de terem formas diferentes, têm 8 m^3 de volume, uma vez que são formadas oito cubinhos de 1 m^3. Assim, para calcular o volume de um cubo ou de um paralelepípedo, precisaríamos contar quantos cubos de 1 m^3 de lado cabem dentro desse cubo ou paralelepípedo – o que, dependendo da situação, pode se tornar muito cansativo ou mesmo inviável. Por isso, apresentamos a seguinte sugestão de cálculo:

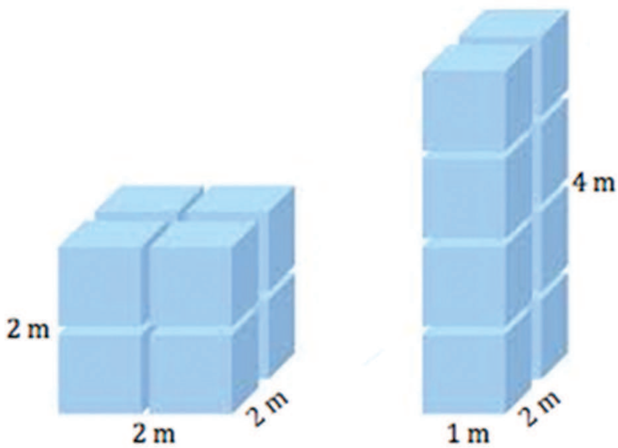


Figura 13 – À direita, cubo formado por oito cubos de um metro de lado, com tamanho da aresta indicado. À direita, um paralelepípedo formado por oito cubos de um metro de lado, com tamanho das arestas indicado.

No caso do cubo, temos dois andares com "dois cubos" de comprimento e "dois cubos" de largura, certo? Mais matematicamente, teremos que o volume do cubo = 2 x 2 x 2 = 8 m3. No caso do paralelepípedo, teremos 4 andares de "um cubo" de comprimento e "dois cubos" de largura. Mais matematicamente, teremos que o volume do paralelepípedo é de 2 x 1 x 4 = 8 m3

E, a partir desse exemplo, podemos generalizar e propor que o volume de um paralelepípedo é igual ao produto de sua largura pelo seu comprimento (ou seja, sua área da base) pela sua altura. Ou seja,

Volume paralelepípedo = Largura x Comprimento x Altura ou

Volume Paralelepípedo = Área da base x Altura.

Assim, e finalmente, podemos calcular o volume da piscina: V = 2 x 4 x 6 = 48 m3. Ou seja, a capacidade de água da piscina é de 48m3.

Importante

A palavra capacidade, quando utilizada para referência ao volume de um recipiente, na maioria das vezes está ligada a ideia de litro.

O litro é representado pelo l (minúsculo).

Sabemos que 1 m3 = 1000 dm3 e 1 dm3 = 1l, assim, 1m3 = 1000l.

Um reservatório (caixa d´água) de água com 1 metro de largura, 1 metro de altura e 1 metro de comprimento, tem capacidade para armazenar 1000 litros.

Ao tomarmos algum medicamento em dosagens de ml, por exemplo, ao ingerir 5 ml de xarope, estamos ingerindo 5 milésimos de 1 litro.

1ml = 1/1000 l ou 1ml = 0,001 l

Antes de finalizarmos a seção, um comentário sobre o volume do cubo. Recordando que ele é um caso particular de paralelepípedo e levando em consideração a fórmula do parágrafo anterior, para calcular o volume de um cubo, basta multiplicar o valor da medida da aresta por ela mesmo 3 vezes. Ou seja, Volume do cubo: medida da aresta x medida da aresta x medida da aresta.

Assim: Volume do cubo = (medida da aresta)3

Seção 3

Princípio de Cavalieri e volume dos sólidos em geral

Nesse exemplo da piscina foi fácil entender o cálculo do volume do paralelepípedo. Vamos agora entender melhor o cálculo do volume dos sólidos em geral? Muito bem! Nosso ponto de partida são aqueles "montinhos" com moedas e com papéis, que a gente está tão acostumado a fazer. Vejam na figura seguinte

