nova eja

EDUCAÇÃO PARA JOVENS E ADULTOS

MATEMÁTICA

e suas TECNOLOGIAS

Professor

Volume 2 • Módulo 3 • Matemática

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Sergio Cabral

Vice-Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Educação
Wilson Risolia

Chefe de Gabinete
Sérgio Mendes

Secretário Executivo
Amaury Perlingeiro

Subsecretaria de Gestão do Ensino
Antônio José Vieira De Paiva Neto

Superintendência pedagógica
Claudia Raybolt

Coordenadora de Educação de Jovens e adulto
Rosana M.N. Mendes

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL NOVA EJA (CECIERJ)

Diretoria Adjunta de Extensão
Elizabeth Ramalho Soares Bastos

Coordenação de Formação Continuada
Carmen Granja da Silva

Coordenação Geral de Design Instrucional
Cristine Costa Barreto

Coordenação Geral
Agnaldo Esquincalha
Gisela Pinto

Coordenador Geral de Material Didático
Wallace Vallory Nunes

Elaboração
André Luiz Cordeiro dos Santos
André Luiz Martins Pereira
Cleber Fernandes
Érika Silos de Castro
Gabriela dos Santos Barbosa
Heitor Barbosa Lima de Oliveira
Josemeri Araujo Silva Rocha
Leo Akio Yokoyama
Luciana Felix da Costa Santos
Luciane de Paiva Moura Coutinho
Patrícia Nunes da Silva
Telma Alves

Coordenação de Design Instrucional
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Design Instrucional
Juliana Bezerra

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Projeto Gráfico e Capa
Andreia Villar

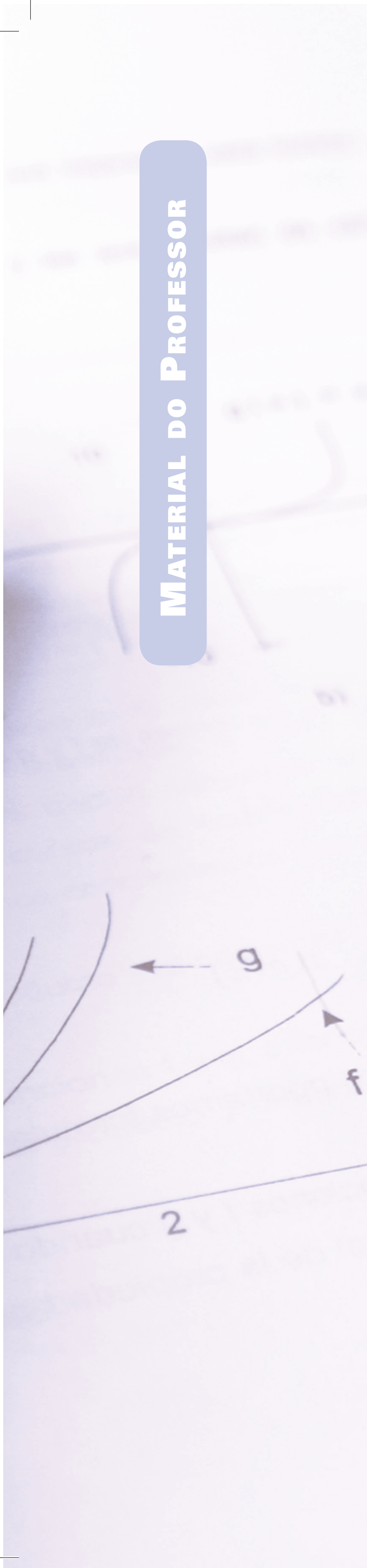
Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
Sami Souza

Diagramação
André Guimarães de Souza
Bianca Lima
Juliana Fernandes
Juliana Vieira

Ilustração
Clara Gomes
Fernando Romeiro

Produção Gráfica
Verônica Paranhos

Sumário



MATERIAL DO PROFESSOR

Sistemas Lineares

Heitor Barbosa Lima de Oliveira (coordenação), Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenação), Luciana Felix da Costa Santos, Luciane de Paiva Moura Coutinho, Patrícia Nunes da Silva. Rommulo Barreiro

Introdução

Na unidade 30 do material do aluno, são apresentadas várias situações cotidianas que envolvem Sistemas Lineares. Preparamos, com muito carinho, para você um material complementar para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes:

- Identificar uma equação linear;
- Encontrar a solução de uma equação linear;
- Identificar um sistema linear;
- Identificar sistemas possíveis e impossíveis;
- Identificar um sistema na forma escalonada;
- Resolver um sistema por escalonamento.

