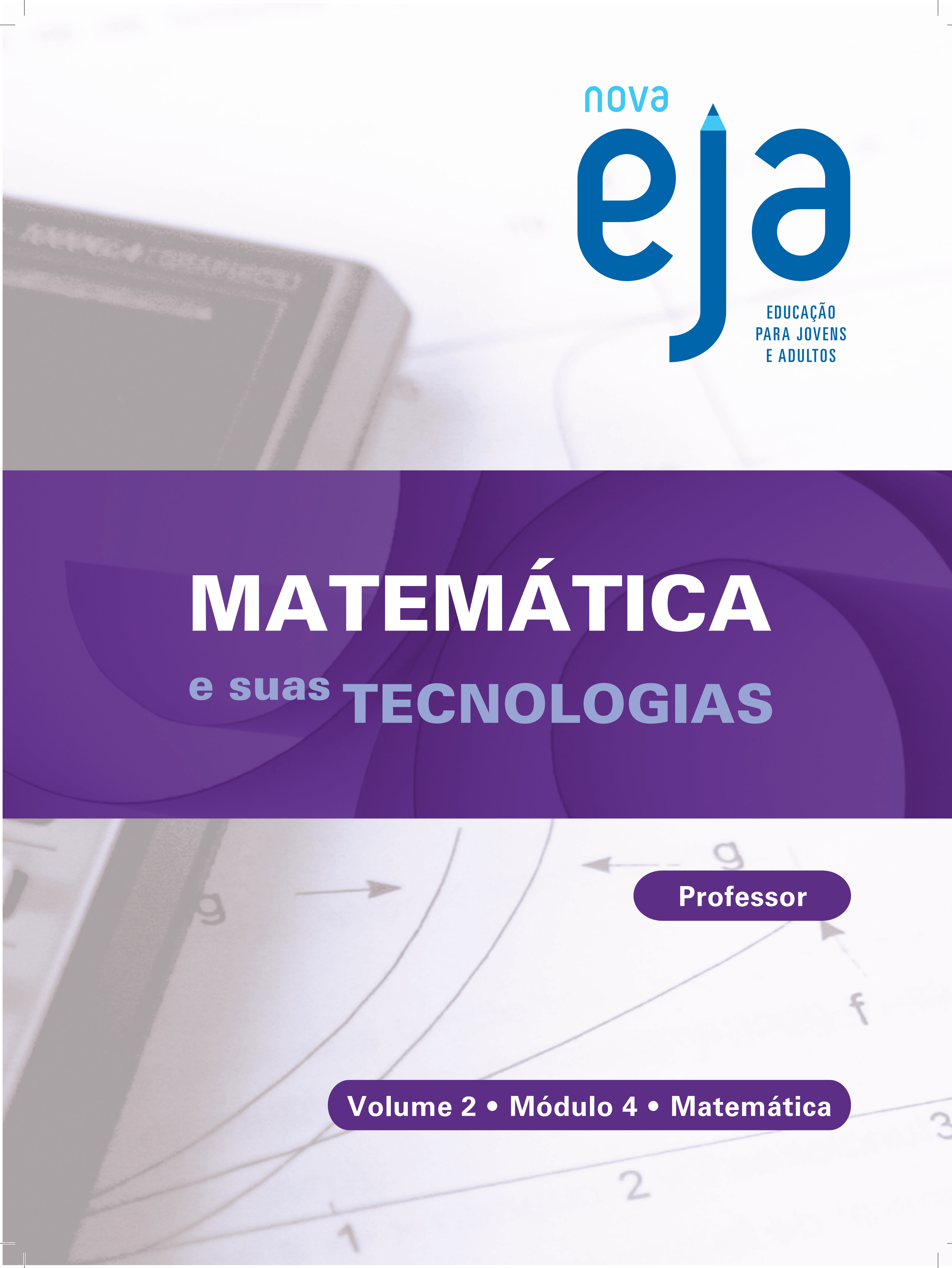


nova eja

EDUCAÇÃO PARA JOVENS E ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Professor

Volume 2 • Módulo 4 • Matemática

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Sergio Cabral

Vice-Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Educação
Wilson Risolia

Chefe de Gabinete
Sérgio Mendes

Secretário Executivo
Amaury Perlingeiro

Subsecretaria de Gestão do Ensino
Antônio José Vieira De Paiva Neto

Superintendência pedagógica
Claudia Raybolt

Coordenadora de Educação de Jovens e adulto
Rosana M.N. Mendes

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL NOVA EJA (CECIERJ)

Diretoria Adjunta de Extensão
Elizabeth Ramalho Soares Bastos

Coordenadora de Formação Continuada
Carmen Granja da Silva

Diretoria Adjunta de Material Didático
Cristine Costa Barreto

Coordenadores de Matemática
Agnaldo Esquincalha
Filipe Iorio
Gisela Pinto
Wallace Vallory Nunes

Elaboração
André Luiz Cordeiro dos Santos
André Luiz Martins Pereira
André Luiz Silva
Cleber Dias da Costa Neto
Cleber Fernandes
Érika Silos de Castro (coordenação)
Gabriela dos Santos Barbosa
Heitor Barbosa Lima de Oliveira
Josemeri Araujo Silva Rocha
Luciana Felix da Costa Santos
Luciane de Paiva Moura Coutinho
Patrícia Nunes da Silva
Renata Cardoso P. de Abreu
Telma Alves

Revisão de Língua Portuguesa
Paulo Cesar Alves

Coordenação de
Desenvolvimento Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Desenvolvimento Instrucional
Juliana Bezerra da Silva

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Projeto Gráfico e Capa
Andreia Villar

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
http://www.sxc.hu/photo/475767

Diagramação
Alexandre d' Oliveira
Alessandra Nogueira
André Guimarães
Andreia Villar
Bianca Lima
Bruno Cruz
Carlos Eduardo Vaz
Juliana Fernandes

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernando Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário

Material do Professor

Volume 2 • Módulo 4 • Matemática

Expansão: Análise Combinatória Parte II

Érika Silos de Castro (coordenação), André Luiz Martins Pereira, Luciana Felix da Costa Santos e Renata Cardoso Pires de Abreu.

Introdução

A unidade Análise Combinatória 2, da expansão do material do aluno, traz várias situações concretas em que são utilizados métodos de contagem e a Análise Combinatória. Nesta unidade, o aluno terá a oportunidade de ampliar as discussões realizadas em unidades anteriores, compreendendo princípios e conceitosenvolvidos neste tópico da Matemática, como o princípio fundamental da contagem e os conceitos de arranjo, combinaçãoe permutações com repetição.

Pesquisamos alguns recursos e atividades para auxiliar você, professor, a explorar este tema em suas aulas. Esperamos que estas sugestões venham complementar as estratégias que você já emprega normalmente, potencializando, assim, a utilização do material didático do aluno.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora, que deve ser realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, é esperado que eles desenvolvam e relembrem algumas noções e elementos relacionados à Análise Combinatória.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer alterações e adaptações sempre que julgar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro momento consiste numa revisão geral dos conteúdos, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o estudo. Já o segundo momento consiste numa avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

A descrição e o detalhamento das sugestões estão nas tabelas e textos a seguir.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	4	Análise Combinatória Parte II	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Análise Combinatória - Parte II	Análise Combinatória
Objetivos da unidade	
Identificar e resolver problemas que envolvam arranjo, combinação e permutação com repetição.	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	145 a 146
Seção 1 – Combinação e Arranjo	147 a 159
Seção 2 – Permutação com repetição	160 a 163
Seção 3 – Triângulo de Pascal (leitura opcional)	163 a 167
Resumo	167
Veja ainda...	167
O que perguntam por aí?	171 a 172

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

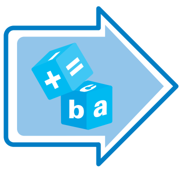
Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

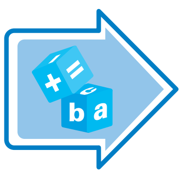
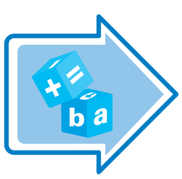
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	De malas prontas	Computador com Datashow, vídeo, software Geogebra instalado, folha de atividades, calculadora.	A atividade explora temas ligados à matemática combinatória, tais como o princípio fundamental da contagem e o conceito de fatorial.	Grupos de quatro alunos.	45 minutos
	Matemática na dieta	Computador com Datashow, folha de atividades e calculadora.	A atividade propõe, a partir da discussão da imagem de uma pirâmide alimentar e de um pequeno texto, uma aplicação de conhecimentos matemáticos para combinar diferentes tipos de alimentos. Após a leitura e discussão a respeito de bons hábitos alimentares, os alunos serão convidados a resolver as questões propostas na folha de atividades.	Grupos de 3 ou 4 alunos	40 minutos

Seção 1 – Combinação e Arranjo

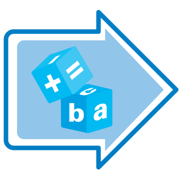
Páginas no material do aluno

147 a 159

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Combinação ou permutação, o que utilizar?	Cópias da folha de atividades.	A atividade propõe a resolução de problemas que envolvem conceitos de combinação e apresenta uma forma de raciocinar que dispensa a utilização da fórmula. A ideia éincentivar os alunos a compreender o raciocínio que justifica a fórmula de combinação simples. Esperamos também que eles observem que um mesmo problema pode ser resolvido a partir de estratégias distintas.	Duplas	45 minutos
	De quantas maneiras posso amarrar meu cadarço?	Cópias da folha de lápis, modelo sugerido	Nesta atividade, será enunciado um problema de combinatória para determinar o número de maneiras de passar o cadarço em um tênis, obedecendo a certas regras.	Grupos de quatro alunos.	40 minutos

Seção 2 – Permutação com repetição

Páginas no material do aluno
160 a 163

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Geometria do Taxista e Combinatória	Computador com Datashow, cópias dafolha de atividades, mapa.	A atividade propõe uma discussão acerca dos conceitos de combinação e permutação, a partir da apresentação de um vídeo e de um problema sobre a menor distância entre dois pontos no plano.	Individual.	45 minutos
	A Matemática no método Braille	Cópias da folha de atividade	A atividade propõe a resolução de um problema relacionado a conceitos combinatórios, utilizando como contexto a escrita em relevo do sistema Braille.	Trios	45 minutos

Seção – O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno
171 a 172

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de vestibular	Computador com Datashow, imagem para projeção (disponível neste material e no DVD do professor)	-	Duplas	-

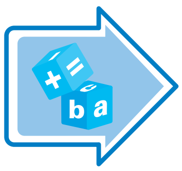
Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios adicionais	Cópias da folha de atividades	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas. A primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda na resolução de questões objetivas e dissertativas. A escolha das questões a serem aplicadas fica a critério do professor, levando em consideração as especificidades de cada turma.	Individual	40 minutos

Exercícios complementares

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios adiciona is	Cópias da folha de atividades	Essa atividade propõe alguns exercícios que podem auxiliar na fixação das principais noções ligadas a Análise Combinatória	Duplas ou Trios	-

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	De malas prontas	Computador com Datashow, vídeo, software Geogebra instalado, folha de atividades, calculadora.	A atividade explora temas ligados à matemática combinatória, tais como o princípio fundamental da contagem e o conceito de fatorial.	Grupos de quatro alunos.	45 minutos

Aspectos operacionais

A primeira etapa da atividade consiste na exibição do vídeo De malas prontas, que está disponível em seu DVD e também no site http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1083.

Professor, antes de dar início à atividade, verifique se o software Geogebra está corretamente instalado no computador. Também é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

No dia da aplicação da atividade, inicie a aula com a apresentação do vídeo, e somente após a execução do vídeo, solicite que a turma se divida em grupos de quatro alunos. Em seguida distribua uma folha de atividades para cada aluno, mas sugira que os integrantes do grupo tentem resolver às questões propostas juntos, de maneira que possam trocar ideias durante a execução da atividade.

Depois que os alunos tiverem respondido às primeiras quatro questões da folha de atividades, utilize o computador e oDatashow para projetar o gráfico contido no arquivo "Recurso – GRÁFICO FATORIAL – DE MALAS PRONTAS. ggb", disponível em seu DVD. A partir desse gráfico os alunos poderão, com a sua ajuda, responder à última questão proposta na folha de atividades.

Assim que todos os grupos tiverem terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as conclusões que eles alcançaram com essa exploração.

Aspectos pedagógicos

No *vídeo* utilizado, *são desenvolvidos os conceitos de Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e de fatorial. Para ilustrar cada uma dessas noções, são desenvolvidos problemas relativos à arrumação da mala de viagem da personagem Raquel. O problema proposto no vídeo com o objetivo* de que ilustrar o uso do PFC é o seguinte: de quantas maneiras uma pessoa pode se vestir, dado que possui dois pares de sapatos, três pares de meia, quatro calças e oito blusas?

É importante destacar para os alunos que o PFC pode ser utilizado para resolver muitos outros problemas de contagem, mas que não pode ser aplicado diretamente a todas as situações: o princípio parte da premissa de que as escolhas são feitas de forma independente, ou seja, a escolha de um tipo de elemento não influencia a escolha de nenhum outro. Por exemplo, consideremos a seguinte situação: gostaríamos de saber quantas são as senhas alfanuméricas de cinco dígitos de modo que se o primeiro dígito é preenchido por uma vogal o último também seja preenchido por uma vogal; se o primeiro dígito é preenchido por uma consoante o último também seja preenchido por uma consoante; e se o primeiro dígito é preenchido por um numeral o último também seja preenchido por um numeral. Nessa situação não é possível aplicar diretamente o PFC. Para aplicar o princípio, primeiro teremos que separar a situação em três casos: senhas iniciadas por vogal (5 x 31 x 31 x 31 x 4), senhas iniciadas por consoante (21 x 31 x 31 x 31 x 20) e senhas iniciadas por numeral (10 x 31 x 31 x 31 x 9), e depois somar os resultados.

Outro aspecto diz respeito à ordem dos elementos do agrupamento que se quer formar. O PFC apenas poderá ser aplicado diretamente nos casos em que a ordem do agrupamento é importante. Por exemplo, ao nos perguntarmos sobre o número de comissões de três pessoas que podem ser formadas a partir de um grupo de oito pessoas (digamos, A, B, C, D, E, F, G e H), a simples aplicação direta do PFC não responde corretamente à questão. Aplicando o PFC teríamos 8 formas de escolher a primeira pessoa, 7 formas de escolher a segunda e 6 formas de escolher a terceira (totalizando 8 x 7 x 6 possibilidades). Mas, como nesse caso a ordem em que essas pessoas serão agrupadas não importa, dentre as comissões contabilizadas estaríamos contando (equivocadamente!) como distintas a comissão formada pelas pessoas A, B e C, e a comissão formada pelas pessoas C, A e B. Ou a comissão formada pelas pessoas F, G e H, e a comissão formada pelas pessoas G, F e H. Dessa forma, devemos descontar todas as comissões equivalentes contadas equivocadamente como sendo distintas. Assim, por exemplo, podemos verificar (também pelo uso do PFC) que existem 3 x 2 x 1 = 3! = 6 grupos equivalentes formados pelas pessoas A, B e C. E que existem 3 x 2 x 1 = 3! = 6 grupos equivalentes formados pelas pessoas F, G e H. E o mesmo vale para qualquer outro grupo formado. Sendo assim, as comissões estão sendo contadas 3! = 6 vezes dentro do total obtido via aplicação do PFC. Logo, o número real de comissões formadas será, na verdade, dado por $\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$ ou $\frac{8!}{3!\times5!}$.

Terminada a exposição do PFC, o vídeo introduz o conceito de fatorial como uma forma de representar o número de maneiras de arrumar 20 malas em uma esteira. O fatorial é apresentado no vídeo como uma forma de representação abreviada do produto de um número natural por todos os seus anteriores naturais a partir do 1. Você pode aproveitar esse momento para chamar a atenção dos alunos para esse conceito,pois, assim como o PFC, o fatorial pode ser aplicado em vários problemas de contagem, brevemente citados pelo vídeo.

Na parte final do vídeo, ressalte o comentário da personagem Raquel sobre o número de maneiras de dispor uma determinada quantidade de malas. O fato de esse número já ser muito grande para uma quantidade relativamente pequena de malas ilustra o crescimento rápido do fatorial, tema importante para aplicações em computação.

Depois da execução, você pode abordar um pouco mais dos conceitos aplicados no vídeo, através dos problemas propostos da folha de atividades.

Ao projetar o gráfico “Recurso – GRÁFICO FATORIAL – DE MALAS PRONTAS.ggb”, disponível em seu DVD, chame a atenção dos seus alunos para o fato da função fatorial ter como domínio o conjunto dos números naturais. Isso fica claro a partir da observação do gráfico que, nesse caso, é formado por pontos e não por curvas contínuas (quando o domínio é um conjunto discreto, como é o caso dos naturais, o gráfico da função é representado por pontos). Seu gráfico, portanto, corresponde apenas aos pontos marcados em vermelho. A curva pontilhada que está passando sobre esses pontos servirá como guia e ajudará na comparação do comportamento dela com o de outras funções reais.

Durante a resolução da quinta questão proposta na folha de atividades, a partir da projeção do gráfico, encoraje os alunos a sugerir leis algébricas para algumas funções que já foram trabalhadas anteriormente: função afim, função exponencial, por exemplo. Na mesma tela do gráfico da função fatorial, insira a lei algébrica e construa o gráfico das funções sugeridas pelos alunos. Para isso, insira na caixa de entrada do Geogebra as expressões das funções que forem sugeridas pelos seus alunos, ajudando-os a resolver a quinta questão proposta na folha de atividades.

É importante trabalhar com funções que sejam estritamente crescentes, já que esse é o comportamento da função fatorial.

Nesse momento, você poderá aproveitar para discutir e relembrar algumas características das funções já trabalhadas pelos alunos, como a relação entre os coeficientes e seu comportamento de crescimento, por exemplo.

Assim que todos os grupos tiverem terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as conclusões que eles alcançaram com essa exploração.

Folha de Atividades – De malas prontas

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Questão 1

Como é chamada a estratégia de cálculo utilizada pela Raquel e pelo funcionário do aeroporto para determinar o número de maneiras possíveis e distintas de uma pessoa se vestir sabendo o número de pares de sapatos, pares de meias, calças e blusas que ela possui?

Questão 2

Utilizando a mesma estratégia de contagem usada pela Raquel e pelo funcionário do aeroporto, determine de quantas maneiras possíveis uma pessoa pode se vestir para uma ida *à* praia, dado que possui quatro pares de chinelos, cinco biquínis, duas bolsas de praia, dois óculos de sol e três chapéus?

Questão 3

No vídeo, o funcionário do aeroporto apresenta uma forma de determinar o número de maneiras que podemos arrumar, ordenadamente, certo *número de malas na esteira do aeroporto*. (Dica: faça uso da calculadora)

a. De quantas maneiras isso poderia ser feito no caso de dispormos de 5 malas?

---

b. De quantas maneiras isso poderia ser feito no caso de dispormos de 10 malas?

---

c. E no caso de dispormos de 20 malas?

Questão 4

Há uma maneira de escrever cada um dos produtos acima de forma mais simples? Qual seria ela?

Questão 5 - Para pensar junto com a turma

A personagem de Raquel, no fim do vídeo, afirma que o resultado do fatorial de um número n cresce muito rápido quando o valor de n cresce. Mas qual a grandeza desta "rapidez"?

Para responder a esse questionamento, observe o gráfico apresentado pelo seu professor. Esse gráfico representa o comportamento do fatorial de n quando n vai de 0 até o infinito positivo.

Pense na expressão de algumas funções reais e peça para o seu professor construa o gráfico de cada uma delas nessa mesma janela.

a. O que você pôde concluir?

b. Dê exemplos de funções cujo crescimento é mais lento do que o crescimento da função fatorial.

c. Dê exemplos de funções cujo crescimento é mais rápido do que o crescimento da função fatorial.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Matemática na dieta	Computador com Datashow, folha de atividades e calculadora.	A atividade propõe, a partir da discussão da imagem de uma pirâmide alimentar e de um pequeno texto, uma aplicação de conhecimentos matemáticos para combinar diferentes tipos de alimentos. Após a leitura e discussão a respeito de bons hábitos alimentares, os alunos serão convidados a resolver as questões propostas na folha de atividades.	Grupos de 3 ou 4 alunos	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, sugerimos que você inicie esta atividade com a apresentação da figura Pirâmide Alimentar, que está disponível em arquivo PDF em seu DVD. Para tal apresentação utilize um computador e um projetor multimídia. Caso esse tipo de material multimídia não esteja disponível para uso em sua unidade escolar, você pode tentar reproduzir a pirâmide na lousa. É importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Após a observação da imagem e de uma reflexão sobre as informações nela contidas, solicite que a turma se divida em grupos de três ou quatro alunos, distribua a folha para os grupos, leia com eles o texto sobre a pirâmide alimentar apresentado na folha de atividades.

Após a apresentação e discussão do texto, oriente os grupos na resolução das questões propostas na folha de atividades. Ao final da atividade, promova um debate baseado nos resultados obtidos pelos alunos, de acordo com o proposto na seção aspectos pedagógicos.

Aspectos pedagógicos

Essa é uma atividade foi adaptada de uma proposta disponível no Portal do Professor do MEC, que se encontra no endereço: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25069.

Seu objetivo é apresentar aos alunos, num primeiro momento, a distribuição de diferentes alimentos numa pirâmide, de acordo com seus valores nutricionais. Após isso, são propostas algumas questões a partir de uma situação-problema que envolve métodos de contagem e diferentes maneiras de se combinar os alimentos disponíveis num cardápio.

Professor, para dinamizar a discussão, você pode levantar questões que estimulem os alunos a manifestar suas opiniões e seus conhecimentos sobre o que a imagem da pirâmide representa e a refletir sobre o porquê de os alimentos estarem distribuídos dentro de uma pirâmide. Por exemplo, você poderá perguntar sobre a relação entre o número de porções de cada tipo de alimento e a área do desenho em que este tipo alimento está representado. Isso pode fazer com que os alunos percebam que as áreas maiores representam os alimentos que devemos consumir em maior quantidade e que as áreas menores representam os alimentos que devemos consumir em menor quantidade. Poderá perguntar também se a área destinada à representação do leite e produtos lácteos, carnes e ovos e leguminosas foi bem distribuída entre esses tipos de alimentos, observando que a área destinada à representação do leite e produtos lácteos deveria ser maior que a destinada às carnes e ovos e esta, por sua vez, maior que a área destinada às leguminosas.

Oriente os alunos a fazerem suas combinações de alimentos a partir da situação problema proposta na folha de atividades. Se desejar, você pode anotar na lousa algumas das diferentes possibilidades apresentadas por eles.

Após anotar algumas sugestões, apresente aos alunos combinações do tipo:

- Arroz, nhoque, alface, tomate, acelga, peixe e abacaxi
- Arroz, alface, acelga, nhoque, tomate, peixe e abacaxi.

Você pode mostrar aos alunos que as duas combinações possuem os mesmos elementos, maslistados de maneiras diferentes. Esse exemplo ilustra o conceito de Combinação Simples, ou seja, umasituação em que a ordem de escolha dos elementos não faz diferença para a composição final do agrupamento.

Porém se tivermos uma situação em que a ordem de escolha faça diferença para a composição final (como, por exemplo,os algarismos de um número de telefone ou de um endereço), temos outro tipo de agrupamento chamado Arranjo.

Desta forma, acreditamos que a diferença entre combinação simples e arranjo é reforçada, evitando os erros frequentemente cometidos pelos alunos na diferenciação entre estes conceitos.

Pode ser que os alunos encontrem diferentes maneiras de resolver o problema. Valorize cada iniciativa, porém apresente a resolução formal da combinatória para que entendam que nem sempre conseguirmos verificar todas as possibilidades apenas por tentativa.

Ao final da atividade, promova um debate a partir dos resultados obtidos pelos alunos. Você poderá questioná-los sobre a quantidade de possibilidades de escolha de um cardápio saudável. Poderá também levá-los a refletir sobre as suas próprias dietas, indicando se estariam ou não de acordo com o recomendado. Poderá, ainda, apontar que apenas ter hábitos alimentares saudáveis não é o bastante: é preciso incluir exercícios físicos regulares em suas rotinas diárias, dentre outras coisas.

Folha de Atividades – Matemática da Dieta

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Situação-problema

Suponha que, em um restaurante, nos deparamos com certa variedade de alimentos para compor uma refeição. Os alimentos oferecidos neste restaurante, agrupados segundo a Pirâmide Alimentar, são:

Grupo dos vegetais	Grupo do arroz e das massas	Grupo das carnes, peixes e ovos	Grupo das frutas
Alface	Arroz	Carne bovina	Banana
Cenoura	Macarrão	Frango	Laranja
Tomate	Lasanha	Peixe	Mamão
Beterraba	Nhoque	Ovos	Abacaxi
Repolho	Pão		Maçã
Acelga			

Imagine que uma nutricionista tenha nos informado que, para realizar uma refeição saudável, devemos escolher, dentro desta tabela:

- 3 alimentos do grupo dos vegetais;
- 2 alimentos do grupo do arroz e massas;

- 1 alimento do grupo das carnes, aves, peixes e ovos e
- 1 alimento do grupo das frutas.

A partir dessa situação, responda as questões a seguir:

Questão 1

Determine o número de possibilidades diferentes que temos para escolher 3 alimentos, dentre um total de 6, do grupo dos vegetais.

Questão 2

Como saber o número de maneiras diferentes que temos para escolher 2 alimentos do grupo arroz e massas, dentre um total de 5?

Questão 3

E para escolhermos 1 alimento do grupo das carnes, aves, peixes e ovos, quantas possibilidades diferentes temos?

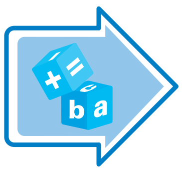
Questão 4

Seguindo os conselhos da nutricionista, de quantas maneiras podemos compor essa refeição?

Seção 1 – Combinação e Arranjo

Páginas no material do aluno

147 a 159

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Combinação ou permutação, o que utilizar?	Cópias da folha de atividades.	A atividade propõe a resolução de problemas que envolvem conceitos de combinação e apresenta uma forma de raciocinar que dispensa a utilização da fórmula. A ideia éincentivar os alunos a compreender o raciocínio que justifica a fórmula de combinação simples. Esperamos também que eles observem que um mesmo problema pode ser resolvido a partir de estratégias distintas.	Duplas	45 minutos

Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. No momento da aplicação da atividade, solicite que a turma se divida em duplas.Distribua uma folha de atividades para cada aluno, mas sugira que a dupla dialogue, trocando ideias para resolver cada uma das questões propostas. Assim que os grupos tiverem terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as conclusões que eles alcançaram.

Aspectos pedagógicos

No item 1, apresentamos, a partir de um raciocínio baseado no princípio multiplicativo e na ideia de permutação, a solução de uma questão que geralmente é resolvida pela fórmula da combinação. Na letra c deste mesmo item, você pode chamar atenção para o significado da palavra permutação ali utilizada.

Esperamos que o aluno compreenda o raciocínio a fim de que não seja apenas um mero aplicador de fórmula. Repare que os alunos que se ocupam mais em aplicar a fórmula do que em compreender e resolver o problema têm muito mais dificuldade em construir um significado sobre o que estão fazendo.

É nesse sentido que apresentamos essa atividade: incentivando que os alunos pensem sobre as situações propostas, utilizando os conhecimentos que já possuem sobre raciocínios combinatórios.

No último item, você pode mostrar para a turma como é obtida a fórmula da combinação a partir do raciocínio apresentado.

Folha de Atividades – Combinação ou permutação, o que utilizar?

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Acompanhe o raciocínio proposto na questão 1 e, em seguida, resolva as outras questões.

1. Quantas comissões diferentes com 3 pessoas podem ser formadas a partir de um conjunto de 5 pessoas?

a. De um conjunto de 5 pessoas, se quisermos selecionar três, é natural pensarmos:

- primeiro: de quantas maneiras podemos escolher a primeira pessoa.
- segundo: de quantas maneiras podemos escolher a segunda pessoa.
- terceiro: de quantas maneiras podemos escolher a terceira pessoa.

Nesse caso temos:

5 (1ª escolha) x 4 (2ª escolha) x 3 (3ª escolha) = 60

Ou seja, há 60 maneiras de formar um conjunto com três elementos distintos a partir de um conjunto de 5 elementos.

b. Suponhamos que João, Marcelo e Daniela estejam nesse grupo de pessoas.

Pergunta: a comissão João, Marcelo e Daniela é igual ou diferente da comissão Daniela, Marcelo e João?

As duas comissões são exatamente a mesma. Nesse caso, a mudança da ordem de apresentação dos membros da comissão não importa.

c. Temos, então, que pensar de quantas maneiras essas três pessoas podem se organizar formando a mesma comissão.

Ora, isso corresponde a encontrar a quantidade de maneiras diferentes de organizar um grupo formado por essas três pessoas - ou, em outras palavras, na permutação dessas três pessoas. Assim, temos 3!=3.2.1=6 maneiras de organizar essas três pessoas.

Repare que isso significa que essa mesma comissão é contada 6 vezes!

d. E se no lugar de João, Marcelo e Daniela tivéssemos Daniela, Andreia e Bruna? Aconteceria a mesma coisa?

Aconteceria exatamente a mesma coisa para esse grupo – e para qualquer outro grupo de 3 pessoas! Assim, cada comissão de 3 pessoas formada é contada 6 vezes.

e. Como fazer para descontar o excesso?

Para descontar o excesso, basta dividir o total de possibilidades, pela quantidade de vezes que cada comissão é contada.

$$\frac{60}{6} = 10$$

Logo, são 10 as comissões com 3 pessoas que podem ser formadas a partir de um conjunto de 5 pessoas.

2. Escolha 5 nomes e faça a lista das comissões, verificando se essa é realmente a quantidade de comissões possíveis indicada na resolução da questão 1.

Considerando o raciocínio apresentado na questão 1, responda:

3. De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos?

4. E se o grupo tiver 3 objetos?

5. Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis de formar esse time.

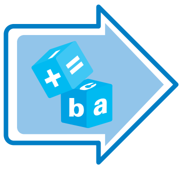
(Dica: determine primeiramente de quantas maneiras podem ser escolhidos o goleiro, os zagueiros, os meios campistas e os atacantes. Em seguida, multiplique os resultados).

6. Agora, resolva a primeira questão utilizando a fórmula de combinação: $C(\mathrm{n},\mathrm{k}) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ Compare a sua resposta com o resultado apresentado no item 1.O que você observa?

Seção 1 – Combinação e Arranjo

Páginas no material do aluno

147 a 159

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	De quantas maneiras posso amarrar meu cadarço?	Cópias da folha de lápis, modelo sugerido	Nesta atividade, será enunciado um problema de combinatória para determinar o número de maneiras de passar o cadarço em um tênis, obedecendo a certas regras.	Grupos de quatro alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Essa é uma atividade desenvolvida pelo grupo de Recursos Educacionais Multimídia para a Matemática do Ensino Médio da Unicampe se encontra disponível no site: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1005

A atividade envolve a utilização da combinatória para determinar o número de maneiras de passar o cadarço em um tênis. Para ajudar os alunos a visualizarem as soluções, você pode fazer um modelo utilizando papel - preferencialmente um papel mais "duro", como o papel cartão. Para isso, pegue um pedaço de papel e dobre como indicado abaixo.

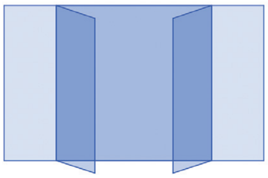


Figura1: Dobrando o pedaço de papel

Você deve ter algo como:

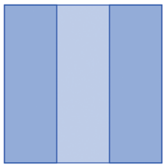


Figura 2: Pedaço de papel dobrado

Finalmente, faça seis pares de furos como indicado a seguir.

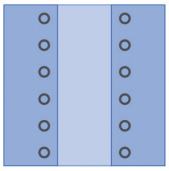


Figura 3: Pedaço de papel dobrado e com seis pares de furos

Utilize barbante no lugar do cadarço, se necessário. Repare que, no modelo, temos seis pares de furos, mas os alunos não precisam necessariamente usar todos os pares de furos em todos os momentos da atividade.

Uma vez que os modelos estejam prontos, distribua-os juntamente com as folhas de atividades para os grupos e, em seguida, apresente as regras de passagem do cadarço descritas na folha.

Peça, então, para que os alunos passem o cadarço ou o barbante pelos furos do modelo (sendo suficiente um modelo para cada grupo) de modo que as regras apresentadas sejam respeitadas.

Peça para que os grupos apresentem seus modelos para os outros grupos, já com os cadarços passados, para que possam comparar e verificar que existem muitas maneiras de executar esse procedimento.

Depois peça que executem os procedimentos descritos na folha de atividades.

Ao final da atividade, promova um debate baseado nos resultados obtidos, de acordo com o sugerido nos procedimentos pedagógicos.

Aspectos pedagógicos

A experiência com um tênis e um cadarço, ou utilizando o modelo sugerido, é indicada para que os alunos entendam como o cadarço pode passar pelos furos e compreendam a quantidade de possibilidades em cada passagem do cadarço.Os alunos deverão, então,para entender melhor o problema, tentar esboçar maneiras de passar o cadarço que satisfaçam todas as regras estabelecidas. É importante que eles vivenciem o processo para, em seguida, pensarem em uma maneira de descobrir quantas possibilidades de passar o cadarço existem.

Na comparação sugerida no item 1, os alunos devem perceber que um mesmo conjunto de regras permite várias maneiras de organização. Por isso, incentive que os grupos mostrem a sua organização e mostrem que a organização apresentada satisfaz as regras.

No item 2, os alunos devem registrar uma passagem de cadarço, para que nos dois itens seguintes estejam aptos a indicar a quantidade total de passagens de cadarço em um tênis com 5 pares de furos.

Ao final do item 3, você pode solicitar que cada um dos grupos vá até a lousa e desenhe uma possibilidade de passar o cadarço. Feito isso, pergunte à turma se os desenhos satisfazem as regras. Verifique se foram desenhadas todas as possibilidades. Se necessário, diga quantas ainda existem e peça para que continuem tentando desenhar. Só então esboce o restante das possibilidades – e conclua que são apenas seis, como indicado na figura a seguir.

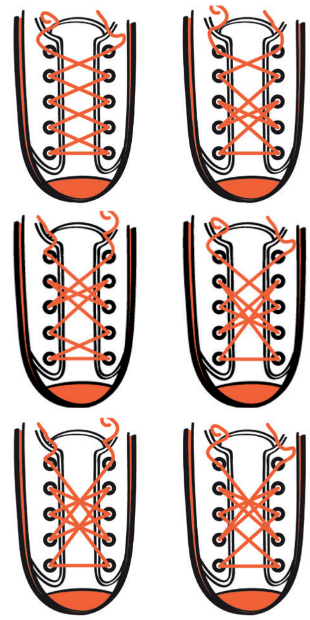


Figura 4: Maneiras de passar o cadarço

O item 4 é uma maneira de instigar os alunos a utilizarem o raciocínio combinatório.Isso tomará um bom tempo dos alunos. Por isso, deixe-os discutir com calma.

O raciocínio fundamental para a solução do item 4 é que, como o padrão deve ser simétrico, basta decidir os primeiros seis furos pelos quais o cadarço deve passar, pois, a partir daí, os outros seis furos ficam determinados pela simetria.

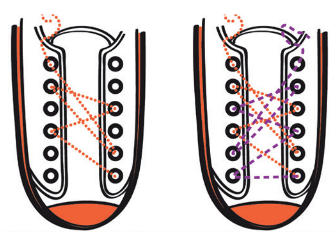


Figura 5: Simetria na forma de passar o cadarço

É importante notar ainda que a simetria também implica que apenas um dos furos de cada par deve ser visitado nas seis primeiras passadas do cadarço, pois, se não fossem, não haveria meio de conseguir a simetria desejada.