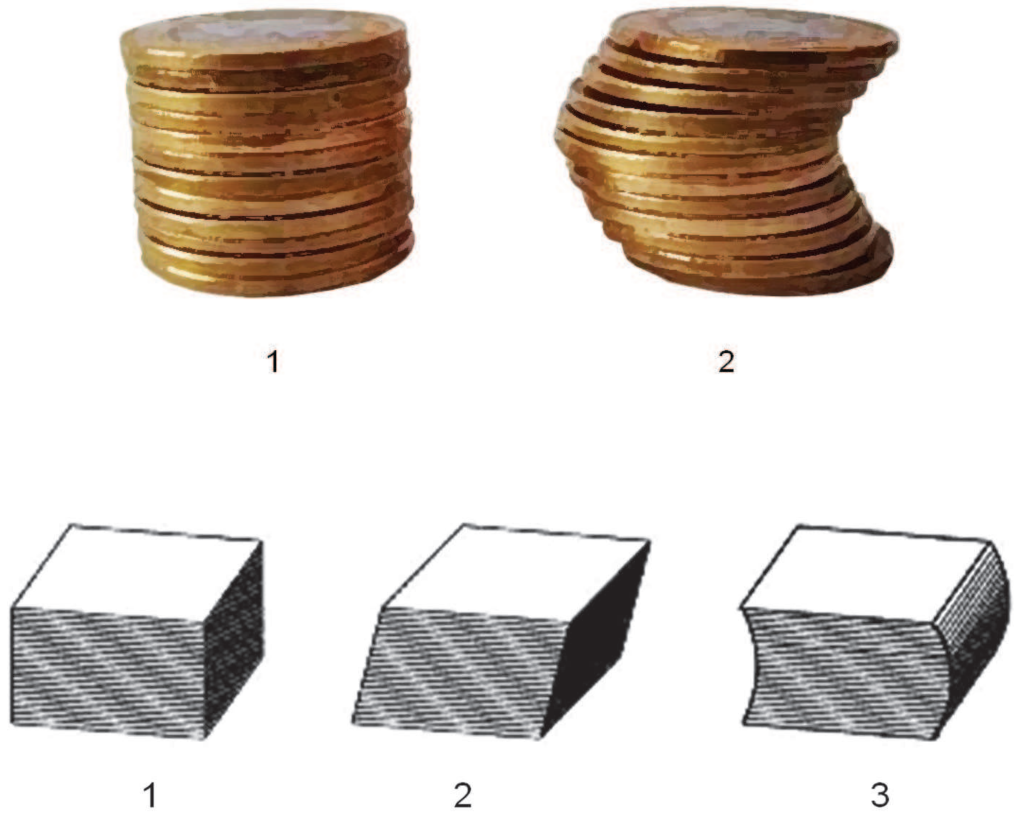


Figura 14 – Montes com moedas (na parte superior da imagem) e montes com papéis (na parte inferior da imagem).

Observe que as moedas são idênticas e, por isso, a superfície de cada uma delas têm a mesma área. O fato de as moedas serem idênticas também faz com que as pilhas tenham a mesma altura, apesar de terem formatos distintos – afinal, todas as moedas têm a mesma altura. O mesmo acontece com os papéis: eles são idênticos e por consequência a superfície de cada uma das folhas tem a mesma área. As pilhas também têm a mesma altura, apesar de estarem dispostas de maneiras distintas.

Isso nos permite concluir que essa diferença no formato final das pilhas não influencia o espaço ocupado por elas. Assim, lembrando o que volume de um corpo nada mais é do que o espaço que esse corpo ocupa, podemos ver que a pilha de moedas 1 "ocupa o mesmo espaço", ou seja, tem o mesmo volume da pilha 2. Da mesma maneira, as pilhas de papel 1, 2 e 3 "ocupam o mesmo espaço", isto é, têm o mesmo volume.

A conclusão a que acabamos de chegar é o significado do princípio de Cavalieri, que diz o seguinte:

Sejam dois sólidos A e B apoiados em um plano α horizontal. Se qualquer outro plano β paralelo a α que seccionar os dois sólidos, determinar duas regiões planas de mesma área, então podemos concluir que os sólidos A e B têm o mesmo volume. Veja na figura:

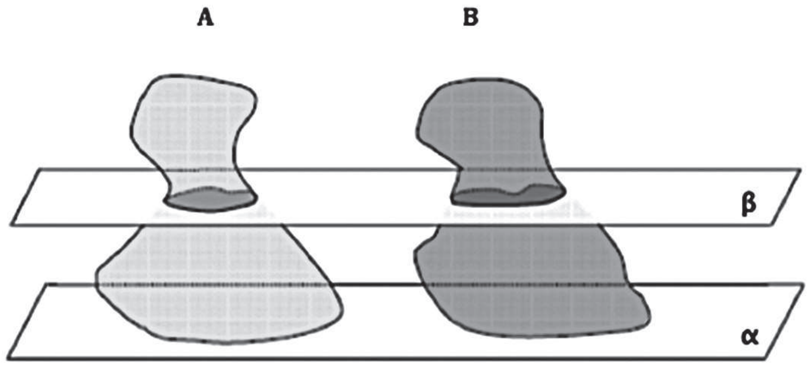


Figura 15 – Dois sólidos de formatos diferentes apoiados sobre um plano α e cortados por um plano β, paralelo a α.