Com o intuito de ampliar as possibilidades de exploração do tema em suas aulas, pesquisamos alguns recursos e atividades para auxiliar a você, professor.

ue a primeira aula desta unidade se inicie com uma atividade disparadora, e por isso, ı *Explorando a Matemática Financeira*, os alunos deverão descobrir o valor de cada item envolve sistemas de equações. Já na atividade *Comendo Números*, os alunos assistirão z é orientado por uma nutricionista a fazer uma dieta correta. O desenvolvimento desse stema linear.

estudo desta unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias.

Na Seção 1, a atividade *Café da Manhã Sistematizado* propõe que os alunos resolvam, de forma intuitiva, um problema sobre a quantidade de nutrientes necessárias ao ser humano no café da manhã. Já na atividade *Lucro ou Prejuízo*, propomos uma análise gráfica de duas equações que representam a receita e o custo para a fabricação de um determinado produto.

Para a Seção 2, escrevemos a atividade *Azul, Amarelo e Vermelho*, que promove uma discussão do sistema de equações pelo método gráfico e a atividade *Galinhas, Coelhos e Stringlings*, onde o tradicional problema da quantidade de animais de acordo com o número de patas e cabeças se transforma numa grande discussão acerca das mais diferentes formas de resolução de um sistema de equações.

A Seção 3 é contemplada pela atividade *Contagem de Passos*, onde utilizamos um áudio, e o problema é determinar o comprimento de uma ponte que será enfeitada com flores, associando-o a um sistema linear 3×2.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos: o primeiro dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo e o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Uma descrição destas sugestões está colocada nas tabelas a seguir, e seus detalhamentos no texto que segue.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	6	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Sistemas Lineares	Sistemas Lineares
Objetivos da unidade	
Identificar uma equação linear;	
Aprender a encontrar a solução de uma equação linear;	
Identificar sistemas possíveis e impossíveis;	
Identificar um sistema na forma escalonada;	
Resolver um sistema por escalonamento.	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	5 e 6
Seção 1 – Problemas envolvendo equação linear.	7 a 9
Seção 2 – Aprendendo um pouco de Sistemas lineares 2 x 2.	9 a 14
Seção 3 – Aprendendo um pouco sobre Sistemas lineares m x n.	15 a 19
Resumo	20
Veja ainda	20
O que perguntam por aí?	21

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

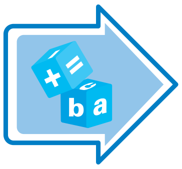
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

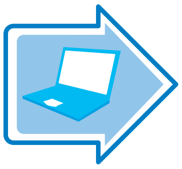
Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

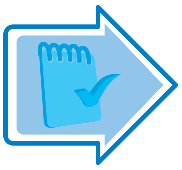


Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

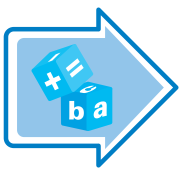
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Sistemas lineares escondidos	Computador com acesso à internet, dicionário inglês-português.	Nesta atividade, os alunos irão se familiarizar com a construção de matrizes e a notação matricial através da resolução de quebra-cabeças que envolvem somas.	A atividade pode ser realizada em duplas ou segundo a disponibilidade de computadores da escola.	40 minutos
	Comendo Números	Computador com acesso à internet, Datashow, Pendrive.	Os alunos assistirão a um vídeo em que um rapaz é orientado por uma nutricionista a fazer uma dieta correta. O desenvolvimento destse bate papo resultará em um sistema linear.	O vídeo será assistido por toda turma. Em seguida, a discussão pode ser feita em grupo (sugestão de 4 alunos).	40 minutos

Seção 1 – Problemas envolvendo equação linear

Páginas no material do aluno

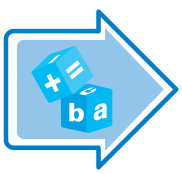
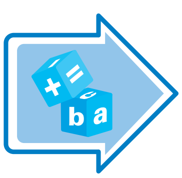
7 e 9

