Módulo 3 • **Matemática** • Unidade 30

Sistemas Lineares

Para início de conversa...

Diversos problemas interessantes em matemática são resolvidos utilizando sistemas lineares. A seguir, encontraremos exemplos de alguns desses problemas:

1. O problema da população: a população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes. Qual a população da cidade B?

Observação: A população de uma cidade é a quantidade de habitantes daquela cidade.

2. O problema do pagamento com notas específicas: Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?

3. O problema do teste: um professor de matemática aplicou um teste com 20 questões, e cada questão que o aluno acertasse receberia 5 pontos e cada questão que ele errasse perderia 3 pontos. Sabendo que Emília conseguiu 60 pontos nesse teste, quantas questões ela errou?

4. O problema da pontuação de cada medalha:

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação geral das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?[2]

Todos esses problemas apresentados podem ser traduzidos para uma linguagem algébrica, escritos na forma do que chamamos de sistemas lineares, e então resolvidos por alguns métodos que aprenderemos mais adiante. Voltaremos e resolver os problemas anteriores no decorrer desta aula. Fiquem tranquilos e diminuam a ansiedade!

Objetivos de aprendizagem

- – Identificar uma equação linear.
- - Aprender a encontrar a solução de uma equação linear.
- - Identificar um sistema linear.
- - Identificar sistemas possíveis e impossíveis.
- - Identificar um sistema na forma escalonada.
- - Resolver um sistema por escalonamento.

Seção 1
Problemas envolvendo equação linear

Diversos problemas da vida cotidiana podem ser traduzidos para a linguagem algébrica na forma do que chamamos de equação linear. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo: Miguel foi sacar R$ 70,00 em um caixa eletrônico que tinha apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 20,00. Quantas notas de cada ele pode ter recebido do caixa eletrônico?

Vamos resolver este problema?

Primeiramente observamos que, como o problema trabalha com a quantidade de notas concluímos que estamos lidando com números naturais (1, 2, 3,...), afinal, não faz sentido falar em "um terço de nota" ou "raiz quadrada de três notas", certo?

Bem, para facilitar nossa vida, utilizamos letras para representar os números que procuramos, traduzindo o problema inicial para uma linguagem algébrica... Calma, não é algo difícil! Veja só! O que estamos interessados em descobrir? Isso mesmo! A quantidade de notas de 10 reais e de 20 reais que Miguel pode ter recebido. Essas serão as nossas variáveis (letras)...

Podemos utilizar duas letras quaisquer para representar essas quantidades. Vamos escolher, então, x para representar o número de notas de R$ 10,00 e y para o número de notas de R$ 20,00. Traduzindo o nosso problema, encontraremos a nossa equação linear $10 . x + 20 . y = 70$, ou podemos apenas escrever $10x + 20y = 70$, afinal, já aprendemos que quando vemos um número e uma letra juntas a operação que estamos utilizando é a multiplicação.

E por que escrevemos 10x e 20y? Como x representa a quantidade de notas de 10 reais que o caixa eletrônico liberou, 10x representa a quantia em reais com notas de 10 reais, ou seja, se o caixa eletrônico liberar três notas de 10 reais e duas notas de 20 reais, por exemplo, isso quer dizer que Miguel recebeu $10.3 = 30$ reais em notas de dez reais e $20.2 = 40$ reais em notas de 20 reais, totalizando $30 + 40 = 70$ reais, que fora o valor solicitado por Miguel. Mas observe que esta não é a única possibilidade! Vamos construir uma tabela com todas as possibilidades? Sim!!!

Uma das maneiras de encontrarmos todas as soluções de uma equação desse tipo é atribuirmos valores a uma de nossas incógnitas para encontrarmos o valor da outra, encontrando assim o que chamamos de solução da equação. Observe que já conhecemos uma solução, $x = 3$ e $y = 2$, que representaremos pelo par ordenado (3,2), pois quando substituímos esses valores na equação $10x + 20y = 70$ encontramos uma sentença verdadeira. Encontremos as outras possíveis soluções:

Para x = 0, temos: $10x + 20y = 70 \rightarrow 10.0 + 20y = 70 \rightarrow 0 + 20y = 70 \rightarrow y = \frac{70}{20} = 3{,}5$ --- o que é impossível, pois não podemos ter esta quantidade de notas (três notas e meia???).

Para x = 1, temos que $10.1 + 20y = 70$. Resolvendo essa equação, temos: $10 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}10 \rightarrow 20y = 60 \rightarrow y = \frac{60}{20} = 3$. Portanto, (1,3) é solução da equação linear.

Para x = 2, temos: $10.2 + 20y = 70 \rightarrow 20 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}20 \rightarrow 20y = 50 \rightarrow y = \frac{50}{20} = 2{,}5$ --- impossível novamente!

Para x = 3, temos: $10.3 + 20y = 70 \rightarrow 30 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}30 \rightarrow 20y = 40 \rightarrow y = \frac{40}{20} = 2$. Portanto, (3,2) é solução da equação linear conforme já havíamos visto!

Para x = 4, temos: $10.4 + 20y = 70 \rightarrow 40 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}40 \rightarrow 20y = 30 \rightarrow y = \frac{30}{20} = 1{,}5$ --- impossível novamente.

Para x = 5, temos: $10.5 + 20y = 70 \rightarrow 50 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}50 \rightarrow 20y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{20} = 1$. Portanto, (5,1) é solução da equação linear.

Para x = 6, temos: $10.6 + 20y = 70 \rightarrow 60 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}60 \rightarrow 20y = 10 \rightarrow y = \frac{10}{20} = 0{,}5$ ---impossível novamente.

Para x = 7, temos: $10.7 + 20y = 70 \rightarrow 70 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}70 \rightarrow 20y = 0 \rightarrow y = \frac{0}{20} = 0$. Portanto, (7,0) é solução da equação linear.

O que aconteceria se pensássemos em x = 8? Faça as contas e conclua porque nós paramos no x = 7 ...

Podemos, então, construir a tabela das possibilidades que atendem às condições do problema:

x **(nº de notas de R$ 10,00)**	**y** **(nº de notas de R$ 20,00)**
1	3
3	2
5	1
7	0

Assim, os pares ordenados (1,3), (3,2), (5,1) e (7,0) são as soluções do problema.

Esta equação que encontramos, $10x + 20y = 70$, que representa nosso problema, é chamada de equação linear, pois todas as variáveis (x e y neste caso) têm o expoente igual a 1. Por exemplo, a equação $x^2 + 4y + z = 0$ não é uma equação linear, pois o expoente da variável x não é igual a 1.