Além disso, devido à terceira,a primeira destas linhas (par de furos em lados opostos) deve ser obrigatoriamente a de cima regra e a última é obrigatoriamente a de baixo, já que os furos da linha de baixo devem ser visitados consecutivamente. Assim, a primeira e a sexta linhas têm a ordem de passagem de cadarço determinada, faltando apenas decidir como serão as passadas nos quatro furos intermediários.

Assim, para obter um padrão para o cadarço, podemos iniciar pelo furo da esquerda da linha superior e decidir em que ordem as quatro linhas intermediárias serão visitadas.

Para escolher a ordem das quatro linhas, lembramos primeiramente da quarta regra, de acordo com a qual devemos ficar alternando o lado de passagem do cadarço. A partir dela, concluímos que primeiro furo pode ser escolhido dentre quatro possibilidades. A seguir, concluímos que o segundo furo pode ser escolhido dentre três possibilidades, e o terceirodentre duas possibilidades. Dessa maneira, o quarto furo já fica determinado, tendo apenas uma possibilidade de escolha. Logo, há $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ possibilidades de escolha para a ordem das linhas - e, portanto, 24 possibilidades de passar o cadarço satisfazendo as regras descritas pelo problema.

Ao final da atividade, promova um debate baseado nos resultados obtidos abordando questões do tipo: O que acontecerá com o número de possibilidades de passagem do cadarço se o número de furos aumentar ou diminuir? O que foi mais fácil: determinar o número de possibilidades da passagem dos cadarços usando tentativa e erro (ou seja, testando uma a uma) ou usando conhecimentos de Análise Combinatória?

Folha de Atividades – De quantas maneiras posso amarrar meu cadarço?

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Você já deve ter colocado o cadarço em um tênis, certo?

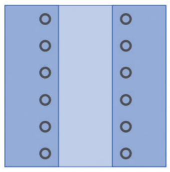
Nessa atividade, você determinará a quantidade de maneiras de colocar um cadarço em um tênis, seguindo as seguintes regras para a passagem do cadarço.

- O cadarço deve formar um padrão simétricoem relação ao eixo vertical;
- O cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;
- O cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar os dois furos inferioresdiretamente - isto é, sem passar por outros furos;
- O cadarço deve alternar de um lado para o outro a cada passada.

1. Utilizando o modelo distribuído por seu professor, passe o barbante pelos furos de acordo com as regras citadas acima.

Compare o resultado com o de outros colegas e veja se vocês fizeram da mesma forma.

2. O esquema a seguir representa um tênis com 5 pares de furos. Desenhe neste esquema uma passagem de cadarço que se adeque a todas as regras citadas.



3. Agora, você deve indicar o número total de possibilidades para passar o cadarço em um tênis com 5 furos, obedecendo às regras acima.

Se quiser, utilize o modelo para passar o barbante e registre as possibilidades em seu caderno.

4. Se no tênis houvesse seis pares de furos, quantas maneiras diferentes existiriam para se passar o cadarçosa-tisfazendo as regras estabelecidas?

Dica: utilize os conceitos de análise combinatória

Seção 2 – Permutação com repetição

Páginas no material do aluno
160 a 163

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Geometria do Taxista e Combinatória	Computador com Datashow, cópias dafolha de atividades, mapa.	A atividade propõe uma discussão acerca dos conceitos de combinação e permutação, a partir da apresentação de um vídeo e de um problema sobre a menor distância entre dois pontos no plano.	Individual.	45 minutos

Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

No dia da aplicação da atividade, utilize um computador e um projetor multimídia (Datashow) para apresentar o mapa, que se encontra na pasta Material DVD.

Caso sua unidade escolar não disponha do material multimídia, você poderá copiar o mapa na lousa.

Em seguida, faça o seguinte questionamento:

Imaginem que cada um dos pontos marcados no mapa assinala a posição de um determinado aluno. Nós queremos determinar a menor distância entre estes dois pontos, considerando que os dois alunos estão na esquina dos quarteirões. Qual a quantidade de caminhos possíveis para que um deles vá ao encontro do outro?

Após algumas soluções (duração de, no máximo, 15 minutos), reproduza o vídeo Qual o Melhor Caminho? encontrado na pasta Material DVD, ou no site http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1164.

Em seguida, distribua uma folha de atividades para cada aluno e peça a eles que realizem a atividade.

Aspectos pedagógicos

Essa atividade foi adaptada a partir das atividades Qual o melhor caminho? e Taxi e Combinatória, que se encontram disponíveis em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1164 e http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1035, respectivamente. As duas atividades fazem parte da coleção M3 Matemática Multimídia, desenvolvida pela UNICAMP.

É interessante ressaltar queo problema levantado no vídeo Qual é o menor caminho?, apesar de ser originalmentedestinado a trabalhar o conceito de distancia entre pontos, também pode ser utilizado para abordar as permutações com repetição, que tratam da contagem de conjuntos com vários elementos repetidos.

Dado um conjunto de n elementos com n1 elementos iguais do tipo 1, n2 elementos do tipo 2, e assim sucessivamente até nk elementos do tipo k, a quantidade de permutações que podemos formar com estes elementos é dada por: $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

Considerando o problema do menor caminho até o ponto P, temos um conjunto de P1 + P2 ruas, onde P1 são horizontais e P2 verticais, ou seja, temos uma permutação com repetiçãode n elementos, agrupados k a k,que pode ser escrita como uma permutação com k elementos repetidos de um tipo e (n-k) de outro.

A distância euclidiana usual é apropriada na descrição de muitos fenômenos, mas em algumas situações, pode não ser a mais apropriada. Por exemplo, a menor distância para ir de casa até a escola depende das ruas que possibilitam esse trajeto e, sendo assim, dificilmente será definida como a medida do segmento entre estes dois pontos. O nome geometria do táxi, como é conhecida a geometria que apresentamos nesta atividade, vem da associação com a ideia de trafegar por ruas.

Na geometria do taxi, se considerarmos o sistema de coordenadas cartesiano usual, dados dois pontos do plano, A=(xA,yA) e B=(xB,yB), a distância entre esses pontos é calculada assumindo que só é possível fazer trajetos paralelos aos eixos (horizontais e verticais). Formalmente, essa distância pode ser definida usando a função módulo de números reais:

dtáxi(A,B)=|xA−xB|+|yA−yB|

Neste experimento, o cenário é um mapa quadriculado cujas quadras são as unidades de medida. O aluno escolhe, no mapa, a esquina onde quer colocar a casa de um amigo, tendo em mente que todos os pontos de referência no experimento têm sempre coordenadas inteiras.

As etapas propostas exploram essencialmente a quantidade de maneiras diferentes de fazer trajetos com comprimento mínimo. Quando as localidades ficam mais distantes, a organização do processo de contagem leva naturalmente aos conceitos introdutórios de combinatória.

Etapa 1: Qual é a menor distância?

Na primeira etapa, apresente no quadro negro um mapa quadriculado com as marcações da posição da casa do aluno e de uma região (um bairro de uma cidade) onde ele deverá escolher a localização da casa de seu amigo. Faça com que os alunos participem, perguntando onde eles moram e tente representar os locais no mapa. O objetivo é encontrar visualmente o número mínimo de quadras que devem ser percorridas de uma localidade a outra e também perceber que existe mais do que um trajeto mínimo entre elas.

Etapa 2: Quantos menores caminhos existem?

A segunda etapa é destinada à organização e à sistematização da percepção anterior. A proposta desta etapa é analisar a quantidade de maneiras diferentes com que podemos fazerum trajeto entre duas localidades utilizando o menor número possível de quadras. Para esta análise, sugerimos utilizar as letras H e V para fazer referência, respectivamente, ao deslocamento de uma quadra na horizontal ou na vertical.

O aluno deverá perceber que a contagem dos trajetos mínimos, facilmente efetuada visualmente quando as localidades estão próximas, torna-se muito complexa quando elas se afastam, requerendo um procedimento mais organizado. Isso deverá motivar a busca por uma expressão mais formal, usando o conceito de combinação para o cálculo do número de trajetos mínimos no caso geral.

Assumindo que o aluno já conheça o conceito de permutação, colocamos a seguir uma forma de se obter, passo a passo, a expressão geral acima mencionada. Essa forma também pode ser usada como motivação para o estudo do conceito de combinação. Recomendamos que a dedução dessa expressão seja discutida com os alunos no fechamento do experimento.

Outra questão importante: por que o número de trajetos mínimos é dado por uma combinação?

Vamos supor que entre as localidades A e Go menor trajeto deve ser percorrido através de 8 quadras, sendo 3 horizontais e 5 verticais. Um exemplo de trajeto mínimo de A para G, que está representado na figura, pode ser denotado por HVVHVVHV, significando que a primeira quadra é percorrida na horizontal, as duas seguintes na vertical, e assim por diante até a oitava quadra, que é percorrida na vertical.

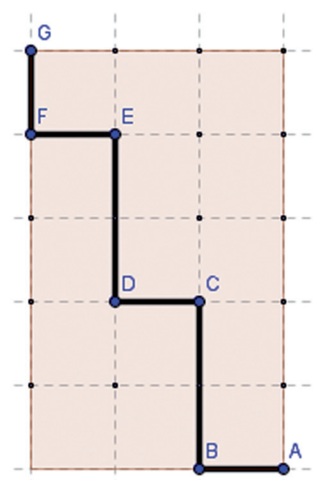


Figura 6: Trajeto entre os pontos A e G

A seguir, vamos analisar quantos trajetos mínimos diferentes existem entre A e G.

Se as oito letras envolvidas na representação do trajeto fossem diferentes, a resposta seria o número correspondente a todas as permutações possíveis das oito letras, isto é, $8!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 40320$ trajetos. Mas, neste caso, teremos um número bem menor de possibilidades: teremos que repetir a letra H três vezes, e a letra V 5 vezes, para preencher as oito posições, a fim de representar os três deslocamentos horizontais e os cinco verticais necessários, variando a ordem.

Consideremos o exemplo do trajeto mínimo HVVHVVHV. Obteremos o mesmo trajeto se trocarmos as letras H entre si e as letras V entre si. Assim, nas 8! permutações que seriam possíveis com letras diferentes, estaríamos contando este trajeto várias vezes. Mais precisamente, como há 3! modos de trocar as letras H entre si (permutações das posições 1ª, 4ª, e 7ª) e 5! modos de trocar as letras V entre si (permutações das posições 2ª, 3ª, 5ª, 6ª e 8ª), teríamos contado 5!3! vezes este mesmo trajeto.

Como o argumento acima pode ser considerado para qualquer outro trajeto mínimo entre as localidades A e G, o número total de trajetos mínimos diferentes é dado por 8!/(3!5!).

Note que este número é exatamente o número de combinações de 8 elementos tomados 3 a 3, pois:

$$\frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = C_8^3$$

De modo geral, se o menor trajeto entre as localidades A e G deve ser percorrido através de n quadras –divididas entre p quadras horizontais e q quadras verticais - então o número de trajetos mínimo diferentes é dado por:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Note que este número é o mesmo se um trajeto mínimo entre A e G for através de n quadras, sendo q horizontais e p verticais, pois, como p + q = n , vale:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!q!} = \frac{n!}{(n-q)!q!} = C_n^q$$

Professor, recomendamos que você faça essa atividade junto com os alunos, discutindo cada etapa, instigando-os e fazendo-os perceber que a análise combinatória pode ser muito divertida e interessante para o cotidiano de todos eles.

Folha de Atividades – Geometria do Taxista e Combinatória

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Os problemas abaixo serão apresentados com o propósito de fixar e aprofundar o assunto abordado no vídeo Qual é o melhor caminho?.

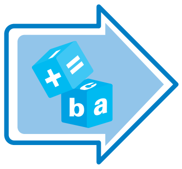
Problema 1: Suponhamos que um construtor necessite subir um andaime. Ele se movimenta utilizando os cantos do andaime, onde tem três possibilidades de movimento: ir à direita, ir à frente ou subir ao andar de cima. Noutras palavras, o construtor pode mover-se nas três direções do espaço. Se considerarmos o seu ponto inicial como o (0, 0, 0) e o ponto de chegada como o (2, 4, 3) de quantas maneiras o construtor poderá ir ao ponto de chegada fazendo o menor número de deslocamentos possível?

Problema 2: Qual o número de pontos inteiros que estão a uma mesma distância do taxista, que está situado na origem? Por exemplo, para n=2, há 8 pontos que distam 2 da origem, são eles: $(\pm1,\pm1),(\pm2,0),(0,\pm2)$.

Seção 2 – Permutação com repetição

Páginas no material do aluno

160 a 163

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	A Matemática no método Braille	Cópias da folha de atividade	A atividade propõe a resolução de um problema relacionado a conceitos combinatórios, utilizando como contexto a escrita em relevo do sistema Braille.	Trios	45 minutos

Aspectos operacionais:

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Na aula anterior à da aplicação da atividade, solicite que os alunos pesquisem sobre o sistema Braille. Essa pesquisa poderá ser efetuada em grupo.No dia da atividade, peça para que os alunos apresentem brevemente as informações obtidas na pesquisa feita sobre o método Braille e, depois, distribua uma folha de atividades para cada aluno.

Deixe que eles efetuem a leitura do texto proposto na folha de atividades por alguns minutos (essa etapa não deve levar mais que 5 minutos) e, então, peça aos alunos que respondam a questão proposta.

Assim que os grupos tiverem terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as soluções que eles encontraram para questões propostas.

Aspectos pedagógicos

Essa atividade foi elaborada a partir da atividade A Matemática no método Braille, proposta pelo professor Marcos Noé, integrante da Equipe Brasil Escola. Ela se encontra disponível no sitehttp://www.brasilescola.com/matematica/a-matematica-no-metodo-braille.htm.

O método Braille utiliza combinações de pontos relacionados a símbolos que representam letras. Por se tratar de uma aplicação prática e útil de conceitos ligados à análise combinatória, essa pode ser uma ótima forma de motivar os alunos na aprendizagem deste conteúdo.

Para facilitar a leitura individual do texto, cada um dos alunos deve receber uma cópia da folha de atividades.

No entanto, você, professor, deve sugerir que os integrantes de cada grupo dialoguem entre si, de forma a resolver em conjunto a questão proposta, que é a seguinte:

Quantas celas Braille distintas é possível estabelecer?

Encoraje os alunos a desenhar algumas configurações possíveis para a cela Braille. Isso pode ajudá-los a estabelecer boas estratégias de contagem.

Ajude-os a perceber que a quantidade de configurações possíveis para a cela depende do número de pontos em relevo.

Separando as configurações da cela pelo número de pontos em relevo, é possível pensar no problema a partir de duas estratégias de contagem:

- Combinação –A ideia aqui é combinar n pontos (com n variando entre 1 e 6) dos 6 disponíveis na cela, de modo que o número total de celas possíveis seria dado por: $C6,1 + C6,2 + C6,3 + C6,4 + C6,5 + C6,6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$.

- Permutação com repetição – A estratégia, neste caso, é associar a cada posição da cela, numerada de 1 a 6, uma determinada letra. Se o ponto estiver em relevo, usaremos a letra P e, se o ponto estiver em branco, usaremos a letra B. Por exemplo, a cela relacionada à letra b seria representada pela sequência de letras: PPBBBB. E o número de celas com dois pontos em relevo poderia ser obtido pela permutação dessas 6 letras, sendo que o P se repete 2 vezes e o B se repete 4 vezes. Ou seja, $P_6^{2,4} = 15$. Assim, o número total de celas possíveis seria dado por: $P_6^{1,5} + P_6^{2,4} + P_6^{3,3} + P_6^{4,3} + P_6^{5,1} + P_6^{6} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$.

Folha de Atividades – A Matemática no Método Braille

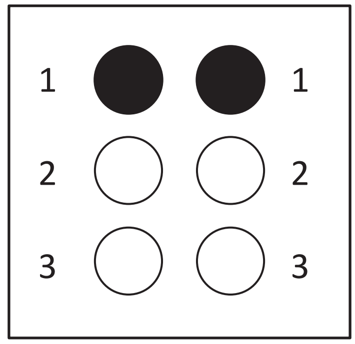
Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

O Sistema Braille

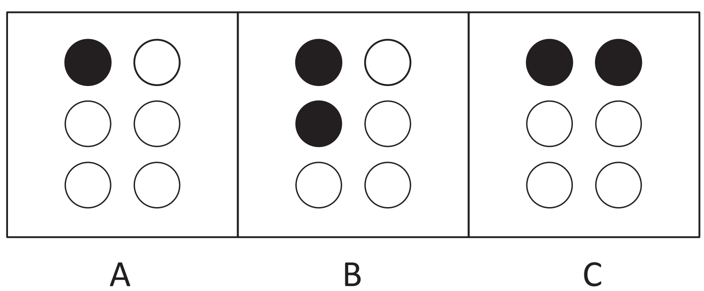
Vocês acabaram de fazer uma pesquisa sobre o Sistema Braille e, certamente, encontraram sobre ele várias informações importantes e interessantes. Devem ter descoberto que o sistemaé uma escrita feita em relevo, constituída por 63 sinais codificados por pontos. Estes pontos são organizados em uma tabela com três linhas e duas colunas, formando um retângulo que chamamos de cela Braille. Cada ponto da cela é numerado de acordo com seu posicionamento. A numeração é feita de forma crescente, verticalmente e de cima para baixo, começando com o ponto que está no canto superior esquerdo, que recebe o número um. Encerrada a coluna da esquerda, a numeração continua na coluna da direita. Acompanhe na figura a seguir.

Cela Braille



As arrumações distintas possíveis desses pontos estão relacionadas a símbolos, que podem representar letras simples e acentuadas, pontuações, notas musicais e sinais algébricos, entre outros. Dessa forma, o deficiente visual poderá realizar a leitura e escrita de qualquer texto. Por exemplo, a letra É (acentuada) é representada pela disposição apresentada na figura anterior.

Devido a esse tipo de configuração da cela, o método admite um número finito de caracteres, pois os pontos em relevo são posicionados em diferentes lugares. Veja a seguir alguns exemplos de celas possíveis:



Agora é com você! Quantas celas Braille distintas é possível estabelecer?

Seção – O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno
171 a 172

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de vestibular	Computador com Datashow, imagem para projeção (disponível neste material e no DVD do professor)	-	Duplas	-

Aspectos operacionais

Na seção O que perguntam por aí? desta unidade do material do aluno são apresentadas duas questões de vestibulares que envolvem conceitos de Análise Combinatória trabalhados. Essas questões já se encontram resolvidas no material do aluno, mas você poderá trabalhá-las a partir da projeção das imagens disponíveis no seu DVD e neste material, conforme a seguir:

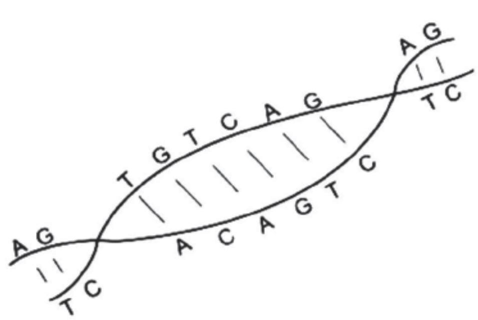
1) (UFF_2001) O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A - T , T - A , C - G e G - C .

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

- dois pares consecutivos não sejam iguais;

- um par não seja seguido por um par e vice-versa;

- um par não seja seguido por um par e vice-versa.



Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem.
Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

a) 2^{11}
b) 2^{20}
c) 2×10
d) 2^{10}
e) $2^2 \times 10$

Aspectos pedagógicos

Após a resolução destas questões em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos.

Resolução Comentada

Solução: Tarefa 1 podemos escolher qualquer um dos quatro pares possíveis para as outras 9 tarefas temos 2 possibilidades para cada uma delas. Pelo Princípio Multiplicativo temos $4 \bullet 2 \bullet \ldots \bullet 2 = 4 \bullet 2^9 = 2^2 \bullet 2^9 = 2^{11}$. Logo a resposta é a alternativa a).

(Unifesp-SP 2002) Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

a) 64.
b) 126.
c) 252.
d) 640.
e) 1260.

Solução:

A primeira tarefa é escolher um dos dez para ser o síndico e a segunda tarefa é escolher quatro dentre os nove restantes para serem membros do conselho fiscal. Na primeira tarefa temos 10 possibilidades e na segunda C(9, 4) = 126. Pelo Princípio Multiplicativo temos $10 \bullet 126 = 1260$ possibilidades. Logo a alternativa correta é a letra e).

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios adicionais	Cópias da folha de atividades	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas. A primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda na resolução de questões objetivas e dissertativas. A escolha das questões a serem aplicadas fica a critério do professor, levando em consideração as especificidades de cada turma.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação das habilidades a serem desenvolvidas, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado a esta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades(disponível para reprodução neste material), as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões. A ideia é que estas questões complementem aquelas que você já usa normalmente para avaliar o desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas, que registramos novamente a seguir:

- Análise Combinatória
- Diferença entre Arranjo e Combinação
- Permutação com Repetição

Para ajudar os alunos nos seus registros, sugerimos as seguintes questões, que também estão disponíveis na folha de atividades:

1. Qual foi o conteúdo matemático estudado nessa unidade? Cite alguns conceitos relacionados a este tema

que formam estudados nesta unidade.

2. Cite alguma situação do cotidiano que envolve os conhecimentos aqui estudados.

3. Considere os algarismos 2, 3, 5, 6 e 8.

a. Quantos números de três algarismos podem ser formados?

b. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados?

c. Quantos números de três algarismos distintos que terminam com 5 podem ser formados?

4. Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI?

5. Guilherme possui 4 bolas amarelas, 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde. Pretende colocá-las em um tubo acrílico translúcido e incolor, onde elas ficarão umas sobre as outras na vertical. De quantas maneiras distintas ele poderá formar esta coluna de bolas?

Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção e entrega de registrosao seu formador, no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você a maneira como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos e, se for o caso, repensar as estratégias de acordo com as críticas e sugestões apresentadas.

Aspectos pedagógicos

Etapa 1

Respostas e comentários da folha de atividades

Questão 1: Análise Combinatória.

Princípio multiplicativo, combinação, arranjo, permutação simples, permutação com repetição.

Questão 2: Resposta pessoal, podendo recorrer aos exemplos trabalhados em aula.

Questão 3: Para resolver esse exercício, podemos usar o princípio multiplicativo: 5 x 5 x 5 = 125. Logo, podem ser formados 125 números.

Para resolver esse exercício, podemos usar o princípio multiplicativo: 5 x 4 x 3 = 60. Logo, podem ser formados 60 números distintos.

Para resolver esse exercício, podemos usar o princípio multiplicativo: 4 x 3 x 1 = 12.Repare que na última posição só pode entrar o número 5, por isso o último termo do produto é 1.Logo, podem ser formados 12 números distintos.

Questão 4: Nesse caso, temos uma permutação com repetição. Temos

1 letra M;

4 letras I's;

4 letras S's; e

2 letras P's.

Assim, $P_{11}^{4,4,2} = \frac{11!}{4! \times 4! \times 2!} = 34650$. Logo, são 34 650 anagramas!

Questão 5: Neste caso de permutação com elementos repetidos temos um total de 10 bolas de quatro cores diferentes.

Sendo: 4 amarelas; 3 vermelhas; 2 azuis e 1 verde.

Segundo a repetição das cores, devemos calcular $P_{10}^{4,3,2} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!} = 12600$ .Então, Guilherme poderá formar esta coluna de bolas de 12600 maneiras diferentes.

Folha de Atividades – Avaliação – Etapa 1

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Momento de Reflexão

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas nesta unidade e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder as questões a seguir:

Questão 1

Qual foi o conteúdo matemático estudado nessa unidade? Cite alguns conceitos relacionados a este tema que formam estudados nesta unidade.

____

____

____

Questão 2

Cite alguma situação do cotidiano que envolve os conhecimentos aqui estudados.

____

____

____

Questão 3

Considere os algarismos 2, 3, 5, 6 e 8.

a. Quantos números de três algarismos podem ser formados?

b. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados?

c. Quantos números de três algarismos distintos que terminam com 5 podem ser formados?

Questão 4

Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI?

Questão 5

Guilherme possui 4 bolas amarelas, 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde. Pretende colocá-las em um tubo acrílico translúcido e incolor, onde elas ficarão umas sobre as outras na vertical. De quantas maneiras distintas ele poderá formar esta coluna de bolas?

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Para compor esta etapa do instrumento avaliativo, sugerimos a escolha de pelo menos uma questão objetiva que contemple uma das habilidades pretendidas nesta unidade.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1: (UFMG - 2006)

A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada.

Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

a. 70

b. 35

c. 45

d. 55

Questão 2: (FGV - 2005)

Um fundo de investimento disponibiliza números inteiros de cotas aos interessados nessa aplicação financeira. No primeiro dia de negociação desse fundo, verifica-se que 5 investidores compraram cotas, e que foi vendido um total de 9 cotas. Em tais condições, o número de maneiras diferentes de alocação das 9 cotas entre os 5 investidores é igual a:

a. 56.

b. 70.

c. 86.

d. 120.

e. 126.

Questão 3: (PUC MG - 2003)

Um bufê produz 6 tipos de salgadinhos e 3 tipos de doces para oferecer em festas de aniversário. Se em certa festa devem ser servidos 3 tipos desses salgados e 2 tipos desses doces, o bufê tem x maneiras diferentes de organizar esse serviço. O valor de x é:

a. 180

b. 360

c. 440

d. 720

Questão 4: (UFV - 2004)

Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é:

a. 32

b. 28

c. 34

d. 26

d. 30

Questão 5: (UEL - 2006)

Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos para indicar seus membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. Assinale a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI.

a. 55

b. (40 - 3) . (15-1)

c. [40!/(37! . 3!)]. 15

d. 40 . 39 . 38 . 15

e. 40! . 37! . 15!

Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

Questão 1

De um total de 6 pratos à base de carboidratos e 4 pratos à base de proteínas, pretendo fazer o meu prato com 5 destes itens, sem repeti-los, de sorte que contenha ao menos 2 proteínas. Qual é o número máximo de pratos distintos que poderei fazer?

Questão 2

Em uma sapateira irei guardar 3 sapatos, 2 chinelos e 5 tênis. Quantas são as disposições possíveis desde que os calçados de mesmo tipo fiquem juntos, lado a lado, na sapateira?

Questão 3: (FUVEST)

O jogo da sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números 1, 2, ..., até 50. Uma aposta consiste na escolha (pelo apostador) de 6 números distintos entre os 50 possíveis, sendo premiadas aquelas que acertarem 4 (quadra), 5 (quina) ou todos os 6 (sena) números sorteados.

Um apostador, que dispõe de muito dinheiro para jogar, escolhe 20 números e faz todos os 38.700 jogos possíveis de serem realizados com esses 20 números. Realizado o sorteio, ele verifica que todos os 6 números sorteados estão entre os 20 que ele escolheu. Além de uma aposta premiada com a sena:

a. Quantas apostas premiadas com a quina esse apostador conseguiu?

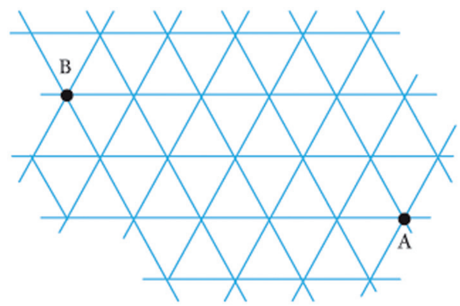
b. Quantas apostas premiadas com a quadra ele conseguiu?

Questão 4

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra CALOUROS, de maneira que sempre haja a presença da sequência OURO, nesta ordem, e as letras C e S nunca estejam juntas qualquer que seja a ordem?

Questão 5

Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.



Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d.

Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, determine o valor de X.

Aspectos pedagógicos

Respostas das questões objetivas sugeridas

1.(D) 2.(B) 3.(D) 4.(C) 5.(C)

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:

Questão 1:

Se não houvesse a restrição das duas proteínas, o cálculo seria simplesmente $C_{10,5}$:

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} \Rightarrow C_{10,5} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5!\times5!} \Rightarrow C_{10,5} = \frac{30240}{120} \Rightarrow C_{10,5} = 252$$

Mas como há tal restrição, devemos descontar deste total o número de pratos que só contém carboidratos, que é igual a $C_{6,5}$:

$$C_{6,5} = \frac{6!}{5!(6-5)!} \Rightarrow C_{6,5} = \frac{6\times5!}{5!\times1!} \Rightarrow C_{6,5} = \frac{6}{1} \Rightarrow C_{6,5} = 6$$

Não podemos nos esquecer de que também podemos montar pratos contendo apenas um item de proteína, então devemos desconsiderá-los também. Estes pratos são o produto de $C_{6,4}$, referentes aos quatro itens de carboidrato, por $C_{4,1}$, referentes ao único item de proteína:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \Rightarrow C_{6,4} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} \Rightarrow C_{6,4} = \frac{30}{2} \Rightarrow C_{6,4} = 15$$

$$C_{4,1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \Rightarrow C_{4,1} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} \Rightarrow C_{4,1} = 4$$

Multiplicando as combinações:

$$C_{6,4} \times C_{4,1} = 15 \times 4 = 60$$

Podemos formar então 6 pratos sem qualquer item de proteína e mais 60 pratos com somente um item de proteína. Então de 252 que é o número total de combinações possíveis sem a restrição, devemos subtrair 66 pratos para obtermos a resposta do exercício, ou seja, 186.

Poderíamos ter resolvido este exercício de outra maneira. Vamos explicar como e dar o resultado, mas o desenvolvimento em si você mesmo deverá fazer, para que consiga fixar melhor os conhecimentos adquiridos. Por favor, não deixe de fazê-lo.

O produto $C_{6,3} \,.\, C_{4,2} = 20 \,.\, 6 = 120$ nos dá o total de pratos contendo 3 itens de carboidrato e 2 itens de proteína.

Já o produto $C_{6,2} \,.\, C_{4,3} = 15 \,.\, 4 = 60$ é igual ao total de pratos contendo 2 itens de carboidrato e 3 itens de proteína.

Por fim o produto $C_{6\,1} \,.\, C_{4,4} = 6 \,.\, 1 = 6$ resulta no total de pratos contendo 1 item de carboidrato e 4 itens de proteína.

Somando 120, 60 e 6, obtemos o mesmo resultado obtido anteriormente.

Portanto o número máximo de pratos distintos que poderei fazer, contendo ao menos dois itens de proteína, é igual a 186 pratos.

Questão 2:

Como temos três tipos de calçados, a permutação destes três tipos é igual a 6:

$P_3 = 3! = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$

Ou seja, estando todos os calçados de um mesmo tipo juntos, o número de permutações é igual a 6, levando-se em consideração apenas o tipo de calçado, mas não o calçado em si.

Para os sapatos, temos 3 deles – que, permutados entre si, resultam em 6 permutações:

$P_3 = 3! = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$

Para os chinelos, temos 2 pares – que, permutados entre si, resultam em 2 permutações:

$P_2 = 2! = 2 \,.\, 1 = 2$

Finalmente para os tênis, temos 5 pares – que, permutados entre si, resultam em 120 permutações:

$P_5 = 5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$

Multiplicando estes quatro números temos:

$P_3 \,.\, P_3 \,.\, P_2 \,.\, P_5 = 3! \,.\, 3! \,.\, 2! \,.\, 5! = 6 \,.\, 6 \,.\, 2 \,.\, 120 = 8640$

Este é o número de disposições possíveis.

Veja que os três últimos fatores (P_3, P_2 e P_5) se referem às permutações dos sapatos, chinelos e tênis, respectivamente entre eles mesmos, sem haver mistura de tipos de calçados.

Note, no entanto que o primeiro fator (P_3) se refere às permutações entre os tipos de calçados em si, por exemplo, "sapatos, chinelos, tênis" é um agrupamento e "chinelos, tênis, sapatos" é um outro agrupamento, ou seja, embora não haja mistura entre calçados de tipos diferentes, os tipos de calçados como um todo permutam entre si.

Portanto as disposições possíveis são 8640.

Questão 3:

a)Para 5 números da aposta temos a combinação dos 6 números sorteados tomados de 5 a 5 e para o último podemos escolher qualquer um dos 20 - 6 = 14 restantes. Pelo princípio multiplicativo, nossa resposta será:

$C_{6,5} \times 14 = 6 \times 14 = 84$

b) Agora temos 4 números da aposta para a combinação dos 6 números sorteados tomados de 4 a 4. Os 2 números restantes serão uma combinação dos 14 restantes tomados de 2 a 2. Isto é: 3.5 . 7.13

Questão 4:

Trocando a sequência OURO por *, de CALOUROS passamos a ter CAL*S. Agora temos cinco caracteres, logo devemos permutá-los para obter o número de anagramas:

$P_5 = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$

Dos 120 anagramas possíveis, temos alguns que possuem ou a sequência CS, ou a sequência SC. Como desconsiderá-los?

Vamos trocar a sequência formada pelas letras C e S, em qualquer ordem, por $. Ficamos então com $AL*.

Temos então que calcular P4, mas como C e S são 2 letras que também permutam entre si, devemos multiplicar P4por P2:

$P_4 . P_2 = 4! . 2! = 4 . 3 . 2 . 1 . 2 . 1 = 48$

Atente ao fato de que no caso da sequência CAL*S calculamos P5, mas não a multiplicamos por nada, isto porque diferentemente do que ocorre com as letras da sequência CS, as letras da sequência OURO não sofrem permutação entre si. A sequência é sempre a mesma.

Então, dos 120 anagramas possíveis, 48 deles possuem uma das permutações da sequência CS. Vamos portanto descontá-los:

120 - 48 = 72

Logo:podemos formar 72 anagramas que correspondem às condições do enunciado.

Questão 5:

Admita que cada lado horizontal de cada triângulo da figura seja H e cada lado em diagonal seja D.

Observando a figura, conclui-se que, para sair do ponto A e chegar ao ponto B, deslocando-se sobre os lados desses triângulos e percorrendo o menor caminho, é necessário realizar um percurso total de 4H e 2D.

O número de sequências formadas com essas 6 letras é igual ao número X de caminhos distintos. As sequências (HHHHDD) e (HDHDHH) representam dois desses caminhos. Utilizando a análise combinatória, pode-se determinar o número de sequências distintas formadas com as 6 letras das seguintes maneiras:

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!\times 2!} = \frac{6\times 5\times 4!}{4!\times 2!} = \frac{30}{2} = 15 \text{ ou } C_6^2 = \frac{6\times 5}{2\times 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Exercícios complementares

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios adiciona is	Cópias da folha de atividades	Essa atividade propõe alguns exercícios que podem auxiliar na fixação das principais noções ligadas a Análise Combinatória	Duplas ou Trios	-

Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das principais noções-ligadas a Análise Combinatória trabalhadas ao longo dessa unidade. Com esses exercícios será possível fazer com que os alunos retenham alguns conceitos importantes, comooprincípio fundamental da contagem ou multiplicativo, a relação entre a permutação simples e o princípio multiplicativo, a noção de arranjo, de combinação e de permutação com repetição.

Esses exercícios foram distribuídos em uma folha de atividades – que se encontra disponível para reprodução no DVD do professor – que poderá ser aplicada de forma fracionada ao término de cada seção do material do aluno ou de uma só vez no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados. Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu DVD.

Quanto à realização da atividade, peça que os alunos se organizem em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada um, de forma que todos possam ficar com uma cópia do material, que será mais uma fonte de consulta.

Dentre os exercícios propostos a seguir (e também disponíveis na folha de atividades), escolha previamente quais exercícios se adequam melhor à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos nessa unidade.