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Café da Manhã Sistematizado.	Lousa, caneta para quadro, caderno, lápis.	A atividade propõe que os alunos resolvam, de forma intuitiva, um problema sobre a quantidade de nutrientes necessárias ao ser humano no café da manhã e que recai num sistema de equações.	A atividade deve ser desenvolvida em grupos de até 4 pessoas..	40 minutos.
	Lucro ou Prejuízo?	Computador com o software Geogebra instalado.	A atividade propõe uma análise gráfica de duas equações que representam a receita e o custo para a fabricação de um determinado produto. Baseada na atividade "Fazendo economia" do material da Fundação CECIERJ para a Formação Continuada de Professores da rede estadual do Rio de Janeiro.	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

Seção 2 – Aprendendo um pouco de sistemas lineares 2 x 2

Páginas no material do aluno

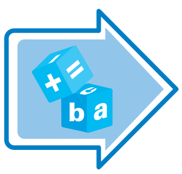
9 a 14

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Azul, Amarelo e Vermelho.	Lápis de cor azul, amarelo e vermelho, cópias dos cartões das equações e cópias da Folha de atividades – Azul, Amarelo e Vermelho, disponível no Pendrive.	Esta atividade promove a discussão do sistema de equações pelo método gráfico.	Turma dividida em duplas.	25 minutos.
	Galinhas, coelhos e Stringlings.	Cópias da Folha de atividades – Dieta de Cambridge (disponível no Pendrive).	O tradicional problema da quantidade de animais, de acordo com o número de patas e cabeças, se transforma numa grande discussão acerca das mais diferentes formas de resolução de um sistema de equações.	Turma dividida em duplas ou em trios.	40 minutos.

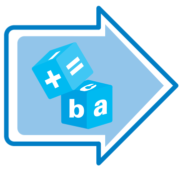
Seção 3 – Aprendendo um pouco de Sistemas lineares m x n

Páginas no material do aluno

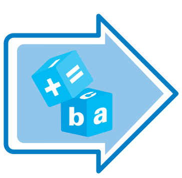
15 a 19

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Contagem de Passos.	Os dois módulos de áudio referentes ao recurso Contagem de Passos disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1308, calculadoras e cópias da Folha de atividades – Contagem de Passos, disponível no Pendrive.	No áudio utilizado nessa atividade, o problema de determinar o comprimento de uma ponte que será enfeitada com flores é associado a um sistema linear 3×2.	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade.	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões, tanto objetivas como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Individual	40 minutos

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares.	Folha de Atividades disponíveis no Pendrive, lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Sistemas lineares escondidos	Computador com acesso à internet, dicionário inglês-português.	Nesta atividade, os alunos irão se familiarizar com a construção de matrizes e a notação matricial através da resolução de quebra-cabeças que envolvem somas.	A atividade pode ser realizada em duplas ou segundo a disponibilidade de computadores da escola.	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, o jogo proposto está em inglês, mas este fato não impossibilita a execução da atividade mesmo que o jogador não tenha fluência na língua. Caso sinta necessidade, tente buscar ajuda com o seu colega de língua estrangeira.

Oriente seus alunos da seguinte maneira:

1ª etapa: Acessar o site http://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html.

2ª etapa: Peça a seus alunos para clicarem no número 1 em Choose a starting level (Escolha o nível inicial), o que fará com que eles selecionem o nível 1 do jogo.

3ª etapa: O aluno deve digitar no quadro em branco o valor do item pedido. Este valor corresponde ao valor procurado para cada item (Find the value of ...). Eles variam a cada partida, e por isso, é difícil colocar a tradução de todos aqui, mas são vocabulários simples tal como flower (flor), guitar (violão), popcicle (picolé), que facilmente os alunos podem encontrar em um dicionário de bolso ou até mesmo em uma rápida pesquisa na internet.

4ª etapa: Clicando em Check, o aluno verá se acertou ou não. Caso tenha acertado, basta clicar em Next e ir para próxima questão. Caso tenha errado, ele pode tentar novamente, clicar em Hint para obter uma dica (que só será útil se o aluno souber inglês) ou até mesmo em Answer, para obter a resposta. A proposta é que o aluno responda às 10 questões do nível 1.