Além disso, não chamamos de lineares as equações com termo misto (que contém produto de duas ou mais variáveis). Por exemplo, as equações $xy + 3 = 0$ e $a + b + cd = 23$ não são equações lineares, pois possuem termo misto.

Verificando a solução de uma equação linear e encontrando algumas soluções

Atividade 1

Dada a equação linear $2x + 3y = 11$, faça o que se pede.

a. Verifique se (2,3) é solução da equação.

b. Encontre a solução da equação que temos $x = -1$.

c. Encontre a solução da equação que temos $y = 5$.

d. Encontre outra solução qualquer diferente das encontradas no item b e c.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Aprendendo um pouco de Sistemas lineares 2 x 2

O objetivo desta seção é aprender a reconhecer um sistema linear e resolvê-lo, sempre traduzindo um problema para a linguagem algébrica.

Sistemas lineares 2x2 – aprendendo a resolver...

Voltemos ao problema 1, do início de nossa aula – O problema da população: a população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes. Qual a população da cidade B?

Vamos resolver este problema!? Bem, observemos que temos duas equações lineares neste problema e o conjunto dessas duas equações será o que chamamos de sistema linear 2x2.

Inicialmente o problema diz que: "A população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B"; chamando de x a população da cidade A e de y a população da cidade B, podemos escrever da afirmação entre aspas: x = 4y.

Temos outra afirmação no problema de onde podemos escrever outra equação linear: "Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes". Desta afirmação podemos escrever que x + y = 250.000.

Podemos então escrever uma equação em baixo da outra utilizando o símbolo chaves da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Esta forma de representar é o que chamamos de sistema de equações (no caso, equações lineares). O que seria resolver esse sistema linear? Seria encontrar valor de x e de y que satisfaça tanto a equação x = 4y quanto a equação x + y = 250.000. Observe que podemos encontrar solução para uma equação que não satisfaça a outra. Por exemplo, (4,1) é solução da equação x = 4y, visto que 4 = 4.1, mas (4,1) não satisfaz a equação x + y = 250.000, pois 4 + 1 é diferente de 250.000. Portanto, (4,1) não é solução do sistema.

Bem, como encontrar, então, a solução deste sistema? Existem alguns métodos para resolver um sistema linear 2x2. Vamos utilizar o método da substituição para resolver este nosso problema. Outros métodos serão apresentados em um Box Saiba Mais posteriormente.

No que consiste o método da substituição? Consiste em isolar uma das variáveis e então substituir seu valor respectivo na outra equação.

No caso do nosso sistema $\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$ a variável x da equação de cima já está isolada em função do y. Então, no lugar do x da equação de baixo, basta colocar 4y no lugar do x. Entendeu? Vamos lá então...

Temos a equação x + y = 250.000, substituindo encontraremos:

4y + y = 250.000. Agora basta resolvermos a equação do primeiro grau e encontrar o valor de y...

5y = 250.000 → y = $\frac{250000}{5}$ = 50.000 habitantes. Como queríamos descobrir a população da cidade B, o problema foi resolvido, visto que encontramos y = 50.000, que é a população da cidade B. Mas e se quiséssemos encontrar a população da cidade A? Bastaria voltarmos a qualquer uma das equações e substituir y por 50.000. Voltando à equação x = 4y, teríamos: x = 4 . 50.000 = 200.000 habitantes. Vamos representar esta solução pelo par ordenado (200000, 50000). Simples, não é mesmo?

Um sistema linear 2 x 2, é um conjunto de duas equações lineares com duas variáveis.

Importante

- Resolvendo um sistema 2x2 pelo método da adição:

Explicaremos agora como resolver um sistema pelo método da adição. Para tal, utilizaremos o mesmo sistema que resolvemos pelo método da substituição, verificando assim a mesma solução. O sistema que resolveremos então é este aqui:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Pelo método da adição: o método da adição consiste em somar as equações de forma que uma das variáveis desapareça, resultando, assim, numa equação com uma única variável, que será facilmente solucionável. Lembrando que podemos multiplicar uma equação por qualquer número real e ela será uma equação equivalente (possuirá as mesmas soluções), resolvemos facilmente o sistema.

Organizando melhor nosso sistema, "passando o y para o primeiro membro" (somando -4y a ambos os membros) na equação x = 4y, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Vamos agora multiplicar a primeira equação (a equação de cima) por (-1). Mas por que professor? Porque assim, como temos x na segunda equação (a equação de baixo), quando somarmos (-x) com x, irá desaparecer o x e encontraremos uma equação apenas com a incógnita y, ficando assim simples de encontrar o valor de y... Observe:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \quad .(-1) \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Ficamos com:

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Somando as duas equações do último sistema, encontramos a equação:

-x + x + 4y + y = 250.000 → 5y = 250.000 → y = 50.000 habitantes. Substituindo o valor de y em qualquer uma das duas equações, encontraremos o valor de x. Por exemplo, substituindo na segunda equação, teremos: x + 50.000 = 250.000 → x = 250.000-50.000 = 200.000 habitantes, que é a mesma solução que encontramos anteriormente. Simples, não é?

- Resolvendo um sistema 2x2 pelo método da comparação:

Explicaremos agora como resolver um sistema pelo método da comparação. Para tal, utilizaremos o mesmo sistema (novamente) que resolvemos pelo método da substituição e da adição, verificando assim que possuirá a mesma solução. O sistema que resolveremos é este aqui:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Para resolver um sistema pelo método da comparação, devemos isolar a mesma variável nas duas equações (qualquer uma das duas) no primeiro membro e então igualar o segundo membro das equações, desta maneira encontrando o valor de uma das variáveis. Vejamos como fica:

Observe que na primeira equação (x = 4y) o x já está isolado. Isolando o x na segunda equação, encontramos x = 250.000-y, ficando com o seguinte sistema em que ambas as equações expressão o valor de x:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x = 250000 - y \end{cases}$$

Daí, podemos escrever a seguinte equação comparando essas duas: 4y = 250.000-y, que resolvendo temos:

4y + y = 250.000 → 5y = 250.000 → y = 50.000. Substituindo em qualquer uma das duas equações, encontramos o valor de x. Por exemplo, utilizando a segunda equação, temos: x = 250.000-50.000 = 200.000 habitantes. Simples, não?

Atividade 2

O problema do pagamento com notas específicas

Resolva o problema do pagamento com notas específicas, do início da aula, utilizando um dos três métodos de solução de sistema 2x2. O enunciado do problema é: Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?