Exercícios sugeridos

Questão 1

O mapa a seguir representa a divisão política do Brasil em regiões. Cada uma delas deve ser colorida de modo que aquelas com uma fronteira comum tenham cores distintas. Tendo como base essa condição, responda:

Fonte: http://www.mapasparacolorir.com.br/mapa-brasil.php

a. Quantas cores, no mínimo, são necessárias para colorir o mapa?

b. Dispondo de cinco cores e usando-as, de quantas maneiras o mapa pode ser colorido?

c. Dispondo de cinco cores e colorindo-se as regiões Nordeste e Sul com a mesma cor, de quantas maneiras o mapa pode ser colorido?

Questão 2:(UFF)

A partir de um grupo de 6 alunos e 5 professores será formada uma comissão constituída por 4 pessoas das quais, pelo menos duas devem ser professores. Determine de quantas formas distintas tal comissão pode ser formada.

Questão 3: (UERJ)

Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- um dentre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo;

- um dentre os tamanhos: pequeno e grande;
- de um até cinco dentre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:

a. quantos sanduíches distintos podem ser montados;

b. o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, sócome sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

Questão 4: (UFRJ)

Quantos números de 4 algarismos podemos formar nos quais o algarismo 2 aparece ao menos uma vez?

Questão 5

Utilizando o nome COPACABANA, calcule o número de anagramas possíveis.

Questão 6: (UNIVALI-SC)

Formados e dispostos em ordem alfabética todos os anagramas da palavra AMOR, a palavra ROMA ocupará a:

(A) 24ª posição (B) 23ª posição (C) 20ª posição (D) 19ª posição (E) 18ª posição

Questão 7: (MACKENZIE)

Com os diretores A , B , C , D , E , F e G de uma empresa, podemos formar, com a presença obrigatória de A e B, N comissões de 5 diretores. O valor de N é:

(A)10 (B) 35 (C) 6 (D) 21 (E) 120

Questão 8: (PUC-RS)

Um centro de pesquisas conta com 6 professores pesquisadores e 8 alunos auxiliares de pesquisa. Deve ser formado, neste centro, um grupo constituído por 5 auxiliares de pesquisa e dois pesquisadores, sendo um destes o coordenador do grupo. O número de escolhas possível para a formação deste grupo é:

(A) 86 (B) 640 (C) 840 (D) 1220 (E) 1680

Questão 9: (UFF)

Uma empresa vai fabricar cofres com senhas de 4 letras, usando as 18 consoantes e as 5 vogais. Se cada senha deve começar com uma consoante e terminar com uma vogal, sem repetir as letras, o número de senhas possíveis é:

(A) 3060 (B) 24480 (C) 37800 (D) 51210 (E) 73440

Questão 10: (PUC)

O campeonato brasileiro tem, em sua primeira fase, 28 times que jogam entre si. Nesta etapa, o número de jogos é de:

(A) 376 (B) 378 (C) 380 (D) 388 (E) 396

Aspectos pedagógicos:

Depois que os alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas, valorizando cada estratégia, mesmo que esta não tenha conduzido a uma resposta verdadeira.

Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção. Isso pode favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Respostas e comentários dos exercícios sugeridos

1.

a. Observando o mapa dado, podemos verificar que o número máximo de regiões adjacentes entre si é igual a três (Norte, Centro-Oeste e Nordeste ou Centro-Oeste, Sudeste e Nordeste ou Centro-Oeste, Sudeste e Sul). Logo o número mínimo de cores que devemos ter para pintar tal mapa sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor será igual a 3.

b. Se dispusermos de cinco cores e todas forem utilizadas na pintura do mapa, então cada região será pintada com uma das cinco cores. Assim o número de maneiras desse mapa ser colorido, nessas condições, é igual a 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 (basta utilizar o princípio multiplicativo).

c. Dispomos de cinco cores e as regiões Nordeste e Sul serão coloridas com a mesma cor. A cor usada na região Nordeste não poderá ser usada para pintar as regiões adjacentes a ela (Norte, Centro-oeste e Sudeste), justamente as três regiões que sobraram. Logo para pintar as regiões Nordeste e Sul dispomos de 5 cores (5 possibilidades). Uma vez pintadas as regiões Nordeste e Sul, para a região Norte, por exemplo, sobrariam apenas 4 possibilidades de cores a escolher. Uma vez pintadas as regiões Nordeste, Sul e Norte, sobrariam apenas 3 possibilidades de cores a escolherpara a região Centro-oeste. Uma vez pintadas as regiões Nordeste, Sul, Norte e Centro-oeste, sobrariam apenas 3 possibilidades de cores a escolherpara a região Sudeste (a cor da região Norte pode ser usada na região Sudeste já que estas não são adjacentes). Assim temos que o número de maneiras desse mapa ser colorido, nessas condições, é igual a 5 x 4 x 3 x 3 = 180 (basta utilizar o princípio multiplicativo).

2. Nesse caso é mais simples determinar o número de comissões possíveis retirando do número total de comissões de quatro pessoas formadas a partir de um grupo de onze pessoas, o número de comissões contendo apenas um professor e o número de comissões formadas apenas por alunos. Dessa forma, temos:

- o número total de comissões de quatro pessoas formadas a partir de um grupo de onze pessoas: $C_{11,4}$.
- o número de comissões contendo apenas um professor: 5 x $C_{6,3}$.
- o número de comissões formadas apenas por alunos: $C_{6,4}$.

(Obs.: Se tratam de combinações uma vez que a ordem dos elementos não importa para a formação das comissões.)

Assim, o número de comissões possíveis é igual a:

$C_{11,4} - (5 \times C_{6,3} + C_{6,4}) = 330 - (5 \times 20 + 15) = 330 - (100+15) = 330 - 115 = 215$.

3.

a. O número de sanduíches distintos que podem ser montados, nessas condições, é o resultado da multiplicação das possibilidades de escolha do tipo do pão, do tamanho do pão e do número de combinações possíveis de recheios (princípio multiplicativo). Assim, temos:

- número de possibilidades de escolha do tipo pão: 3.
- número de possibilidades de escolha do tamanho do pão: 2.
- número de combinações possíveis de recheios: $C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 31$.

Assim, o número de sanduíches distintos que podemos obter, nessas condições, é igual a: 3 x 2 x 31 = 186.

b. O número de sanduíches distintos que podem ser montados, nessas condições, é o resultado da multiplicação das possibilidades de escolha do tipo do pão, do tamanho do pão e do número de combinações possíveis de recheios (princípio multiplicativo). Assim, temos:

- número de possibilidades de escolha do tipo pão: 2.
- número de possibilidades de escolha do tamanho do pão: 1.
- número de combinações possíveis de recheios: $C_{5,2} = 10$.

Assim, o número de sanduíches distintos que podemos obter, nessas condições, é igual a: 2 x 1 x 10 = 20.

4. Nesse caso é mais simples se determinarmos a quantidade de números de 4 algarismos e retirar deste a quantidade de números de 4 algarismos nos quais o algarismo 2 não aparece nenhuma vez. Dessa forma, temos:

- a quantidade de números de 4 algarismos: 9 x 10 x 10 x 10 = 9000.
- a quantidade de números de 4 algarismos nos quais o algarismo 2 não aparece nenhuma vez: 8 x 9 x 9 x 9 = 5832.

(Obs.: Em um numeral de 4 algarismos, o primeiro – das unidades de milhar – não poderá ser igual a 0.)

Assim, o número de numerais de 4 algarismos que podemos formar nos quais o algarismo 2 aparece ao menos uma vez é igual a: 9000 – 5832 = 3168.

5. Trata-se de uma permutação com repetição, de modo que as letras O, P, B e N não se repetem, a letra C se repete duas vezes e a letra A quatro vezes. Assim, temos:

$$P_{10}^{2,4} = \frac{10!}{2!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6}^{3} \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 3 \times 5 = 75600 .$$

6. Primeiro é preciso verificar que a palavra ROMA corresponde à última palavra quando os anagramas são dispostos em ordem alfabética. Depois basta determinar o número de anagramas que podem ser formados a partir das letras da palavra AMOR, que serão: 4 x 3 x 2 x 1 = 24. Logo a palavra ROMA ocupará a 24ª posição na listagem. Letra A.

7. Nesse caso, como A e B devem necessariamente compor a comissão, resta determinar quais serão os possíveis grupos de três indivíduos que poderão compor a comissão juntamente com A e B. Para isso, podemos escolher dentre C, D, E, F e G esses três membros. Assim, o número N de comissões possíveis será igual a $C_{5,3}$ = 10. Letra A

8.Para a escolha dos dois professores pesquisadores que irão compor o grupo de pesquisa, temos 6 opções e para a escolha dos cinco alunos auxiliares temos 8 opções. Assim, temos que:

- o número de duplas de pesquisadores será igual a: A6,2 (nesse caso, se trata de um arranjo já que um deles será coordenador e outro não, logo a ordem interfere na composição da dupla).
- o número de grupos de 5 auxiliares será igual a: C8,5.

Então, o número de escolhas possível para a formação deste grupo é: A6,2x C8,5 = 30 x 56 = 1680. Letra E.

9.O número de senhas distintas que podem ser montadas, nessas condições, é o resultado da multiplicação das possibilidades de escolha de cada um de seus quatro dígitos (princípio multiplicativo). Assim, temos:

- número de possibilidades de escolha do primeiro dígito: 18 (apenas consoantes).
- número de possibilidades de escolha do quarto dígito: 5 (apenas vogais).
- número de possibilidades de escolha do segundo dígito: 21 (das 23 letras disponíveis, duas já foram usadas).
- número de possibilidades de escolha do segundo dígito: 20 (das 23 letras disponíveis, três já foram usadas).

Assim, o número de senhas distintas que podemos obter, nessas condições, é igual a: 18 x 21 x 20 x 5 = 37800. Letra C.

10. Cada jogo consiste no confronto de 2 dos 28 times. Assim, o número de partidas dessa fase é igual a: $C_{28,2}$ = 378. Letra B.

Volume 2 • Módulo 4 • Matemática

Expansão: Probabilidade Parte II

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenadora) e Luciane de Paiva Moura Coutinho

Introdução

A unidade Probabilidade 2, da expansão do material do aluno, inicia a abordagem do tema a partir de um diálogo entre dois amigos sobre espaço amostral, evento e probabilidade nos jogos. O diálogo resgata um pouco do que foi discutido a respeito do tema nas aulas anteriores, e os exemplos utilizados tratam das maneiras de descobrir, no lançamento de dois dados, a probabilidade de a soma dos números das faces ser igual a 6 ou um número múltiplo de 3.

Preparamos para você, professor, um material complementar, cujo objetivo é apresentar atividades que ajudem a enriquecer a abordagem dos objetivos de aprendizagem deste módulo, que são os seguintes:

- Resolver problemas que envolvem probabilidade da união de eventos;
- Probabilidade de eventos complementares;
- Descrever o conceito de probabilidade condicional.

A nossa sugestão é que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora, para a qual apresentamos uma proposta: a atividade Explorando o jogo do máximo, que convidará os alunos a fazer duas atividades on line relacionadas a um jogo, chamado jogo do máximo, que envolve o conceito de probabilidade.

Para a Seção 1, temos quatro sugestões de atividade. Em Quais são suas chances?, os alunos refletirão sobre algumas questões envolvendo probabilidade. Na atividade Feliz aniversário!, eles refletirão sobre uma situação corriqueira envolvendo datas de aniversário e probabilidade. A atividade Reconhecendo problemas de probabilidade condicional cria condições para que os alunos consigam identificar a principal característica de um problema que envolve o cálculo de uma probabilidade condicional. E, para fechar esta seção, temos a atividade A escolha da porta certa, onde os alunos terão a oportunidade de calcular a probabilidade de ganhar um prêmio na brincadeira chamada Porta dos Desesperados.

Para a Seção 2, trazemos a atividade O jogo de roletas, que propõe a discussão dos principais conceitos associados à probabilidade da união de eventos e à probabilidade condicional. E na atividade Fórmulas: usá-las ou não usá-las? Eis a questão!, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre as possibilidades de apresentar soluções distintas para um mesmo problema, usando fórmulas ou não.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro deve ser dedicado a uma revisão geral do estudo realizado, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. Já o segundo consiste num momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

A descrição e o detalhamento das atividades sugeridas estão nos textos e tabelas a seguir

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	4	Probabilidade Parte II	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Probabilidade – Parte 2	Probabilidade
Objetivos da unidade	
Resolver problemas que envolvem probabilidade da união de eventos.;	
Probabilidade de eventos complementares;	
Descrever o conceito de probabilidade Condicional.	

Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	177 a 178
Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??	179 a 184
Seção 2 – Vamos rever alguns problemas de uma manei¬ra diferente !!!??	184 a187
Veja ainda...	188
O que perguntam por aí?	191 a 192

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando o jogo do máximo	Computador com acesso à internet e Datashow	Os alunos farão duas atividades on line relacionadas ao jogo do máximo, que envolve o conceito de probabilidade	Duplas ou conforme a disponibilidade de computadores na escola	2 tempos de 40 minutos

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Quais são suas chances?	Computadores com acesso à internet e Datashow ou quadro negro, caneta, lápis, borracha e caderno.	Os alunos refletirão sobre algumas questões envolvendo probabilidade	Grupos de até 4 alunos.	2 tempos de 40 minutos
	Feliz aniversário!	Computadores com acesso à internet e Datashow ou quadro negro, caneta, lápis, borracha e caderno.	Os alunos refletirão sobre uma situação corriqueira envolvendo datas de aniversário e probabilidade.	Grupos de até 4 alunos.	2 tempos de 40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Reconhecendo problemas de probabilidade condicional	Uma ficha de atividades como a que segue no pendrive para cada dupla.	A atividade cria condições para que os alunos consigam identificar a principal característica de um problema que envolve o cálculo de uma probabilidade condicional.	Duplas	2 tempos de 40 minutos
	A escolha da porta certa	Cópias da folha de atividades.	Os alunos terão a oportunidade de calcular a probabilidade de ganhar um prêmio, numa brincadeira chamada Porta dos Desesperados.	Grupos de 4 ou 5 alunos	2 tempos de 40 minutos

Seção 2 – Vamos rever alguns problemas de uma maneira diferente !!!??

Páginas no material do aluno

184 a 187

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	O jogo de roletas	Cópias da folha de atividades	A atividade propõe a discussão dos principais conceitos associados à probabilidade da união de eventos e à probabilidade condicional.	Duplas ou grupos com 4 componentes	2 tempos de 40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fórmulas: usá-las ou não usá-las? Eis a questão!	Folhas de tamanho A4 para cálculos	A atividade dá aos alunos a oportunidade de refletir sobre as possibilidades que temos de apresentar soluções distintas para um mesmo problema, usando fórmulas ou não.	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas. A primeira consiste num registro de aprendizagens e a segunda, de questões objetivas e dissertativas, a serem escolhidas de acordo com as necessidades do professor.	Individual	40 minutos

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando o jogo do máximo	Computador com acesso à internet e Datashow	Os alunos farão duas atividades on line relacionadas ao jogo do máximo, que envolve o conceito de probabilidade	Duplas ou conforme a disponibilidade de computadores na escola	2 tempos de 40 minutos

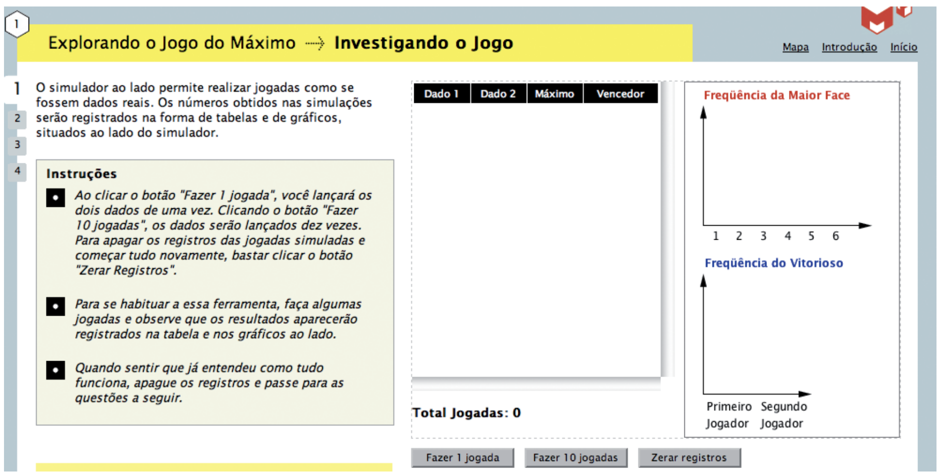
Aspectos operacionais

Prezado professor, peça que os alunos se dividam em dupla e que cada dupla escolha um computador para utilizar. Se a quantidade de computadores não for suficiente para que os alunos se organizem desta maneira, utilize um notebook e um Datashow, fazendo uma atividade coletiva em sala de aula. Desta forma, você pode chamar algumas duplas para participar da atividade enquanto os outros observavam e discutem as possíveis soluções. Para dar início à atividade, peça aos alunos que acessem o link http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1237/mapa.html. Caso esteja utilizando o computador com Datashow, acesse o link você mesmo.

Na atividade 1 é feita uma investigação inicial do jogo do máximo a partir de simulações. Já o objetivo da atividade 2 é desmistificar o jogo. Antes de tudo, comece explicando as regras aos seus alunos. No jogo do máximo, duas pessoas jogam. A primeira delas lança dois dados de uma só vez. Se o valor máximo que aparecer em qualquer um dos dois dados estiver entre 1 e 4, ela vence. No entanto, se o maior valor a aparecer nos dados for 5 ou 6, então é o seu adversário, o segundo jogador, quem vence.

Atividade 1

Primeiramente, os alunos farão simulações para investigar o jogo. No próprio software há instruções de como operar o simulador, como podemos ver na tela abaixo:

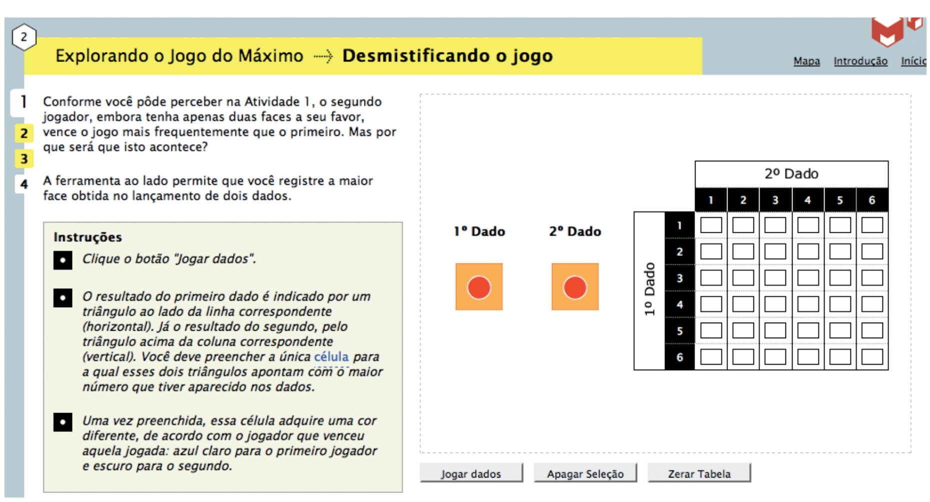


Após as simulações os alunos deverão responder a duas questões. Em seguida, é possível conferir os resultados.

A primeira atividade é composta por 4 etapas. Na primeira etapa, os alunos farão 10 simulações. Na segunda etapa, pelo menos 30 simulações e, na terceira etapa, 100 simulações. Após as simulações, os alunos responderão algumas questões. Na quarta e última etapa, os alunos serão convidados a fazer uma reflexão a respeito do jogo.

Atividade 2

Nessa atividade, o aluno vai tentar descobrir por que o segundo jogador, embora tenha apenas duas faces a seu favor, vence o jogo mais frequentemente que o primeiro, como visto na Atividade 1.



Na primeira etapa desta atividade, os alunos deverão preencher uma tabela. Na segunda e terceira etapa, os alunos deverão responder questões relacionadas à tabela preenchida anteriormente. Por fim, os alunos deverão responder a algumas questões refletindo sobre o jogo.

Aspectos pedagógicos

Os jogos despertam muito interesse nas pessoas. Os jogos com dados, em particular, são praticados pela humanidade há muito tempo. Eles fazem parte dos chamados "jogos de azar", cuja análise deu origem aos primeiros estudos sobre probabilidade na Matemática.

Essa primeira atividade é extremamente rica, uma vez que, além de iniciar o estudo dessa unidade sobre probabilidade de forma interativa, ela permite ao aluno refletir que nem sempre uma situação aparentemente favorável para um determinado jogador (o jogador 1 ganha se o resultado for 1, 2, 3 ou 4 - 4 possibilidades - enquanto o jogador 2 ganha apenas se os resultados forem 5 ou 6 - 2 possibilidades) não será favorável de fato. Podemos perceber isso mais claramente na tabela a seguir:

		2º Dado					
		1	2	3	4	5	6
1º Dado	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6	6

Nesta tabela, que pode ser encontrada na Atividade 2, podemos perceber que há 20 resultados com 5 ou 6, favoráveis ao segundo jogador, enquanto há apenas 16 resultados com 1, 2 3 ou 4, favoráveis ao primeiro jogador. Isso faz com que o segundo jogador tenha mais chances de ganhar do que o primeiro jogador. Nessa atividade, procure explorar junto com o seu aluno a ideia de chance de ganhar o jogo e o por quê de não serem igualmente distribuídas.

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Quais são suas chances?	Computadores com acesso à internet e Datashow ou quadro negro, caneta, lápis, borracha e caderno.	Os alunos refletirão sobre algumas questões envolvendo probabilidade	Grupos de até 4 alunos.	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, leve os alunos para o laboratório de informática, peça que se dividam em grupos de até quatro pessoas e que cada grupo escolha um computador para trabalhar. Em seguida, peça que acessem o link http://www.planetseed.com/pt-br/mathpuzzles/quais-sao-suas-chances . Caso tenha dificuldades em acessar o laboratório de informática, você pode passar as questões no quadro e pedir que os grupos resolvam as questões. Em seguida, peça que alguns grupos apresentem as soluções encontradas e faça uma explanação articulando estas soluções com as soluções corretas.

A idéia é fazer com que os alunos reflitam e respondam às seguintes questões:

1. Se você jogar um par de dados, qual é a probabilidade de conseguir com que a soma de duas faces viradas para cima seja igual a 2?

2. E se novamente jogar o par de dados, qual é a probabilidade de conseguir com que a soma de duas faces viradas para cima seja igual a 7?

Por que são diferentes?

No caso de a atividade ser realizada no laboratório de informática, os alunos poderão, após a resolução, clicar em Confira nossa solução para verificarem se acertaram.

Aspectos pedagógicos

Professor, é interessante construir com a turma as possibilidades de solução dos questionamentos. Apresentamos a seguir, uma sugestão para esta construção:

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6

Veja que existem 36 resultados possíveis. Um desses, mostrado em verde, é aquele cuja soma é igual a 2, ou seja, aquele em que cada um dos dados apresenta o número 1 na face superior. Assim, a probabilidade de se conseguir soma 2 é de 1/36.

Seis das 36 possibilidades, mostradas em vermelho, somam 7. Assim, a probabilidade de se conseguir soma 7 é de 6/36 = 1/6.

Agora, reflita com a turma por que as probabilidades são diferentes, uma vez que, só há uma única possibilidade da soma resultar 2, enquanto há seis possibilidades para a soma dos números mostrados nas faces superiores dos dados ser 7.

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Feliz aniversário!	Computadores com acesso à internet e Datashow ou quadro negro, caneta, lápis, borracha e caderno.	Os alunos refletirão sobre uma situação corriqueira envolvendo datas de aniversário e probabilidade.	Grupos de até 4 alunos.	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, leve os alunos para o laboratório de informática, peça que se dividam em grupos de até quatro pessoas e que cada grupo escolha um computador para trabalhar. Em seguida, peça que acessem o link http://www.planetseed.com/pt-br/mathpuzzles/feliz-aniversario. Caso o laboratório não esteja disponível, você pode realizar a atividade com papel e lápis, quadro e caneta.

Essa atividade será composta por 3 etapas:

1ª etapa:

Peça que os alunos reflitam sobre as situações propostas:

Você já notou que muitas pessoas fazem aniversário no mesmo dia que você? Com apenas 366 datas possíveis para aniversariar e mais de 6 bilhões de pessoas no mundo, deve haver um monte de pessoas fazendo anos no seu dia. Mas se você estivesse dentro de uma sala com algumas pessoas, qual é a probabilidade de haver ao menos duas delas fazendo aniversário no mesmo dia?

2a etapa:

Quantos alunos há em sua classe? Existem muitos aniversários em comum?

Professor, para responder a essas perguntas, peça para que cada um diga a data do seu aniversário e verifique se há aniversários em comum.

3ª etapa:

Por fim, peça para que os alunos resolvam algumas situações:

Quantas pessoas você acha que deveria haver na sala para termos uma boa chance de, no mínimo, duas delas fazerem aniversário no mesmo dia?

Em outras palavras, quantas pessoas são necessárias para que a probabilidade de um aniversário em comum seja maior que 50%? De quantas pessoas você precisa para a probabilidade ser maior que 90%?

Aspectos pedagógicos

Professor, essa é uma atividade interessante para realizar em sala, pois envolve a data de aniversário e todos gostam de dizer quando irão comemorar mais uma primavera.

Uma maneira de resolver esse problema é analisá-lo ao contrário e pensar qual a probabilidade de não haver nenhuma coincidência em um grupo de determinado tamanho. Suponha uma sala em que há apenas uma pessoa. Neste caso, não há possibilidades de aniversários em comum, já que para haver coincidência de aniversários são necessários, no mínimo, dois aniversariantes. A probabilidade de não haver coincidências nesse caso é 1, pois eventos considerados certos têm a probabilidade de 1. No outro extremo, com 367 pessoas na sala, é certo que haverá pelo menos um aniversário em comum, já que, nesta situação, não haverá datas diferentes disponíveis para todos.

Imagine agora que uma segunda pessoa entrou na sala. A probabilidade de essa pessoa não ter o mesmo aniversário do primeiro ocupante da sala é 365 / 366 - ou 0,997 – pois apenas uma dentre as 366 datas de aniversário coincidirá com a do primeiro ocupante. Agora, se as duas primeiras pessoas na sala tiverem datas de aniversário diferentes e uma terceira pessoa entrar, haverá dois dias ocupados – portanto, a probabilidade de não haver compartilhamento entre os três é de $1 * 365 / 366 * 364 / 366 = 0,992$, que ainda é mais de 99%. Então, com 2 ou 3 pessoas na sala, há menos de 1% de chance de um aniversário em comum.

Você pode continuar a calcular as chances de não ter um aniversário em comum para qualquer número de pessoas:

1 * 365 / 366 * 364 / 366 * 363 / 366 * 362 / 366 ...

As coisas mudam rapidamente à medida que o número de pessoas aumenta. Com 10 pessoas na sala, ainda há mais de 10% de chance de uma coincidência. Quando há 23 pessoas na sala, a chance de um aniversário em comum é levemente maior de 50%, e aumenta para mais de 90% com 41 pessoas.

Essa atividade pode ter um desdobramento prático. Peça para que os alunos realizem uma enquete com outras turmas na escola perguntando a data de nascimento de cada um. Após recolher essas informações, tente confirmar experimentalmente os cálculos realizados anteriormente de maneira teórica.

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Reconhecendo problemas de probabilidade condicional	Uma ficha de atividades como a que segue no pendrive para cada dupla.	A atividade cria condições para que os alunos consigam identificar a principal característica de um problema que envolve o cálculo de uma probabilidade condicional.	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é criar condições para que os alunos consigam identificar a principal característica de um problema que envolve o cálculo de uma probabilidade condicional: saber que um evento B ocorreu pode nos ajudar a avaliar a probabilidade de ocorrência de um evento A.

Inicialmente você pode estabelecer com a turma um diálogo, levantando os seguintes questionamentos: Saber que o primeiro filho de um casal é menino muda a chance do segundo filho deste mesmo casal ter um segundo filho do sexo feminino? Em que tipo de situação saber de uma informação a mais altera nossa avaliação da probabilidade de um evento ocorrer?

Em seguida, distribua uma ficha como a que segue no Pendrive para cada dupla e peça aos alunos que, organizados em dupla, tentem resolver os problemas ali propostos. Quando eles concluírem, peça-lhes que exponham seus raciocínios.

Aspectos pedagógicos

Professor, nossa sugestão aqui é que, quando os alunos expuserem suas soluções, você faça uma leitura coletiva dos problemas procurando compará-los. Inicialmente leia e compare os problemas 1 e 2. Embora o contexto seja o mesmo – a extração de uma carta de um baralho – qual a diferença entre um e outro? Os alunos precisam entender que, no primeiro problema, o espaço amostral é formado pelas 52 cartas e, como são 4 reis, a probabilidade desejado é 4/52 ou 2/13. Já no segundo, o fato de sabermos que a carta retirada era vermelha nos leva a restringir o espaço amostral a 26 elementos. Para resolvermos este problema, devemos saber que as cartas vermelhas são de dois naipes distintos: copas e ouro. Outra informação importante é que a quantidade de cartas em cada naipe é a mesma: 13 cartas. Assim temos 26 cartas vermelhas e, destas, duas são reis: o rei de ouro e o rei de copas.

Após estas informações, podemos calcular a probabilidade pedida. Mais uma vez, é importante ajudar os alunos a visualizar e definir os eventos envolvidos na situação:

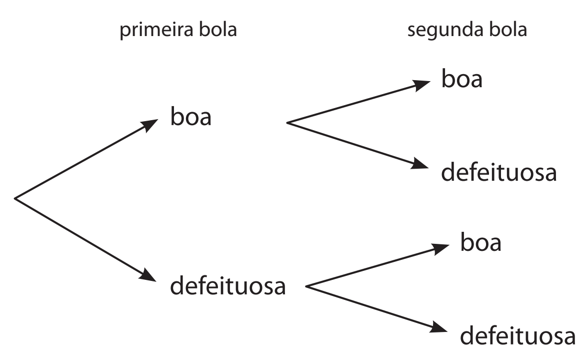
V = sair uma carta vermelha

R = sair rei

Logo, $P(R/V)=\dfrac{n(R\cap V)}{n(V)}=\dfrac{2}{26}=\dfrac{1}{13}$

Nos problemas 3 e 4, caso nenhuma dupla apresente o diagrama de árvore em suas soluções, é importante construí-lo o e valorizá-lo junto aos alunos, mostrando que este é um esquema de simples construção e bastante intuitivo. Estabelecendo e usando esta forma de registro dos dados, os alunos podem avançar no processo de construção dos principais conceitos associados ao cálculo das probabilidades.

No problema 3, ao retirarmos a 1ª peça, temos duas possibilidades: ser boa ou ser defeituosa. Para cada uma, há duas possibilidades para a 2ª peça retirada, que também pode ser boa ou defeituosa.



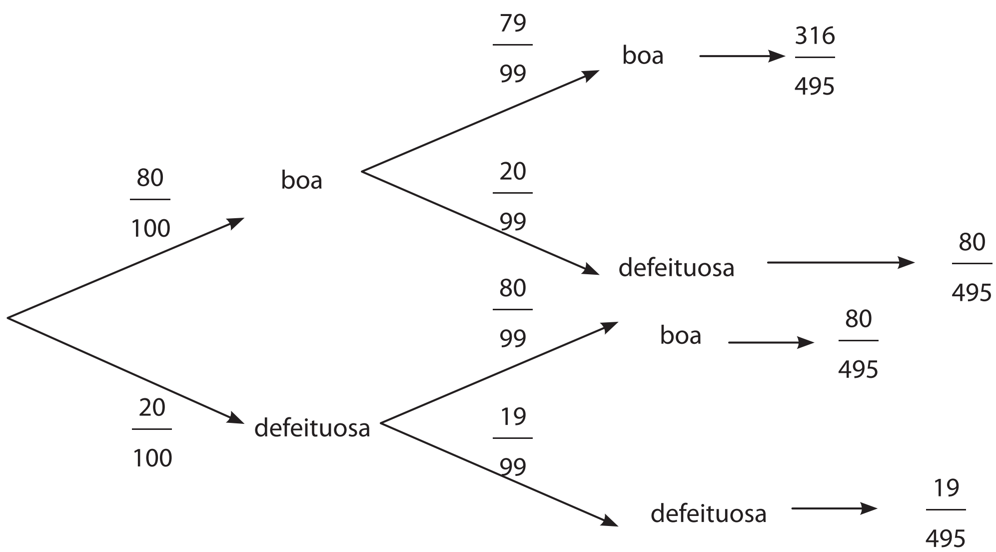
Para calcular estas probabilidades é importante lembrar a fórmula da probabilidade condicional: $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por P(B) podemos reescrever esta fórmula como $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$.

Assim, podemos concluir que para calcular a probabilidade em cada saída devemos multiplicar as probabilidades dos ramos que antecedem a saída. Por exemplo:

P(primeira boa $\cap$ segunda boa) = P(primeira boa)·P(segunda boa /primeira boa).

Agora já é possível preencher o diagrama com as probabilidades:



Para a 2ª peça ser defeituosa, temos duas possibilidades, que são "a 1ª ser boa e a 2ª ser defeituosa" ou "a 1ª ser defeituosa e a 2ª ser defeituosa". A palavra "ou" tem um significado de união então:

P(segunda defeituosa) = P(primeira boa $\cap$ segunda defeituosa) + P(primeira defeituosa $\cap$ segunda defeituosa)

Substituindo os valores obtemos $\frac{80}{495}+\frac{19}{495}=\frac{99}{495}$

No problema 4, é aconselhável que você chame a atenção dos alunos para o fato de que a informação que possuímos é da 2ª peça - o que, no diagrama da árvore, significa uma informação a posteriori e não a priori. Portanto, neste caso, a fórmula da probabilidade condicional é essencial. E, sendo assim, temos:

$$P(\textit{primeira}\text{ boa / segunda defeituosa}) = \frac{P(\textit{primeira}\text{ boa} \cap \text{segunda defeituosa})}{P(\text{segunda defeituosa})} = \frac{\frac{80}{495}}{\frac{99}{495}} = \frac{80}{99}$$

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	A escolha da porta certa	Cópias da folha de atividades.	Os alunos terão a oportunidade de calcular a probabilidade de ganhar um prêmio, numa brincadeira chamada Porta dos Desesperados.	Grupos de 4 ou 5 alunos	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais:

Esta atividade foi adaptada de um roteiro de ação proposto no curso de formação continuada para professores de Matemática da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro. Ela enfatiza o estudo do conceito de probabilidade condicional, um assunto essencial nos estudos das probabilidades na Matemática do Ensino Médio. A situação problema apresentada na ficha é baseada no problema clássico de A. C. Morgado: Os dois bodes.

Para começar, professor, organize os grupos de trabalho com 4 componentes, procurando colocar num mesmo grupo alunos com diferentes níveis de compreensão do que foi estudado até então. Depois que distribuir as fichas, você pode pedir aos grupos que comecem a lê-las e tentem responder os itens ali presentes. Mas, atenção: enquanto eles tentam fazer isso, é fundamental que você circule pela sala, procurando identificar as dúvidas que forem surgindo e esclarecendo-as sempre que possível. Nesta ficha, a compreensão dos itens iniciais favorece a compreensão dos itens finais. Se os alunos não tiverem suas dúvidas esclarecidas, poderão perder o interesse pela atividade. É razoável que você reserve um tempo no final da aula para que os alunos exponham suas soluções, mas também permita que os grupos troquem ideias com você e entre eles mesmos ao longo de toda a aula.