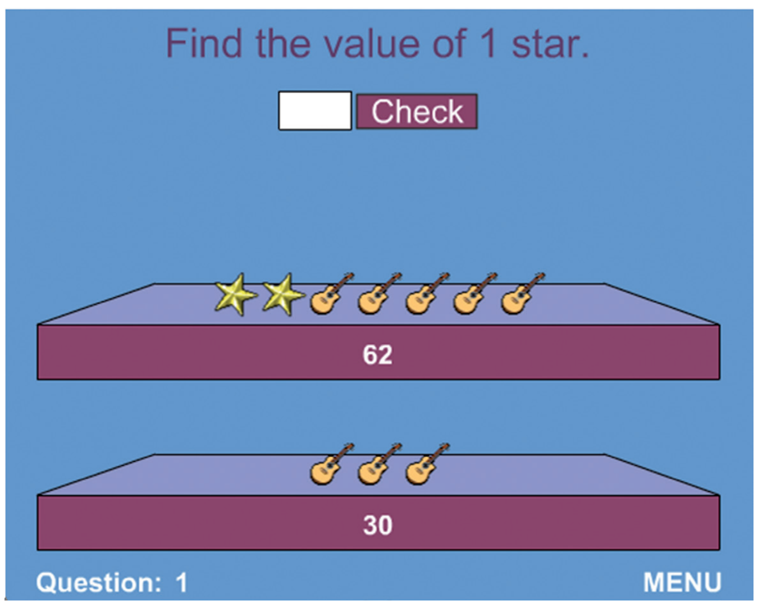
Aspectos pedagógicos

Professor, o objetivo desta atividade é que o aluno resolva, de maneira intuitiva, sistemas lineares, ainda sem utilizar a formalização do conteúdo. Desta maneira, há uma maior aproximação do aluno ao conteúdo que será trabalhado e por consequência uma "quebra" de possíveis barreiras que poderiam existir no desenvolvimento do assunto. O aluno irá mais confiante para as próximas aulas e entendendo a necessidade do assunto.

Outro aspecto que pode ser trabalhado é um projeto de vocabulários básicos com o professor de inglês ou até mesmo de tradução das dicas (Hint), o que seria um trabalho mais elaborado.

Você pode aproveitar esta atividade nas seções posteriores para introduzir os métodos de resolução de sistemas lineares, formalizando alguns exemplos que os alunos resolveram intuitivamente.

Como no seguinte exemplo:



Os alunos podem ter resolvido, por exemplo, este exercício de maneira não formal. Você pode utilizá-lo como motivação e estruturar um sistema. Pergunte-os as estratégias que eles utilizariam para resolvê-los e monte um paralelo com a formalização mais trivial como a descrita a seguir:

v - violão

e - estrela

Não se esqueça de enfatizar a importância da definição das incógnitas e que não precisam ser os habituais x e y, podendo ter relação com o objeto envolvido no problema para facilitar o aluno no final.

$3v = 30$

$5v + 2e = 62$

Se houver necessidade, faça uma revisão de resolução de equação de 1o grau.

v = 30/3 = 10

Como v = 10

Valor Violão: 10

5. 10 + 2e = 62

50 + 2e = 62

2e = 62 - 50

2e = 12

e = 12/2 = 6

Valor Estrela: 6

Caso a turma se interesse, você pode sugerir que façam também as questões dos níveis 2 e 3.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Comendo Números	Computador com acesso à internet, Datashow, Pendrive.	Os alunos assistirão a um vídeo em que um rapaz é orientado por uma nutricionista a fazer uma dieta correta. O desenvolvimento destse bate papo resultará em um sistema linear.	O vídeo será assistido por toda turma. Em seguida, a discussão pode ser feita em grupo (sugestão de 4 alunos).	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, esta atividade se dará da seguinte maneira:

Primeiramente, exiba o vídeo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1073 até os 5:53 minutos.

Após a exibição dessse trecho, peça para que, em grupos, os alunos definam, pesquisando em livros ou na internet, alguns conceitos fundamentais e que devem estar bem solidificados para o desenvolvimento do conteúdo ao longo destsa unidade. São eles:

- Incógnita.
- Equação linear.
- Sistema Linear.