Anote suas respostas em seu caderno

O problema do teste

Atividade 3

Resolva o problema do teste do início da aula utilizando um dos três métodos de solução de sistema 2x2. O enunciado do problema é: Um professor de matemática aplicou um teste com 20 questões, e cada questão que o aluno acertasse receberia 5 pontos e cada questão que ele errasse perderia 3 pontos. Sabendo que Emília conseguiu 60 pontos nesse teste, quantas questões ela errou?

Anote suas respostas em seu caderno

Interpretação geométrica e classificação de um sistema linear 2 x 2

Podemos resolver um sistema linear 2x2 graficamente. Como? Basta lembrar que uma equação com duas variáveis pode ser "vista" como a lei de formação de uma função polinomial do 1º grau cujo gráfico é uma reta, como já estudamos.

Vejamos alguns exemplos:

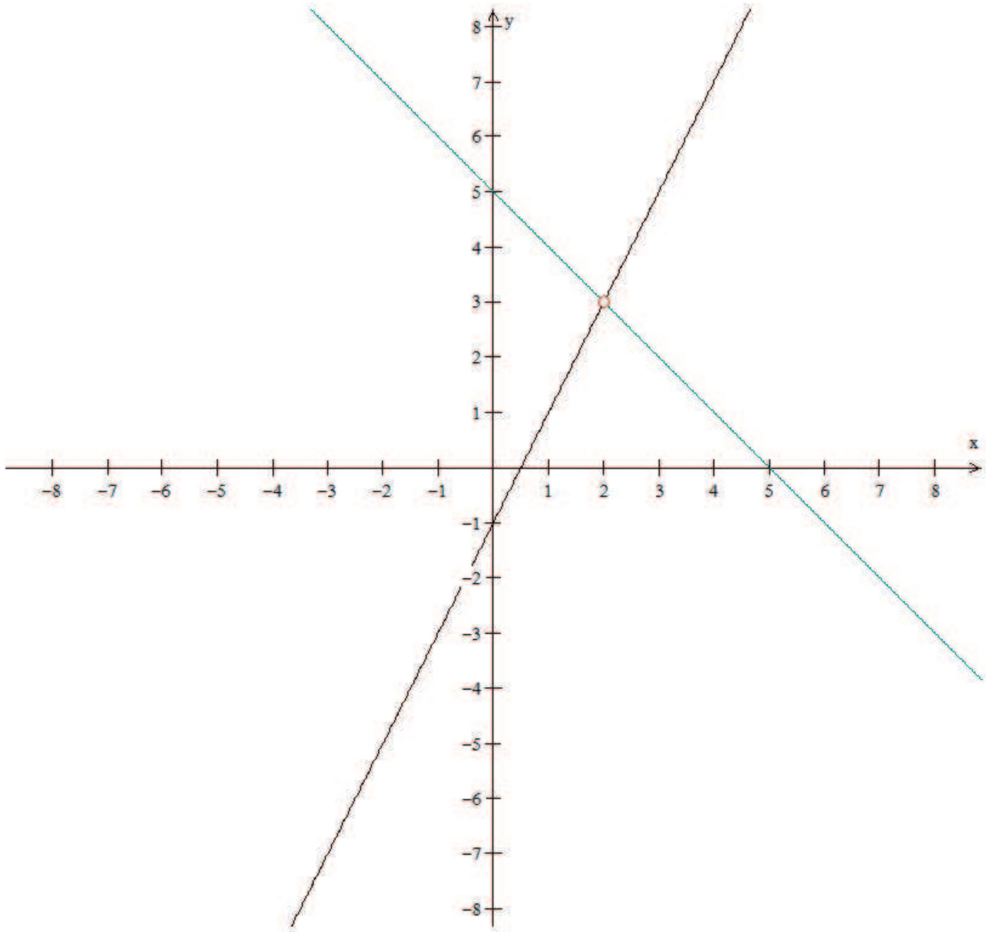
1. Observe o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Aplicando o método da adição na resolução desse sistema, teríamos x + y + 2x – y = 5 + 1. Cancelando os termos simétricos, teríamos 3x = 6, donde concluímos que x = 2. Substituindo esse valor na primeira equação teríamos que y = 3. Essa solução possui uma interpretação gráfica.

Observem que a equação linear x + y = 5 é equivalente a y = 5-x, que é a lei de uma função polinomial do 1º grau, cujo gráfico é uma reta e passa pelos pontos (0,5) e (5,0), e podemos ver seu gráfico a seguir, assim como a equação 2x-y = 1 é equivalente a y = 2x-1, cujo gráfico também se encontra a seguir.

Construindo os gráficos das funções, encontramos:



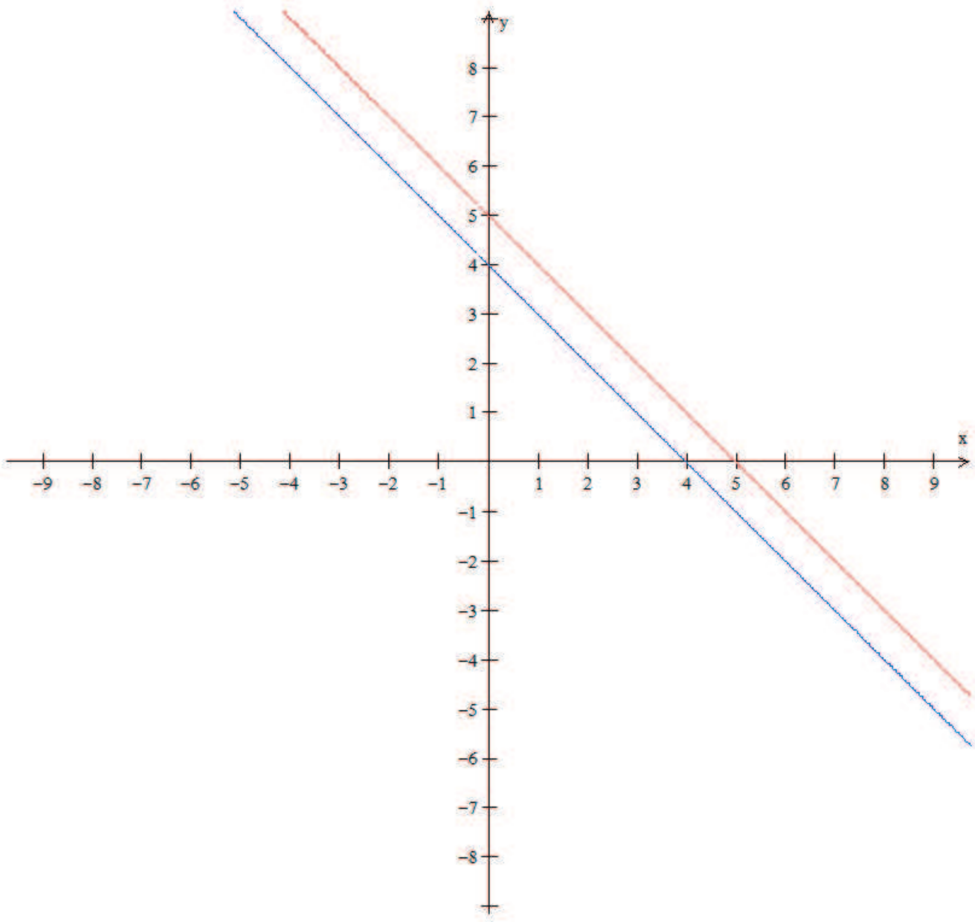
Observem que estas retas possuem um único ponto, (2,3), como ponto de intersecção, que é a solução procurada do sistema linear. Como o sistema possui uma única solução S = {(2,3)}, ele é chamado de sistema possível e determinado.