Conseguiram acompanhar? Quando passamos pelos dois sólidos um plano paralelo ao plano da base, delimitamos neste plano duas áreas, uma referente ao sólido da esquerda e outra referente ao sólido da direita. Elas estão marcadas em cinza escuro na figura 15. Viram? A ideia é: se estas áreas forem idênticas para todos os planos que forem paralelos à base e passarem pelos sólidos, então os dois sólidos têm o mesmo volume. Pense nas pilhas de moedas:

Bonaventura Francesco Cavalieri, nasceu na Itália em 1598. Foi discípulo de Galileu e publicou em 1635 a Teoria do indivisível, que hoje é conhecida como princípio de Cavalieri. Na época, sua teoria foi amplamente criticada mas esse princípio foi uma base importante para o desenvolvimento do cálculo integral.

Saiba Mais

Determinando o volume do prisma

Vamos agora considerar um paralelepípedo e um prisma pentagonal que possuem a mesma área da base e mesma altura, apoiados em um plano horizontal β. Como qualquer plano horizontal que seccione os prismas vai gerar regiões como áreas iguais, o volume do prisma será o mesmo do paralelepípedo retângulo. Por isso, poderemos calculá-lo da mesma maneira.

Volume prisma = área da base x altura

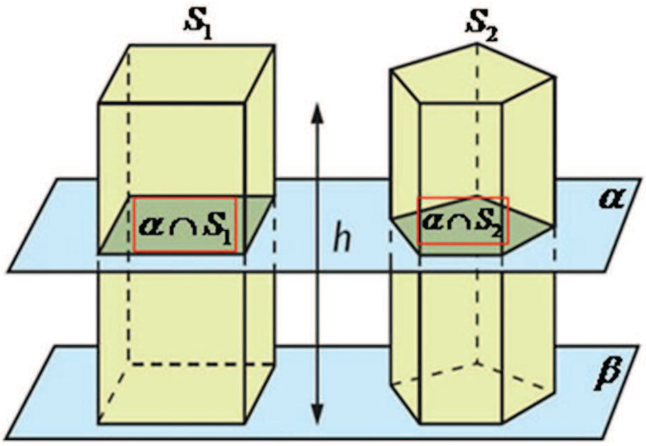
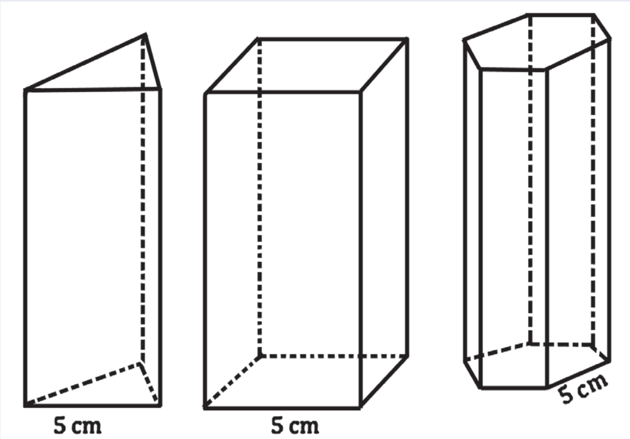


Figura 16 – Paralelepípedo e prisma de base pentagonal que, ao serem seccionados pelo plano α, delimitam figuras de mesma área.

Atividade 3

Você está desenvolvendo uma nova embalagem para o produto da empresa que você trabalha. Você desenhou três opções:



Todas têm a mesma altura e as bases são polígonos regulares. Em qual das embalagens cabe mais produto, ou seja, tem maior volume?

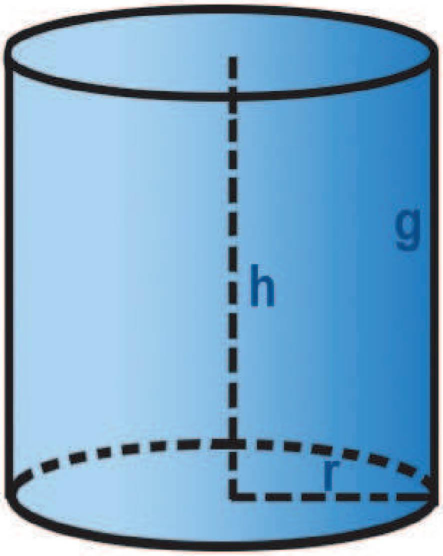
Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Área e volume do cilindro

Todos adoraram a ideia de construir a piscina, mas você ficou pensando se não seria muito melhor construir uma piscina diferente, como a da figura seguinte:

Figura 17 – Piscina com borda circular.

O raio da piscina é de 2,75m e sua profundidade de 2m. Como no caso anterior, você quis descobrir a quantidade de azulejo para revestir a piscina e a quantidade de água necessária para enchê-la (o volume). Primeiramente você desenhou um modelo para a piscina - um cilindro, certo?



raio (r) = 2,75 m

altura (h) = geratriz (g) = 2 m

Figura 18 – Cilindro utilizado para modelar a piscina.