Ao final, peça para que os grupos compartilhem com a turma o resultado da pesquisa.

Aspectos pedagógicos

Professor, de nada adianta uma série de estratégias de resolução de sistemas lineares se os alunos não sabem conceitos básicos e não entendem o motivo da resolução de inúmeras contas. Por isso, é fundamental que os alunos os entendam bem, antes de dar continuidade no estudo de sistema de equações.

- Incógnita - valor desconhecido geralmente representado por letras, utilizado para representar o valor ou valores que se pretende descobrir;
- Equação - modela matematicamente uma situação real que envolve uma igualdade de valores

Forma geral da equação linear:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

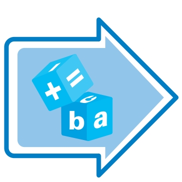
onde os elementos $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ são coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ respectivamente e o termo b é o termo independente, ou seja, valor numérico real da equação linear;

- Sistema Linear - Conjunto finito de equações lineares.

Seção 1 – Problemas envolvendo equação linear

Páginas no material do aluno

7 e 9

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Café da Manhã Sistematizado.	Lousa, caneta para quadro, caderno, lápis.	A atividade propõe que os alunos resolvam, de forma intuitiva, um problema sobre a quantidade de nutrientes necessárias ao ser humano no café da manhã e que recai num sistema de equações.	A atividade deve ser desenvolvida em grupos de até 4 pessoas..	40 minutos.

Aspectos operacionais

Professor, hoje em dia, a alimentação representa um aspecto importante na vida da população mundial e desperta grande preocupação.

Baseado nisso, escolhemos esse tema para motivar e ilustrar nossa primeira atividade da Seção 1, dando continuidade ao assunto exibido no vídeo *Comendo Números* da Atividade 3 da seção "Pra início de conversa" .

Sabemos que o café da manhã deve ser a principal refeição do dia. Selecionamos alguns itens que podem compor o nosso café da manhã.

	Mamão Papaia (porção de 100 g)	Pão com Manteiga (porção de 50 g).	Café com Leite (porção de 200 ml).
Carboidrato (g)	6	32	4
Lipídio (g)	0	6	4
Proteína(g)	0	0	6

Informe a seus alunos que uma pessoa pesando 50 Kg necessita no seu café da manhã de aproximadamente:

- Carboidratos: 58 g.
- Lipídios: 14 g.
- Proteínas: 12 g.

Primeiramente, coloque no quadro negro a tabela nutricional e a quantidade necessária de cada item.

Em seguida, proponha a seus alunos que encontrem quantas porções de mamão papaia, café com leite e pão com manteiga uma pessoa de 50 kg precisa comer no café da manhã.

Aspectos pedagógicos

O objetivo desta atividade é que, sem o conhecimento de nenhuma nova estratégia, eles possam resolver o problema, de maneira intuitiva, com os conhecimentos que já possuem. Para que o aluno se sinta motivado em aprender mais e melhor sistemas lineares, separamos uma atividade que tem como pano de fundo a nutrição, um tema muito debatido na atualidade e que desperta bastante interesse de jovens e adultos.

Os alunos poderão optar por diversos caminhos para resolução do problema a seguir. Peça para que eles exponham em voz alta para a turma as estratégias utilizadas, mesmo aqueles que não conseguiram resolver todo o problema.

Com base no que for apresentado em sala, busque ressaltar os seguintes aspectos:

1. Defina as incógnitas:

c - café com leite;

m - mamão papaia;

p - pão com manteiga.

2. Mostre aos alunos que é mais fácil calcular o valor da proteína, pois só aparece no café com leite. Temos a seguinte equação:

0m + 0p + 6c = 12 => c = 2,

ou seja, café com leite equivale a 2 porções.

3. Depois, seguindo esta lógica, descubra o valor, utilizando o valor dos lipídios:

0m + 6p + 4.2 = 14 => 6p = 14 – 8 => 6p = 6 => p = 1

Ou seja, pão com manteiga equivale a 1 porção.

4. E, por fim, utilizando o valor dos carboidratos:

6m + 32. 1 + 4.2 = 58 => 6m = 58 - 32 – 8 => 6m = 18 => m = 3

Temos que precisamos de 3 porções de mamão. Ressalte com a turma a importância de ter 3 equações no sistema para encontrarmos o valor das 3 incógnitas.