2. Observe o sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Esse sistema é equivalente ao sistema de equações y = -x + 5 e y = -x + 4. Ora, se aplicamos o método da comparação em sua resolução, concluímos que –x + 5 = -x + 4, ou seja, 5 = 4. Isso é impossível! Vamos ver a interpretação gráfica dessa situação?

Da mesma maneira que no exemplo 1, construindo os gráficos das funções, encontramos:



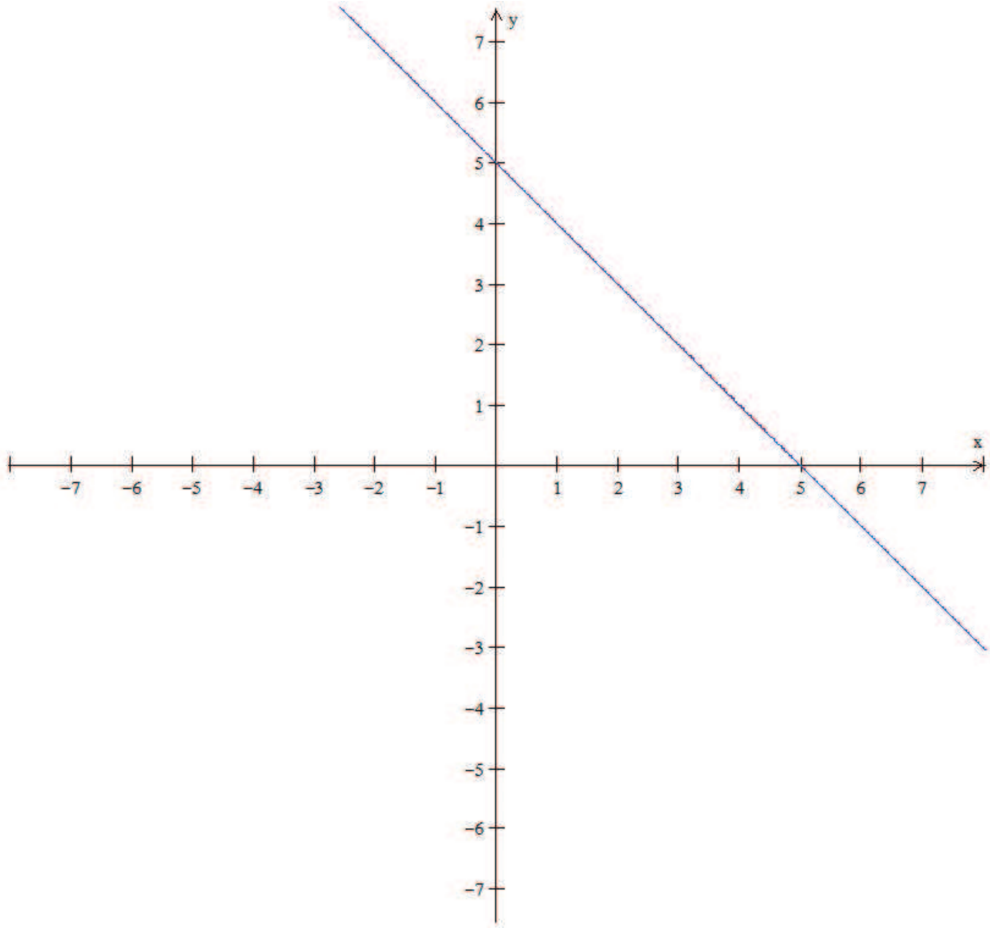
Podemos observar que as retas são paralelas, ou seja, não possuem ponto em comum. Nesse caso, dizemos que o sistema é impossível! A solução é o conjunto vazio: S = ∅.

3. Observe o sistema.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + 4y = 20 \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a y = -x + 5. A segunda equação pode ser simplificada (todos os termos podem ser divididos por 4), de modo que teríamos x + y = 5. Da mesma forma, essa segunda equação é equivalente a y = – x + 5. Ora, se usamos o método da comparação, teríamos que –x + 5 = -x + 5. Tal fato é verdadeiro para qualquer valor de x. Vamos à interpretação gráfica dessa situação.

Da mesma maneira que nos exemplos anteriores, construiremos os gráficos das funções:



Podemos observar que as retas são coincidentes e, portanto, o sistema será possível e indeterminado, visto que ele admitirá infinitas soluções.

Assim, vemos que os sistemas podem ser classificados a partir da interpretação gráfica.

1. As retas são concorrentes: Quando isso ocorrer, haverá um ponto apenas em comum e diremos que o sistema é possível e determinado (SPD), visto que só existirá uma única solução.

2. As retas são paralelas (distintas): Quando isso ocorrer, as retas não terão pontos em comum e diremos que o sistema é impossível (SI), visto que não haverá soluções para ambas as equações ao mesmo tempo.

3. As retas são coincidentes: Quando isso ocorrer, as retas terão infinitos pontos em comum e diremos que o sistema é possível e indeterminado (SPI), visto que existirão soluções (possível), porém infinitas (indeterminado).

Seção 3
Aprendendo um pouco sobre Sistemas lineares m x n

Nesta seção aprenderemos a resolver alguns sistemas lineares com mais equações e mais incógnitas que no sistema linear 2x2 que possuía apenas duas equações e duas incógnitas.