Na verdade, você concluiu que ambas eram bem similares, a única diferença é que nesse caso as bases da piscina são circulares e não poligonais. Isso fez com que a piscina tivesse o formato de um cilindro, enquanto no modelo anterior, a piscina era um prisma de base retangular.

Para encontrar a metragem necessária de azulejo, será necessário encontrar a área lateral e a área de uma das bases do cilindro.

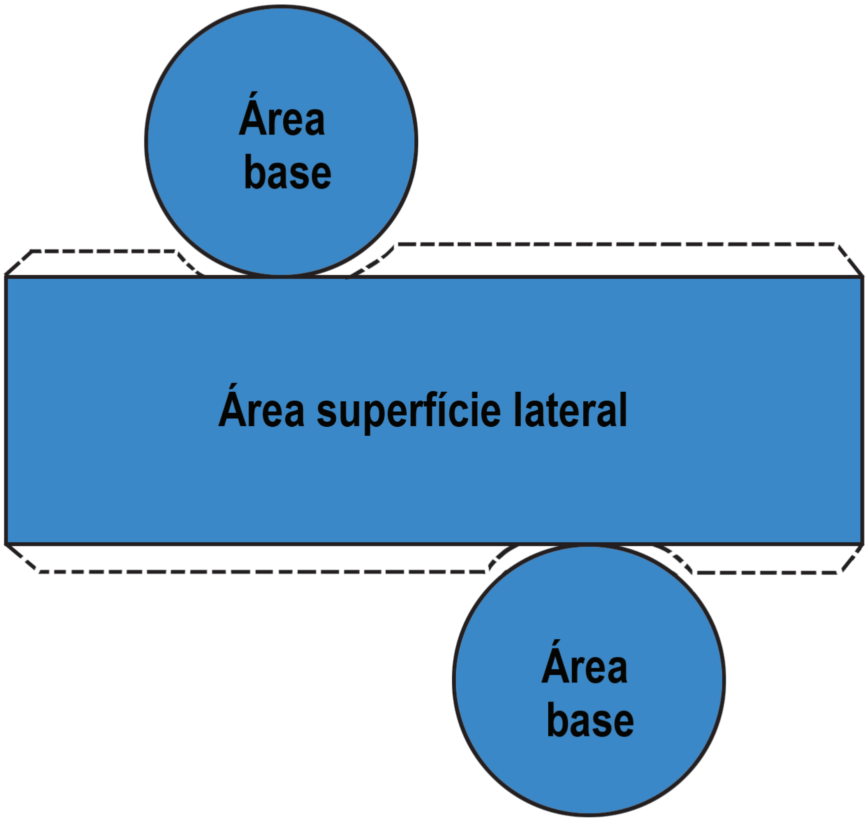


Figura 19 – Cilindro utilizado para modelar a piscina planificado e com indicações da área da base e da área lateral.

Como a base é um círculo, o calculo de sua área, como já sabemos, é dado por $A = \pi r^2$. Já a superfície lateral é um retângulo e a área é dada pela multiplicação da medida da base desse retângulo pela medida de sua altura. Se analisarmos a planificação do cilindro, vamos perceber que a base do retângulo é o comprimento da circunferência. Você conseguiu ver isso? Olhe para a base do retângulo na figura 19 e se imagine montando o cilindro. (Imagine tirar o rótulo de uma lata de leite) Procure perceber que a base do retângulo vai acompanhar toda a circunferência. Viu essa? Muito bem! Lembre-se ainda que o comprimento de uma circunferência é dado pela fórmula C = 2pr, em que r é a medida do raio da circunferência. Outra coisa importante a perceber é que a altura h do retângulo será justamente a altura do cilindro. Imaginar a montagem do cilindro a partir da planificação, novamente, ajuda muito a visualizar esta relação.

Então, a área da superfície lateral do cilindro será dada por: $A = 2\pi r h$, onde r é o raio da circunferência da base.

Resgatando nossos conhecimentos de Geometria Plana, lembramos que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por

$\boldsymbol{C = 2\pi r}$

Importante

Como a parte de cima também não será azulejada, a área da piscina que determina a quantidade de azulejo é

$A = \pi(2{,}75)^2 + 2.\pi.2{,}75.2$

$A = 7{,}5625\ \pi + 11\ \pi$

Considerando $\pi = 3{,}14$, teremos:

A = 7,5625 x 3,14 + 11 x 3,14

A metragem de azulejo necessária será de aproximadamente A $\cong$ 58,29 m2. Vale fazer o mesmo lembrete que fizemos para a piscina em forma de prisma: enquanto o sólido geométrico tem duas bases, a piscina tem uma base só, visto que sua parte superior será aberta. Ou seja, se quisermos calcular a área do cilindro, deveremos contar as duas bases de área πr^2. A área total do cilindro será dada então por:

Área Total = 2 x Área Base + Área Superfície Lateral

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Para encontrar a quantidade necessária de água, vamos calcular o volume do cilindro que é dado da mesma maneira que o volume do prisma, ok?