Outro aspecto que pode ser abordado nesta atividade é um trabalho interdisciplinar com o professor de Biologia, sendo possível até uma palestra com um nutricionista para falar sobre a importância de uma alimentação saudável.

Seção 1 – Problemas envolvendo equação linear

Páginas no material do aluno

7 e 9

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Lucro ou Prejuízo?	Computador com o software Geogebra instalado.	A atividade propõe uma análise gráfica de duas equações que representam a receita e o custo para a fabricação de um determinado produto. Baseada na atividade "Fazendo economia" do material da Fundação CECIERJ para a Formação Continuada de Professores da rede estadual do Rio de Janeiro.	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

Aspectos operacionais

No laboratório de informática, divida a turma em duplas ou conforme a disponibilidade de computadores na sala. Caso não seja possível fazer uso desse espaço, sugerimos que você leve para a sala de aula um computador com o software Geogebra instalado, além de um Datashow.

O Geogebra é um software matemático gratuito, dinâmico e de fácil manipulação, que pode ser baixado através do link http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/ .

Antes de iniciar a atividade, discuta com seus alunos alguns conceitos ligados à Matemática Financeira, que fazem parte do nosso dia a dia, como Custo, Receita e Lucro.

Peça que eles abram o arquivo *"Lucro ou Prejuizo.ggb"* (ele está disponível no Pendrive).

A equação da receita para certa marca de pasta de dentes é **R = 2,5x**, em que x é o número de tubos de pasta de dentes. A equação do custo é **C = 0,9x + 3000**, em que **x** é o número de tubos de pasta de dentes fabricados.

No gráfico tem-se a representação das equações da Receita e do Custo (em reais) para a fabricação de x pastas de dente.

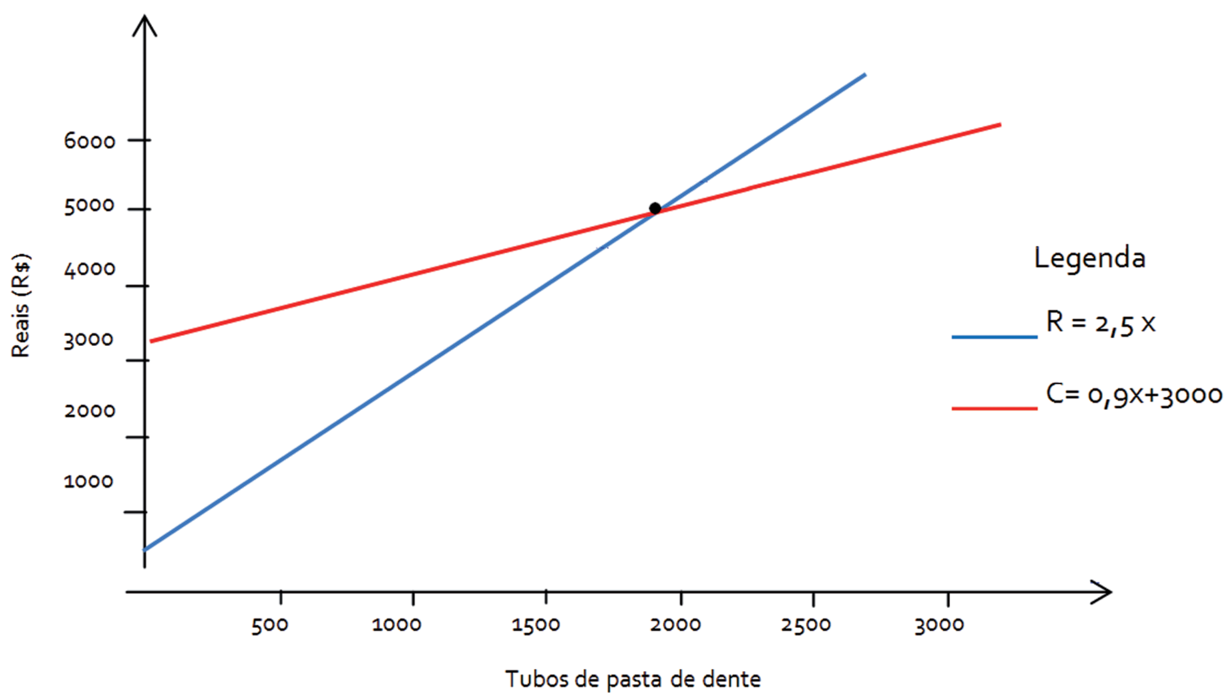


Figura 1 – Equação de Custo e Equação da Receita na fabricação de pastas de dente.