O que é um sistemas linear m x n?

Bem, um sistema linear m x n nada mais é do que um sistema linear com m equações e n incógnitas. Por exemplo:

a. O sistema linear $\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x-y=1 \\ x-5y+4z=0 \end{cases}$ é um sistema linear com três equações e três incógnitas.

b. O sistema linear $\begin{cases} a+b=5 \\ a-c=-10 \\ b+c+d=10 \\ a-2e=\frac{4}{3} \end{cases}$ é um sistema linear com quatro equações e cinco incógnitas (a, b, c, d, e)

c. O sistema linear $\begin{cases} x+2y-3z+w=k \\ 10x-y+7k-4w=0 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e cinco incógnitas.

Solução de um Sistema linear

Uma solução de um sistema linear é uma sequência de números reais quando é solução de cada uma das equações do sistema. Por exemplo, no sistema linear $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-y=3 \\ x-5y+4z=-7 \end{cases}$ temos que (2,1, -1) é uma solução, pois se fizermos x = 2, y = 1 e z = -1 em cada equação do sistema encontraremos sentenças verdadeiras: 2 + 1-(-1) = 4; 2.2-1 = 3; 2-5.1 + 4.(-1) = -7.

Sistemas escalonados

Observemos alguns exemplos de sistemas escalonados:

a. $\begin{cases} x+y-z=5 \\ \quad y-z=1 \\ \qquad 2z=4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-y+z=5 \\ \quad y-3z=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4a+b-3c+4d-e=6 \\ \qquad c+2d-5e=-1 \\ \qquad\qquad d+e=10 \end{cases}$

Mas por que o chamamos de escalonados? É simples, basta observar que o nº de coeficientes (números reais que acompanham as variáveis) não nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Resolução de um sistema escalonado

Para resolvermos um sistema escalonado, temos que separá-los em dois tipos:

1º) Sistema com número de equações igual ao número de variáveis:

Para resolver um sistema linear escalonado, em que o número de equações é igual ao número de variáveis, basta encontrar o valor de uma das variáveis (geralmente situada na última equação) e ir substituindo nas outras equações de cima para encontrar o valor das outras variáveis.

Por exemplo, no sistema $\begin{cases} x+y-z=5 \\ \quad y-z=1 \\ \qquad 2z=4 \end{cases}$ temos:

2z = 4 $\rightarrow$ z = 2. Substituindo na equação de cima, teremos:

y-2 = 1 $\rightarrow$ y = 1 + 2 = 3, que finalmente, substituindo na primeira equação, encontraremos: x + 3-2 = 5 $\rightarrow$ x = 5-1 = 4. Portanto, a solução do sistema é (4,3,2).

Importante

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações igual ao número de variáveis, ele é possível e determinado, ou seja, ele terá uma única solução.

2º) Sistema com número de equações menor que o número de variáveis:

Para resolver um sistema linear escalonado, onde o número de equações é menor que o número de variáveis, colocaremos uma ou mais variáveis em função de um número real qualquer (outra variável). Parece difícil, mas não é. Observe o exemplo a seguir atentamente:

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ \quad y - 3z = 0 \end{cases}$$

Observe que temos duas equações e três variáveis e, portanto, estamos neste tipo de sistema escalonado. Da última equação temos que, se y-3z = 0, então y = 3z, certo? Então, façamos z = α. Daí, y = 3α. Finalmente utilizando a primeira equação, teremos que, se x-y + z = 5, então x = 5 + y-z = 50 + 3α – α = 5 + 2α.

Portanto, teremos a solução geral (5 + 2α,3 α, α), onde $\alpha \in$ R.

Observe que para cada valor de α real teremos uma solução do sistema. Por exemplo, para α = 0, teremos (5 + 2.0,3.0,0) = (5,0,0); para α = 10, teríamos como solução (5 + 2.10,3.10,10) = (25,30,10). Logo, o sistema será possível e indeterminado.

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações menor do que o número de variáveis, ele é possível e indeterminado, ou seja, ele terá infinitas soluções.

Importante

Escalonando um sistema e resolvendo-o

Para escalonar um sistema, utilizamos as seguintes "propriedades":

1. Podemos multiplicar ambos os membros de uma equação qualquer por um número real k, diferente de zero.
2. Podemos substituir uma equação do sistema pela soma dela, membro a membro, com alguma outra equação.
3. Podemos trocar a posição de duas equações do sistema.

Qual a ideia para encontrarmos um sistema escalonado? A ideia é:

- Escolher para a primeira equação aquela em que o coeficiente da 1ª variável seja não nulo. Se possível, fazer a escolha de tal coeficiente igual a 1 para facilitar os cáculos.
- Anulamos o coeficiente da 1ª variável das demais equações, utilizando a "propriedade" II.
- Utilizar a segunda equação para anular o coeficiente da 2ª variável das demais equações. (Não fazer na primeira equação.)
- Repetir o processo até a última equação.

Exemplo: Escalonar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x+y+z=0 \\ 5x+2y-z=2 \end{cases}$$

Como o coeficiente da variável x é igual a 1, basta partirmos para alunar o coeficiente das outras equações. Para tal, basta substituirmos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2:

$$\begin{array}{r} -2x-2y-4z=-8 \\ 2x+y+z=0 \quad + \\ \hline -y-3z=-8 \end{array}$$

Do mesmo modo, substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por (-5):

$$\begin{array}{r} -5x-5y-10z=-20 \\ 5x+2y-z=2 \quad + \\ \hline -3y-11z=-18 \end{array}$$

Ficamos, então, com o sistema assim:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ -y-3z=-8 \\ -3y-11z=-18 \end{cases}$$

Para ficar mais simples de fazer os cálculos, multipliquemos a segunda e a terceira equações por (-1):

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ y+3z=8 \\ 3y+11z=18 \end{cases}$$

Agora basta substituirmos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª multiplicada por -3:

$$\begin{array}{r} -3y-9z=-24 \\ 3y+11z=18 \quad + \\ \hline 2z=-6 \end{array}$$

Encontramos, então, o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ \quad y + 3z = 8 \\ \qquad 2z = -6 \end{cases}$$

Como o sistema possui 3 equações e 3 variáveis, sabemos que este sistema é possível e determinado. Resolvendo...

$2z = -6$

$z = -3$

Substituindo na segunda equação: y + 3.(-3) = 8 → y-9 = 8 → y = 8 + 9 = 17, que substituindo na primeira equação: x + 17 + 2.(-3) = 4 → x = 4-17 + 6 = -7.