Volume Cilindro = Área Base x Altura

$V = \pi r^2 h$

Desta maneira, o volume dessa nova piscina será de:

$V = \pi.(2,75)^2.2$

A quantidade de água necessária para encher a piscina será de aproximadamente:

V $\cong$ 47,49 m3 o que equivale a 47.490 dm3 = 47.490 litros

Atividade 4

Levando em consideração a quantidade de azulejo necessária para revestir a piscina e o volume de cada um dos modelos, qual dos modelos você acha mais vantajoso escolher: a piscina em forma de prisma com base retangular ou de cilindro?

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

Prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).

Quando o prisma for reto, a altura é dada pela distância entre as bases. As arestas são os lados dos polígonos das bases e das faces laterais.

Área Superfície Prisma = Área Lateral + 2 X Área da Base

Volume prisma = área da base x altura

Princípio de Cavalieri: sejam dois sólidos A e B apoiados em um plano α horizontal. Se qualquer outro plano β paralelo a α que seccionar os dois sólidos, determinar duas regiões planas de mesma área, então podemos concluir que os sólidos A e B têm o mesmo volume.

Todo objeto tridimensional composto pela sobreposição de infinitos círculos de mesmo diâmetro e com os centros pertencentes a uma mesma reta é denominado cilindro.

A altura do cilindro é dada por meio da distância entre os planos das bases. A reta que passa pelo centro das bases é chamada eixo do cilindro.

As geratrizes são segmentos paralelos ao eixo cujas extremidades são pontos da circunferência.

.A superfície do cilindro é composta pelas bases e pela superfície lateral

Área Total = 2 X Área Base + Área Lateral

$A = 2\pi r^2 A = 2\pi r^2 + 2\pi r h 2\pi r h$

Volume Cilindro = Área Base x Altura

V = $\pi r^2 h \pi r^2 h$

Conclusão

Partimos dos experimentos da física sobre viagem no tempo e da decomposição da luz para discutir os conceitos, elementos e classificar prismas e cilindros. Em seguida, mergulhamos em uma situação bem prática da construção da piscina para o lazer da sua família para discutir área e volume do prisma e do cilindro. Além disso, vimos algumas semelhanças entre prismas e cilindros, que diferem um do outro pela questão da base. No prisma, as bases são regiões poligonais, enquanto no cilindro as bases são circulares.

É muito importante ressaltar que esses sólidos são amplamente utilizados tanto para questões para modelagem da ciência como para questões do dia a dia.

Referências

Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=933240

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=194975

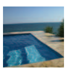
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1023311

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1256359

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1357259

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=887805

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=967833



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097480

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=424289

• http://www.sxc.hu/photo/475767

• http://www.sxc.hu/photo/517386

Bibliografia

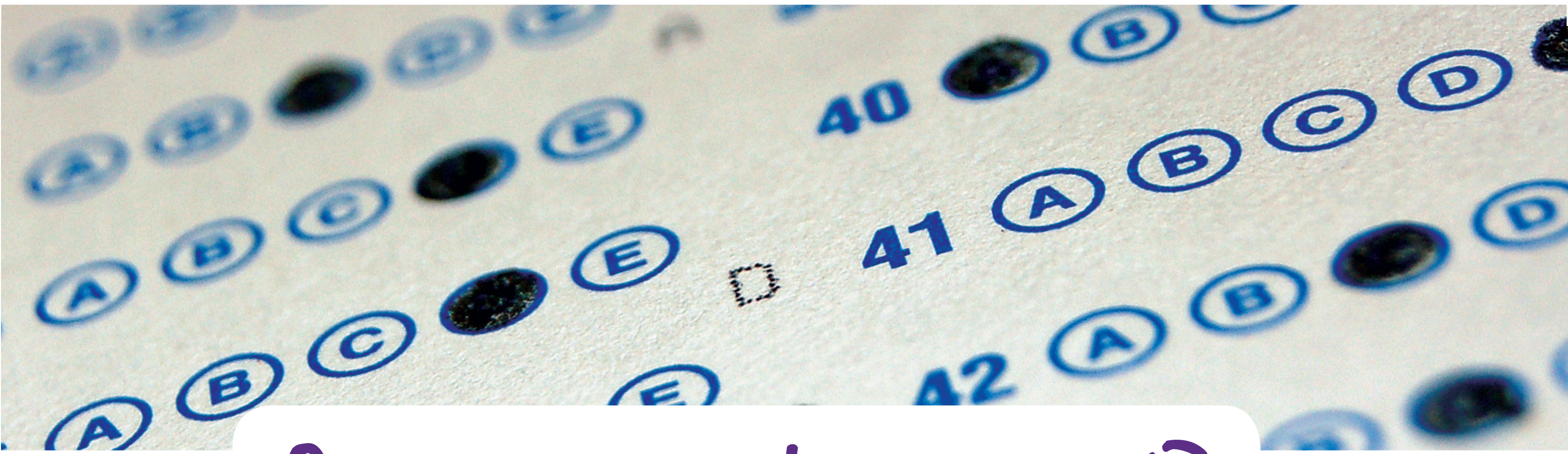
- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. Matemática Ciência e Aplicações 1. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. Temas e Problemas. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- ________________________. A Matemática do Ensino Médio Volume 1. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexo e Aplicações Volume 1. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