Aspectos pedagógicos

Professor, o item 1 é relativamente fácil e nossa experiência tem mostrado que a maioria dos alunos consegue respondê-lo sem maiores dificuldades. Considerando-se que as portas têm a mesma chance de conterem o prêmio, temos que a probabilidade de ganhar é $p=1/3$ e de perder é $q=1-1/3=2/3$. Aconselhamos apenas que você aproveite esse item para reforçar a ideia de probabilidade do evento complementar, que é um dos descritores da matriz de referência do Currículo Mínimo.

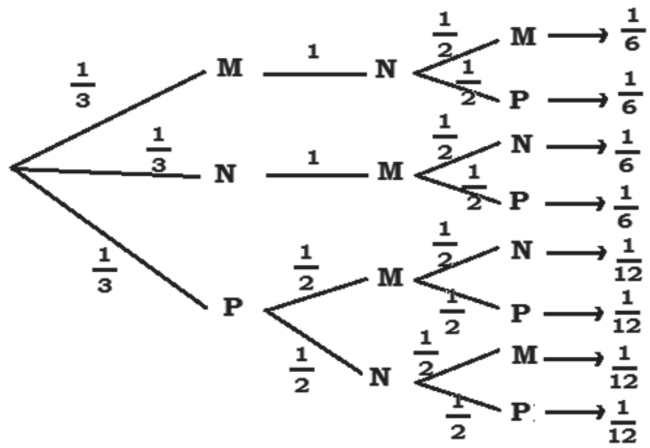
No segundo item, introduzimos a ideia de probabilidade condicional. É importante levar os alunos a perceber que, dependendo da condição estabelecida na pergunta, o resultado da probabilidade será alterado. Na verdade, dependendo do que é perguntado, o espaço amostral da situação pode se alterar. Supondo que o participante escolheu uma porta com um monstro, o apresentador, que sabe o que está por trás das 3 portas, deverá escolher a outra porta que contém um monstro. Logo a probabilidade do apresentador escolher essa porta é P=1 ou 100%. Já no item 3, como o apresentador sabe que o participante escolheu uma porta que contém um prêmio, ele terá duas opções de portas com monstro para abrir. Logo sua probabilidade de abrir uma porta com um monstro é P=1/2 ou 50%.

A partir do item 4, professor, é aconselhável que você relembre com seus alunos a ideia de probabilidade de eventos independentes e sucessivos, que nos diz que, se um experimento aleatório é composto por vários eventos sucessivos e independentes, a probabilidade de ocorrência é o produto da probabilidades dos eventos componentes. Note ainda que está implícita no problema a regra do "ou" (probabilidade da união) para eventos independentes, que nos diz que, se A e B são dois eventos independentes, então a Probabilidade de correr o evento A ou o evento B (eis o motivo de a regra ser chamada de regra do ou) é dada pela soma das probabilidades dos eventos. Se estas ideias estiverem bem trabalhadas, facilmente seus alunos conseguirão preencher corretamente a árvore do item 4, que resumimos a seguir:

Ganha o prêmio Trocando de porta	Perde o prêmio Trocando de porta
Caso 1: 1/3 x 1 = 1/3 Caso 2: 1/3 x 1 = 1/3	Caso 3: 1/3 x 1/2 = 1/6 Caso 4: 1/3 x 1/2 = 1/6
A Probabilidade é de p= 1/3 + 1/3 = 2/3	A Probabilidade é de p= 1/6 + 1/6 = 1/3

Além disso, concluirão que, após o apresentador abrir a porta que contém um monstro, as chances do participante de ganhar o prêmio aumentam, que é a solução do item 6. Afinal, antes do apresentador abrir a porta, sua probabilidade era de p=1/3, o que equivale a aproximadamente, 33,3%. Com a abertura da porta que contém um monstro, intuitivamente, suas chances aumentam para p=1/2=50%.

Perceba como a construção da árvore de probabilidades é um excelente recurso para a organização do pensamento e para a decisão dos cálculos a serem feitos. Aqui nossa sugestão é que você reflita com seus alunos sobre isso e estimule o preenchimento da árvore proposta no item 7. Ela fica como a que segue abaixo. Se for preciso, procure auxiliá-los.



As respostas dos itens 8 e 9, 10 são, respectivamente p=1/12 + 1/12 = 1/6 e p=1/6 + 1/6 = 2/6 ou p = 1/3. A partir destes cálculos, seus alunos poderão ainda concluir que a probabilidade do participante ganhar o prêmio trocando de porta é o dobro da probabilidade de ganhar o prêmio sem trocar, o que responde ao item 10.

Por fim, no item 11, a probabilidade procurada é p = 1/12 + 1/12 = 1/6 . Aproveite este fechamento para observar junto à turma que, nas condições e critérios apresentados pelo problema, é mais vantajoso trocar de porta. Porém deve ficar claro que nem sempre isso é o que acontece. Afirmar que sempre é melhor trocar de porta é dizer que essa probabilidade é 100%, o que é falso. Em geral, o critério adotado pelo apresentador na escolha da porta que contém um monstro pode levar o participante à escolha da porta certa.

Seção 2 – Vamos rever alguns problemas de uma maneira diferente !!!??

Páginas no material do aluno

184 a 187

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	O jogo de roletas	Cópias da folha de atividades	A atividade propõe a discussão dos principais conceitos associados à probabilidade da união de eventos e à probabilidade condicional.	Duplas ou grupos com 4 componentes	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Nesta atividade, que é uma adaptação de um roteiro de ação do curso de formação continuada para professores da rede estadual do Rio de Janeiro, propomos a discussão dos principais conceitos associados à probabilidade da união de eventos e à probabilidade condicional. Nela, é interessante que você reflita com seus alunos não só sobre as fórmulas que podem ser deduzidas no estudo destes assuntos, mas também sobre a possibilidade de resolvermos problemas sem necessariamente termos que recorrer a elas.

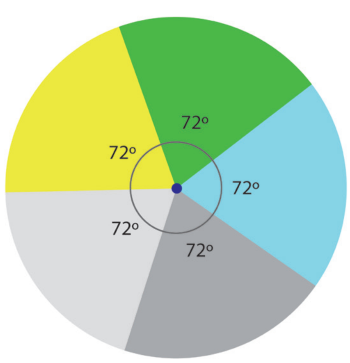
Para começar, professor, você pode organizar a turma em duplas ou grupos com 4 componentes, de maneira que os alunos tenham afinidades pessoais e também consigam estabelecer uma parceria de trabalho, respeitando-se. Em seguida, distribua para cada grupo uma ficha como a que segue em anexo. Antes que eles comecem a lê-la, vale à pena um pequeno bate papo sobre jogos e, principalmente, sobre aqueles em que os jogadores utilizam roletas. Questione-os se já participaram de algum jogo deste tipo e onde costumam ver roletas. Em muitos jogos infanto-juvenis, em certos programas de auditório na televisão e em parques de diversão podemos vê-las facilmente. Estas constatações ajudarão os alunos a se aproximarem do contexto das situações problema que são apresentadas na ficha.

Depois disso, você pode pedir aos alunos que leiam atentamente as fichas, tentem resolver os problemas e, quando concluírem, proponha uma correção coletiva. Faça uma grande roda e dê oportunidade para que seus alunos exponham suas soluções e os pontos de vista subjacentes em cada solução. Nestes momentos, é aconselhável que você faça poucas intervenções, permitindo a troca de opinião entre os alunos. Porém, esteja atento às falas dos alunos para poder sinalizar para a turma os pontos de aproximação entre os raciocínios empregados por eles e os conhecimentos matemáticos que estes raciocínios mobilizam.

Aspectos pedagógicos

Professor, no item 1, é fundamental que seus alunos percebam que, como cada um dos 5 setores tem a mesma chance de ocorrência na parada do ponteiro, temos que todos os setores são congruentes. Logo a chance de ocorrência de cada setor será $\mathbf{p} = \frac{1}{5}$.

Uma possível representação dessa situação pode ser:



Dividindo o círculo em 5 setores congruentes, teremos que cada setor terá ângulo central de 72º.

Recomendamos que, durante a correção coletiva ou mesmo enquanto os alunos ainda estiverem resolvendo as situações da ficha, você procure comparar este círculo com o círculo que serve de base para as questões de 2 a 5. Nossa experiência tem mostrado que alguns alunos se distraem e não levam em conta este último, respondendo as questões como se as chances em todos os setores fossem as mesmas. Se estiverem atentos ao círculo certo, facilmente concluirão que o maior setor de um círculo é aquele que possui a maior área e consequentemente o maior ângulo central. Além disso, como o ponteiro cai no setor amarelo, que possui 120°, temos que a probabilidade de isso ocorrer é p=área do setor (120°)/área do círculo (360°)=1/3.

Seguindo este raciocínio, no item 3, a resposta é o setor de cor azul, pois possui a maior área e, no item 4, não se surpreenda se alguns alunos pensarem assim:

"Temos que p=área do setor (x°)/área do círculo (360°)=12,5%=125/1000=1/8. Logo esse setor corresponde a 1/8 do círculo. Com isso, seu ângulo central será de 360/8=45°. Logo, o setor pedido no problema é aquele que possui um ângulo central de 45º".

Mas, caso algum aluno apresente muitas dificuldades na resolução desse item, procure reforçar a ideia de que a probabilidade de ocorrência do espaço amostral é 100% (ou 1).

Esta ideia, por sua vez, pode também servir como argumento para que sua turma compreenda que a resposta do item 5 é não, pois a soma das probabilidades desses três setores, que formam o espaço amostral é 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8 < 1.

Por construção, os 8 setores têm ângulos centrais respectivamente iguais a 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° e 80°. Vale ressaltar que só faz sentido falar nessa probabilidade, pois a soma dos ângulos centrais dos 8 setores é igual a 10°+ 20°+ 30°+ 40°+ 50°+ 60°+ 70°+ 80°=360° , que é o ângulo central referente ao espaço amostral.

Para o item 6, lembre aos alunos que a maior chance ocorrerá no setor de maior área e, portanto, de maior ângulo central. Logo, o ponteiro tem a maior chance de parar no setor cujo ângulo central mede 80°. Já para o item 7, a menor chance ocorrerá no setor de menor área e, portanto, de menor ângulo central. Logo o ponteiro tem a menor chance de parar no setor cujo ângulo central mede 10°.

Os itens 8 e 9 exploram a probabilidade geométrica e a propriedade da união de dois eventos, representada por p(A U B). No item 8, como o ponteiro cai num setor de cor branca, isso pode acontecer nos setores cujos ângulos centrais são respectivamente iguais a 20° e 60°. Por construção, esses setores correspondem a eventos independentes e, assim, teremos:

Evento A = O ponteiro cair no setor de ângulo central igual 20°.

p(A) = área do setor (20°) / área do círculo (360°) = 20/360 = 1/18

Evento B = O ponteiro cair no setor de ângulo central igual 60º.

p(B) = área do setor (60°) / área do círculo (360°) = 60/360 = 1/6

Logo, como os eventos A e B são independentes, pela "regra do ou" temos:

p(A U B)= 1/18 + 1/6 = 1/18 + 3/18 = 4/18 = 2/9

No item 9, como o ponteiro não cai num setor de cor branca ou azul, ele só pode cair num setor de cor verde ou amarela. Assim temos que:

Evento A = O ponteiro cair no setor de cor verde (ângulo central igual 10° ou 40° - "regra do ou").

p (A) = área do setor verde / área do círculo (360°) = 10/360 + 40/360 = 50/360

Evento B = O ponteiro cair no setor de cor amarela (ângulo central igual 50° ou 80° - "regra do ou").

p (B) = área do setor amarelo / área do círculo (360°) = 50/360 + 80/360 = 130/360

Logo, como os eventos A e B são independentes, pela "regra do ou" temos:

p(A U B) = 50/360 + 130/360 = 180/360 = 1/2 = 50%

o que nos diz que essa chance é de 50%.

Professor, o item 10 explora a probabilidade geométrica e a propriedade de probabilidade condicional, representada por p(A / B). Nele, é importante que os alunos entendam que a probabilidade condicional p(A / B) trata da probabilidade de ocorrência de um evento A, tendo ocorrido um evento B, ambos do espaço amostral, ou seja, ela é calculada sobre o evento B e não em função do espaço amostral Ω. O entendimento dessa mudança no espaço amostral é fundamental para que os alunos desenvolvam seus próprios métodos para resolver este tipo de situação.

No caso do item 10, o espaço amostral deixa de ser o círculo e passa a ser os setores circulares de cor verde.

Como se sabe que o ponteiro caiu num setor de cor verde, ele só pode ter caído nos setores cujos ângulos centrais são respectivamente iguais a 10° e 40°. Logo temos que o espaço amostral deixa de ser o circulo como um todo e passa a ser os setores de cor verde. Assim segue que:

Evento A = O ponteiro cair no setor de cor verde de ângulo central igual 40º.

Evento B (Espaço amostral) = O ponteiro cair no setor de cor verde (ângulo central igual 10° ou 40°).

p(A / B) = área do setor verde (40°) / área dos setores verdes (10°+40°) = 40/50= 4/5=80%

Seção 2 – Vamos rever alguns problemas de uma maneira diferente !!!??

Páginas no material do aluno

184 a 187

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fórmulas: usá-las ou não usá-las? Eis a questão!	Folhas de tamanho A4 para cálculos	A atividade dá aos alunos a oportunidade de refletir sobre as possibilidades que temos de apresentar soluções distintas para um mesmo problema, usando fórmulas ou não.	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais:

Professor, esta é uma atividade simples em que você terá oportunidade de refletir com seus alunos sobre as possibilidades que temos de apresentar soluções distintas para um mesmo problema. Poderá mostrar a eles também que, embora existam fórmulas, nem sempre empregá-las é o caminho mais rápido para solucionar um problema. Para começar, escreva no quadro os problemas abaixo e peça aos alunos que tentem resolvê-los em dupla. Quando eles concluírem, peça que exponham suas soluções.

Problema 1: Em uma determinada turma o professor resolveu chamar um aluno para ir a um quadro. Para isso ele escolheu, de forma aleatória, um dos 29 números da chamada que se encontrava em seu diário de classe. Qual a probabilidade de ter sido escolhido um número que seja par ou múltiplo de 3?

Problema 2: Em uma festa de fim de ano de uma empresa os funcionários resolveram participar de um amigo oculto. No entanto, ao colocar os nomes nos papéis decidiram que colocariam os nomes das mulheres em papel vermelho e os nomes dos homens em papel azul. Entre os funcionários desta empresa estão Marlise e Nilton. Participaram do amigo oculto 25 homens e 35 mulheres. Sabendo que Marlise retirou um papel azul, qual é a probabilidade dela ter retirado o papel com o nome Nilton?

Aspectos pedagógicos

Professor, antes de os alunos começarem a expor suas soluções, é aconselhável que você faça a leitura dos problemas com eles. O problema 1, por exemplo, pode ser resolvido a partir da simples observação da lista de números mencionada no enunciado e da identificação dos números que compõem os casos favoráveis e os casos possíveis. Entretanto, se alguma dupla tiver resolvido o problema 1 utilizando a fórmula para a probabilidade da união de eventos, procure verificar se, em primeiro lugar, eles definiram claramente os eventos A = sair número par e B = sair número múltiplo de 3.

Desta forma, temos n(A) = 15, n(B) = 9 e n(Ω) = 29. Além disso, devemos criar condições para que os alunos entendam o que está sendo pedido. Eles devem perceber que o evento sair número par ou número múltiplo de 3 significa $A \cup B$. Já o evento $A \cap B$ significa sair número par e número múltiplo de 3, ou seja, múltiplo de 6 assim $n(A \cap B)$ = 4.

Assim, as probabilidades que podemos calcular são:

p(A) = 15/29, p(B) = 9/29 $p(A \cap B)$ e = 4/29

E, usando a fórmula da probabilidade da união de dois eventos, temos:

p(A U B) = 15/29 + 9/29 – 4/29 = 20/29

Já no problema 2, como sabemos que a pessoa sorteada pela Marlise foi um homem, ela só pode ter retirado um dos 25 nomes. Então podemos considerar o conjunto com estes 25 nomes como sendo o nosso "espaço amostral". Considerando o evento A como "sair o papel com o nome Nilton", e sabendo que o papel azul saiu, caímos no caso de uma probabilidade condicional, pois já conhecemos uma informação adicional - neste caso, que o papel retirado era azul.

Se denotarmos o evento "sair papel azul" pela letra B, é possível calcular p(A/B), ou seja, a "probabilidade do evento A ocorrer sabendo que B ocorreu", que pode ser lido como "probabilidade de A dado B". Assim, p(A / B) = $\dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$ = 1/25, pois dos 25 papéis azuis 1 tem o nome de Nilton. Lembrando que $A \cap B$ = papel azul e que contém o nome Nilton.

De maneira geral, quaisquer que sejam os eventos A e B, teremos p(A / B) = $\dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$. E, ao dividirmos o numerador e o denominador por n(Ω), teremos:

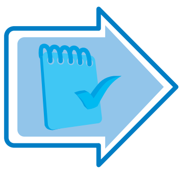
$$p(A / B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} \text{, ou seja, } p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Utilizando esta fórmula no exemplo anterior temos:

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{25}{60}} = \frac{1}{25}$$, o mesmo resultado que obtivemos sem a utilização da fórmula.

Mas, lembre-se, nosso objetivo aqui é destacar para os alunos que nem sempre vale a pena usar fórmulas mecanicamente sem antes entendermos o que está sendo pedido. Este é um bom exemplo de situação em que a fórmula pode ser desnecessária.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas. A primeira consiste num registro de aprendizagens e a segunda, de questões objetivas e dissertativas, a serem escolhidas de acordo com as necessidades do professor.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à Unidade 4 do Módulo 4. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Apresentamos a seguir algumas questões para os alunos responderem, que podem complementar as suas, no que diz respeito à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas. A idéia é que elas complementem as estratégias que você já usa com este objetivo.

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?
2. Cite dois eventos associados ao lançamento sucessivo de três moedas.
3. Dê um exemplo de experimento aleatório e defina eventos A e B associados a este experimento, de forma que $A \cap B = \varnothing$.
4. Dois dados, um vermelho e outro amarelo, são arremessados simultaneamente. Sendo A o evento em que o resultado do dado vermelho é par e o resultado do dado amarelo é 1 e B o evento em que o resultado de ambos os dados são iguais, descreva o evento A U B.
5. Em que situação no dia a dia você percebe a necessidade de saber sobre probabilidade? Por quê?

Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros, que serão entregues ao seu formador, durante a etapa presencial do processo de formação. Desta forma, esperamos acompanhar com você a maneira como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho - e, se for o caso, repensá-los a partir dos resultados apresentados.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Para compor o instrumento avaliativo nesta etapa, sugerimos a escolha de pelo menos uma questão objetiva e uma questão discursiva que contemplem uma habilidade pretendida nesta unidade. Nosso objetivo aqui é fazer com que o aluno compreenda uma situação real, aplique o princípio multiplicativo ou o conceito de permutação e faça uma reflexão mais profunda sobre procedimentos para contagem.

Sugestão de questão objetiva para a avaliação:

Questão 1: (ENCE)

Num município, 36% das famílias têm cachorro e 22% das famílias que têm cachorro, têm um gato. Além disto, 30% das famílias têm um gato. A probabilidade condicional de uma família selecionada aleatoriamente ter um cachorro, dado que ela tem um gato é:

a) 26,4%

b) 30%

c) 34,5%

d) 43%

e) 52,4%

Sugestão de questão discursiva para a avaliação:

Questão:

Considere o dado em forma de icosaedro (poliedro de 20 faces), conforme apresentado na figura a seguir.

Suponha que este dado seja lançado aleatoriamente.

a) Qual o espaço amostral associado ao experimento?

b) Dado que o resultado de um lançamento do dado em forma de icosaedro é par, qual a probabilidade deste resultado ser menor ou igual a 12?

Gabarito

Registros de Aprendizagem

1. Probabilidade de reunião de eventos e probabilidade condicional.

2. Pode-se escolher A como sendo o evento em que o primeiro arremesso tem como resultado "cara" e B o evento no qual ocorrem pelo menos dois resultados "cara" nos três arremessos. Perceba que há outras possibilidades de eventos, ficando a critério de cada um a definição destes, desde que não se trate de um evento impossível para o experimento.

3. Aproveitando ainda o arremesso sucessivo de três moedas, podemos escolher A como sendo o evento em que o primeiro arremesso tem como resultado "cara" e B o evento em que o primeiro arremesso tem como resultado "coroa". Claro que .

4. Se um evento simples {(v,a)} denota o resultado de um arremesso do dado vermelho e amarelo respectivamente, então

A = {(2,1), (4,1), (6,1)} e B = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

Donde A U B = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (4,1), (6,1)}

5. Há inúmeras situações, aqui. No entanto, em geral, o interesse pelos jogos de azar é o que mais desperta a necessidade do conhecimento. O motivo é simplesmente tentar a avaliar suas reais chances de vencer.

Resposta e comentários da questão objetiva sugerida:

Se julgar necessário, você pode fazer um diagrama, facilitando assim a compreensão dos alunos e a organização das ideias. As informações são apresentadas explicitamente, bastando apenas fazer a leitura e identificação dos eventos.

Chamando G o evento "possuir um gato" e C o evento "possuir um cachorro", deve-se calcular p(C / G) = $\dfrac{p(C\cap G)}{p(G)}$ isto é, a probabilidade de possuir um cão, dado que se possui um gato. Como =22%.36% e p(G)=30%, tem-se que, p(C / G) = $\dfrac{p(C\cap G)}{p(G)} = \dfrac{22\%.36\%}{30\%} = 26,4\%$

Resposta e comentários da questão discursiva sugerida:

Você pode, inicialmente, dizer aos alunos que este dado apresenta muito mais resultados do que um dado tradicional fornece. Vale a pena elucidar a forma geométrica do mesmo. A fim de induzir uma conclusão sobre o espaço amostral, você pode perguntar se determinados resultados são possíveis. Com isto, peça que escrevam o espaço amostral. Para o segundo item, peça que enumere os resultados "pares" e, em seguida, os resultados enumerados que são menores ou iguais a 12.

Como o conjunto de todos os possíveis resultados de um arremesso é S={1,2,...,20}, este é o espaço amostral. Agora, considere que o evento A é o "resultado é par" e o evento B é "o resultado é menor ou igual a 12". Precisamos calcular

p(B / A) = $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

isto é, a probabilidade de B dado que A ocorreu. Ora, como A = {2,4,6,...,20}, p(A)=10/20 = 1/2 . Por outro lado, $p(A \cap B)$ = 6/20=3/10 pois $A \cap B = \{2, 4, \ldots, 12\}$ donde, p(B/A) = 3/5.

Volume 2 • Módulo 4 • Matemática

Expansão: Estatística – Parte II

Cleber Dias da Costa Neto, Heitor Barbosa Lima de Oliveira, Patrícia Nunes da Silva e Telma Alves

Introdução

Na unidade 6 do módulo 4 do material do aluno, são apresentadas diversas situações e atividades sobre estatística, mais precisamente sobre medidas de tendência central, como média, desvio padrão, mediana e moda.

Para auxiliá-lo, pesquisamos e elaboramos algumas atividades e recursos que podem complementar a exposição deste tema em suas aulas. Uma descrição destas sugestões está colocada na tabela abaixo, e seu detalhamento no texto que segue.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora.A atividade tem por objetivo iniciar a exposição do tema e promover uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, espera-se que os alunos consigam aprofundar o conhecimento estatístico, principalmente sobre as medidas de tendência central (média, mediana e moda), identificando-as e resolvendo problemas que as envolvam.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade,disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático. Elesestão relacionados ao reconhecimento de medidas de tendência central e também àresolução de problemas que envolvam os conceitos de desvio padrão e de coeficiente de variação. Sugerimos a utilização destes recursos nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Recomendamos que você faça alterações e adaptações sempre que achar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro momento deve ser dedicado à resolução de problemas que promovam uma revisão do estudo realizado, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. O segundo momento deve promover uma avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da mera reprodução de exercícios feitos anteriormente. Também disponibilizaremos algumas questões de avaliações de larga escala, como o ENEM, os vestibulares, os concursos públicos, entre outros

.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	4	Estatística – Parte II	6 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Estatística – Parte 2	Média, mediana, moda e desvio padrão
Objetivos da unidade	
Aprofundar o conhecimento sobre as medidas de tendência central (média, mediana e moda);	
Resolver problemas envolvendo medidas de tendência central;	
Conhecer os conceitos de desvio padrão e de coeficiente de variação;	
Resolver problemas envolvendo cálculo de desvio-padrão e coeficiente de variação	

Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	197 a 198
Seção 1 – Analisando os dados de uma pesquisa: Medidas de tendência central	199 a 206
1.1 – Tomando decisões – média, moda e mediana.	199 a 205
1.2 – Analisando os dados de uma pesquisa: Desvio padrão	205 a 206
Seção 2 - Revendo conceitos trabalhados	206 a 208
Resumo	209
Veja ainda	209
Bibliografia	209
Respostas das atividades	210 a 212
O que perguntam por aí	213 a 214

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

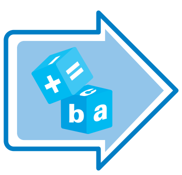
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Margem de Erro	Áudio *O que é margem de erro?*disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1288, calculadoras e cópias da folha de atividades	Nessa atividade, os alunos irão ouvir um áudio sobre margem de erro. Posteriormente, tomarão contato com o mesmo conceito através de um problema com o cálculo da velocidade de um carro utilizada para aplicação de multas.	Duplas	25 minutos
	Interpretação da média	Software "Medidas de Posição", que pode ser acessado em http://www.uff.br/cdme/medidasposicao/medidasposicao-html/MedidasDePInterpDaMedia.htmle cópias da folha de atividades.	Nessa atividade, os alunos irão visualizar o conceito de média de um conjunto de dados.	Duplas ou trios	25 minutos

Seção 1.1 – Tomando decisões: média, moda e mediana

Páginas no material do aluno

199 a 205

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Agrotóxicos	Vídeo *Olha o sanduíche*, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1144, calculadoras e cópias da folha de atividades.	O vídeo utilizado nessa atividade analisa os dados levantados em uma pesquisa de mercado para a venda de sanduíches na praia. São usados os conceitos de média, mediana e moda. Nos problemas propostos, os alunos deverão calcular algumas medidas de tendência.	Duplas ou trios	25 minutos
	Campeonato de cartões	Papéis numerados de 0 a 20 e urna	Nesta atividade, os alunos irão calcular a média, moda e a mediana dos números que cada integrante dos grupos receberá. Haverá a troca de alunos entre os grupos a fim de se ajustar os valores das médias, modas e medianas de cada grupo, atendendo assim ao especificado pela atividade.	Grupos de 4 a 6 jogadores	35 minutos
	Super média	Cópias da folha de atividades, calculadora, dados.	Nesta atividade, os alunos irão calcular a Super Média que é a média das médias obtidas no lançamento de cada um dos dois tipos de dados. Em seguida, responderá um conjunto de perguntas sobre os conceitos envolvidos na atividade.	Duplas ou trios	30 minutos

Seção 1.2 – Analisando os dados de uma pesquisa: Desvio-padrão.

Páginas no material do aluno

205 a 206

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Medidas de dispersão	Software "Medidas de Dispersão", que pode ser acessado em http://www.uff.br/cdme/medidasdispersao/medidasdispersao-html/Medidas-DeDCoefVaria.html e cópias da folha de atividades.	Nessa atividade, os alunos irão comparar as medidas da média e das medidas de dispersão:desvio padrão e coeficiente de variação de dois conjuntos de dados.	Duplas	25 minutos
	Preço da Cesta Básica	Cópias da folha de atividades, calculadora.	Nesta atividade, os alunos irão calcular o desvio padrão do preço da cesta básica praticado no ano de 2008 em certa capital brasileira. Em seguida, calcularão o coeficiente de variação das amostras, sempre com auxílio de uma calculadora.	Trios	30 minutos

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Registros de aprendizagens	Cópias da folha de atividades	Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade, bem como a resolução dos exercícios de revisão.	Individual	25 minutos
	Questões de avaliações de larga escala ou concurso	Cópias da folha de atividades	Sugerimos que, nesta etapa, o instrumento avaliativo seja composto por uma questão que contemple uma das habilidades pretendidas nesta unidade. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como o ENEM, vestibulares, concursos, etc.	Individual	20 minutos

Descrevemos a seguir as situações motivadoras, que têm por objetivo iniciar uma discussão coletiva entre os alunos. Esse processo deve fazer com que os alunos, antes da etapa de formalização dos conceitos, se familiarizem com o conteúdo matemático de forma empírica e com atividades de fácil compreensão. Sugerimos que você escolha a atividade que seja mais adequada à sua realidade - ou, claro, se preferir, utilize uma atividade própria que evoque o problema de verificação de médias.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Margem de Erro	Áudio *O que é margem de erro?*disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1288, calculadoras e cópias da folha de atividades	Nessa atividade, os alunos irão ouvir um áudio sobre margem de erro. Posteriormente, tomarão contato com o mesmo conceito através de um problema com o cálculo da velocidade de um carro utilizada para aplicação de multas.	Duplas	25 minutos

Aspectos operacionais

Peça que os alunos registrem o que entendem por margem de erro. Em seguida, acesse o sítiohttp://m3.ime.unicamp.br/recursos/1288 e reproduza os dois blocos do áudio O que é margem de erro?Após o áudio, retome e discuta com os alunos o significado de margem de erro.

Divida então a turma em duplas e oriente seus alunos a pegar a calculadorado celular. Peça à escola algumas calculadoras, para o caso de alguns alunos terem esquecido ou não possuírem celular. Distribua as folhas de atividades. Peça aos alunos que resolvam o problema proposto.

Aspectos pedagógicos

O problema proposto exige o cálculo de porcentagens. Talvez seja necessário fazer uma pequena revisão sobre o tema.

Para motivar a discussão com os alunos, pergunte a eles quão confiáveis são as estimativas que lemos no jornal? O que determina a precisão de uma estimativa? Do número de pessoas entrevistadas? Da qualidade do equipamento? O que é uma boa amostra? Seu tamanho influencia a precisão? Na condução das respostas, procure sempre promover uma articulação do que está sendo discutido com os temas estudados.

Folha de atividades – Margem de Erro

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Multas por excesso de velocidade

Os radares que medem a velocidade dos veículos nas ruas e estradas não são instrumentos precisos. Por isso, é considerada uma margem de erro para determinar a velocidade que será considerada para aplicação ou não da multa. A margem de erro máxima é de

- 7 km/h para velocidade até 100 km/h; e
- 7% da velocidade medida para velocidades acima de 100 km/h.

Quando você recebe uma multa, há três informações sobre velocidade: a velocidade máxima permitida na via, a velocidade medida pelo radar (valor aferido) e a velocidade considerada para aplicação da multa (valor considerado). O valor considerado é obtido da seguinte maneira:

valor considerado = valor aferido – margem de erro máxima.

Problema

Na tabela abaixo, calcule o valor considerado e indique se o motorista será ou não multado.

Motorista	Velocidade máxima permitida na via	Valor aferido	Valor considerado	Será multado?
Ana	40 km/h	48 km/h		
João	60 km/h	66 km/h		
Joaquim	110 km/h	120 km/h		

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Interpretação da média	Software "Medidas de Posição", que pode ser acessado em http://www.uff.br/cdme/medidasposicao/medidasposicao-html/MedidasDePInterpDaMedia.htmle cópias da folha de atividades.	Nessa atividade, os alunos irão visualizar o conceito de média de um conjunto de dados.	Duplas ou trios	25 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas e distribua a folha de atividades.A organização desta atividade pode variar em função da disponibilidade de um laboratório de informática na sua escola. Se existir um laboratório disponível, distribua os alunos em pequenos grupos (duplas ou trios), com um grupo por computador. Por outro lado, se não houver laboratório disponível, use o Datashow em uma atividade interativa envolvendo toda a turma, que também deverá estar organizada em duplas ou trios.Esta é uma atividade exploratória. Oriente os alunos acompanhando a folha de atividades a seguir.

Aspectos pedagógicos

Professor, os alunos podem demonstrar dificuldades na manipulação do recurso eletrônico e falta de traquejo com a utilização do mouse. Procure ajudá-los a superar essas dificuldades iniciais. Enfatize a relação do "Apoio", o triângulo amarelo, com o valor da média, e do "Bloco" com os dados.

Embora não seja necessária a execução de cálculos, chame a atenção dos alunos para o fato de que a média pode ser calculada ou estimada em alguns casos.

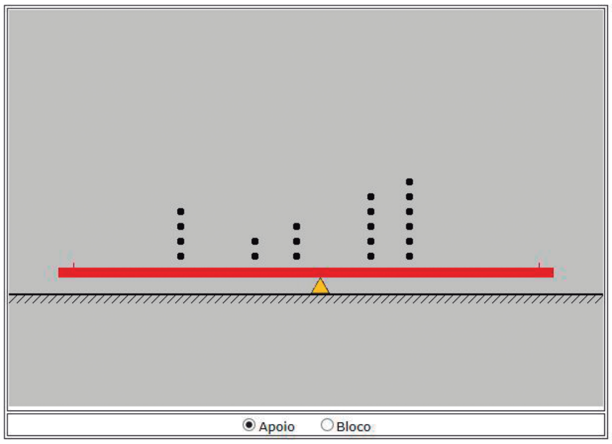
Folha de atividades – Interpretação da média

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Nesta atividade você irá explorar algumas propriedades da média.

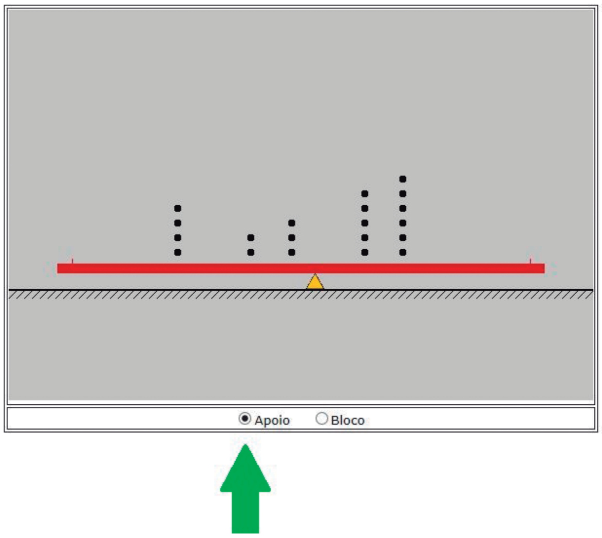
Você está acessando um software chamado "Medidas de Posição". Na figura abaixo, vemos a interface inicial da aba Interpretação da média.



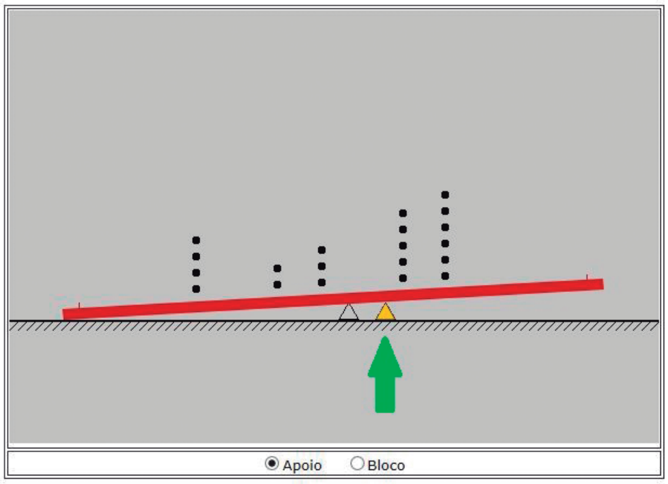
Nessa tela, a barra vermelha representa uma espécie de régua, com dois triângulos superpostos: um triângulo de apoio, amarelo, e um triângulo transparente, que representa a média dos valores (bolinhas pretas) considerados.