Portanto, a solução procurada é (-7,17,-3).

O problema da pontuação de cada medalha

Atividade 4

Resolva o problema do início da aula sobre a pontuação de cada medalha:

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação geral das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

Escolas	Medalhas			Pontuação final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?[2]

Anote suas respostas em seu caderno

Como vocês viram, é muito interessante o estudo de sistemas lineares, principalmente para resolução de problemas envolvendo situações reais, como foi o caso do problema do caixa eletrônico e do problema das medalhas.

Esperamos que vocês utilizem o conhecimento desta aula para facilitar a resolução de seus problemas, não somente utilizando a Aritmética substituindo valores, mas também utilizando a Álgebra.

Resumo

Nesta aula pudemos estudar principalmente:

- Equações lineares – vimos que estas são equações nas quais as variáveis têm expoentes iguais a 1 e não têm termos mistos. Por exemplo, $x + 3k + 9e = 3$ é uma equação linear, mas $x^2 + 4y = 0$ não é uma equação linear.
- Sistemas lineares – aprendemos a identificar um sistema linear e a reconhecer quando ele é:

  Possível – Quando há solução. Dividimos em dois:

  - Possível e Determinado: quando há apenas uma única solução; quando trabalhamos com sistemas 2x2, vimos que geometricamente representamos por duas retas concorrentes.
  - Possível e Indeterminado: o sistema possui infinitas soluções e quando trabalhamos com sistemas 2x2 vimos que geometricamente representamos por duas retas coincidentes.
- Finalmente, quando o Sistema é Impossível é porque não há solução e no sistema 2x2 representamos por retas paralelas.

Veja ainda

Recomendamos um vídeo do youtube para aprenderem a resolver de outra maneira um sistema linear, por uma regra conhecida como "regra de Cramer". O link é http://www.youtube.com/watch?v = 3FpN8wsOsi8&feature = fvst.

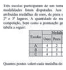
Referências

Livros

- IEZZI, Gelso, et al. **Matemática Ciência e Aplicações**. 6ª ed., vol. 2. São Paulo, 2010. 320 p.

Imagens

- Imagem retirada do Google



- Problema retirado de uma dissertação de mestrado, que fora adaptado do livro Matemática, volume único, do autor: DANTE.

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. Para verificar se (2,3) é solução da equação, nós substituímos x por 2 e y por 3 na equação, verificando assim se a sentença é verdadeira ou não. No caso, temos: 2.2 + 3.3 = 4 + 9 = 13 e, portanto, (2,3) não é solução, pois não encontramos 11 e sim 13.

b. Substituindo x por -1 na equação, teremos: 2 . (-1) + 3y = 11, daí
-2 + 3y = 11, então 3y = 11 + 2 >> 3y = 13>> y = $\frac{13}{3}$. Portanto, a solução procurada é (-1, $\frac{13}{3}$).

c. Substituindo y por 5 na equação, teremos que: 2x + 3.5 = 11 >> 2x + 15 = 11. Daí, 2x = 11-15 >> 2x = -4 >> x = $\frac{-4}{2}$ = -2. Portanto, a solução procurada é (-2,5).

d. Para encontrar outra solução qualquer, basta atribuirmos algum valor para x e encontrar o correspondente para y. Por exemplo, se fizermos x = 2, teremos: 2.2 + 3y = 11 >> 4 + 3y = 11>> 3y = 11-4>> 3y = 7 >> y = $\frac{7}{3}$. Portanto, uma solução será (2, $\frac{7}{3}$).

Atividade 2

Se chamarmos de x o número de notas de R$ 10,00 e y o número de notas de R$ 50,00, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10x + 50y = 350 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

Resolvamos pelo método da adição. Multiplicando a segunda equação por -10, encontramos: -10x-10y = -150. Somando as equações, teremos:

40y = 200 → y = 5. Substituindo o valor de y na primeira equação, encontramos o valor de x: 10x + 50. 5 = 350 → 10x + 250 = 350 → 10x = 350-250 = 100 → x = 10.

Portanto, Roberto utilizou 10 notas de R$ 10,00 e 5 notas de R$ 50,00.

Respostas das Atividades

Atividade 3

Chamemos de x o nº de questões que Emília acertou e de y o nº de questões que ela errou. Daí, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 60 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Resolveremos desta vez por substituição. Isolando a variável x da segunda equação, encontraremos: x = 20-y. Substituindo na primeira equação para encontrar o valor de y, temos: 5(20-y)-3y = 60 → 100-5y-3y = 60 →

-8y = 60-100 → -8y = -40 → y = 5.

Portanto, Emília errou 5 questões.

Atividade 4

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação geral das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

Escolas	Medalhas			Pontuação final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?[2]

Chamemos de x a quantidade de pontos que vale cada medalha de ouro, de y a quantidade de pontos que vale cada medalha de prata e de z a quantidade de pontos que vale cada medalha de bronze.

Traduzindo o problema, utilizando a tabela, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Vamos escalonar esse sistema: Substituímos a 2ª equação pela soma dela com 3ª equação multiplicada por (-1):

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ x - 2z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Trocamos de posição a primeira e a segunda equações:

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 46 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por (-4) e substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por (-4):

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ 2y + 10z = 30 \\ 3y + 11z = 37 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ y + 5z = 15 \\ 3y + 11z = 37 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª multiplicada por

(-3):

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ y + 5z = 15 \\ -4z = -8 \end{cases}$$

Agora com o sistema escalonado, basta encontrarmos a solução:

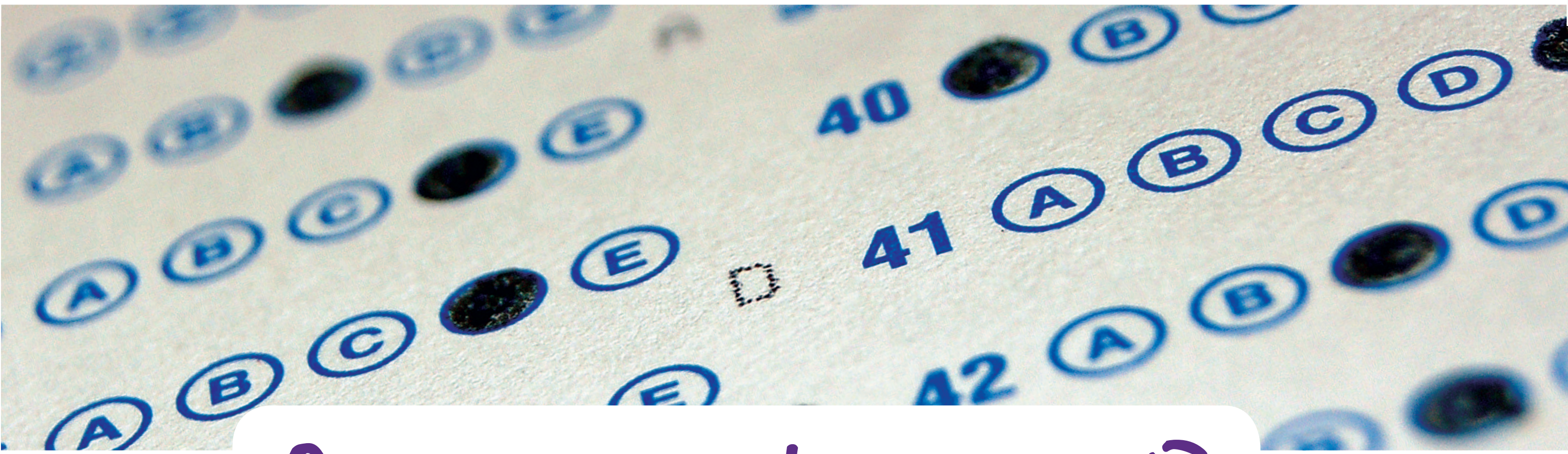
-4z = -8>> z = 2

Substituindo na segunda equação: y + 5.2 = 15>>y = 15-10 = 5.

Substindo na primeira equação: x-2.2 = 4>>x = 4 + 4 = 8.

Portanto, a medalha de:

- ouro vale 8 pontos.
- prata vale 5 pontos.
- bronze vale 2 pontos.



O que perguntam por aí?

(UENF) Para preencher sua necessidade diária de 300g de carboidratos, um adulto ingere um tipo de alimentação mista que consiste em batatas e soja.

Admita que 100g de batata e 100g de soja contêm, respectivamente, 19g e 35g de carboidratos, e que x e y representam as quantidades diárias, em gramas, que esse adulto irá consumir, respectivamente, de batatas e soja.

Considerando a necessidade diária de carboidratos desse adulto:

a. Calcule a quantidade de soja, em gramas, que ele deverá ingerir num determinado dia em que tenha consumido 400g de batata;

b. Estabeleça uma equação que relacione as variáveis x e y.

Solução:

a. Se ele consumiu 400g de batata e a cada 100g ele ingere 19g de carboidratos, foram ingeridos 4x19 = 76g de carboidratos. Para atender à necessidade diária de 300g, restam 224g de carboidratos. Assim, a quantidade de soja a ser ingerida deve ser (224:35)x100 = 640g.

b. A equação é $0{,}19x + 0{,}35y = 300$.

(UNI-Rio) Um laboratório farmacêutico fabrica 3 tipos de remédios utilizando diferentes compostos. Considere a matriz $A = (a_{ij})$ dada a seguir, onde a_{ij} representa quantas unidades do composto j serão utilizadas para fabricar uma unidade do remédio do tipo i.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Quantas unidades do composto 2 serão necessárias para fabricar 3 remédios do tipo 1; 2 remédios do tipo 2 e 5 remédios do tipo 3?

a. 19

b. 21

c. 24

d. 27

e. 30

Solução: O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 1 é o elemento a_{12}, ou seja, 2.

O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 2 é o elemento a_{22}, ou seja, 5.

O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 3 é o elemento a_{32}, ou seja, 1.

Logo, a resposta é 3x2 + 2x5 + 5x1 = 21.

(UFF) Na perfumaria XEROBOM, o xampu, o condicionador e a loção de sua fabricação estão sendo apresentados aos clientes em três tipos de conjuntos:

Conjunto	y (nº de notas de R$ 20,00)
2 loções e 3 xampus	R$ 38,00
4 xampus e 2 condicionadores 3	R$ 26,00
2 loções e 1 condicionado	R$ 31,00

Determine o preço de cada um desses produtos, considerando que o preço individual de cada produto é o mesmo, independente do conjunto ao qual pertence.

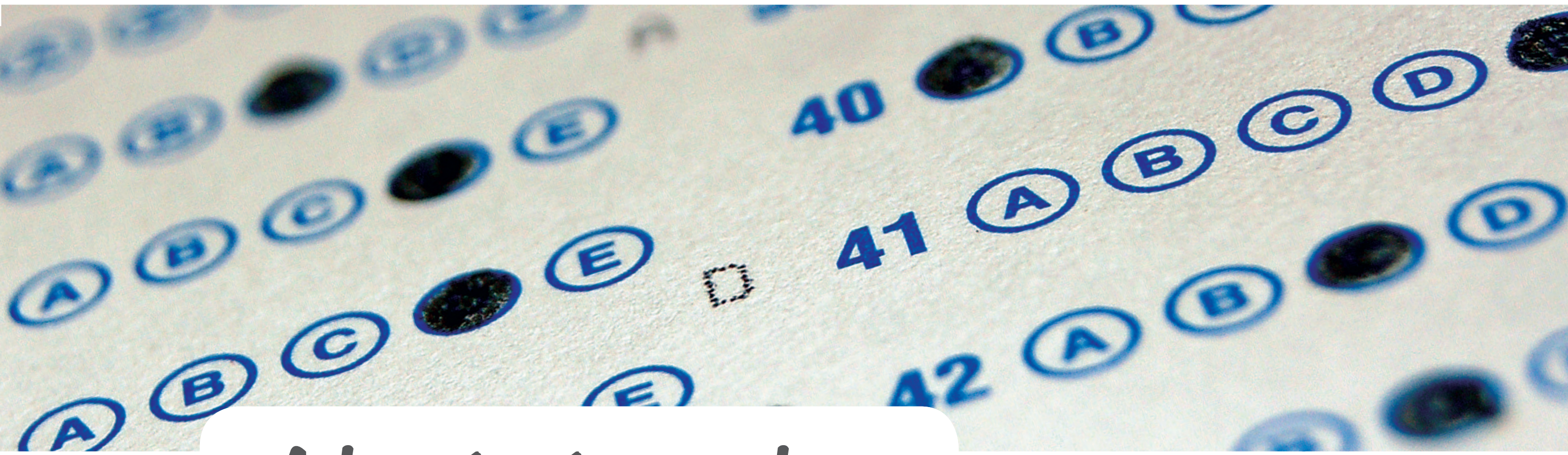
Solução: Se x, y e z são respectivamente os preços individuais do xampu, do condicionador e da loção, temos as seguintes equações para a situação-problema proposta:

$3x + 2z = 38$

$4x + 2y = 26$

$y + 2z = 31$

Na terceira equação, temos que $y = 31 - 2z$. Substituindo y por $31 - 2z$ na 2ª equação, teremos $4x + 2(31 - 2z) = 26 \longrightarrow 4x + 62 - 4z = 26 \longrightarrow 4x + 36 = 4z$, que é equivalente a $x + 9 = z$. Substituindo z por $x + 9$ na 1ª equação temos $3x + 2(x + 9) = 38$ è $3x + 2x + 18 = 38 \longrightarrow 5x = 20 \longrightarrow x = 4$. Como $z = x + 9$, $z = 13$. Como $y = 31 - 2z$, $y = 5$.