Veja ainda

Assista ao vídeo em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042 e descubra com Caio, assistindo ao programa Animais Curiosos apresentado por James Calafrio, um pouco mais sobre as abelhas e seus alvéolos hexagonais. Não esqueça-se de usar seus conhecimentos matemáticos.

Acessando http://www.cienciamao.usp.br/dados/tex/_volumedesolidos você encontra uma animação em que o líquido de uma esfera de raio r e um cone de raio r e altura 2r serão despejados em um cilindro de raio r e altura 2r. Primeiramente o líquido da esfera será despejado dentro do cilindro. Em seguida, será a vez do líquido do cone. Descubra o que acontece!!!!

Assista ao programa sobre o Princípio de Cavalieri disponível no link http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040 e ajude Carol que recebe misteriosas instruções, juntamente com a estudante de arquitetura Rita, a resolver três enigmas.



O que perguntam por aí?

UFMG - 2008 Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de comprimento, 5 m de largura e 120 cm de profundidade. Bombeia-se água para dentro desse reservatório, inicialmente vazio, a uma taxa de 2 litros por segundo. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários.

A) 40 min.

B) 240 min.

C) 400 min.

D) 480 min.

Comentários

Primeiramente vamos transformar as medidas do reservatório em decímetro. Pois como sabemos 1 litro corresponde a 1 decímetro cúbico.

Então:

8 m = 80 dm

5 m = 50 dm

120 cm = 12 dm

O volume do paralelepípedo pode ser calculado da seguinte maneira:

V = altura x largura x comprimento

Assim, temos

V = 80 x 50 x 12

V = 48 000 dm3

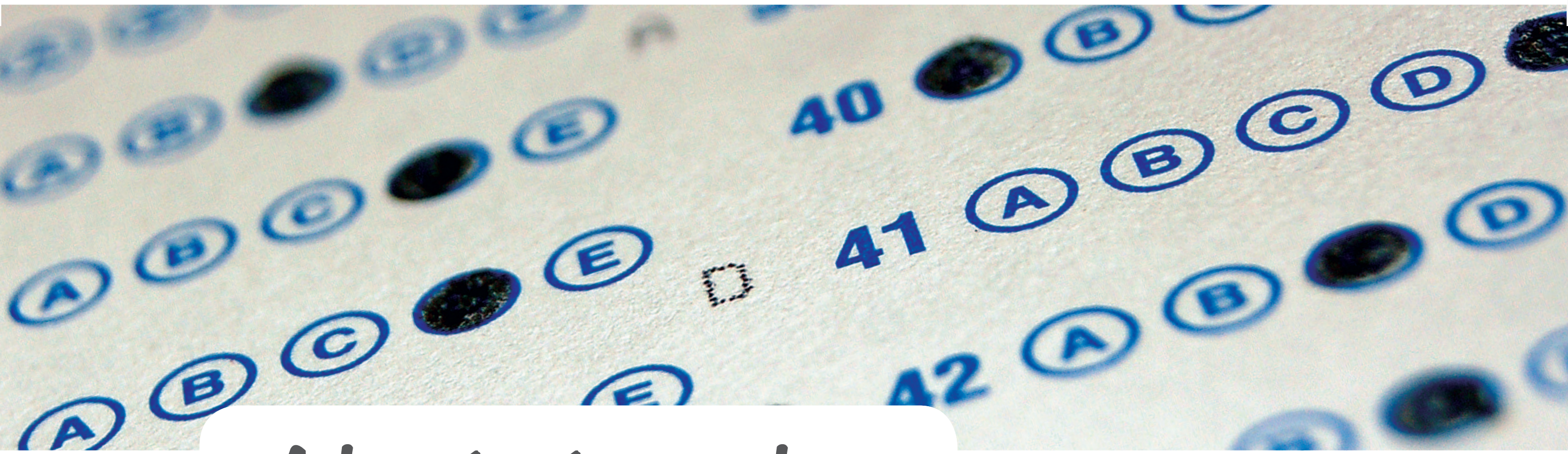
V = 48 000 l

Como bombeia-se água a uma taxa de 2 l por segundo, temos que:

48 000 : 2 = 24 000 s

24 000 : 60 = 400 min

Gabarito: C.