Primeira parte da investigação

- Com o mouse, selecione a opção "Apoio" na parte inferior da tela.



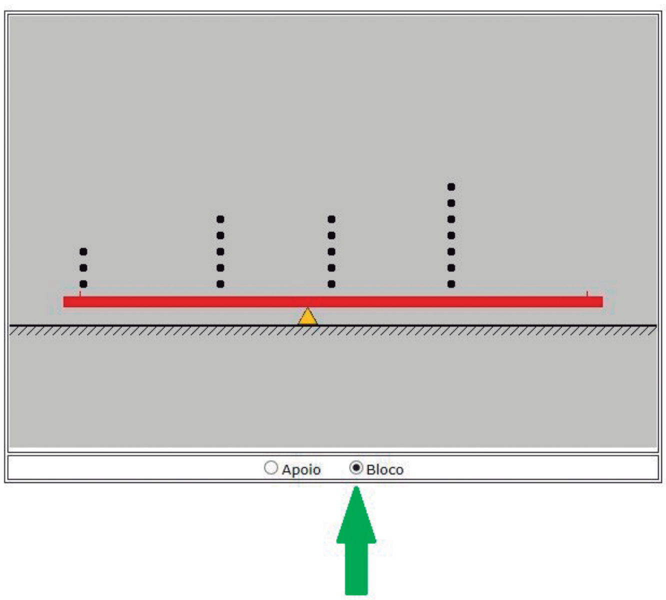
- Com o mouse, arraste o ponto de apoio, representado pelo triângulo amarelo. Observe o que acontece!.



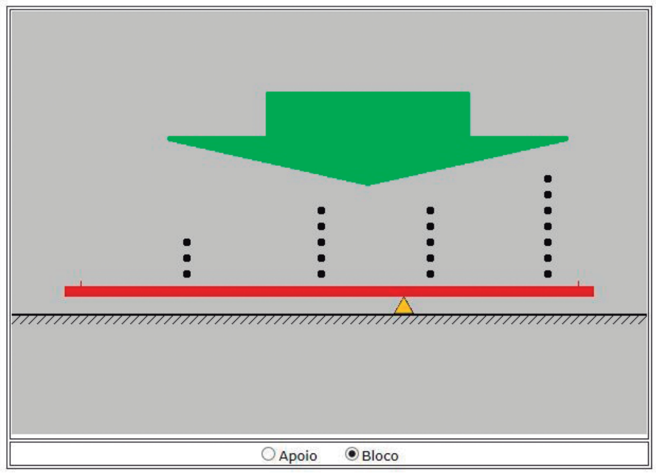
Questão: Ao arrastar o ponto de apoio, o que aconteceu? Qual é o ponto de equilíbrio da reta? O que você pode concluir sobre a média?

Segunda parte da investigação

- Com o mouse, selecione a opção "Bloco" na parte inferior da tela.



- Com o mouse, arraste o bloco de dados, que estão representados pelas bolinhas pretas (coloque a seta do mouse próximo a qualquer uma das bolinhas e arraste). Observe o que acontece!



Questão: Ao arrastar o ponto de apoio, o que aconteceu com a média?O que acontece com os valores dos dados quando você desloca o bloco de pontos?

Seção 1.1 – Tomando decisões: média, moda e mediana

Páginas no material do aluno

199 a 205

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Agrotóxicos	Vídeo *Olha o sanduíche*, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1144, calculadoras e cópias da folha de atividades.	O vídeo utilizado nessa atividade analisa os dados levantados em uma pesquisa de mercado para a venda de sanduíches na praia. São usados os conceitos de média, mediana e moda. Nos problemas propostos, os alunos deverão calcular algumas medidas de tendência.	Duplas ou trios	25 minutos

Aspectos operacionais

Acesse o vídeo http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1144 e exiba o vídeo para a turma.

Divida a turma em duplas ou em trios e distribua as folhas de atividades.

Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

Aspectos pedagógicos

Professor, os alunos podem demonstrar dificuldades na interpretação do problema. Verifique se todos compreenderam o que significa cada informação, principalmente o DL_{50}.

Mesmo não sendo necessário o cálculo de todas as medidas de tendência central, saliente aos alunos a relação do vídeo com a atividade.Estimule os alunos na elaboração da justificativa. Em geral, muitos têm dificuldade na formulação e argumentação para sustentar suas conclusões.

Folha de atividades – Agrotóxicos

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Os agrotóxicos são classificados de acordo com um índice chamado de dose mediana letal (DL_{50}).A DL_{50} é a dose em mg/kg de uma substância capaz de matar cinquenta por cento (50%) da população animal em condições bem definidas em um teste.

Quando a DL_{50} é menor ou igual a 20, o agrotóxico é considerado extremamente tóxico e recebe rótulo vermelho.

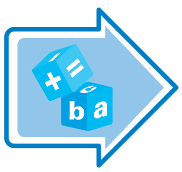
Problema

Em um teste de laboratório com grupos de 40 camundongos, a dose de 10 mg/kg da substância ativa de um agrotóxico matou 18 camundongos. Em um novo ensaio, foi administrada uma dose de 19 mg/kg e 22 camundongos morreram. Podemos afirmar que esse agrotóxico é extremamente tóxico e que seu rótulo deve ser vermelho? Por quê?

Seção 1.1 – Tomando decisões: média, moda e mediana

Páginas no material do aluno

199 a 205

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Campeonato de cartões	Papéis numerados de 0 a 20 e urna	Nesta atividade, os alunos irão calcular a média, moda e a mediana dos números que cada integrante dos grupos receberá. Haverá a troca de alunos entre os grupos a fim de se ajustar os valores das médias, modas e medianas de cada grupo, atendendo assim ao especificado pela atividade.	Grupos de 4 a 6 jogadores	35 minutos

Aspectos operacionais

A turma será dividida em grupos de 4 a 6 jogadores. Caberá a você, professor, preparar uma urna contendo diversos papéis pequenos, numerados de 0 a 20, numa quantidade suficiente para que todos os alunos possam escolher um número aleatoriamente sem reposição. Esses números não poderão ser divulgados para os participantes dos demais grupos. A atividade consiste em distribuir os números pelos alunos e, em seguida, calcular a média, moda e mediana dos números obtidos por cada grupo. No caso da sua turma ter mais de 20 alunos, aumente a numeração máxima dos cartões ou repita a frequência, redistribuindo números de 0 a 20 e avaliando com eles a diferença entre uma e outra ação.

Para determinar o grupo vencedor, os quesitos podem ser considerados individualmente - dessa maneira, uma rodada completa do jogo pode ter até 3 vencedores distintos. A vitória pode gerar algum tipo de bonificação, que fica a seu critério, professor.

Os 3 quesitos são:

1º) Qual o grupo que consegue se aproximar mais da média 10?

2º) Qual o grupo tem a maior moda?

3º) Qual o grupo que conseguiu aproximar mais a média da mediana?

Durante o jogo, cada grupo terá a oportunidade trocar participantes com os demais grupos. Isto é, após os cálculos da média, moda e mediana, o grupo poderá solicitar a qualquer outro grupo a troca de um de seus integrantes. Como cada aluno possui um número específico, é feito um novo cálculo da média, moda e mediana.

Os grupos poderão optar por uma segunda troca, porém somente após todos os outros grupos terem efetuado suas trocas. No máximo, cada grupo pode trocar até 3 integrantes, mas não há a obrigatoriedade da troca. Fica a cargo de cada grupo aceitar o pedido de troca.É importante que os valores da média, moda e mediana de cada grupo sejam um segredo muito bem guardado por todos seus participantes. Dessa maneira, a competição se tornará mais emocionante.

Aspectos pedagógicos

Professor, os alunos podem demonstrar dificuldades no cálculo da média quando o resultado for um número decimal. Oriente os alunos que, para o cálculo da mediana, é necessário que os números estejam em ordem crescente.Em todos os cálculos, caso seja necessário, permita que os alunos utilizem a calculadora.

Seção 1.1 – Tomando decisões: média, moda e mediana

Páginas no material do aluno
199 a 205

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Super média	Cópias da folha de atividades, calculadora, dados.	Nesta atividade, os alunos irão calcular a Super Média que é a média das médias obtidas no lançamento de cada um dos dois tipos de dados. Em seguida, responderá um conjunto de perguntas sobre os conceitos envolvidos na atividade.	Duplas ou trios	30 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas ou em trios. Cada aluno lança um dado cinco vezes e registra os dados na tabela disponível na folha de atividades.Como a numeração dos dados da atividade é diferente da numeração dos dados tradicionais, você pode optar por construir os dadosou adaptar dados comuns. Devido à natureza do material utilizado – geralmente papel - os dados construídos podem ser instáveis e terminar favorecendo um ou outro resultado. Devem ser usados em último caso, portanto. Para fazer os dados adaptados, você pode solicitar aos alunos que levempara a aula dados comuns. De posse dos dados, peça que cubram as faces com fita crepe, esparadrapo ou pequenos pedacinhos de papel colado com fita durex. Em seguida, peça que preencham as faces com os novos valores, de acordo com os modelos da folha de atividades. Uma vez prontos os dados, convide-os a fazer a primeira rodada, lançando os dados cinco vezes, anotando os valores na tabela e calculandoa média dos pontos obtidos nos lançamentos.

Na segunda rodada, trocam-se os dados e repete-se todo o processo (cinco lançamentos, registros na tabela e cálculo da média). A atividade finaliza com o cálculo da chamada Super Média, que é a média das médias obtidas nas duas rodadas.

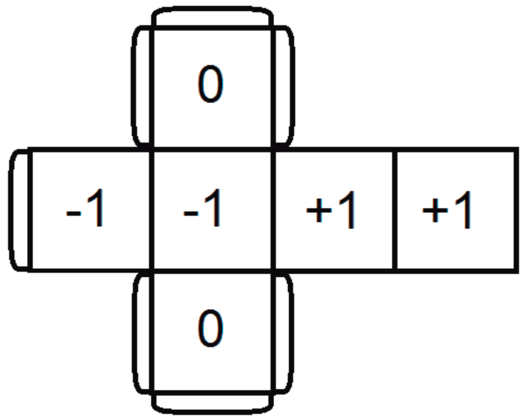
Aspectos pedagógicos

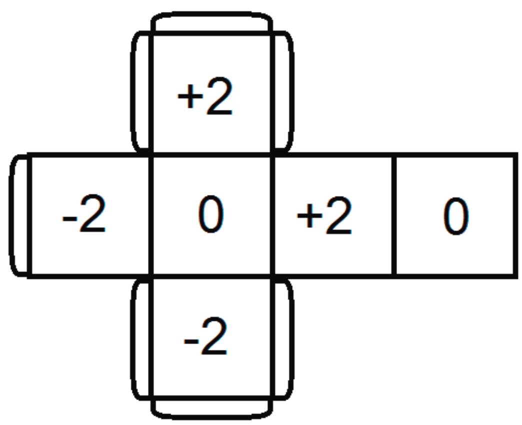
Professor, como já discutimos em outras ocasiões, você pode ter no jogo um grande aliado para promover o processo de ensino e aprendizagem. Para que isso realmente aconteça, você e seus alunos precisam aproveitar bem as oportunidades que surgem, enquanto jogam. Por isso, nossa sugestão é que você não abra mão das reflexões após o jogo e, ainda, se, durante a sua realização, for necessário fazer interrupções para discutir os conceitos em questão, faça-o na certeza de que está no caminho certo É possível que os alunos necessitem de uma pequena revisão conceitual sobre média, moda e mediana. Nos itens (d), (e) e (f), o aluno é confrontado com questões de cunho lógico. A orientação do professor neste momento é muito importante. Dessa forma, oriente-o a fazer simulações com os dados a fim de tentar "visualizar" as possíveis combinações de resultados. Explique aos alunos que o termo Super Média não é um termo técnico.Por isso, não encontrarão este termo nas bibliografias relacionadas à estatística.

Folha de atividades – Super Média

Nome da Escola: ____

Nome: ____





$$\frac{\overset{\text{MÉDIA 1}}{\boxed{}} + \overset{\text{MÉDIA 2}}{\boxed{}}}{2} = \overset{\text{SUPER MÉDIA}}{\boxed{}}$$

a. Qual o valor máximo que a Média 1 pode ter?

b. Qual o valor máximo que a Média 2 pode ter?

c. Qual o valor máximo que a Super Média pode ter?

d. Existe a possibilidade de um aluno ter lançado cinco vezes o primeiro dado (–1, 0 e +1), ter obtido a moda dos resultados igual a –1 e ter média positiva?

e. Existe a possibilidade de um aluno ter lançado cinco vezes o primeiro dado (–2, 0 e +2), ter obtido a moda dos resultados igual a 0 e ter média positiva?

f. Um aluno fez o lançamento do primeiro dado e obteve como moda o número 0. Com essa informação é possível determinar a mediana dos resultados dos lançamentos. Qual é essa mediana?

Seção 1.2 – Analisando os dados de uma pesquisa: Desvio-padrão.

Páginas no material do aluno

205 a 206

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Medidas de dispersão	Software "Medidas de Dispersão", que pode ser acessado em http://www.uff.br/cdme/medidas-dispersao/medidas-dispersao-html/MedidasDeDCoefVaria.html e cópias da folha de atividades.	Nessa atividade, os alunos irão comparar as medidas da média e das medidas de dispersão:desvio padrão e coeficiente de variação de dois conjuntos de dados.	Duplas	25 minutos

Aspectos operacionais

Novamente aqui seus alunos poderão estar no ambiente do laboratório de informática, organizados em pequenos grupos, ou ainda em sala de aula mesmo, com apoio do Datashow.

Acesse o endereço http://www.uff.br/cdme/medidasdispersao/medidasdispersao-html/MedidasDeDCoefVaria.html.Divida a turma em duplas e distribua a folha de atividades.Esta é uma atividade exploratória. Oriente os alunos acompanhando a folha de atividades a seguir.

Aspectos pedagógicos

Professor, os alunos podem demonstrar dificuldades na manipulação do recurso eletrônico e falta de traquejo com a utilização do mouse. Ajude-os a realizar essas tarefas. Oriente os alunos quanto às fórmulas para a obtenção da Média, do Desvio Padrão e do Coeficiente de Variação, mesmo não sendo necessário fazer cálculos. É muito importante que, ao final da manipulação, se abra uma breve discussão sobre o que os alunos puderam concluir.

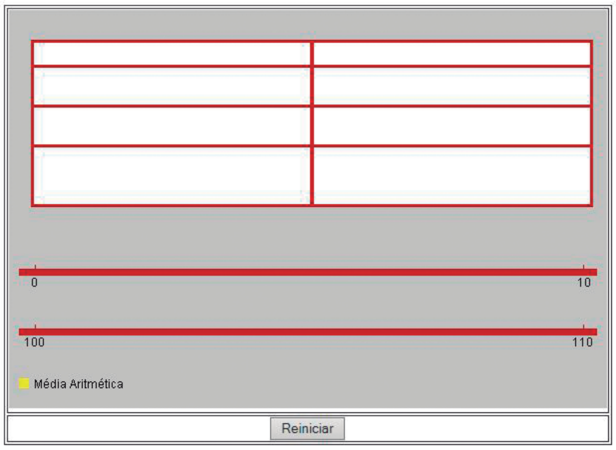
Folha de atividades – Super Média

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Nesta atividade você irá explorar algumas propriedades do desvio padrão e do coeficiente de variação de dois conjuntos de dados.

Você está acessando um software chamado "Medidas de Dispersão". Na figura abaixo, vemos a interface inicial da aba Coeficiente de variação:

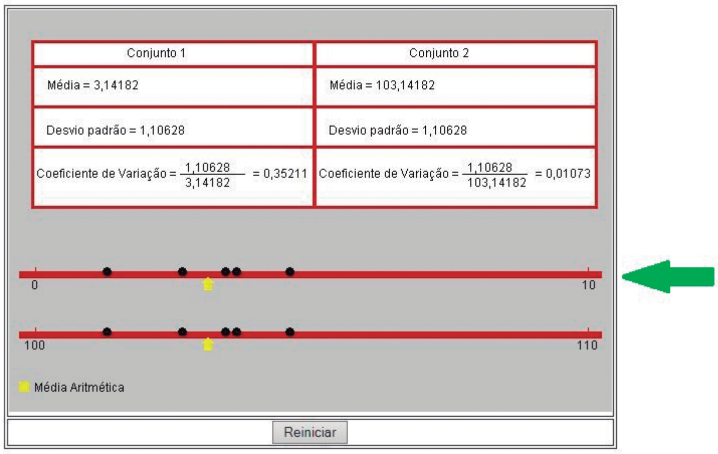


Nessa tela, asduas barras vermelhas representamescalas. A superior vai de 0 a 10 e a inferior de 100 a 110. Ao marcarmos um ponto na escala superior, outro ponto,verticalmente alinhado ao primeiro, é marcado automaticamente na escala inferior. Conforme os pontos são marcados, são automaticamente calculados, para cada conjunto de pontos: a média, o desvio padrão e o coeficiente de variação. Em cada uma das escalas, a seta amarela indica a posição da média.

Note os pontos marcados automaticamente na escala inferior, que varia de 100 a 110. Observe a posição da média, indicada pela seta amarela. A cada novo ponto marcado, observe atentamente os valores das estatísticas apresentadas para cada um dos conjuntos: média, desvio padrão e coeficiente de variação. Arraste os pontos sobre a escala para ver o efeito dessa variação sobre os valores calculados.

Investigação

- Com o mouse, marque pontos sobre a escala superior, que vai de 0 a 10.
- Arraste os pontos sobre a escala para ver o efeito sobre essas medidas.



Questões

1. Se o valor de um ponto marcado na escala superior é y, qual é o valor do ponto correspondente na escala inferior? Que é a transformação que relaciona o valor de um ponto da escala superior com seu correspondente?

   Na escala inferior, o valor é y + 100, o que corresponde a uma translação dos dados.

2. Qual é a relação entre as duas médias dos dois conjuntos de dados? E entre os dois desvios padrões?

3. Qual é o efeito de uma translação sobre o coeficiente de variação?

Seção 1.2 – Analisando os dados de uma pesquisa: Desvio-padrão.

Páginas no material do aluno

205 a 206

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Preço da Cesta Básica	Cópias da folha de atividades, calculadora.	Nesta atividade, os alunos irão calcular o desvio padrão do preço da cesta básica praticado no ano de 2008 em certa capital brasileira. Em seguida, calcularão o coeficiente de variação das amostras, sempre com auxílio de uma calculadora.	Trios	30 minutos

Aspectos operacionais

Professor, divida a turma em trios.Distribua a folha de atividades para os grupos e peça que os alunos façam um item da atividade de cada vez, sempre em parceria com os colegas do grupo.

Aspectos pedagógicos

Devido ao excesso de contas, o cálculo do desvio padrão é complicado para alguns alunos. Permita o uso da calculadora nesta atividade. Oriente os alunos quanto às fórmulas de desvio padrão e coeficiente de variação. É muito interessante que se abra uma breve discussão acerca do tema "Cesta Básica" na sala de aula, utilizando as experiências do cotidiano de cada aluno, a fim de enriquecer a exploração desta atividade.

Folha de atividade – Preço da Cesta Básica

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

O preço da cesta básica é um indicativo importante para a população e para o Governo Federal sobre a variação de preços do ramo de alimentação.

Numa determinada capital brasileira, o preço da cesta básica em 2008 variou de acordo com a tabela abaixo:

2008	Jan	R$ 215,00
	Fev	R$ 206,00
	Mar	R$ 213,00
	Abr	R$ 214,00
	Mai	R$ 221,00
	Jun	R$ 229,00
	Jul	R$ 233,00
	Ago	R$ 218,00

a. Calcule a média dos preços da cesta básica praticados em 2008.

b. Calcule a moda destes preços.

c. Calcule a mediana.

   Complete:

   A mediana encontrada foi ____________________ (maior/menor) que a média. Isto é, a maioria dos preços é ___________________ (maior/menor) que R$____________ (o valor da média).

d. Determine o desvio-padrão dos preços da cesta básica.

e. Calcule o coeficiente de variação.

f. Classifique esta amostra em homogênea ou heterogênea? (Lembre-se de que para que a amostra seja homogênea, o coeficiente de variação deve ser menor que 0,2 ou 20%).

Sugerimos a utilização dos dois últimos tempos de aula destinados a esta unidade.Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, detalhadas nas seções seguintes.

Na primeira seção, apresentaremos atividades que retomam as habilidades verificadas nas seções anteriores, com o intuito de consolidar e avaliar o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo proposto. As atividades dessa seção também promoverão a reflexão do aluno sobre os conteúdos abordados.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Registros de aprendizagens	Cópias da folha de atividades	Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade, bem como a resolução dos exercícios de revisão.	Individual	25 minutos

Aspectos operacionais

Distribua a folha de atividades, peça que cada aluno resolva os problemas que constam da folha e registre as aprendizagens que realizou durante as últimas aulas.

Aspectos pedagógicos

Durante a execução da tarefa, verifique como os alunos utilizam as informações do enunciado para a resolução dos problemas. Auxilie os alunos que apresentam dificuldades, relembrando as definições e resultados. Mostre o quanto os conceitos básicos sobre cada uma das medidas são necessários para a realização da Atividade 2. Esta etapa pode estar articulada à seção Veja ainda no material do aluno.

Folha de atividade – Registros de aprendizagens tiva

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Atividade 1:

Para avaliar a qualidade das lâmpadas produzidas por uma empresa, foi registra¬do o tempo, medido em dias, de duração de 20 dessas lâmpadas:

15	10	12
14	10	12
12	12	12
13	13	14
14	10	15
14	15	12
15	10	

a. Abaixo os dados coletados estão dispostos em ordem crescente. Complete a lista com os dados que estão faltando.

   10, 10, 10, 10, ____ ,______,_____,_____, ______,______, 13, ______, 14, _____,_____,____, 15,15,15,15.

b. Calcule a média dos tempos de duração coletados.

c. Calcule a moda destes tempos.

d. Calcule a mediana.

   Complete:

   A mediana encontrada foi ____________________ (maior/menor) que a média. Isto é, a maioria dos tempos é ___________________ (maior/menor) que _____________ (o valor da média).

e. Determine o desvio-padrão dos tempos de duração.

f. Calcule o coeficiente de variação.

g. Classifique esta amostra em homogênea ou heterogênea? (Lembre-se de que para que a amostra seja homogênea, o coeficiente de variação deve ser menor que 0,2 ou 20%).

Atividade 2:

Defina com suas palavras o que significa:

1. Média:

2. Moda:

3. Mediana:

4. Desvio padrão:

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de avaliações de larga escala ou concurso	Cópias da folha de atividades	Sugerimos que, nesta etapa, o instrumento avaliativo seja composto por uma questão que contemple uma das habilidades pretendidas nesta unidade. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como o ENEM, vestibulares, concursos, etc.	Individual	20 minutos

Aspectos operacionais

Nossa sugestão é que você escolha, para compor o instrumento avaliativo, a questão que tratar da habilidade que for mais relevante para os seus alunos, seja para reforçar um ponto que não ficou claro, seja pela relação com outros temas e contextos ou mesmo pelo interesse dos próprios alunos.

Aspectos pedagógicos

Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas.

Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Pondere sobre as equivocadas ressaltando onde reside o erro. As questões do ENEM têm em suas alternativas erradas sempre uma justificativa com erro plausível. Obviamente, isso não está evidente na alternativa. Dessa forma, procure identificar o erro que gerou cada uma das alternativas e discuta com os alunos.

Folha de atividade – Questão objetiva (Enem – 2011)

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Questão 1:

(ENEM -2011) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Base	Logaritmo
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

a. 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
b. 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
c. 7 °C, 13,5 °C e 18 °C.
d. 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
e. 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

Questão 2:

(ENEM -2012) A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco micro-empresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a media da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 ate 2011) e escolhe as duas empresas de maior media anual.

As empresas que este investidor escolhe comprar são

a. Balas W e Pizzaria Y.
b. Chocolates X e Tecelagem Z.
c. Pizzaria Y e Alfinetes V.
d. Pizzaria Y e Chocolates X.
e. Tecelagem Z e Alfinetes V.

Volume 2 • Módulo 4 • Matemática

Expansão: Polinômios II

Érika Silos de Castro (coordenação), André Luiz Martins Pereira, Luciana Felix da Costa Santos e Renata Cardoso Pires de Abreu.

Introdução

Na expansão do material do aluno, são apresentados exemplos históricos em que é possível observar a presença de conceitos algébricos relacionados à ideia de polinômios. Nesta unidade, o aluno terá a oportunidade de ampliar os estudos relacionados a esse tema, utilizando teoremas e regras práticas para resolver problemas e equações polinomiais, tais como o teorema do resto, o dispositivo de Briot-Ruffini, o Teorema Fundamental da Álgebra e as relações de Girard.

Para auxiliá-lo, pesquisamos e elaboramos algumas atividades e recursos que podem complementar a exposição deste tema em suas aulas. Uma descrição destas sugestões e seu detalhamento são apresentados nas tabelas e páginas seguintes.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora. Esta é uma atividade proposta para ser realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, é esperado que algumas noções básicas relacionadas à ideia de polinômios sejam ampliadas.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos: o primeiro dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo e o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	4	Expansão – Polinômios II	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Polinômios – Parte 2	Polinômios
Objetivos da unidade	
Utilizar o teorema do resto para resolver problemas;	
Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios;	
Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra;	
Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.	

Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	219 a 221
Seção 1 – Divisão de um polinômio e cálculo do resto	222 a 227
Seção 2 – Raízes de polinômios	227 a 231
Seção 3 – Relações de Girard	231 a 235
Resumo	235
Veja ainda	236
O que perguntam por aí?	241

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

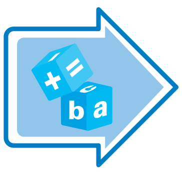
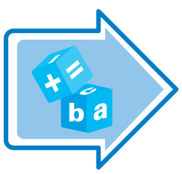
Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Problemas históricos	Cópias da folha de atividades	Esta atividade tem por objetivo apresentar alguns problemas históricos explorando a tradução da linguagem corrente para a linguagem simbólica, algébrica.	Duplas	50 minutos
	Ilustrando o estudo dos polinômios	Cópias da folha de atividades	Os alunos deverão relacionar exemplos de algumas funções polinomiais já abordadas na Física com o estudo dos polinômios.	Individual	40 minutos

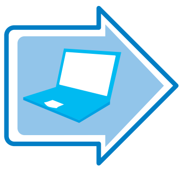
Seção 1 – Divisão de um polinômio e cálculo do resto

Páginas no material do aluno
222 a 227

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Modelando embalagens	Cópias da folha de atividades, computador com Datashow	A atividade se propõe a enfatizar, a partir de um vídeo, situações em que polinômios são usados para modelar a confecção de embalagens.	Duplas	50 minutos

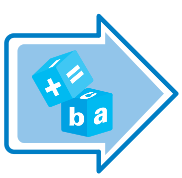
Seção 2 – Raízes de Polinômios

Páginas no material do aluno
227 a 231

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Geogebra e o Teorema Fundamental da Álgebra	Laboratório de informática, software Geogebra, cópias da folha de atividades.	Esta atividade tem por objetivo fazer com que os alunos percebam a relação que existe entre o grau e o número de raízes reais de um polinômio, utilizando o software livre GeoGebra.	Duplas	50 minutos

Seção 3 – Relações de Girard

Páginas no material do aluno
231 a 235

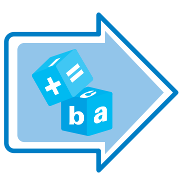
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Relações de Girard para Polinômios de Grau 4	Cópias da folha de atividades	Esta atividade tem por objetivo estabelecer as relações entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes (relações de Girard) para polinômios de grau 4.	Grupos de 3 ou 4	50 minutos

Seção O que perguntam por aí...

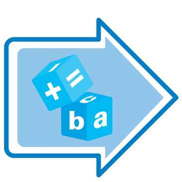
Página no material do aluno
241

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de vestibular	Imagem para projeção, disponível neste material	–	Duplas	–

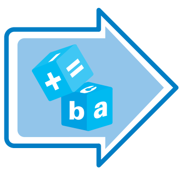
Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetiva como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Individual	40 minutos

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios Complementares	Folha de atividades	Essa atividade propõe alguns exercícios que podem auxiliar na fixação das principais noções ligadas à ideia de polinômio.	Duplas ou trios	–

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Problemas históricos	Cópias da folha de atividades	Esta atividade tem por objetivo apresentar alguns problemas históricos explorando a tradução da linguagem corrente para a linguagem simbólica, algébrica.	Duplas	50 minutos

Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. Essa atividade apresenta três problemas do papiro de Rhind, três versos de Bhaskara e pede para que os alunos façam a tradução da linguagem corrente, apresentada nos textos, para a linguagem algébrica.

No início da atividade, divida os alunos em duplas e distribua, para cada um, uma cópia da folha de atividades. Isso irá facilitar a leitura individual do texto. No entanto, professor, você deve estimular cada dupla a dialogar e resolver em conjunto as questões propostas.

Aspectos pedagógicos

A álgebra está muito presente no nosso cotidiano, sobretudo, no cotidiano escolar. Contudo, as representações algébricas nem sempre estiveram disponíveis. Com essa atividade, apresentamos para os alunos os problemas tal como eles eram estudados na sua época. Os três primeiros itens correspondem a problemas do papiro de Rhind, enquanto os outros são problemas estudados por Bhaskara. A linguagem retórica pode parecer, digamos, estranha para os alunos. Por isso, procure mostrar para eles como a representação algébrica pode simplificar.

Para complementar a atividade, você pode sugerir uma pesquisa sobre o papiro de Rhind e outros aspectos da História da Matemática. Caso algum aluno se interesse pelo aspecto histórico, sugerimos a consulta ao livro História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas – Tatiana Roque, editora Zahar, no qual se apresentam problemas e suas soluções da maneira como os matemáticos faziam na sua época.

Caso os alunos tenham alguma dúvida na hora de passar da linguagem em que é apresentado o problema para a algébrica, sugerimos que você faça o primeiro exercício como exemplo.

Para resolver as equações correspondentes, os alunos podem se deparar com dificuldades, como, por exemplo, a soma de frações, a resolução de equações tanto do primeiro grau, quanto do segundo grau. Se necessário, sugerimos que você retome os temas que os alunos apresentarem dificuldade.

Incentive o uso da calculadora, para que uma potencial dificuldade com os cálculos não tire o foco da transcrição dos problemas. Talvez seja interessante, após a transcrição dos problemas, que você discuta em conjunto, com toda a turma, a resolução das equações obtidas. Assim, a dificuldade da resolução, bem como a da sua simplificação, podem ser esclarecidas. É importante também chamar a atenção dos alunos para as soluções das equações que não são soluções do problema.

Folha de atividade – Problemas históricos

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Você já ouviu falar da álgebra, certo? A seguir apresentamos algumas situações descritas em linguagem corrente. Antes de resolvê-los, você deverá traduzi-los usando a linguagem algébrica.

1. Uma quantidade e seu sétimo, somadas juntas, dão 19. Qual é a quantidade?

2. Uma quantidade e sua metade, somadas juntas, resultam 16. Qual é a quantidade?

3. Uma quantidade e 2/3 dela são somadas. Subtraindo-se, desta soma, 1/3 dela, restam 10. Qual é a quantidade?

4. Um bando barulhento de macacos se divertia. Um oitavo ao quadrado brincava no bosque. Doze, os que sobraram, gritavam ao mesmo tempo, no alto da colina verdejante. Quantos eram os macacos no total.

5. De um bando de gansos, quando apareceu uma nuvem, dez vezes a raiz quadrada [do total] foram para o lago de Manasa, um oitavo foi para a floresta coberta de hibiscos, e três pares foram vistos brincando na água. Diz-me, donzela, o número de gansos no bando. Nesse problema, a referência à raiz quadrada pode ser um problema... Mas você pode indicar o número de gansos como x^2 e então, como esse número é positivo, sua raiz quadrada será x. Assim, esse problema pode ser traduzido como indicado na tabela a seguir.

número de gansos	x^2
raiz quadrada [do total] de gansos	x
dez vezes a raiz quadrada [do total]	$10x$
um oitavo foi para a floresta coberta de hibiscos	$\frac{1}{8}x$
três pares	6

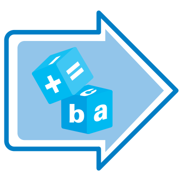
A narração indica o que aconteceu com todos os gansos, assim, temos a seguinte equação

$$x^2 = 10x + \frac{x^2}{8} + 6$$

Resolva-a para determinar o número de gansos.

6. Enraivecido numa batalha, Arjuna disparou uma quantidade de setas para matar Karna. Com metade das setas desviou as setas do seu adversário; com quatro vezes a raiz quadrada do total, matou o seu cavalo; com seis setas, matou o seu cocheiro Salya; depois com três setas destruiu a proteção, o estandarte e o arco do seu inimigo; e com uma seta, cortou a sua cabeça. Quantas setas Arjuna disparou?

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Ilustrando o estudo dos polinômios	Cópias da folha de atividades	Os alunos deverão relacionar exemplos de algumas funções polinomiais já abordadas na Física com o estudo dos polinômios.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Antes de fazer qualquer definição, ou mesmo resolver problemas clássicos sobre polinômios, é interessante apresentar exemplos de aplicações sobre o assunto, relacionando-o com temas de Física já estudados. Neste caso, professor, procure ilustrar o conceito de polinômio a partir das aplicações apresentadas na folha de atividades.

Entregue a folha de atividade para cada aluno propondo que respondam as questões observando as diferentes situações em que o polinômio aparece.

Professor, é interessante citar alguns exemplos de aplicação dos polinômios. Por exemplo, quando se deseja projetar uma obra pública, como um sistema de abastecimento de água, deve-se estimar a população daqui a 20 ou 50 anos. Baseando-se em dados de anos anteriores, podemos chegar a uma função de crescimento da população, que pode ser aproximada por um polinômio.

Outra aplicação de polinômios é em criptografia. Em Engenharia temos muitos problemas que são resolvidos por polinômios. Em Física também: no lançamento de um projétil, por exemplo, a trajetória descrita é uma parábola, que é representada por um polinômio do segundo grau. São inúmeras as aplicações de polinômios na vida prática.

Folha de atividade – Ilustrando o estudo dos polinômios

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

1. Através da função polinomial $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, podemos calcular a energia cinética de um corpo, em outras palavras, a energia que se manifesta nos corpos em movimento. Nessa função, E_c indica a energia cinética, em joules, *m* indica a massa o corpo, em kg e v, a velocidade, em m/s.

   a. Quais as variáveis desse polinômio?

   b. Considerando Ec um polinômio na variável , qual o seu grau?

   c. Supondo um carrinho de massa 20 Kg, com uma velocidade de 5m/s. Calcule a sua energia cinética.

2. A função polinomial $S = 5 + 2t + 4t^2$ é a função horária do espaço no Movimento Uniformemente Variado. Nessa função polinomial, *S* é a posição; S_0 é a posição inicial; *v0* é a velocidade inicial; *t* é o tempo e a é a aceleração.

3. Você lembra de outro polinômio estudado na Física? Dê alguns exemplos de polinômios do 1º grau, considerando como variável o tempo *t*.

Seção 1 – Divisão de um polinômio e cálculo do resto

Páginas no material do aluno

222 a 227

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Modelando embalagens	Cópias da folha de atividades, computador com Datashow	A atividade se propõe a enfatizar, a partir de um vídeo, situações em que polinômios são usados para modelar a confecção de embalagens.	Duplas	50 minutos

Aspectos pedagógicos

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. É igualmente importante que verifique a viabilidade da utilização de um computador com Datashow e kit multimídia para reproduzir o vídeo que se encontra no seu material.