Atividade extra

Módulo 3 • Matemática • Unidade 30

Sistemas Lineares

Exercício 30.1 Um casal pagou R$ 5,40 por 2 latas de refrigerante e uma porção de batatas fritas, enquanto um segundo pagou R$ 9,60 por 3 latas de refrigerante e 2 porções de batatas fritas.

Qual a diferença entre o preço de uma porção de batatas fritas e o preço de uma lata de refrigerante?

(a) R$ 2,00 **(b)** R$ 1,80 **(c)** R$ 1,75 **(d)** R$ 1,50

Exercício 30.2 A empresa *Brinque Muito* fez uma doação de brinquedos para um orfanato. Essa doação compreendeu: 535, entre bolas e bonecas; 370, entre bonecas e carrinhos, e 455, entre bolas e carrinhos.

Qual o número de carrinhos doados pela empresa?

(a) 135 **(b)** 145 **(c)** 155 **(d)** 170

Exercício 30.3 Em uma sala, havia certo número de jovens. Quando Paulo chegou, o número de rapazes presentes na sala ficou o triplo do número de garotas. Se Alice tivesse entrado na sala o número de garotas ficaria a metade do número de rapazes.

Qual o número de jovens que estavam inicialmente na sala?

(a) 11 **(b)** 9 **(c)** 8 **(d)** 6

Exercício 30.4 O diretor de uma empresa convocou todos os seus funcionários para uma reunião. Com a chegada do diretor à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala. Se o diretor não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens.

Qual a quantidade de pessoas na sala aguardando o diretor?

(a) 20 **(b)** 19 **(c)** 18 **(d)** 15

Exercício 30.5 Em dado instante de uma festa 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram convidados na razão de 3 mulheres para cada homem.

Qual o número de pessoas presentes inicialmente na festa?

(a) 100 **(b)** 105 **(c)** 115 **(d)** 130

Exercício 30.6 Uma loja vende: uma faca, duas colheres e três garfos por R$ 23,50; duas facas, cinco colheres e seis garfos por R$ 50,00; duas facas, três colheres e quarto garfos por R$ 36,00.

Qual seria o valor pago por meia dúzia de cada?

(a) R$ 65,00 **(b)** R$ 75,00 **(c)** R$ 85,00 **(d)** R$ 95,00

Exercício 30.7 Para pesar 3 maçãs, dispomos de um peso de 100 g e de uma balança de pratos iguais. O peso da maçã maior é igual ao peso das duas outras juntas. O peso da menor mais 100 g iguala ao peso das outras. A maior mais a menor pesam 100 g.

Qual o peso das três?

(a) 125 g **(b)** 150 g **(c)** 175 g **(d)** 200 g

Exercício 30.8 Um teste é composto por 50 questões. Na correção, uma questão vale 3 pontos e uma errada -2 pontos. Ao terminar essa prova alguem atingiu 75 pontos.

Quantas questões essa pessoa acertou?

(a) 25 **(b)** 30 **(c)** 35 **(d)** 40

Exercício 30.9 A soma das idades da Ana, do José e da Sara é 60 anos. A Ana é mais velha que o José pelo mesmo número de anos que o José é mais velho que a Sara. Quando o José tiver a idade que a Ana tem hoje, a Ana terá três vezes a idade que a Sara tem hoje.

Qual a idade de Sara?

(a) 10 **(b)** 12 **(c)** 14 **(d)** 15

Exercício 30.10 Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. A terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do número de balas de laranjas em 4 unidades.

Qual o número de balas de hortelã?

(a) 20 **(b)** 22 **(c)** 24 **(d)** 28

Exercício 30.11 Uma florista vende arranjos de flores com rosas, margaridas e cravos nos tamanhos pequeno, médio e grande. Cada arranjo pequeno contém uma rosa, três margaridas e três cravos. Cada arranjo médio contém duas rosas, quatro margaridas e seis cravos. Cada arranjo grande contém quatro rosas, oito margaridas e seis cravos. Um dia, a florista notou que havia usado um total de 24 rosas, 50 margaridas e 48 cravos ao preparar as encomendas desses três tipos de arranjos.

Quantos arranjos grandes fez a florista?

Exercício 30.12 Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia e lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, pesaram-se dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;

Carlos e Andreia pesam 123 kg;

Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Qual o peso de cada uma deles?

Exercício 30.13 Um clube promoveu um *show* de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1.400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. O preço do ingresso foi R$ 10,00 e cada sócio pagou meia entrada.

Qual o número de sócios e não sócios que compareceram ao *show*?

Exercício 30.14 Uma prova de múltipla escolha com 60 questões foi corrigida da seguinte forma: o aluno ganhava 5 pontos por questão que acertava e perdia 1 ponto por questão que errava ou deixava em branco. Um aluno totalizou 210 pontos.

Qual o número de questões que ele acertou?

Exercício 30.15 Quando um sistema linear tem mais variáveis que equações a solução não é única, então dizemos que tal sistema tem grau/graus de liberdade. Pesquise e exiba dois exemplos de situações práticas que correspondem a um sistema assim.

Gabarito

Exercício 30.1 b

Exercício 30.2 b

Exercício 30.3 a

Exercício 30.4 b

Exercício 30.5 d

Exercício 30.6 b

Exercício 30.7 b

Exercício 30.8 c

Exercício 30.9 d

Exercício 30.10 c

Exercício 30.11 4 arranjos.

Exercício 30.12 Andreia pesa 51 kg, Bidu 15 kg e Carlos 72 kg.

Exercício 30.13 120 sócios e 80 não sócios.

Exercício 30.14 45 questões

Exercício 30.15 Caro aluno! O incentivamos a pesquisar e discutir sua proposta de solução com um professor de sua unidade CEJA.