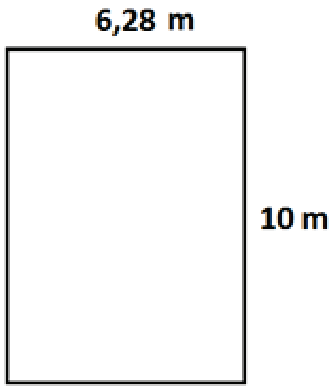


Atividade extra

Módulo 3 • Matemática • Unidade 23

Prismas e Cilindros

Exercício 23.1 A figura ilustra a planificação da superfície lateral de um cilindro reto de 10 metros de altura. Considere $\pi = 3,14$.



Qual o valor da área total desse cilindro, em metros quadrados?

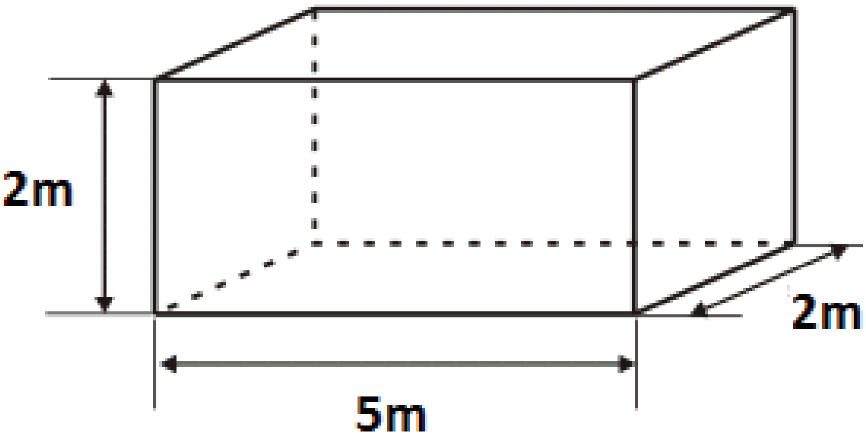
(a) $62,8$ **(b)** $69,08$ **(c)** $75,36$ **(d)** $76,32$

Exercício 23.2 Uma caneta esferográfica possui um tubo de $0,2$ cm de diâmetro e 12 cm de comprimento. A tinta para escrever fica acondicionada dentro desse tudo. Considere $\pi = 3,14$.

Que volume de tinta, em cm^3, poderá ser acondicionado no tubo?

(a) $0,3768$ **(b)** $1,5072$ **(c)** $3,7680$ **(d)** $7,5360$

Exercício 23.3 Um caminhão pipa carrega $9,42$ mil litros de água quando está com sua capacidade máxima. Desejamos encher um tanque em formato de paralelepípedo, como ilustrado na figura.

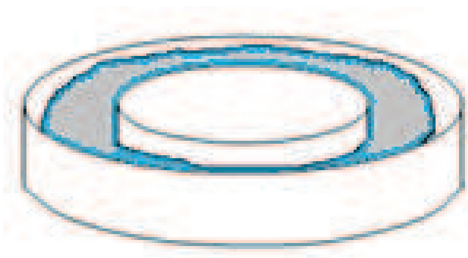


Lembre que $1m^3 = 1000$ litros.

Quantos caminhões, com a capacidade máxima de água, serão necessários para encher o tanque?

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 3 **(d)** 4

Exercício 23.4 Um profissional de Arquitetura e Urbanismo projetou uma fonte para ser colocada na praça de sua cidade. O tanque da fonte é tal como ilustra a figura.



O tanque tem o formato de dois cilindros de mesmo centro, com altura igual a $0,8$ m e de raios iguais a 2 m e 3 m, respectivamente. Qual a capacidade de água do tanque da fonte em m^3?

(a) $2,5120$ **(b)** $10,048$ **(c)** $12,560$ **(d)** $22,608$

Exercício 23.5 Para fazer uma caixa sem tampa com apenas um pedaço retangular de papelão, de medidas 12 cm de largura por 25 cm de comprimento, foram retirados de cada um dos cantos do retângulo um quadrado de mesma área. Em seguida, dobra-se as quatro bordas para cima formando a caixa desejada. A caixa assim produzida utiliza 236 cm^2 de papelão.

Quanto deve ser, em cm, o lado do quadrado a ser retirado de cada canto do papelão?

(a) 2 **(b)** 4 **(c)** 6 **(d)** 8

Exercício 23.6 Um cubo de lado 10 teve a medida da aresta aumentanda em uma unidade.

Qual o percentual de aumento no volume?