Após a apresentação do vídeo e possíveis discussões, distribua uma folha de atividades para cada aluno, peça que se dividam em duplas e resolvam os problemas. Depois da resolução, procure enfatizar as diferentes situações onde os polinômios podem ser aplicados e convide-os a modelar um problema de confecção de embalagens a partir da resolução de equações algébricas.

Aspectos operacionais

Professor, é interessante iniciar o conteúdo de polinômios dando ênfase às situações-problemas que envolvam esse conceito. Essa atividade foi baseada e utiliza o vídeo disponível em: *http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Videos/index.php?url=http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Videos/VideosM3Matematica/MatematicanaEscola/Embalagens/*

O vídeo mostra a funcionária Daniela pedindo ajuda para recortar uma folha de papelão e montar caixas em forma de paralelepípedo retângulo, que será usada para embalar velas de 10 cm de altura.

A funcionária é orientada a seguir os seguintes passos:

- As folhas de papelão medem 120 cm de comprimento por 60 cm de largura; logo, devem ser recortadas em duas de 60 cm, já que as bases das caixas devem ser quadradas.
- Em cada canto da folha quadrada (60 cm x 60 cm) deve ser recortado um quadrado de 10 cm de lado. Esse corte será usado para formar as quatro abas de 10 cm de altura, que deverão compor a superfície lateral de cada caixa.

Cada caixa deverá ter 40 cm de aresta da base e 10 cm de altura; e o volume será então: $V = (40)^2.10 = 16000\ cm^3$.

As funcionárias analisam a variação de volume em função da variação da medida x dos lados dos quadrados recortados nos quatro cantos. Como a aresta da base da caixa quadrada mede (60 – 2x) e a altura mede x, obtém-se a fórmula: $V = (60-2x)^2.x = 4x^3 - 240x^2 + 3600.x$, que é um polinômio de terceiro grau.

Professor, para efeito de ilustração, você pode ainda relacionar ao polinômio encontrado, o estudo gráfico da função polinomial que representa o volume da caixa com relação a sua altura. A partir daí, poderá verificar o valor do volume máximo e como consequência os valores onde a função volume é crescente (intervalo de zero a 10 cm) e decrescente (intervalo a partir de 10 cm a 30 cm).

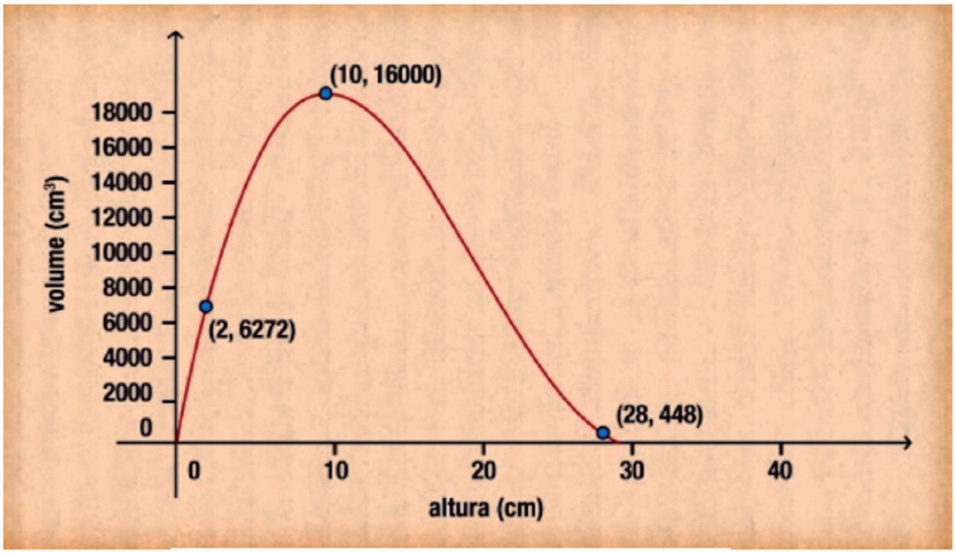


Gráfico do volume da caixa com relação a sua altura

Figura 1 – Gráfico do volume da caixa em função da altura

A questão proposta na folha de atividades propõe que o aluno investigue, a partir do polinômio $V = (60-2x)^2.x = 4x^3 - 240x^2 + 3600.x$, se há outro valor possível para o lado do quadrado a ser recortado em cada canto da folha de papelão, de maneira que o volume da caixa resultante também seja igual a 16000 cm^3 . Ou seja, nosso problema é resolver a equação $4x^3 - 240x^2 + 3600.x = 16000$, ou, equivalentemente, $x^3 - 60x^2 + 900x - 4000 = 0$.

É importante que você ressalte que uma das soluções já é conhecida, isto é, lembre a eles que cortando quadrados de 10 cm de lado já obteremos uma caixa de volume 16000. Portanto, 10 é uma raiz da equação.

Instigue os alunos a investigarem a possibilidade de outro tamanho para o quadrado cortado. Para isso, oriente-os a eliminarem a raiz conhecida, reduzindo a equação do terceiro grau a uma equação do segundo grau, que saberão resolver.

Note que, usando o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos dividir $x^3 - 60x^2 + 900x - 4000$ por $x - 10$, e aí teremos:

	1	- 60	900	-4000
10	1	1.10-60=-50	-50.10+900=400	400.10-4000=0

Logo, a equação se reduz a $x^2 - 50.x + 400 = 0$, que é uma equação do 2º grau com raízes dadas por $x_1=10$ e $x_2=40$.

Ao obter as soluções para a equação do 2º grau, é importante perceber que não é possível recortar um quadrado com 40 cm de lado, uma vez que as dimensões originais da folha de papelão são 120 cm x 60 cm.

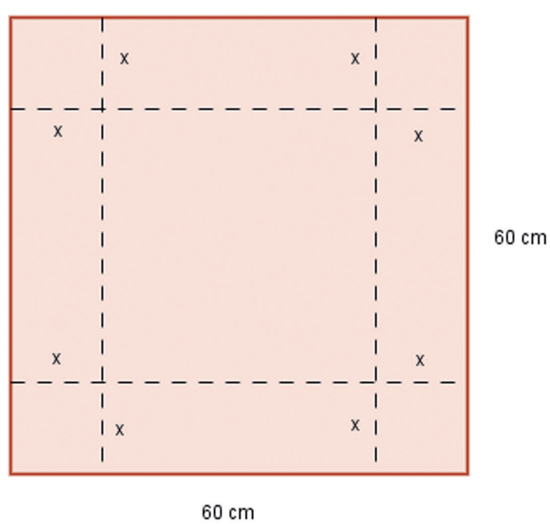
A questão seguinte apresenta uma situação análoga à primeira, porém as outras soluções da equação do 2º grau são irracionais. Pelas dimensões da folha e pelo valor decimal aproximado das raízes, percebemos que apenas uma delas fornece uma dimensão possível para o lado do quadrado. É interessante que os alunos possam obter uma aproximação decimal para essa outra possível medida de lado do quadrado a ser recortado. Estimule-os a utilizar desenhos das embalagens para auxiliar na visualização do problema.

Folha de atividade – Modelando Embalagens

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

1. Baseados no vídeo, vimos que quando cortamos quadrados de lado 10 cm nos cantos de uma folha de papelão quadrada de 60 cm de lado e dobramos conforme a figura, conseguimos formar uma caixa sem tampa, cujo volume é igual a 16000 cm3. Utilize o dispositivo de Briot Ruffini para verificar se existe algum outro valor para o lado do quadrado a ser recortado em cada canto para qual o volume da caixa resultante também seja igual a 16000 cm3. Justifique a sua resposta.



2. Agora imagine que você deseja cortar quadrados em cada canto de uma folha de papelão quadrada, com 18 cm de lado, para obter uma caixa de papelão na forma de um paralelepípedo sem tampa.

a. Determine o polinômio que representa o volume da caixa em relação ao lado de medida x dos quadrados cortados.

b. Cortando-se quadrados de lado 4 cm nos cantos da folha é possível construir uma caixa de 400 cm3. Existe algum outro valor para o lado do quadrado a ser recortado em cada canto para qual o volume da caixa resultante também seja igual a 400 cm^3? Justifique a sua resposta.

Seção 2 – Raízes de Polinômios

Páginas no material do aluno

227 a 231

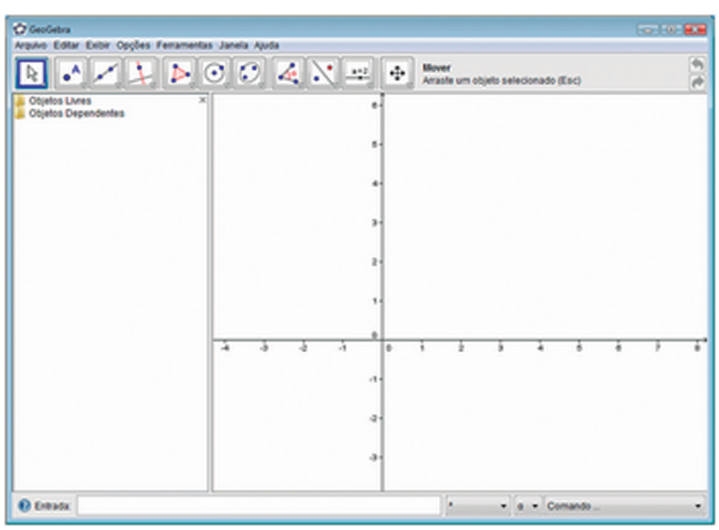
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Geogebra e o Teorema Fundamental da Álgebra	Laboratório de informática, software Geo-gebra, cópias da folha de atividades.	Esta atividade tem por objetivo fazer com que os alunos percebam a relação que existe entre o grau e o número de raízes reais de um polinômio, utilizando o software livre GeoGebra.	Duplas	50 minutos

Aspectos operacionais

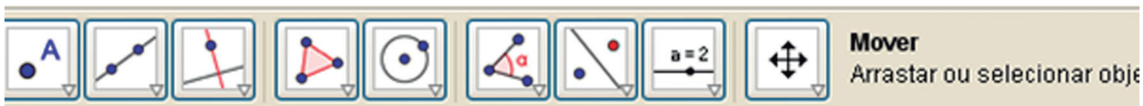
Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. É importante também reservar o laboratório multimídia com antecedência e instalar o software Geogebra, que se encontra disponível no seguinte site: *http://www.geogebra.org*. Se preferir, pode instalar o Geogebra a partir do arquivo executável que se encontra no seu material multimídia, denominado Geogebra e o Teorema Fundamental da Álgebra. Aproveite a oportunidade para estabelecer uma divisão da turma em duplas.

Ao entrar no laboratório multimídia (com o Geogebra já instalado), peça que cada dupla ocupe um computador e entregue uma folha de atividades para cada aluno. Em seguida, peça que realizem os seguintes passos:

Passo 1: Iniciar o aplicativo GeoGebra, que fará surgir a seguinte tela:



Professor, comente com seus alunos que, na barra de botões, temos diversas ferramentas que podem ser utilizadas.



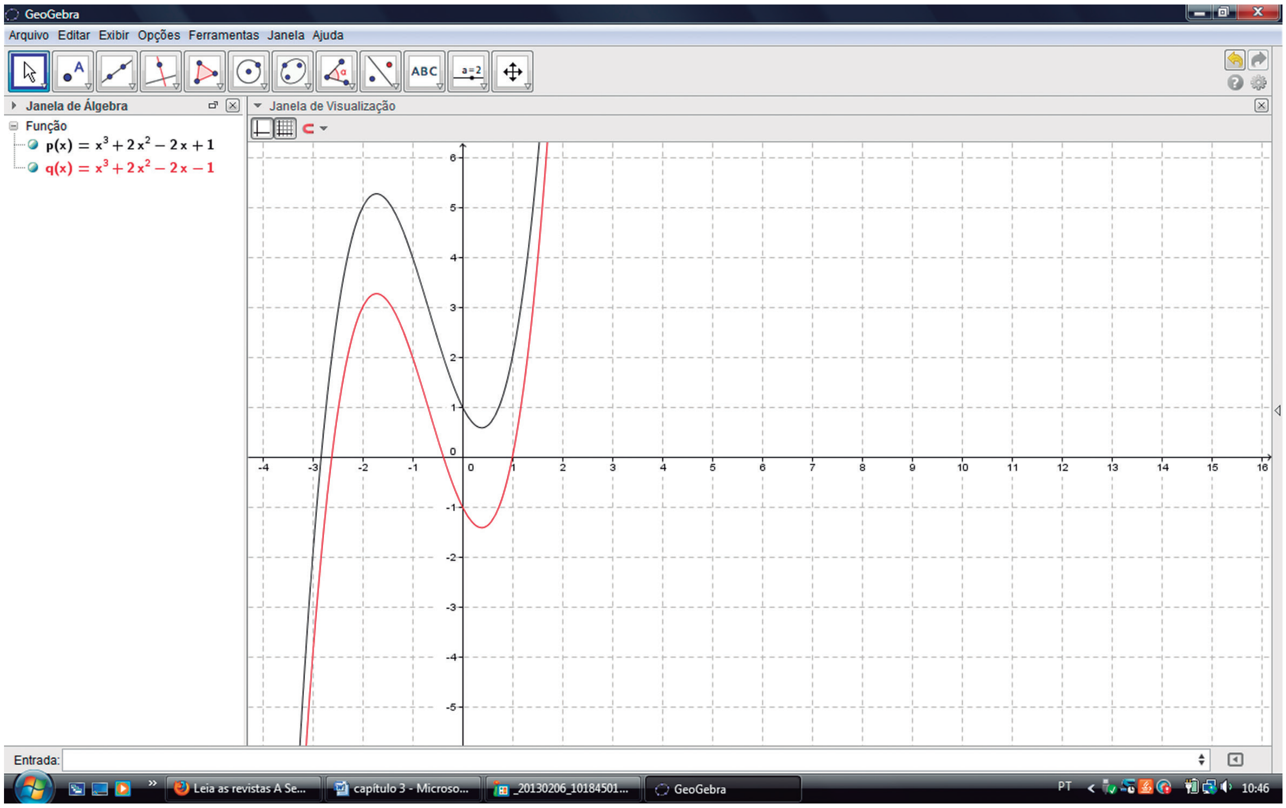
Em todos os botões, aparece uma seta no canto inferior direito, que, ao ser clicada, permite visualizar as opções existentes.

Passo 2: Apresentando exemplos de polinômios.

Na parte inferior da tela, existe uma caixa de texto destinada à entrada de dados e de fórmulas. Digite: $p(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, ou p(x) = x^3 + 2*x² -2*x + 1. Depois dê enter e digite $q(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ ou p(x) = x³ + 2*x² - 2*x - 1

Observação: Dependendo da versão, para digitar os expoentes de x, basta α clicar na caixa que se encontra à direita na caixa de entrada.

Observe que, no lado esquerdo da tela, existe a área Janela de Álgebra, onde aparecem os polinômios digitados. No lado direito da tela, existe a área gráfica, onde serão traçados os gráficos dos polinômios.



Passo 3: Verificar se um determinado número é raiz do polinômio.

Para verificar se o número 1 é raiz do polinômio q(x), digite, na caixa de entrada: a=q(1). Na Janela de Álgebra, aparecerá a=0, o que significa que o valor numérico do polinômio é 0 quando x = 1.

Professor, peça aos alunos que testem outros números, utilizando outras letras como variáveis, por exemplo: b=q(0); c=q(-1), etc. Com este procedimento, os valores numéricos ficaram registrados na Janela de Álgebra.

Depois de fazerem as verificações com o polinômio q(x), faça o mesmo para p(x), calculando o valor numérico do polinômio para diferentes valores de x.

Detalhe: -3 e -2 não são raízes de nenhum dos dois polinômios estudados, só queremos que os alunos se familiarizem com os comandos do Geogebra. As raízes de p(x) são irracionais.

Passo 4: Determinar as raízes de um polinômio.

Oriente os alunos a digitarem na caixa de entrada: raiz[q] e depois raiz[p]. Com este comando, serão exibidos os pontos de intersecção dos gráficos dos polinômios com o eixo das abscissas. Estes pontos aparecerão na Janela de Álgebra e na área gráfica. No entanto, como as raízes de p são irracionais, o software apresenta uma aproximação decimal.

Professor, após esta exploração instigue os alunos a perceberam alguma relação entre o grau de polinômios e o número máximo de raízes reais. Para isso, você pode estimulá-los a criarem e testarem outros polinômios de graus maiores que 3, como por exemplo 7 e 8.

Aspectos pedagógicos

Essa atividade propõe que o aluno seja instigado a relacionar o número de raízes reais de um polinômio com o seu grau, utilizando o Geogebra para se aproximar do chamado Teorema Fundamental da Álgebra.

Professor, após explorar o Geogebra e fazer os gráficos de p(x), de q(x) e de polinômios com grau maior do que 3, pergunte aos alunos se eles perceberam se existem alguma relação entre o grau de polinômios e o número máximo de raízes reais. Esperamos que, com essa exploração, os alunos consigam perceber tal relação, abrindo a porta para que você, professor, possa enfim apresentar o famoso Teorema Fundamental da Álgebra - que no material do aluno está registrado como corolário do Teorema Fundamental da Álgebra. Saliente que ambos podem ser considerados o Teorema Fundamental da Álgebra e que, neste caso, o corolário é mais conveniente para ser trabalhado nesta atividade, pois estabelece uma relação entre o grau do polinômio e o número máximo de raízes.

Assim, consideremos como o Teorema Fundamental da Álgebra o seguinte enunciado: todo polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais distintas.

Na folha de atividades, são apresentados outros polinômios, que poderão ser usados para testar a validade do Teorema Fundamental da Álgebra. Além disso, sugerimos que você proponha translações verticais dos gráficos, para que os alunos verifiquem a mudança do número de raízes sem deixar de validar o teorema.

Outra observação relevante se refere à observação de que um polinômio de grau ímpar possui sempre pelo menos uma raiz real.

É importante que os alunos associem o número de raízes reais de um polinômio ao número de pontos em que o gráfico corta o eixo x.

Folha de atividade – Modelando Embalagens

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

1. Utilizando o Geogebra, determine o gráfico e o número de raízes reais de cada um dos polinômios abaixo:

a. $p(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

b. $q(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$

c. $f(x) = x^3 - 1$

d. $g(x) = x^2 - 2x + 1$

e. $h(x) = x^2 + 1$

f. $j(x) = x^7 - 1$

g. $l(x) = x^9 - x^5 - x + 1$

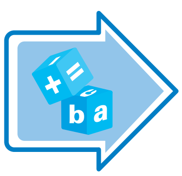
h. $m(x) = x^7 - x^5 - x^3 - x - 1$

2. Observe os gráficos dos polinômios de graus ímpares que você construiu na atividade anterior. Algum deles não corta o eixo x? O que você observa em relação ao número de raízes reais desses polinômios? Justifique sua resposta.

Seção 3 – Relações de Girard

Páginas no material do aluno

231 a 235

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Relações de Girard para Polinômios de Grau 4	Cópias da folha de atividades	Esta atividade tem por objetivo estabelecer as relações entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes (relações de Girard) para polinômios de grau 4.	Grupos de 3 ou 4	50 minutos

Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Essa atividade propõe estabelecer as relações de Girard para polinômios de grau 4, dando continuidade ao material do aluno, que o faz somente as relações para polinômios de grau 3. A proposta é que você realize, em conjunto com a turma, o procedimento para se obter as relações de Girard para polinômios do quarto grau.

A seguir, apresentamos uma sequência que sugerimos que seja apresentada aos alunos a partir de uma exposição na lousa, explicando os passos como descrito a seguir:

Apresente o seguinte polinômio aos alunos.

$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Nessa equação polinomial, é possível haver, no máximo, quatro raízes: x1, x2, x3, x4. Instigue os alunos, perguntando o porquê de a afirmação anterior estar correta. Será uma boa oportunidade para relembrar o Teorema Fundamental da Álgebra.

Depois disso, relembre com a turma o procedimento que foi feito no material do aluno.

Pergunte se eles têm alguma sugestão para determinar relações entre os coeficientes e as raízes dos polinômios de grau 4. Caso eles não tenham sugestão, fale que podemos proceder exatamente da mesma maneira!

O procedimento que se encontra no material do aluno, nada mais é que assumir x_1, x_2, x_3, x_4 como raízes de p(x), e escrevê-lo da seguinte forma.

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ x - x_4)$$

Efetuando as multiplicações, obtemos

$$p(x) = ax^4 - a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2$$
$$-a(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + a(x_1x_2x_3x_4)$$

Comparando essa escrita com $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, chegamos às relações de Girard.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = {}^{-b}\!/_{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = {}^{c}\!/_{a}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = {}^{-d}\!/_{a}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = {}^{e}\!/_{a}$$

Sugerimos que você, professor, faça essas multiplicações em conjunto com a turma e relembre que dois polinômios são iguais quando seus coeficientes para os termos de mesmo expoente o são.

Aspectos pedagógicos

Logo no início da atividade, entregue a cada um dos alunos uma cópia da folha de atividades. Apesar disso, professor, você deve sugerir que cada grupo dialogue entre si, trocando ideias para que, assim, possam resolver em conjunto as questões propostas.

Uma questão relevante deve ser destacada: na hora de apresentar o polinômio $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, destaque o fato de esse polinômio ter no máximo quatro raízes reais. Instigue os alunos, perguntando o porquê de essa afirmação estar correta. Será uma boa oportunidade para relembrar o Teorema Fundamental da Álgebra, que se encontra nas páginas 44 e 45 do material do aluno.

Se seus alunos tiverem interesse, ao final da atividade, você pode questioná-los sobre as relações, perguntando se eles saberiam determinar as relações para um polinômio de grau 5. Para isso, sugerimos que você oriente os alunos a comparem as relações dos polinômios de graus 2, 3 e 4.

Folha de atividade – Relações de Girard para Polinômios de Grau 4

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

1. Estabeleça as relações de Girard para o polinômio $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Faça todo o desenvolvimento. (Dica: Repita o mesmo desenvolvimento do material do aluno)

2. O polinômio $p(x) = 36x^4 + 12x^3 - 23x^2 - 4x + 4$ tem duas raízes duplas. Quais são elas? (Dica: use as relações de Girard)

Seção O que perguntam por aí...

Página no material do aluno

241

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de vestibular	Imagem para projeção, disponível neste material	–	Duplas	–

Aspectos operacionais

Na seção O que perguntam por aí..., do material do aluno, são apresentadas duas questões de vestibular que envolvem os conhecimentos sobre polinômios trabalhados nesta unidade. Essas questões já se encontram resolvidas no material do aluno, mas você poderá trabalhá-las a partir da projeção das imagens disponíveis no seu DVD e nesse material, de acordo com as seguintes orientações.

(EEM - SP)

1. Determine as raízes da equação x^3-3x-2=0, sabendo-se que uma delas é dupla.

Umas das raízes, determinada por tentativa é 2.

2^3-3.2-2=0

Dividindo o polinômio or (x-2) encontramos x^2+2x+1=0

x=1 é a raiz dupla.

Solução Comentada: Por tentativa, se obteve que x = 2 é raiz do polinômio dado. A partir daí, pode-se utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para dividir o polinômio por x-2 e assim recair num polinômio de grau 2, do qual obtêm--se facilmente as raízes - neste caso, duplas: $x_1 = x_2 = -1$

(Faap-SP)

2. Calcule os valores de a, b, e, c para que o polinômio

$p_1(x) = a(x+c)^3 + b(x+d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

Sugestão: desenvolver os produtos, escrever na forma geral do polinômio e igualar os coeficientes de $p_1(x)$ com os de $p_2(x)$. Lembrando que $(a+b)3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Solução Comentada: Neste caso, ao desenvolvermos o produto $a(x+c)^3+b(x+d)$, temos:

$$a(x+c)^3+b(x+d)=a\left(x^3+3cx^2+3c^2x+c^3\right)+bx+bd=ax^3+3acx^2+3ac^2x+ac^3+bx+bd$$

$$=ax^3+3acx^2+\left(3ac^2+b\right)x+ac^3+bd$$

Logo, igualando termo a termo, obtemos:

$a=1;$

$3ac=6,\ \textit{então}\ 3.1.c=6,\ \textit{isto é}\ c=2;$

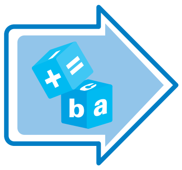
$3ac^2+b=15,\ \textit{então}\ 3.1.2^2+\ b=15,\ \textit{isto é}\ b=3;$

$ac^3+bd=14,\ \textit{então}\ 1.2^3+3d=14,\ \textit{isto é}\ d=2$

Aspectos pedagógicos

Após a resolução destas questões em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros cometidos. Nesta etapa, procure priorizar os erros que, no seu entendimento, forem mais comuns.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetiva como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado a essa unidade. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar as que você já usa para fazer a avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- Divisão de Polinômio
- Dispositivo Prático de Briot-Ruffini
- Teorema do Resto
- Teorema Fundamental da Álgebra
- Relações de Girard

Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros, a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho e, se for o caso, repensá-los de acordo com as críticas e sugestões apresentadas.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Sugerimos nesta etapa, a escolha de pelo menos uma questão objetiva que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo.

Sugestão de questões objetivas para avaliação:

Questão 1:

Os valores numéricos do quociente e do resto da divisão de $p(x) = 5x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ por $d(x) = x^2 + x + 1$, por $x = -1$ são, respectivamente,

a. –7 e –12

b. –7 e 14

c. 7 e –14

d. 7 e –12

e. –7 e 12

Questão 2: (FUVEST 2009)

O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$, em que a e b são números reais, tem restos 2 e 4 quando dividido por x – 2 e x - 1 respectivamente. Assim, o valor de a é:

a. -6

b. -7

c. -8

d. -9

e. -10

Questão 3:

A soma de duas raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 10x + m$ é 4. O valor de m é, então, igual a:

a. 6

b. 12

c. 18

d. 24

e. 30

Questão 4: (FGV-SP)

Seja Q(x) o quociente da divisão do polinômio $P(x) = x^6 - 1$ pelo polinômio $d(x) = x - 1$. Então:

a. Q(0) = 0

b. Q(0) < 0

c. Q(1) = 0

d. Q(– 1) = 1

e. Q(1) = 6

Questão 5: (Fuvest-SP)

Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica $2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$ é igual a 1. Então o valor de k é:

a. – 8

b. – 4

c. 0

d. 4

e. 8

Respostas das questões objetivas sugeridas

1.d 2.a 3.d 4.e 5.a

Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

Questão 1:

Quais os valores de m e n devemos ter para que o polinômio $2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $x^2 - x - 2$?

Questão 2:

Dividindo $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por certo polinômio h(x) , obtemos o quociente $q(x) = x - 1$ e o resto $r(x) = 2x - 1$. Determine h(x).

Questão 3:

Calcule o valor de a sabendo que $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + a$ é divisível por $h(x) = x - 1$.

Questão 4:

Resolver a equação $x^3-3x^2-x+3= 0$, sabendo-se que a soma de duas raízes é zero.

Questão 5:

Sabendo-se que 1 é a raiz da equação $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$, determinar a e as demais raízes da equação.

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:

Questão 1: Usando o algoritmo da divisão (método das chaves) temos que m = -6 e n = 1

Questão 2: Utilizaremos a fórmula da divisão de polinômios, que é a seguinte:

Quando um polinômio (dividendo) é dividido por outro (divisor), o dividendo sempre será igual ao quociente, que é o resultado da divisão, multiplicando pelo divisor e somado ao resto da divisão. Assim:

DIVIDENDO = (QUOCIENTE.DIVISOR)+ RESTO

Assim sendo, temos um polinômio sendo dividido por outro, como diz o exercício. O que está sendo dividido, p(x), é o dividendo, e h(x) é o divisor. O quociente é q(x) e o resto é r(x). Para descobrir h(x), basta usar a equação acima. Substituindo, temos:

$x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = [(x - 1).h(x)] + 2x - 1$

Primeiro, passaremos o resto, que soma no lado direito, para o outro lado subtraindo. Ficaria:

$x^3 - 4x^2 + 7x - 3 - 2x + 1 = (x - 1).h(x)$

$x^3 - 4x2 + 5x - 2 = (x - 1)h(x)$

Para descobrir o valor de h(x), precisamos passar (x-1), que está multiplicando, para o outro lado da equação, mas dividindo. Portanto, teríamos:

$$\frac{(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)}{x - 1} = h(x)$$

Agora, para descobrir h(x), basta resolver a divisão de polinômios. Essa divisão de polinômios pode ser resolvida por Briot-Ruffini ou Método Euclidiano (das chaves).

$h(x) = x^2 - 3 + 2$

Questão 3: Quando um polinômio é divisível por outro, sabemos que o resto dessa divisão é igual a zero (Teorema de D'Alembert). Também sabemos, pelo Teorema do Resto, que, ao substituir a raiz do divisor (igualando o divisor a zero e descobrindo x) no dividendo (substituindo o valor descoberto no lugar de x), o resultado precisa ser o resto da divisão.

Como o polinômio é divisível, já sabemos que o resto é igual a zero. Portanto, ao substituir a raiz do divisor, no caso x = 1, em p(x), o valor de p(x) para x = 1, ou seja, p(1), tem que valer zero. Assim, fica fácil descobrir o valor de a.

Descobrindo a raiz do divisor:

$0 = x - 1$

$x = 1$

Substituindo no dividendo:

$p(1) = 2.1^3 + 4.^{12} - 5.1 + a$

Sabemos que o resto vale zero, então p(1) pode ser igualada a zero.

$0 = 2 + 4 - 5 + a$

$0 = 1 + a$

$a = -1$

Questão 4: Usando as relações de Girard encontramos que 3 é uma de suas raízes, novamente utilizando Girard encontramos que as outras raízes são 1 e -1.

Questão 5: a = -5 e as demais raízes, usando o teorema fundamental da álgebra, serão -2 e 3.

Folha de atividade – Avaliação - Etapa 1

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Momento de Reflexão

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na unidade 8 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo dessa unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder as questões a seguir.

Questão 1:

Qual foi o conteúdo matemático estudado nessa unidade?

Questão 2:

Dê um exemplo de uma aplicação dos conhecimentos aqui estudados.

Questão 3:(FEI – SP):

Sendo $p(x) = ax^4 + bx^3 + c$ e $q(x) = ax^3 - bx - c$, determine os coeficientes a, b e c, sabendo que $p(0) = 0$, $p(1) = 0$ e $q(1) = 2$.

Questão 4:

Os polinômios $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ e $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ são divisíveis por:

a. $5x^2 - 2x - 24$

b. $x^2 - x - 6$

c. $x^2 + x - 6$

d. x

e. x - 3

Questão 5: (UEL):

Se o resto da divisão do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 - kx - 75$ por $(x - 5)$ é 10, o valor de k é:

a. -5

b. -4

c. 5

d. 6

e. 8

Respostas Comentadas da Folha de Atividades – Avaliação – Etapa 1:

Questão 1: Aprendemos um pouco mais sobre a teoria de polinômios, destacando como dividimos polinômios, aprendemos o teorema do resto (Teorema de D'Alembert), o dispositivo de Briot-Ruffini, o Teorema Fundamental da Álgebra e as Relações de Girard.

Questão 2: Os polinômios são usados para descrever curvas de diversos tipos. Poderão citar exemplos das funções polinomiais utilizadas na Física, os polinômios e equações polinomiais das construções de embalagens etc.

Questão 3: $p(0) = 0 \rightarrow a.0^4 + b.0^3 + c = 0 \rightarrow c = 0$

$$p(1) = 0 \rightarrow a.1^4 + b.1^3 + 0 = 0 \rightarrow a + b = 0$$

$$q(1) = 2 \rightarrow a.1^3 - b.1 - 0 = 2 \rightarrow a - b = 2$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$2a = 2$$

$$a = 1$$

$$Daí,$$

$$a + b = 0$$

$$1 + b = 0$$

$$b = -1$$

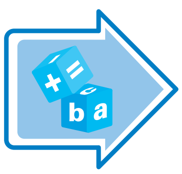
$$Temos\ que\ a = 1,\ b = -1\ e\ c = 0.$$

Questão 4: Letra c

Os alunos poderão usar várias estratégias para resolver esse problema, como o método das chaves, Briot--Ruffini e até o teorema do resto, nas letras d e e. Para enriquecer a atividade, discuta essas possibilidades na hora de comentar a resolução da questão.

Questão 5: Letra e

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios Complementares	Folha de atividades	Essa atividade propõe alguns exercícios que podem auxiliar na fixação das principais noções ligadas à ideia de polinômio.	Duplas ou trios	–

Aspectos operacionais

Peça que os seus alunos se organizem em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada um, para que todos possam ficar com uma cópia do material, tornando-o mais uma fonte de consulta.

Escolha previamente os exercícios que melhor se adequam à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos nesta unidade.

Depois de os alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas, valorizando cada estratégia, mesmo que esta não tenha conduzido a uma resposta verdadeira.

Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção, pois isso pode podem favorecer o desenvolvimento da autonomia deles no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Aspectos pedagógicos

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação de algumas das noções trabalhadas ao longo dessa unidade, como os métodos de Divisão de Polinômios, o Dispositivo Prático de Briot--Ruffini, os Teoremas do Resto e de D'Alembert, além do Teorema Fundamental da Álgebra e d as Relações de Girard.

Esses exercícios foram dispostos em uma folha de atividades, que se encontra disponível para reprodução no seu material multimídia e poderá ser aplicada tanto de forma fracionada, ao término de cada seção do material do aluno, quanto de uma só vez, no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

Não é necessária a aplicação da totalidade dos exercícios. Apenas selecione os que julgar mais adequados ao ritmo de aprendizagem e características particulares de sua turma.

Folha de atividades – Exercícios Complementares

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Questão 1.

Escreva o polinômio de menor grau possível, de raízes 1, 2 e –3, tal que P(0) = 12.

Questão 2. (UFRJ)

O polinômio P(x) = x3 - 2x2 - 5x + d, d $\in$ R, é divisível por (x - 2).

a. Determine d.

b. Calcule as raízes da equação P(x) = 0.

Questão 3. (UFF)

Ao se dividir o polinômio P (x) por D(x)= x–2 obteve-se quociente $Q(x) = x^4 + 2x^2 + x + 1$ e resto 8, determine P(x).

Questão 4. (PUC-RS)

Se a equação $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ admite a raiz 5, a soma das outras duas raízes é:

a. 0 b. –3 c. –2 d. 2 e. 3

Questão 5. (PUC-RS)

O polinômio p(x) é tal que $p(x - 2) = x^2$. Então p(x) é igual a:

a. $4x^2 - 4x$ b. x2 + 2x c. $x^2 + 4x + 4$ d.$x^2 - 4x + 4$ e. - 2x + 4

Questão 6. (PUC-RS)

Dividindo o polinômio p (x) = $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$ por (x – m), (x – r) ou (x – s) com m, r, s todos distintos, obtemos sempre resto zero. É correto afirmar que n é:

a. maior que 3 b. maior ou igual a 3 c. igual a 2. d. igual a 1 e. igual a zero.