(a) $20,1\%$ **(b)** $26,1\%$ **(c)** $33,1\%$ **(d)** $37,1\%$

Exercício 23.7 (UFGO - adaptada) Um pedaço de cano com 30 cm de comprimento e 10 cm de diâmetro interno, encontra-se na posição vertical e tem a parte inferior vedada. Consideremos que 1 dm^3 = 1litro

O que acontece com a água ao colocarmos exatamente 3 litros dessa substância no cano?

(a) transborda

(b) não chega ao meio do cano

(c) enche o cano até a borda

(d) atinge exatamente o meio do cano

Exercício 23.8 Considere um prisma reto de base quadrada, cuja altura mede 3 m e que tem área total de 54 m^2.

Quanto mede (em metros) o lado da base do prisma?

(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 3 **(d)** 4

Exercício 23.9 Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 20 cm e 12 cm, são derretidos e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de base quadrada de lado 16cm e altura desconhecida.

Qual é o valor da altura do paralelepípedo, em centímetros?

(a) 34 **(b)** 36 **(c)** 37 **(d)** 38

Exercício 23.10 Um fabricante de embalagens de papelão quer construir uma caixa em forma de prisma triangular regular. A altura da caixa deve ser de 12 cm e o lado do triângulo da base deve medir 10 cm. Na construção de cada caixa, o fabricante perde, em média 10% do material utilizado. Considere $\sqrt{3} = 1,73$.

Quantos cm^2 de papelão são gastos na fabricação de cada caixa?

(a) $446,51$ **(b)** $491,15$ **(c)** $519,16$ **(d)** $570,92$

Exercício 23.11 Uma olaria (fábrica de tijolos) recebeu uma encomenda para produzir 5000 tijolos compactos, com dimensões de 18cm$\times$9cm$\times$6cm.

Qual o volume dessa encomenda?

Exercício 23.12 Um tanque tem a forma de paralelepípedo de lados $0,8$ m e $1,2$ m e está parcialmente cheio de água. Um objeto é colocado no tanque e fica completamente imerso, fazendo o nível da água subir em $0,09$ m.

Qual o volume desse objeto?

Exercício 23.13 Um galpão tem a forma de um paralelepípedo com 30 m de comprimento, 72 m de largura e 6 m de altura. Deseja-se armazenar neste galpão caixas cúbicas com 3 m de lado.

Quantas caixas é possível armazenar nesse galpão?

Exercício 23.14 - Uma caixa d´água tem forma cúbica com 1metro de aresta. Retira-se dessa caixa d'água 1 litro de água.

Quantos centímetros descerá o nível da água?

Exercício 23.15 Uma caixa de papelão será fabricada por uma indústria com as seguintes medidas: 40 cm de comprimento, 20 cm de largura e 15 cm de altura. Essa caixa irá armazenar doces na forma de um prisma com as dimensões medindo 8 cm de comprimento, 4 cm de largura e 3 cm de altura.

Qual o número de doces necessários para o preenchimento total da caixa fabricada?

Gabarito

Exercício 23.1 b

Exercício 23.2 a

Exercício 23.3 c

Exercício 23.4 c

Exercício 23.5 b

Exercício 23.6 c

Exercício 23.7 a

Exercício 23.8 c

Exercício 23.9 d

Exercício 23.10 b

Exercício 23.11 O volume da encomenda será

$$18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5000 = 4860000\,\text{cm}^3$$

ou

$$4,86\,\text{m}^3.$$

Exercício 23.12 O volume do objeto é igual ao volume de um paralelepípedo de lados $0,8$ m e $1,2$ m e altura $0,09$ m, pois ao ser colocado no tanque o objeto eleva o nível da água em $0,09$ m. Assim, denotando por V_0 o volume do objeto temos

$$V_0 = 0,8 \cdot 1,2 \cdot 0,09 = 0,0864$$

Portanto, $V_0 = 0,0864$ m^3

Exercício 23.13 Como a caixa tem 3 m de lado pode-se enfileirar $\frac{30}{3} = 10$ caixas no lado de comprimento 30 m, $\frac{72}{3} = 24$ caixas no lado de comprimento 72 m e empilhar $\frac{6}{3} = 2$ caixas uma sobre a outras. Portanto, podem ser armazemandas

$$10 \cdot 24 \cdot 2 = 480\,\text{caixas.}$$

Exercício 23.14 Como 1 $m^3 = 1000$ litros, então 1 litro $= 0,001$ m^3. Se h é a medida em que o nívelda água desceu temos

$$1 \times 1 \times h = 0,001$$

Então $h = 0,001$ m, que equivale à $0,1$ cm ou 1 mm.

Exercício 23.15 Volume da caixa$= 40 \times 20 \times 15 = 12000$ cm^3. Volume do doce $= 8 \times 4 \times 3 = 96$ cm^3.

$$\frac{\text{Volume da caixa}}{\text{volume do doce}} = \frac{12000}{96} = 125$$

Cabem 125 doces dentro da caixa.