Questão 7. (PUC-RS)

Dividindo-se $P(x)= - x^4 + x^2 +2x$ por um polinômio D(x), obtém-se o quociente $Q(x)= - x^2 + 2x - 1$ e o resto R = 2. Nestas condições, o valor numérico de D(x) para x = -1 é:

a. 4 b. 3 c. 2,5 d. 2 e. 1

Questão 8. (PUC-RS)

Sabendo que –1 é raiz do polinômio $P(x)= - x^3 + x^2 + x + a$, o produto das outras raízes é igual a:

a. –2 b. –1 c. 0 d. 1 e. 2

Questão 9. (Cesgranrio)

Se $x^{13} + 1$ é dividido por x – 1, o resto é:

a. 1 b. – 1 c. 0 d. 2 e. 13

Questão 10. (UFRGS)

A divisão de p(x) por $x^2 + 1$ tem quociente x – 2 e resto 1. O polinômio p(x) é:

a. $x^2 + x - 1$ b. $x^2 + x + 1$ c. $x^2 + x$ d. $x^3 - 2x^2 + x - 2$ e. $x^3 - 2x^2 + x - 1$

Questão 11. (PUC)

O resto da divisão de $x^4 - 8x^3 +4x^2 + 15x + 6$ por x - 2 é:

a. 3 b. 4 c. 7 d 5 e. 6

Questão 12. (UNIFICADO)

Se o polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x + a$ é divisível por $D(x) = x - 2$, o valor de a é:

a. – 8 b. – 6 c. – 4 d. – 2 e. 2

Questão 13. (F. C. CHAGAS)

Seja $g = x^3 + 3x^2 + m$, onde $m \in R$, um polinômio divisível por $x - 1$. É correto afirmar que o polinômio g admite:

a. três raízes reais iguais

b. três raízes reais distintas entre si

c. duas raízes reais opostas

d. duas raízes reais iguais

e. apenas uma raiz real

Questão 14. (FGV – SP)

A soma e o produto das raízes da equação $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$, são respectivamente:

a. – 5 e 6 b. 5 e – 6 c. 3 e 4 d. 1 e 6 e. 4 e 3

15. (F. C. CHAGAS)

Uma possível raiz racional da equação $6x^3 - 13x^2 + 2x + 4 = 0$ é:

a. $-\frac{4}{3}$ b. $-\frac{3}{2}$ c. $\frac{3}{4}$ d. 3 e. 6

Respostas – Exercícios Complementares

1. $2x^3 - 14x + 12$
2. a. 10 b. $2, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$
3. $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 6$

4. B
5. C
6. B
7. E
8. D
9. D
10. E
11. E
12. A
13. D
14. B
15. A

MATERIAL DO PROFESSOR

Volume 2 • Módulo 4 • Matemática

Expansão: Geometria Analítica Parte II

Heitor Barbosa Lima de Oliveira (coordenação), Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenação), Gabriela Barbosa, Luciana Felix da Costa Santos, Luciane de Paiva Moura Coutinho, Patrícia Nunes da Silva

Introdução

Na expansão Geometria Analítica 2 do material do aluno são apresentadas várias situações cotidianas que envolvem Geometria Analítica. Preparamos com muito carinho para você um material complementar, cujo objetivo é ampliar as possibilidades de exploração do tema em suas aulas e enriquecer a abordagem dos objetivos deste módulo, que são os seguintes:

- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações;
- Calcular as coordenadas do ponto de interseção entre retas;
- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida, dados o centro e o raio;
- Conhecer as cônicas.

A nossa sugestão é que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora, para a qual trazemos duas propostas. EmIdentificando retas paralelas e perpendiculares, os alunos poderão assistir a um vídeo sobre retas paralelas e perpendiculares e, em seguida, fazer conjecturas sobre semelhanças e diferenças entre os ângulos formados por tais retas.Já em Algumas posições entre retas, com auxílio dos aplicativos, os alunos poderão explorar as relações entre os coeficientes angulares de retas paralelas e de retas perpendiculares.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias.

Na Seção 1, trazemos duas propostas de trabalho. EmMemória das retas paralelas, os alunos irão identificar pares de retas paralelas com base na observação de seus coeficientes angulares. Já na atividadeIdentificando retas perpendicularesvocê poderámostrar aos alunos a relação que se estabelece entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares.

Para a Seção 2, preparamos a atividade Jardim de números, baseada em uma atividade que usa a geometria analítica para planejar a construção de um jardim que tem a forma da bandeira brasileira.Também temos Descobrindo a equação da circunferência, onde os alunos irão medir as distâncias dos pontos de uma circunferência até o seu centro para verificarem a propriedade do lugar geométrico: a equidistância.

Na Seção 3, a atividade Que curva é essa chamada elipse?propõe queos alunos construam uma elipse com o auxílio de uma garrafa pet. E para fechar esta seção, temosA parábola de ponto a ponto, onde os alunos traçarão uma parábola sendo dados a reta diretriz e o foco através de régua e compasso.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos: o primeiro dedicado a uma revisão geral do estudo realizado, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. Já segundo momento deve ser um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

A descrição e o detalhamento de nossas sugestões são apresentados nas tabelas e textos a seguir.

A descrição e o detalhamento das atividades sugeridas estão nos textos e tabelas a seguir

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	4	Geometria Analítica Parte II	4 aulas de 2 tempos

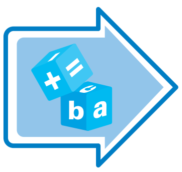
Titulo da unidade	Tema
Geometria Analítica – Parte 2	Geometria Analítica
Objetivos da unidade	
Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações;	
Calcular as coordenadas do ponto de interseção entre retas;	
Determinar a equação da circunferência na forma reduzida, dados o centro e o raio;	
Conhecer as cônicas.	

Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	247 a 248
Seção 1 – Retas ainda	249 a 262
Seção 2 – Circunferência	262 a 268
Seção 3 – As cônicas	268 a 270
Resumo	270
Veja ainda...	270
O que perguntam por aí?	275 a 276

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Identificando retas paralelas e perpendiculares.	Computador com Datashow e acesso à internet, transferidor, caixa de fósforos.	Os alunos farão duas atividades on line relacionadas ao jogo do máximo, que envolve o conceito de probabilidade	O vídeo será assistido por toda turma e a atividade deve ser realizada em dupla.	40 minutos
	Algumas posições entre retas	Computadores com acesso à internet e cópias da folha de atividades.	Nessa atividade, com auxílio dos aplicativos, os alunos vão explorar as relações entre os coeficientes angulares de retas paralelas e de retas perpendiculares.	Duplas	40 minutos

Seção 1 – Retas, ainda

Páginas no material do aluno

249 a 262

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Memória das retas paralelas	Fichas, construídas a partir do modelo da folha de atividades.	Identificar pares de retas paralelas com base na observação de seus coeficientes angulares.	A atividade pode ser realizada em dupla.	40 minutos
	Como são as retas perpendiculares?	Um conjunto de cartas, construído a partir de modelo da folha de atividades.	O objetivo da atividade é mostrar aos alunos a relação que se estabelece entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares.	Dupla	2 tempos de 40 minutos

Seção 2 – Circunferência

Páginas no material do aluno

262 a 268

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jardim de números	Vídeo Jardim de números, disponível em no Pendrive, cópias da folha de atividade, régua, calculadora.	O vídeo utilizado nessa atividade usa a geometria analítica para planejar a construção de um jardim que tem a forma da bandeira brasileira. No problema proposto, os alunos devem determinar as equações das retas que dão suporte aos lados do losango e a equação da circunferência presentes no jardim.	Duplas	40 minutos
	Descobrindo a equação da circunferência	Cópias da folha de atividades, tesoura, régua, lápis de cor ou hidrocor.	Nesta atividade, os alunos irão medir as distâncias dos pontos de uma circunferência até o seu centro para verificar a equidistância do lugar geométrico. Além disso, determinarão a equação de uma circunferência de centro na origem.	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Seção 3 – As cônicas

Páginas no material do aluno
268 a 270

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Que curva é essa chamada elipse?	Garrafa plástica cilíndrica transparente com líquido,caneta, tesoura, folha de papel.	Os alunos construirão uma elipse com o auxílio de uma garrafa pet. Em seguida, a elipse obtida será desenhada no papel para a construção da curva no plano. Experimento disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1374.	Trios ou quartetos	2 tempos de 40 minutos
	A Parábola Ponto-a-ponto	Lápis, papel milimetrado, régua e compasso.	Os alunos traçarão uma parábola sendo dados a reta diretriz e o foco através de régua e compasso.	Individual	2 tempos de 40 minutos

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Cópias da folha de atividades	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo dividido em duas etapas. A primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda é constituída por questões objetivas e dissertativas, a serem escolhidas pelo professor.	Individual.	40 minutos
	Exercícios Complementares	Cópia da folha de atividades.	-	Duplas ou trios.	-

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Identificando retas paralelas e perpendiculares.	Computador com Datashow e acesso à internet, transferidor, caixa de fósforos.	Os alunos farão duas atividades on line relacionadas ao jogo do máximo, que envolve o conceito de probabilidade	O vídeo será assistido por toda turma e a atividade deve ser realizada em dupla.	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, na aula anterior à aula em que for usada esta atividade, peça para que os alunos tragam uma caixa de fósforos para a aula seguinte. No dia da aula propriamente dita, peça para que os alunos assistam ao vídeo Identificando retas paralelas e perpendiculares, disponível no site oficial da Khan Academy em português, em https://www.youtube.com/watch?v=3xOuxvV0rnQ. Você também o encontrará em seu Pendrive / DVD.

Após assistir ao vídeo, peça para os alunos, em duplas,refletirem a respeito das semelhanças e diferenças dos ângulos relacionados às retas paralelas e perpendiculares e realizem o passo a passo sugerido a seguir.

Identificando retas perpendiculares

Peça para que os alunos desenhem e recortem um ângulo reto com o auxílio de um transferidor ou a partir do modelo da ilustração a seguir.

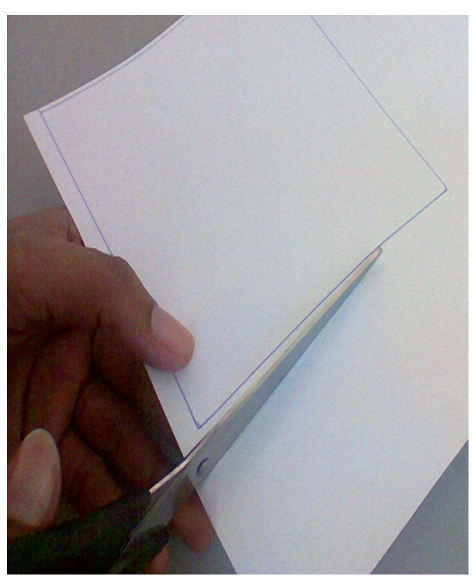


Figura 1: Cortando o ângulo reto

Com o ângulo reto em mãos, peça para que eles identifiquem retas perpendiculares em objetos na sala de aula.

Identificando retas paralelas

Nesta etapa, os alunos irão analisar as caixas que eles levaram. Peça que eles identifiquem duas retas paralelas na caixa, como na ilustração a seguir.

Parte superior da caixa de fósforos:

Figura 2: Tampa superior da caixa de fósforos com retas paralelas r e s marcadas

A reta r é paralela à reta s.

Após essa identificação, eles irão traçar uma reta perpendicular a uma das retas (r ou s) com o auxílio do ângulo reto da atividade anterior.

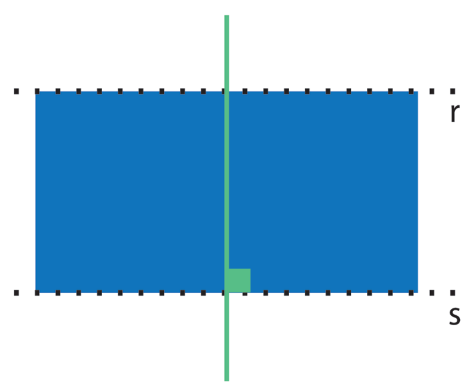


Figura 3: Tampa superior da caixa de fósforos com reta perpendicular à reta s

Agora, peça para que os alunos verifiquem que o ângulo entre a reta desenhada e a outra reta também é reto.

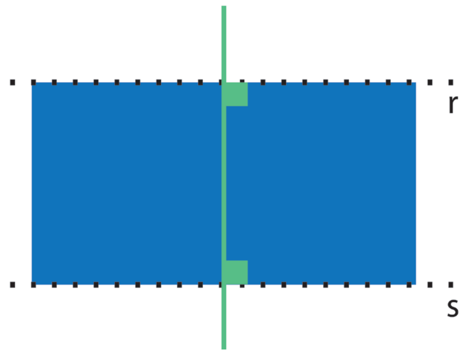


Figura 4: Tampa superior da caixa de fósforos com reta perpendicular às retas r e s

Aspectos pedagógicos

Professor, um dos objetivos dessa unidade é identificar retas paralelas e perpendiculares a partir de suas equações. Escolhemos esse vídeo para que pudéssemos primeiramente sanar qualquer dúvida sobre a identificação do paralelismo e da perpendicularidade.

Já a segunda etapa da atividade permite ao aluno fazer conjecturas a respeito dos ângulos relacionados às retas paralelas e perpendiculares a partir de suas próprias observações. Note que é importante que os alunos, ao final da aula, concluam que

Duas retas são paralelas se, e somente se, os ângulos que elas fazem com uma terceira retasão congruentes.

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, elas se interceptam e o ângulo formado entre elas é reto (90o).

Note que, por estarmos buscando uma definição bem intuitiva, ainda não estamos utilizando os termos inclinação ou coeficiente angular. A ideia é que esse momento inicial sejaum facilitador para a seção seguinte, onde iremos aprofundar o tema da identificação das retas paralelas e perpendiculares por meio das equações das retas.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Algumas posições entre retas	Computadores com acesso à internet e cópias da folha de atividades.	Nessa atividade, com auxílio dos aplicativos, os alunos vão explorar as relações entre os coeficientes angulares de retas paralelas e de retas perpendiculares.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Leve os alunos para o laboratório de informática da escola, divida a turma em duplas, peça para que cada dupla se posicione em frente a um computador e faça a distribuição da folha de atividades. Na primeira parte da atividade, oriente os alunos a acessar o aplicativo Retas paralelas, disponível em http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/medio/geometria_analitica/paralelas.htm. Posteriormente, peça que acessem o aplicativo Retas perpendiculares, disponível em http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/medio/geometria_analitica/perpendicular.htm.

Os alunos devem seguir as orientações da folha de atividades e preenche-la de acordo com as observações nos links.

Aspectos pedagógicos

Professor, o objetivo dessa atividade é explorar as relações entre os coeficientes angulares de retas paralelas e de retas perpendiculares. Auxilie os alunos a explorarem o software de modo a evidenciar essa relação.

Ao final da atividade, escreva no quadro os valores dos coeficientes angulares escolhidos pelas duplas na segunda pergunta (tanto para a parte das Retas paralelas como na parte das Retas perpendiculares). Use esses dados para tentar discutir com eles a relação entre os coeficientes.

As respostas para os itens propostos são livres. Tente analisar algumas respostas junto com o grupo. Para o item 3 das retas perpendiculares, os alunos deverão obter a seguinte tabela:

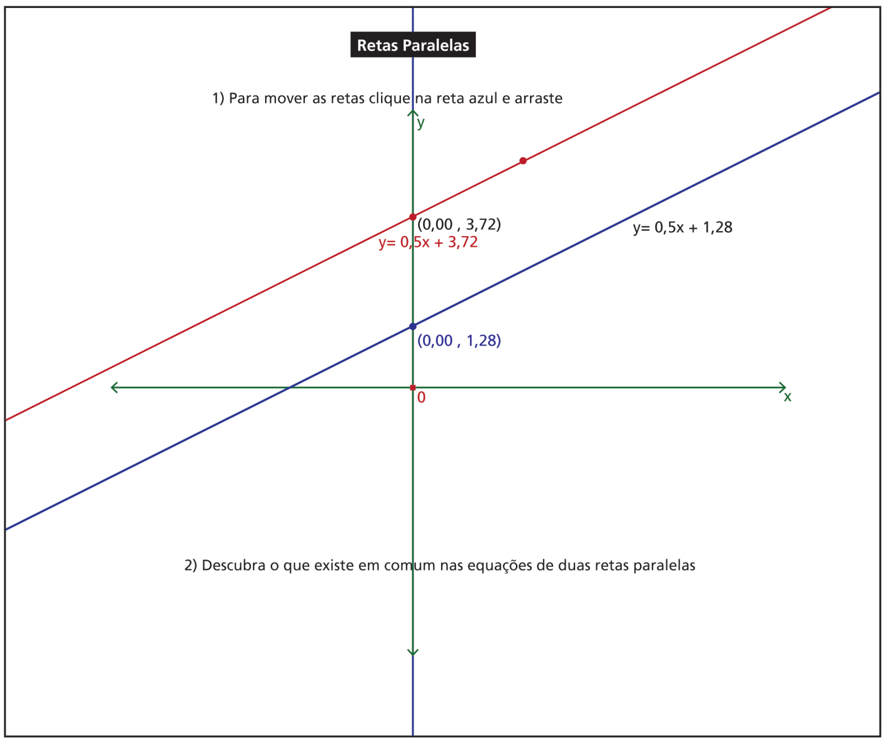
Coeficiente angular da reta azul	5	2	-3	0,5	1
Coeficiente angular da reta vermelha	- 1/5	- 1/2	1/3	2	-1

Folha de atividades

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Você está acessando um aplicativo chamado Retas paralelas. Na figura abaixo, vemos sua interface inicial:



A equação das retas está apresentada na forma $y = ax + b$ ao lado de cada uma delas.

Use o mouse para mover a reta azul. Observe o que acontece com os coeficientes angulares das retas enquanto você movimenta a reta azul.

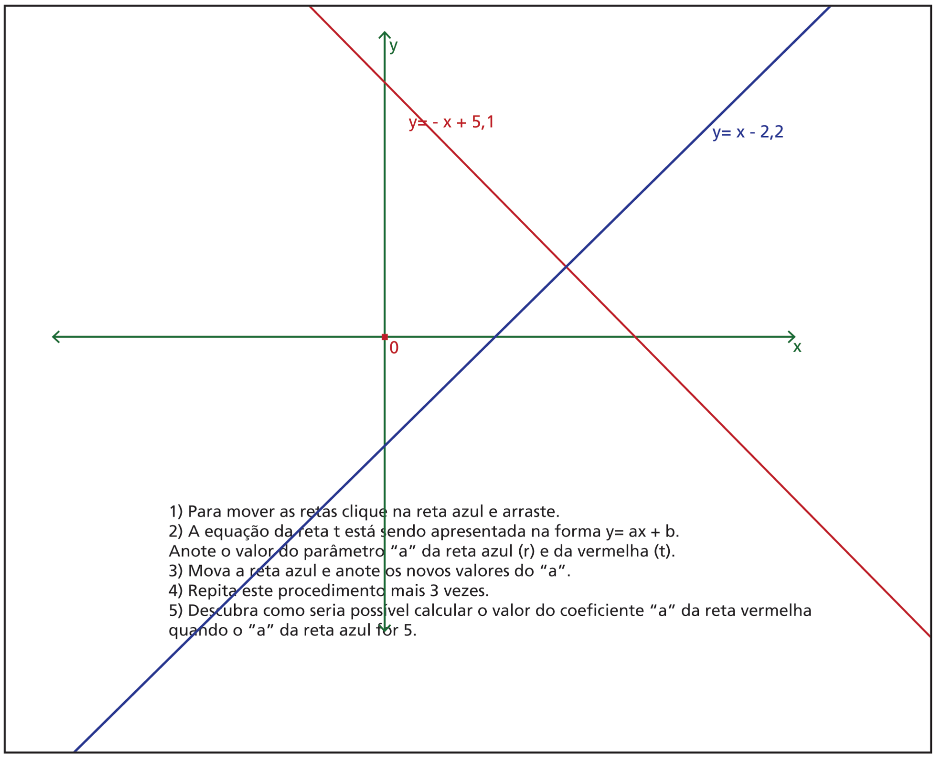
Anote na tabela abaixo alguns valores dos coeficientes angulares encontrados

Coeficiente angular da reta azul					
Coeficiente angular da reta vermelha					

As duas retas apresentadas são paralelas. O que há em comum entre as equações dessas retas?

Retas perpendiculares

Você está acessando um aplicativo chamado Retas perpendiculares. Na figura abaixo, vemos sua interface inicial:



A equação das retas está apresentada na forma ao lado de cada uma delas.

1. Use o mouse para mover a reta azul. Observe o que acontece com os coeficientes angulares das retas enquanto você movimenta a reta azul.

2. Anote na tabela abaixo alguns valores dos coeficientes angulares encontrados

Coeficiente angular da reta azul					
Coeficiente angular da reta vermelha					

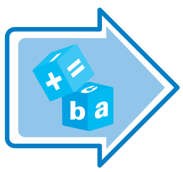
3. As duas retas apresentadas são perpendiculares. Determine o coeficiente angular da reta vermelha quando o coeficiente angulara da reta azul é igual ao indicado na tabela abaixo.

Coeficiente angular da reta azul	5	2	-3	0,5	1
Coeficiente angular da reta vermelha					

Seção 1 – Retas, ainda

Páginas no material do aluno

249 a 262

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Memória das retas paralelas	Fichas, construídas a partir do modelo da folha de atividades.	Identificar pares de retas paralelas com base na observação de seus coeficientes angulares.	A atividade pode ser realizada em dupla.	40 minutos

Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é criar condições para que os alunos consigam identificar pares de retas paralelas com base na observação de seus coeficientes angulares. Trata-se de um jogo de memória em que os pares de cartas procurados são os pares que apresentam equações de retas paralelas.

Inicialmente você pode estabelecer um diálogo com a turma, levantando os seguintes questionamentos: O que são retas paralelas? O que são retas perpendiculares? É possível reconhecer se duas retas são perpendiculares entre si sem construí-las no plano cartesiano? Por que é importante escrevermos a equação de uma reta em sua forma reduzida?

Em seguida, distribua para cada dupla um conjunto de cartas, explique as regras e dê início às partidas. As cartas devem ser construídas a partir do modelo da folha de atividades (disponível no pendrive). Quando concluírem, peça-lhes que incrementem o conjunto de cartas, criando novos pares. As regras são as seguintes:

Regra 1: na dupla, um aluno é adversário do outro e eles decidem, no par ou ímpar, quem jogará primeiro.

Regra 2: as cartas devem ser embaralhadas e distribuídas sobre uma mesa sem que seus conteúdos estejam visíveis.

Regra 3: o primeiro jogador deve virar duas cartas e, se elas formarem um par de paralelas, tomá-las para si e desvirar outro par. Caso contrário, ele deverá colocá-las na posição em que se encontravam inicialmente e passar a vez para o seu adversário.

Regra 4: vencerá o jogador que tiver tomado mais pares de cartas.

Aspectos pedagógicos

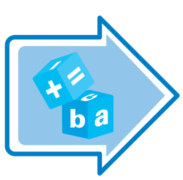
Professor, no diálogo inicial, é importante que os alunos relembrem que as paralelas não se interceptam e que as retas perpendiculares se interceptam formando ângulo de 90°. Além disso, devem reconhecer que é possível concluir que uma reta é paralela à outra sem necessariamente representá-las no plano cartesiano. Afinal, como sabemos, retas paralelas possuem coeficientes angulares iguais. Fique atento, professor, pois estas reflexões permitem destacar as características que diferenciam o estudo da geometria analítica de outros estudos em geometria. A abordagem analítica nos permite tirar conclusões sobre as figuras sem observá-las ou construí-las. Em muitos casos, basta realizar cálculos simples ou fazer comparações com base nas equações que as descrevem.

Empregando os conhecimentos adquiridos sobre condições de paralelismo e perpendicularidade, alguns alunos podem se equivocar na identificação dos coeficientes angulares das retas. Podem, por exemplo, achar que o coeficiente angular é o coeficiente de x independentemente da forma em que as equações das retas estão escritas. Vale sempre lembrar que o coeficiente angular é o coeficiente de x quando a reta está escrita na forma reduzida. Se for necessário, faça uma revisão dos procedimentos algébricos utilizados pelos alunos quando precisam escrever a equação de uma reta nesta forma. E, para fixar estas ideias, você pode concluir a aula pedindo-lhes que criem novos pares de cartas, mas com a seguinte restrição: cada par deve conter a forma reduzida e a forma geral da equação de uma mesma reta.

Seção 1 – Retas, ainda

Páginas no material do aluno

249 a 262

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Como são as retas perpendiculares?	Um conjunto de cartas, construído a partir de modelo da folha de atividades.	O objetivo da atividade é mostrar aos alunos a relação que se estabelece entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares.	Dupla	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Esta é uma atividade simples, que deve ser usada para fazer com que seus alunos reflitam com seus alunos sobre a relação que se estabelece entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares. Para começar, entregue um conjunto de cartas como o que segue em anexo para cada dupla e explique as regras a seguir:

Regra 1: As cartas devem ser embaralhadas e, depois, dispostas sobre a mesa com seus conteúdos à mostra.

Regra 2: Na dupla, um aluno será adversário do outro e, quando o professor autorizar, os alunos devem selecionar pares de cartas que apresentam retas perpendiculares.

Regra 3: Não há ordem de participação dos jogadores, entretanto, o aluno só poderá colocar a mão na carta para tirá-la da mesa.

Regra 4: Quando as cartas acabarem, os jogadores, cada jogador, mostrando seus pares ao adversário, deverá contar seus pontos de acordo com a seguinte tabela:

Cada par...	Pontuação
Certo (par de retas perpendiculares)	+ 2
Errado (par de retas que não são perpendiculares)	- 3

Regra 5: O vencedor será aquele que tiver o maior número de pontos.

Aspectos pedagógicos

Professor, antes de os alunos começarem a jogar, é aconselhável que você relembre com eles que, quando duas retas são perpendiculares, o produto de seus coeficientes angulares é -1. Um equívoco comum, neste estudo, ocorre quando os alunos têm dificuldades para identificar o coeficiente angular. Nunca é demais lembrar a eles que o coeficiente angular pode ser identificado facilmente se a equação da reta estiver na forma reduzida, ou seja, na forma $y = ax + b$.

Observe também que, na soma dos pontos, os alunos terão que efetuar cálculos com números positivo (quando acertarem o par) e negativos (quando errarem o par). Aproveite para também fazer uma revisão das operações com números inteiros.

Como já mencionamos em outras oportunidades, depois que os alunos jogarem, refletir sobre as estratégias que empregaram no jogo pode favorecer o processo de aprendizagem. Assim, sugerimos, ainda, que você peça a eles que exponham suas estratégias e criem novas cartas para o jogo - ou, mesmo, um novo jogo.

Seção 2 – Circunferência

Páginas no material do aluno

262 a 268

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jardim de números	Vídeo Jardim de números, disponível em no Pendrive, cópias da folha de ativida-de, régua, calculadora.	O vídeo utilizado nessa atividade usa a geometria analítica para planejar a construção de um jardim que tem a forma da bandei-ra brasileira. No problema proposto, os alunos devem determinar as equações das retas que dão suporte aos lados do losango e a equação da circunferência presentes no jardim.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, use o computador com Datashow para exibir para a turma o vídeo Jardim de Números, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1121.Ele também será disponibilizado em seu Pendrive / DVD. Em seguida, divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades. Peça que eles utilizem régua e calculadora para resolver o problema.

Depois que as duplas concluírem a atividade proposta, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

Aspectos pedagógicos

Professor, ao exibir o filme pela primeira vez perceba a reação dos alunos para identificar se será necessário repetir a exibição parando em determinados momentos. Talvez seja interessante provocar os alunos a fazerem um rascunho de acordo com o que assistem, antes do trabalho formal com a folha de atividades; isso estimula a atenção. Certifique-se de que o aluno entendeu que a escala da atividade é 1 para 100.

Folha de atividades

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Leia atentamente as questões abaixo e tente responde-las.

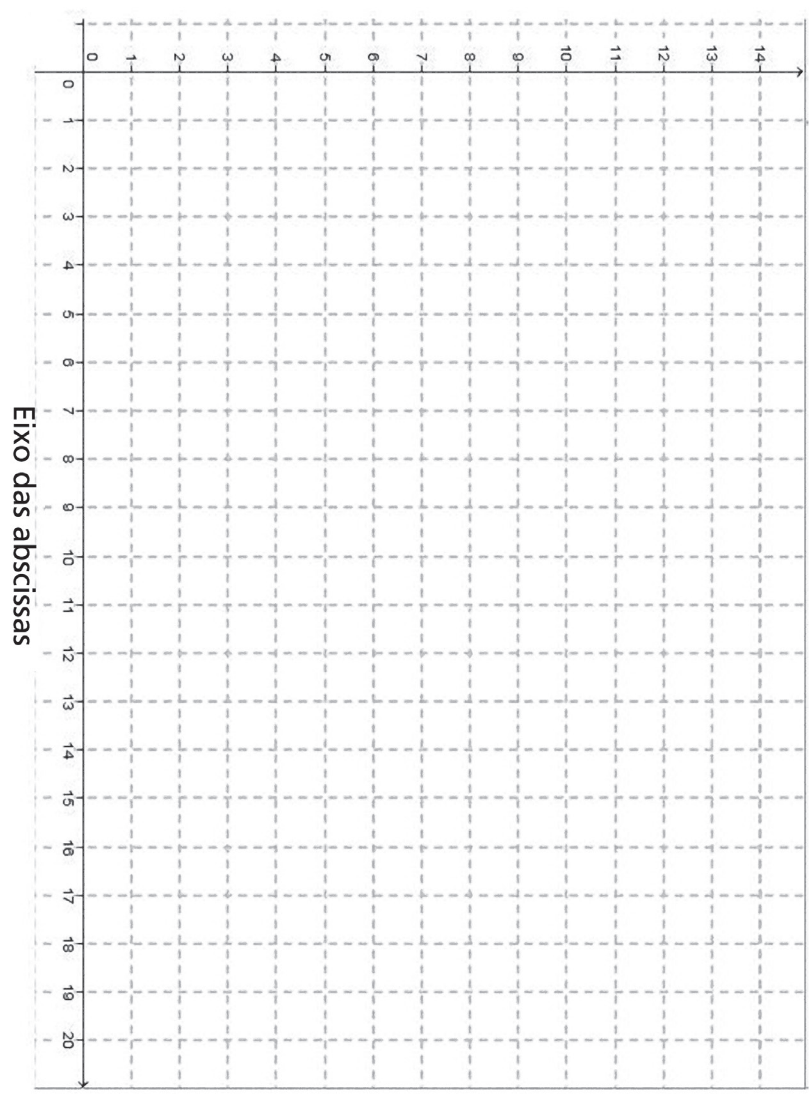
Localize no plano cartesiano, que recebeu, os seguintes pontos:

$$A(0,14), B(20,14), C(0,0), D(20,0), E(1.7,7), F(10,12.3), G(18.3,7), H(10,1.7) \, e \, O(10,7)$$

Determine as equações da reta que passa pelos pontos $E(1.7,7) \, e \, F(10,12.3)$ e da reta que passa pelos pontos $G(18.3,7) \, e \, H(10,1.7)$.

A reta que passa pelos pontos $E(1.7,7) \, e \, F(10,12.3)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $G(18.3,7) \, e \, H(10,1.7)$

Determine a equação da circunferência cujo centro éo ponto $O(10,7)$ e a medida do raio é igual a 3.5.



Seção 2 – Circunferência

Páginas no material do aluno

262 a 268

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Descobrindo a equação da circunferência	Cópias da folha de atividades, tesoura, régua, lápis de cor ou hidrocor.	Nesta atividade, os alunos irão medir as distâncias dos pontos de uma circunferência até o seu centro para verificar a equidistância do lugar geométrico. Além disso, determinarão a equação de uma circunferência de centro na origem.	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, a ideia desta atividade é fazer com os alunos verifiquem a propriedade de equidistância de uma circunferência, usando a fórmula de distância entre dois pontos. E, ainda, utilizando a ideia de distância entre pontos, eles deverão determinar a equação de uma circunferência de centro na origem.

Distribua a folha de atividades para as duplas e auxilio-os na resolução das questões.

Aspectos pedagógicos

Professor, todas as construções geométricas devem ser justificadas aos alunos. Dessa forma, é muito importante esclarecer que as dobraduras realizadas na primeira parte da atividade localizam o centro da circunferência.

É possível que alguns alunos não consigam fazer a associação entre a dobradura e a verificação de que as distâncias entre todos os pontos da circunferência e o centro são congruentes. Se achar necessário, faça uma breve revisão sobre osconceitosde distância entre dois pontos e de circunferência como lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto dado. Você pode utilizara fórmula de distância entre dois pontos para deduzir a equação da circunferência.

Neste caso, iremos obter a seguinte equação

$$d(O, P) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Mas como a distância do ponto O a qualquer ponto da circunferência coincide com o raio, isto é, d(O, P) = R, onde R é o raio da circunferência, então, podemos escrever

$$d(O,\ P)\ =\ \sqrt{\left(x^2+\ y^2\right)} = R$$

Logo, x2 + y2 = R2

Assim, temos a conhecida equação reduzida da circunferência de centro na origem do plano cartesiano

Folha de atividades

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Leia atentamente as questões abaixo e tente responde-las.

a. Recorte a circunferência desenhada a seguir.

b. Dobre-a ao meio de duas maneiras diferentes, formando dobras em cruz, e com o auxílio de um lápis e uma régua realce as marcas das dobras.

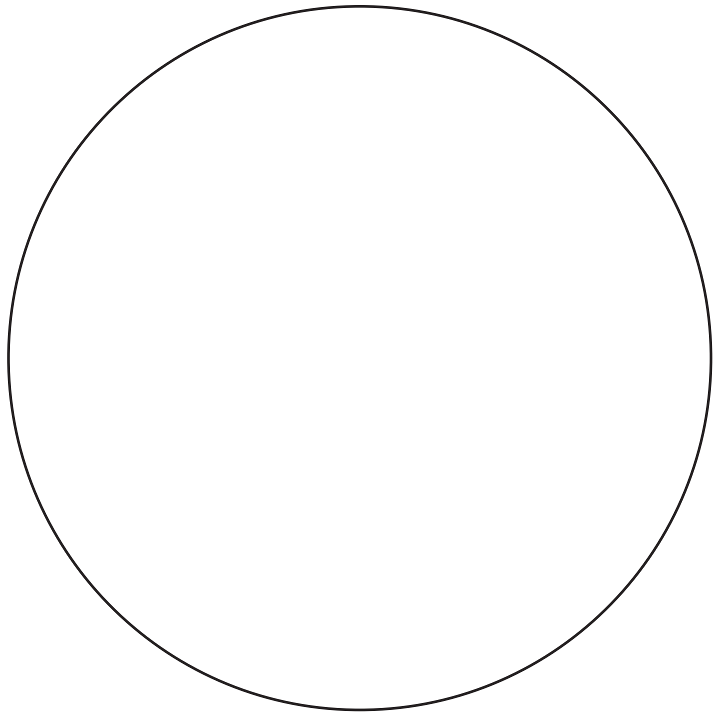
c. Marque o ponto de encontro dos segmentos de reta formados pelas dobras e chame-o de ponto C. Os pontos de encontro desses segmentos com a circunferência chame de M, N, P e Q, respectivamente.

d. Agora, com o auxílio da régua, meça a distância do ponto C aos pontos M, N, P e Q. O que você observa em relação às distâncias dos pontos M, N, P e Q ao ponto C?

e. Agora, em uma folha em branco, desenhe dois outros segmentos e considere-os como eixos coordenados do plano cartesiano. Seja o ponto O, a origem desse plano e represente-o por O(0,0).

f. Com o auxílio do compasso, desenhe uma circunferência de centro em O e marque um ponto P(x, y) sobre ela.

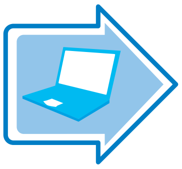
g. Calcule, analiticamente, a distância do ponto O a P. Você seria capaz de dizer o que a equação obtida representa?



Seção 3 – As cônicas

Páginas no material do aluno

268 a 270

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Que curva é essa chamada elipse?	Garrafa plástica cilíndrica transparente com líquido,caneta, tesoura, folha de papel.	Os alunos construirão uma elipse com o auxílio de uma garrafa pet. Em seguida, a elipse obtida será desenhada no papel para a construção da curva no plano. Experimento disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1374.	Trios ou quartetos	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, para construir a elipse, peça para que os alunos inclinem a garrafa com o líquido e marquem a curva gerada entre a superfície do líquido e a garrafa. Em seguida, peça para os alunos esvaziarem a garrafa e recortarem a curva desenhada, de forma análoga à apresentada nas imagens a seguir.

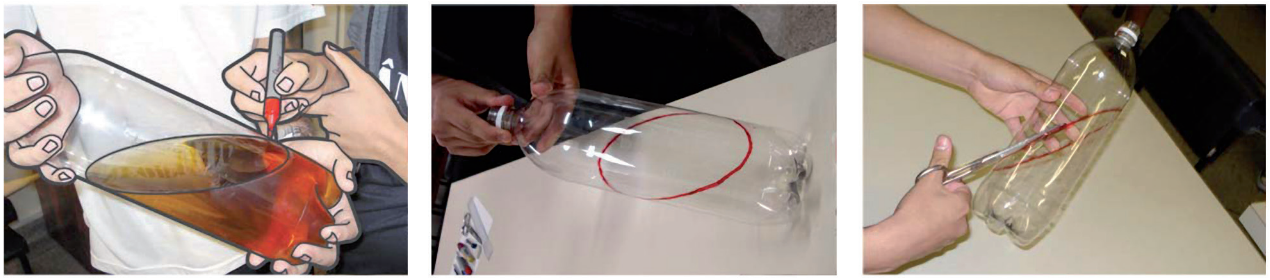


Figura 5: Marcando e cortando uma elipse numa garrafa de plástico.

Após recortá-la, peça para os alunos desenharem a curva obtida em uma folha de papel, como mostram as figuras:

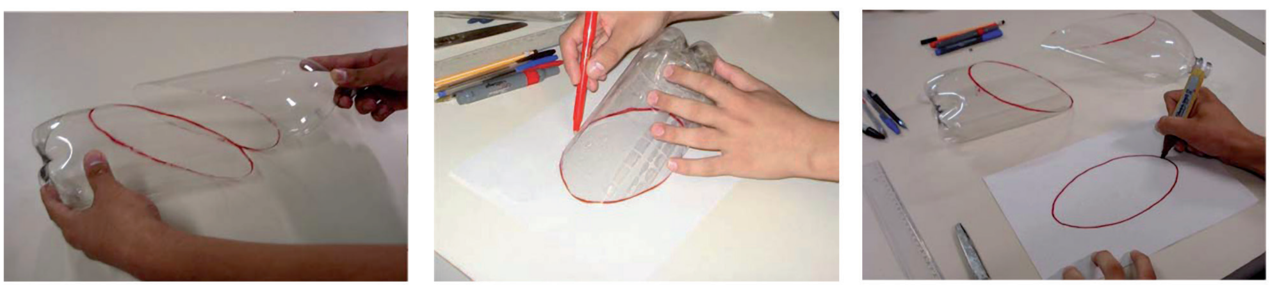


Figura 6: Marcando e cortando uma elipse numa garrafa de plástico.

Está pronto! A curva obtida pelos alunos é uma elipse.

Aspectos pedagógicos

Professor, essa é uma atividade que pode ser aproveitada de muitas maneiras. Primeiramente, um experimento costuma fazer com que os alunos se envolvam por completo na atividade. Sob outro aspecto, a construção do objeto a ser estudado facilita o entendimento do assunto a ser desenvolvido. Além disso, a possibilidade de manipular a elipse construída permitirá a identificação mais concreta dos elementos desta figura. Isso pode ser observado no passo a passo a seguir:

Dobre a região cortada no sentido do menor comprimento, odo eixo menor da elipse, e depois no sentido do maior comprimento, o do eixo maior da elipse, buscando a simetria entre as partes. Marque bem os dois vincos e note que os eixos devem ser perpendiculares.

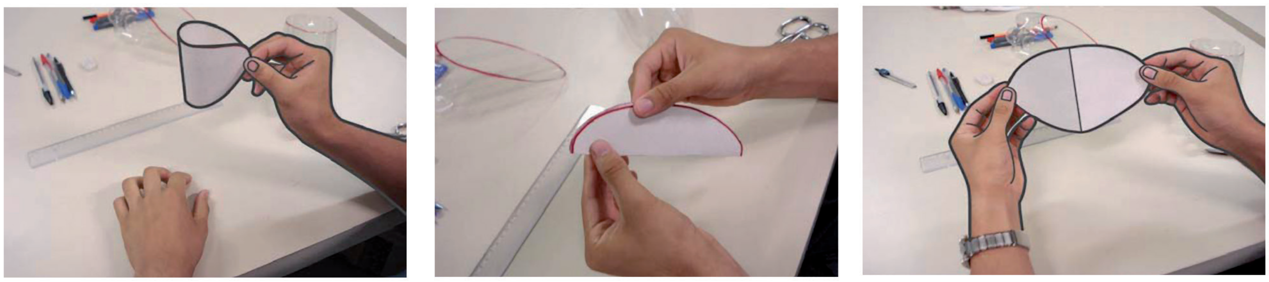


Figura 7: Marcando o eixo maior e o eixo menor da elipse

Para localizar os focos F1 e F2, utilize um compasso ou um pedaço de barbante e tome a medida igual à metade do eixo maior.

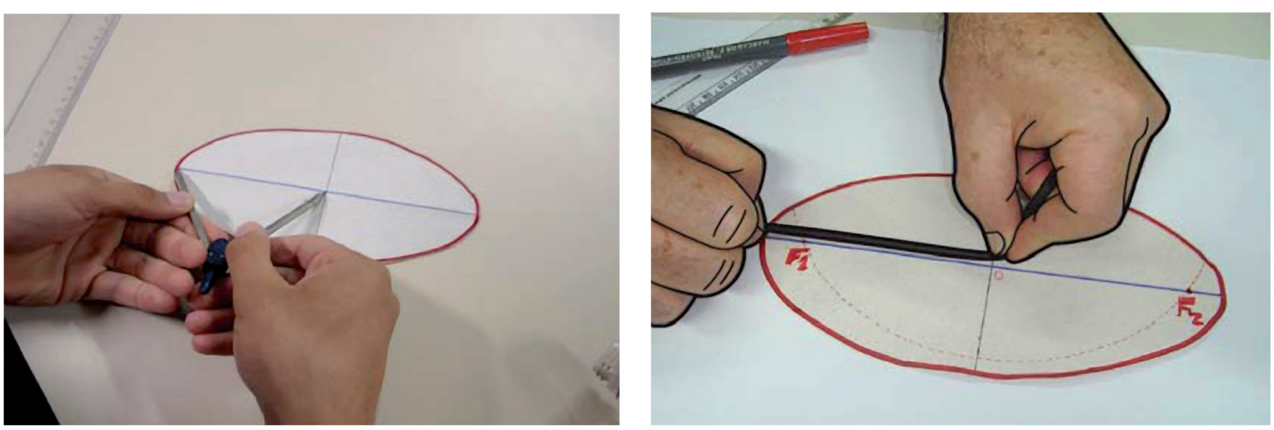


Figura 8: Medindo o eixo maior com um compasso ou com um barbante

Agora, marque no eixo maior os pontos F1 e F2.

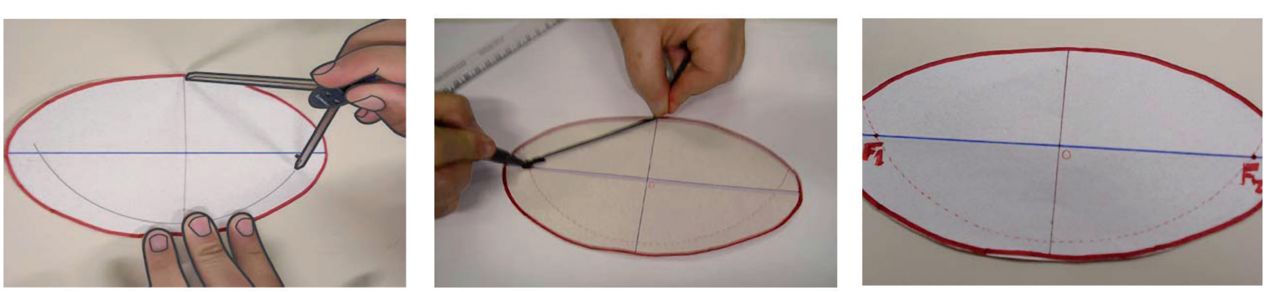


Figura 9: Marcando os focos da elipse

Com um alfinete em cada foco e um terceiro no ponto B, fixe a região obtida nas etapas anteriores.

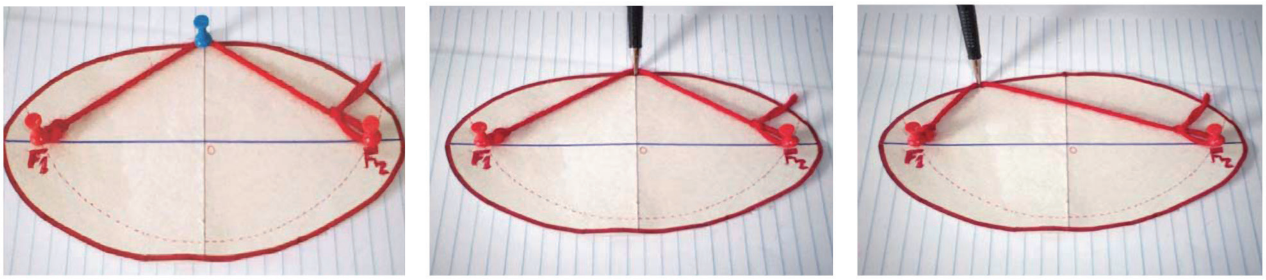


Figura 10: Reforçando o desenho da elipse

Substitua o palito de cabeça azul por um lápis e, contornando a curva, sempre observe que o tamanho do barbante não muda .

Além de identificar os elementos da elipse: eixo maior e eixo menor, focos e a distância focal, com essa atividade é possível verificar de maneira construtiva a definição de elipse como uma curva constituída pelo conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Seção 3 – As cônicas

Páginas no material do aluno

268 a 270

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	A Parábola Ponto-a-ponto	Lápis, papel milimetrado, régua e compasso.	Os alunos traçarão uma parábola sendo dados a reta diretriz e o foco através de régua e compasso.	Individual	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, distribua as folhas de papel milimetrado já contendo a representação da reta diretriz e o foco. Se possível, faça as retas e os focos em diversas posições para que os alunos obtenham resultados diferentes.

Professor, alguns alunos podem sentir dificuldades em utilizar o compasso para traçar as circunferências. Caso haja necessidade, auxilie-os neste traçado ou solicite a algum colega que ajude os demais na utilização deste instrumento.

Aproveite a construção para explicar a parábola como lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta e um ponto fora dela dados, além de lembra-los de algumas nomenclaturas geométricascomo perpendicular, eixo de simetria, entre outros.

A marcação dos pontos 1, 2, 3, 4 e 5 pode acarretar em problemas caso o aluno coloque esses pontos muito distante da reta diretriz. Afinal, isto acarretará em um raio de circunferência muito grande, o que poderá não caber na folha. Tal fato implicaria na não interceptação da circunferência pelas retas perpendiculares ao eixo S, ou seja, na determinação dos pontos da parábola.

Folha de atividades

Nome da escola: ____

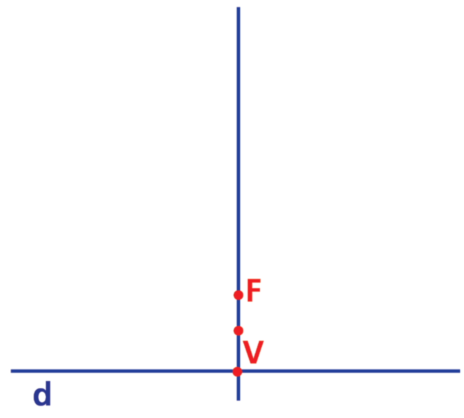
Nome do aluno: ____

Abaixo seguem as orientações para a construção de uma parábola.

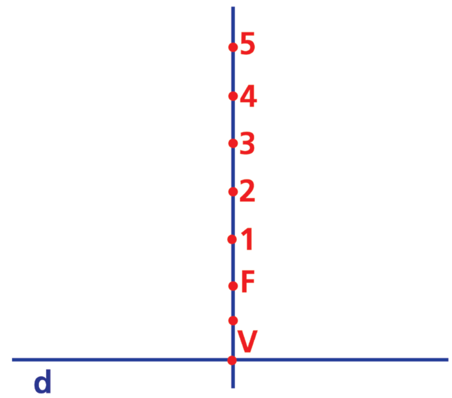
Na folha de papel milimetrado, foram dados a diretriz d e o foco F da parábola.

1º passo: Trace o eixo S de simetria da parábola que passa pelo ponto F e é perpendicular à reta diretriz.

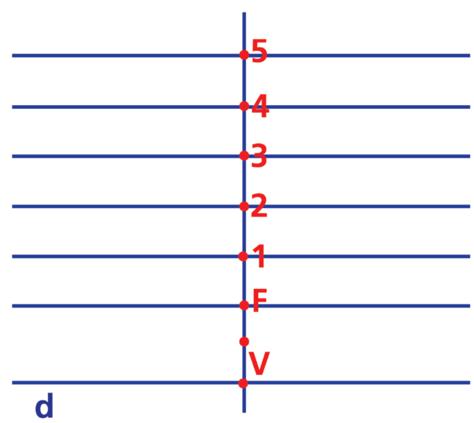
2º passo: Encontre o vértice, que está no ponto médio da distância entre o foco e a diretriz.



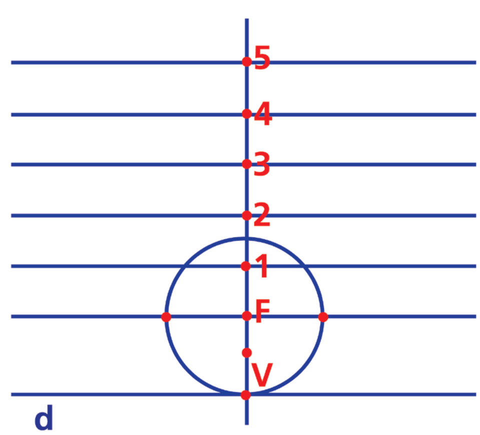
3º passo: Marque os pontos 1, 2, 3, 4 e 5 no eixo S acima de F aleatoriamente. Não marque esses pontos muito acima sob risco de as construções seguintes não caberem na folha de papel milimetrado.



4º passo: Trace retas perpendiculares ao eixo S pelos pontos F, 1, 2, 3, 4 e 5.



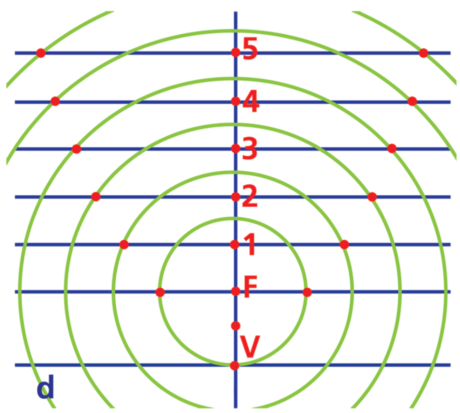
5º passo: Centre a ponta seca do compasso no ponto F e com abertura igual a medida de F até a diretriz, trace a circunferência. Esta curva cortará a reta perpendicular que passa pelo ponto F em dois pontos. Esses pontos são da parábola.

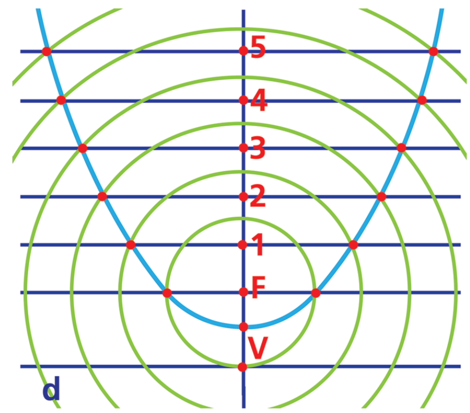


6º passo: Em seguida, centre a ponta seca novamente no ponto F e com abertura igual à distância que vai do ponto 1 até a diretriz d, trace a circunferência que cortará a reta que passa pelo ponto 1, encontrando assim outros dois pontos da parábola.

7º passo: Repita esse último passo para cada um dos demais pontos (2, 3, 4 e 5) determinando mais pontos da parábola.

Neste momento, já é visível a forma que a parábola possui. Assim, basta ligar os pontos para determina-la.





Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Cópias da folha de atividades	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo dividido em duas etapas. A primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda é constituída por questões objetivas e dissertativas, a serem escolhidas pelo professor.	Individual.	40 minutos

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado a esta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

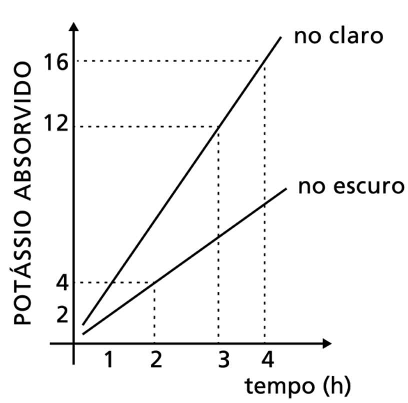
Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar as que você já usa para fazer a avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas – que listamos novamente a seguir.

- Identificação de retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
- Cálculo das coordenadas do ponto de interseção entre retas.
- Determinação da equação da circunferência em sua forma reduzida, dados o centro e o raio.

Para ajudá-lo nos seus registros, sugerimos as questões seguintes questões, também disponíveis na folha de atividades:

Questão 1: Qual foi o conteúdo matemático estudado nessa unidade?

Questão 2: Cite alguma situação do cotidiano que envolve os conhecimentos aqui estudados.



Questão 3: O gráfico ao lado mostra o resultado de uma experiência relativa a absorção de potássio pelo tecido da folha de um certo vegetal, em função do tempo e em condições diferentes de luminosidade.

Nos dois casos, a função linear $y = mx$ ajustou-se razoavelmente bem aos dados, daí a referência a m como a taxa de absorção (geralmente medida em m moles por unidade de peso por hora).

a. Sabemos que o gráfico de uma função linear corresponde a uma reta e que, em sua representação algébrica reduzida, o coeficiente angular se relaciona com a inclinação dessa reta em relação ao eixo dos x. Expresse essa relação, sendo m o valor do coeficiente angular e q o ângulo formado entre a reta e o eixo dos x.

b. Com base no gráfico anterior, se m1 é a taxa de absorção no claro e m2 a taxa de absorção no escuro, qual a relação entre essas duas taxas? Justifique.

Questão 4:(FGV – 2008)

Dada a equação x2 + y2 = 14x + 6y + 6, se p é o maior valor possível de x, e q é o maior valor possível de y, então, 3p + 4q é igual a

(A) 73 (B) 76 (C) 85 (D) 89 (E) 92

Questão 5: (UNIFESP – 2002)

No triângulo QPP' do plano cartesiano, temos Q = (a, 0), com a < 0, P = (4, 2) e P' o simétrico de P em relação ao eixo x. Sabendo que a área desse triângulo é 16, o valor de a é:

(A) –5 (B) –4 (C) –3 (D) –2 (E) –1.

Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção e entrega de registros ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho e, se for o caso, repensá-los de acordo com as críticas e sugestões recebidas.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Para compor o instrumento avaliativo desta etapa, sugerimos a escolha de pelo menos uma questão objetiva e uma discursiva que contemplem uma habilidade pretendida nesta unidade.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1: (UFAM - 2005)

As retas dadas pelas equações x + 5y = 5 e 3x + y = 1 se interceptam:

(A) Em nenhum ponto

(B) Num ponto da reta y = 0

(C) Num ponto da reta x = 0

(D) No ponto (1, 0)

(E) No ponto (5, 0)

Questão 2:(FAETEC – 2007)

A área do quadrilátero determinado pelos pontos de intersecção da circunferência de equação (x + 3)2 + (y – 3)2 = 10 com os eixos coordenados, em unidades de área, é igual a:

(A) 4

(B) 6

(C) 8

(D) 10

(E) 12

Questão 3: (UEA – 2005)

Qual é o valor de p para o qual os pontos (3p, 2p), (4, 1) e (2, 3) são colineares?

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Questão 4: (UFAM – 2005)

Os pontos A= (4, 0) e B= (0, 6) são extremos de um diâmetro da circunferência. Então a equação da circunferência é:

(A) x2 + y2 - 6x – 4x = 0

(B) x2 + y2 - 4x – 6y = 0

(C) x2 + y2 + 4x – 6y = 0

(D) x2 + y2 + 4x + 6y = 0

(E) x2 + y2 - 6x + 4y = 0

Questão 5: (FUVEST – 1988)

Os pontos M=(2,2), N=(-4,0) e P=(-2,4) são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC e CA do triângulo ABC. A reta mediatriz do lado AB tem a equação:

(A) $x + 2y - 6 = 0$

(B) $x - 2y + 2 = 0$

(C) $2x - 2y - 2 = 0$

(D) $2x + y - 6 = 0$

(E) $-x + 2y - 6 = 0$

Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

Questão 1: (FUVEST – 2008 - Adaptada)

São dados, no plano cartesiano de origem O, a circunferência de equação x2 + y2 = 5, o ponto P (1,) e a reta s que passa por P e é paralela ao eixo y. Seja E o ponto de ordenada positiva em que a reta s intercepta a circunferência. Assim sendo, determine a reta tangente à circunferência no ponto E.

Questão 2: (UNICAMP 2001)

Considere, no plano xy, as retas $y = 1$, $y = 2x - 5$ e $x - 2y + 5 = 0$.

a) Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo ABC formado por essas retas? b) Qual é a área do triângulo ABC?

Questão 3: (UNESP – 2009 - Adaptada)

Determine a equação da circunferência com centro no ponto C = (2, 1) e que passa pelo ponto P = (0, 3).

Questão 4: (UNIFESP – 2002 - Adaptada)

A equação x2 + y2 + 6x + 4y + 12 = 0, em coordenadas cartesianas, representa uma circunferência de raio 1. Quais as coordenadas de seu centro?

Questão 5: (VASSOURAS – 2004 - Adaptada)

Qual é o valor de a para o qual as retas $6x + ay = 5$ e $x + 3y = 10$ são perpendiculares?

Aspectos pedagógicos

Respostas das questões objetivas sugeridas

1. (C) 2. (B) 3.(C) 4.(B) 5. (A)

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:

Questão 1:

A reta tangente à circunferência no ponto E deve ser perpendicular à reta que passa pelo centro O e pelo ponto E (raio perpendicular à reta tangente no ponto de tangência). Sendo assim, a equação da reta tangente será dada por $x + 2y - 5 = 0$.

Questão 2:

a. Para encontrar as coordenadas dos vértices é preciso determinar os pontos onde essas retas se interceptam duas a duas. Esses pontos são $A = (3,1)$; $B = (-3,1)$ e $C = (5,5)$.

b. Desenhar o esboço de um plano cartesiano com esses três pontos pode ajudar a verificar que, tomando AB como base e sabendo que, por AB ser paralela ao eixo dos x, a altura relativa a essa base do triângulo é a distância do ponto C à reta $y = 1$, a área do triângulo ABC será igual a 12 u. a.

Questão 3:

A equação da circunferência com centro no ponto $C = (2, 1)$ e que passa pelo ponto $P = (0, 3)$ é igual a $(x - 2)2 + (y - 1)2 = 8$.

Questão 4:

Completando quadrados e reescrevendo a equação da circunferência, temos: $(x + 3)2 + (y + 2)2 = 1$. Logo as coordenadas de seu centro serão: $(-3, -2)$.

Questão 5:

Escrevendo as equações das retas em suas foras reduzidas, temos:

$y = -\frac{6}{a}x + \frac{5}{a}$ e $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

Para que essas retas sejam perpendiculares entre si é necessário que seu coeficientes angulares, quando multiplicados, resultem em -1. Assim, $-\frac{6}{a} \cdot -\frac{1}{3} = -1$. Logo $a = -2$.

Folha de atividades

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Momento de Reflexão:

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na unidade 10 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder as questões a seguir:

Questão 1: Qual foi o conteúdo matemático estudado nessa unidade?

____

____

____

Questão 2: Cite alguma situação do cotidiano que envolve os conhecimentos aqui estudados.

____

____

____

Questão 3:

O gráfico ao lado mostra o resultado de uma experiência relativa a absorção de potássio pelo tecido da folha de um certo vegetal, em função do tempo e em condições diferentes de luminosidade.

Nos dois casos, a função linear $y = mx$ ajustou-se razoavelmente bem aos dados, daí a referência a **m** como a taxa de absorção (geralmente medida em m moles por unidade de peso por hora).

a. Sabemos que o gráfico de uma função linear corresponde a uma reta e que, em sua representação algébrica reduzida, o coeficiente angular se relaciona com a inclinação dessa reta em relação ao eixo dos x. Expresse essa relação sendo m o valor do coeficiente angular e q o ângulo formado entre a reta e o eixo dos x.

____

____

____

b. Com base no gráfico anterior, se $\mathbf{m_1}$ é a taxa de absorção no claro e $\mathbf{m_2}$ a taxa de absorção no escuro, qual a relação entre essas duas taxas? Justifique.

____

____

____

Questão 4:(FGV – 2008)

Dada a equação $x2 + y2 = 14x + 6y + 6$, se p é o maior valor possível de x, e q é o maior valor possível de y, então, $3p + 4q$ é igual a

(A) 73 (B) 76 (C) 85 (D) 89 (E) 92

Questão 5: (UNIFESP – 2002)

No triângulo QPP' do plano cartesiano, temos Q = (a, 0), com $a < 0$, P = (4, 2) e P' o simétrico de P em relação ao eixo x. Sabendo que a área desse triângulo é 16, o valor de a é:

(A) –5 (B) –4 (C) –3 (D) –2 (E) –1.

Gabarito da folha de atividades – Registros de Aprendizagem

Questão 1: Aprendemos um pouco mais sobre Geometria Analítica, destacando a identificação de retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações, aprendemos a calcular as coordenadas do ponto de interseção entre retas e a determinar a equação da circunferência na sua forma reduzida, dados o seu centro e o seu raio. Também conhecemos as cônicas.

Questão 2: No nosso dia a dia, existem várias situações em que utilizamos a geometria analítica sem perceber. Por exemplo, ao utilizarmos um aparelho GPS, estamos fazendo proveito da divisão do globo terrestre em um sistema de coordenadas. Além disso, sua posição exata é um par ordenado. Também encontramos aplicações em vários ramos do conhecimento: medicina, robótica, aeronáutica, etc. A geometria analítica também é muito usada para construir jogos, é o princípio da Computação gráfica e serve também para projetar simulações para áreas de Engenharia.

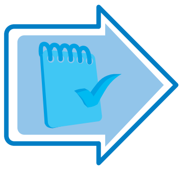
Questão 3: a) $m = tg\ \theta$

b) $m1 > m2$, pois a inclinação da reta que representa a taxa de absorção no claro é maior que a inclinação da reta que representa a taxa de absorção no escuro.

Questão 4: Letra D

Questão 5: Letra B

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios Complementares	Cópia da folha de atividades.	-	Duplas ou trios.	-

Aspectos operacionais

Peça que os seus alunos organizem-se em duplas ou em trios, mas procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno para que todos possam ficar com uma cópia do material tornando-o mais uma fonte de consulta.

Escolha previamente os exercícios que se adéquam melhor à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos nesta unidade. Depois que os alunos concluírem o conjunto de exercícios escolhido por você, procure discutir as soluções apresentadas, valorizando cada estratégia mesmo que ela não tenha conduzido a uma resposta verdadeira.

Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção. Isso pode favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Aspectos pedagógicos

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação de algumas noções importantes, trabalhadas ao longo dessa unidade. Com esses exercícios você poderá trabalhara localização de pontos no plano e suas coordenadas, a identificação de retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações, o cálculo das coordenadas do ponto de interseção entre retas e a determinação da equação da circunferência na forma reduzida, dados o centro e o raio.

Esses exercícios foram dispostos em uma folha de atividades, que poderá ser aplicada de forma fracionada ao término de cada seção do material do aluno ou de uma só vez, no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

Não é necessária a aplicação da totalidade dos exercícios. Apenas selecione para a aplicação os exercícios que julgar mais adequados ao ritmo de aprendizagem e às características particulares de sua turma. Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu Pendrive / DVD.

Folha de atividades - Exercícios de fixação complementares

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Questão 1: Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas é:

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

Questão 2: O diretor de uma empresa, o Dr. Antonio, convocou todos os seus funcionários para uma reunião. Com a chegada do Dr. Antonio à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala. Se o Dr. Antonio não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens. A quantidade de pessoas, presentes na sala, aguardando o Dr. Antonio é:

(A) 14 (B) 15 (C) 18 (D) 19 (E) 20

Questão 3: A empresa Brinque Muito realizou uma grande doação de brinquedos para um orfanato. Essa doação compreendeu 535 brinquedos, entre bolas e bonecas, 370 brinquedos entre bonecas e carrinhos, e o total da doação entre bolas e carrinhos foi de 455 brinquedos. É possível afirmar que, para realizar a doação, a empresa produziu:

(A) 320 bolas (B) 145 carrinhos (C) 235 bonecas (D) 780 brinquedos (E) 1350 brinquedos

Questão 4: Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R$ 5,40 por 2 latas de refrigerante e umaporção de batatas fritas. O segundo pagou R$ 9,60 por 3 latas de refrigerante e 2 porções de batatas fritas. Nesse local e nesse dia, a diferença entre o preço de uma porção de batas fritas e o preço de uma lata de refrigerante era de:

(A) R$ 1,40 (B) R$ 1,60 (C) R$ R$ 1,80 (D) R$ 2,00 (E) R$ 2,20

Questão 5: Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. Se a terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do de laranjas em 4 unidades, então nesse pacote há:

(A) igual número de balas dos dois tipos

(B) duas balas de hortelã a mais que de laranja

(C) 20 balas de hortelã

(D) 26 balas de laranja

(E) duas balas de laranja a mais que de hortelã

Questão 6: ITA – 2007

Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y$, $x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede:

(A) 15/2

(B) 13/4

(C) 11/6

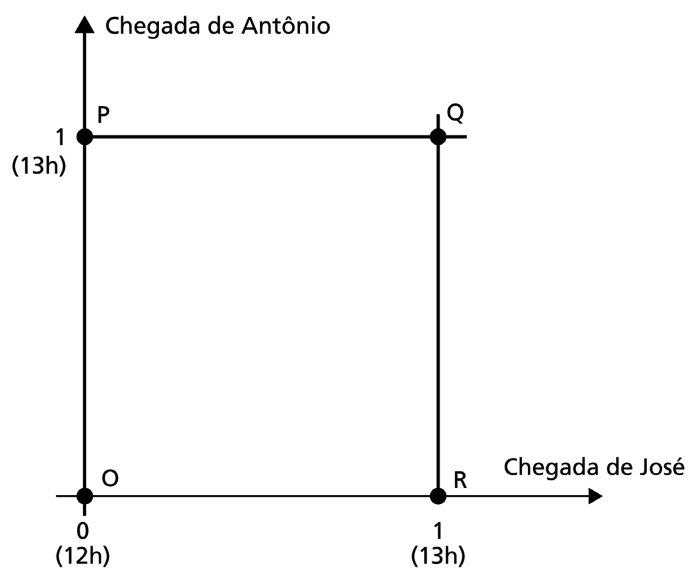
(D) 9/4

(E) 7/2

Questão 7: ENEM 1999

José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho.

Chamando de x o horário de chegada de José e de y o horário de chegada de Antônio, e representando os pares (x,y) em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR ao lado indicada corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par (x,y):



Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde

(A) à diagonal OQ.

(B) à diagonal PR.

(C) ao lado PQ.

(D) ao lado QR.

(E) ao lado OR

Respostas - Folha de Atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

1. B

2. D

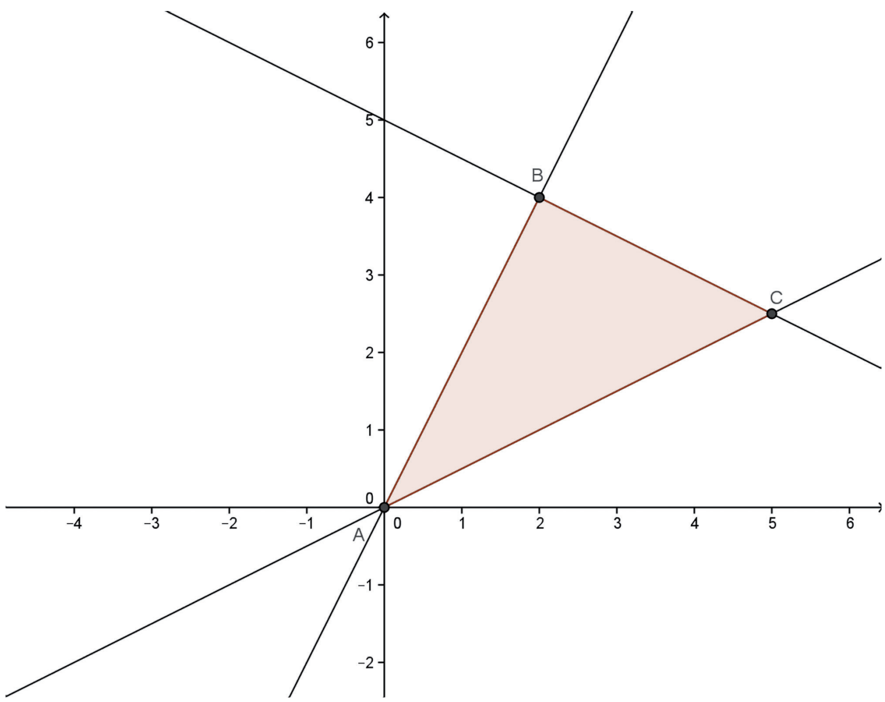
3. B

4. C

5. A

6.

O triângulo delimitado pelas retas r: $2x = y$, s: $x = 2y$ e t: $x = -2y + 10$ dadas, pode ser observado a partir do gráfico a seguir:



Sendo A = (0, 0) o ponto de interseção entre as retas r e s, B = (2,4) o ponto de interseção entre as retas r e t e C = $(5, \frac{5}{2})$ o ponto de interseção entre as retas s e t (para verificar as coordenadas destes pontos, basta determinar os valores de x e y que verificam as equações duas a duas).

Escrevendo as equações das retas r, s e t em suas formas reduzidas, temos: r: $y = 2x$, s: y = — x e t: $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Note que os coeficientes angulares das retas r e t, quando multiplicados um pelo outro, resultam em -1. Logo essas retas são perpendiculares. Sendo assim, podemos tomar BC como base e AB como altura do triângulo ABC e, desta forma, a área desse triângulo será igual a $\frac{d_{BC} \times d_{AB}}{2}$. Como:

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \Rightarrow d_{BC} = \sqrt{(5-2)^2 + \left(\frac{5}{2} - 4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{BC} = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_{AB} = \sqrt{4+16} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Temos: $\dfrac{d_{BC} \times d_{AB}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3\sqrt{25}}{2} = \dfrac{3 \times 5}{2} = \dfrac{15}{2}$. Letra A.

7.

O evento “José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário” corresponde ao lugar geométrico dos pontos tais que $y = x$. Sendo 1 o coeficiente angular dessa reta, sabemos que a tangente do ângulo que essa reta forma com o eixo x é igual a 1 também. Logo o ângulo formado pela reta e o eixo dos x é igual a 45°. Sendo OPQRum quadrado (lados opostos iguais, lados adjacentes perpendiculares), sua diagonal OQ forma um ângulo de 45° com o lado OR, que está sobre o eixo x. Logo sua diagonal está sobre a reta $y = x$. Assim, o conjunto de pontos que representa o evento “José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário” corresponde à diagonal OQ. Letra A.