Ao observar o gráfico, eles devem responder às seguintes perguntas:

a. Se a empresa de pasta de dente vender 2500 tubos, a companhia ganha ou perde dinheiro? Por quê?

b. Se a empresa de pasta de dente vender 1600 tubos, a companhia ganha ou perde dinheiro? Por quê?

c. Com certa quantidade de pasta de dente vendida, a empresa iguala custo e receita em suas contas e, a partir daí, começa a ter lucro. Qual o ponto do gráfico que representa esta situação?

d. Como encontrar este ponto? Que cálculos você pode fazer para encontrar o número x que representa o número de tubos de pasta de dente, a partir do qual a empresa começa a ter lucro?

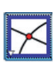
Aspectos pedagógicos

O objetivo dos itens (a) e (b) é fazer com que os alunos percebam que quando o custo é maior do que a receita, a empresa tem prejuízo e que quando o contrário ocorre, a empresa tem lucro. Assim, quando a quantidade vendida é 2500 tubos, a empresa tem lucro e quando vende 1600 tubos de pasta de dente, a empresa tem prejuízo.

Nos itens (c) e (d) você, professor, deve fazer com que os alunos percebam que o ponto de interseção entre as retas que representam a Receita e o Custo é a solução do sistema $\begin{cases} R = 2.5x \\ C = 0.9x + 3000 \end{cases}$ (que, inicialmente, apresenta 2 equações e 3 incógnitas).

Impondo a condição R = C e usando uma das duas letras o sistema pode ser reescrito, agora com duas incógnitas, como $\begin{cases} R = 2.5x \\ R = 0.9x + 3000 \end{cases}$.

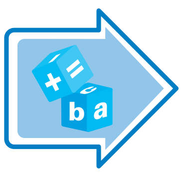
Nesse ponto, ou seja, para 1875 tubos de pasta vendidos a empresa "sai do vermelho" e não tem nem ganhos nem perdas. A partir desse ponto, a empresa começa a ter lucro.

Outra forma de verificar a quantidade de tubos a serem vendidas para igualar Receita e Custo é no utilizar a ferramenta  ,interseção entre dois objetos. Para isso, basta escolher a ferramenta e selecionar as duas retas traçadas. Aparecerá no canto esquerdo da tela o ponto A de abscissa 1875.

Seção 2 – Aprendendo um pouco de sistemas lineares 2 x 2

Páginas no material do aluno

9 a 14

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Azul, Amarelo e Vermelho.	Lápis de cor azul, amarelo e vermelho, cópias dos cartões das equações e cópias da Folha de atividades – Azul, Amarelo e Vermelho, disponível no Pendrive.	Esta atividade promove a discussão do sistema de equações pelo método gráfico.	Turma dividida em duplas.	25 minutos.

Aspectos operacionais

Imprima os cartões a seguir, disponibilizados no *pendrive*, recorte-os e deixe-os sobre a sua mesa, voltados para baixo.

$x + y = 1$	$x - y = 5$
$x - y = 3$	$2x + 2y = 6$
$x + y = 3$	$2x - 2y = 6$

$$2x - 2y = 2$$

Cartões com as equações

Distribua a folha de atividades para cada dupla. Deixe que cada dupla se dirija à sua mesa para sortear os dois cartões contendo as equações que irão compor a atividade. Peça que a dupla escreva, no local apropriado, as equações sorteadas, conforme indicação na folha de atividades.

Com o sistema de equações pronto, cada integrante da dupla irá escolher um lápis da cor azul, amarela ou vermelha para pintar na malha quadriculada os quadradinhos que correspondem às coordenadas de solução da sua equação. O outro integrante da dupla escolherá outra cor de lápis e fará o mesmo processo com a sua respectiva equação.

As possíveis interseções dos gráficos aparecerão em cores diferentes pela própria interação dos lápis azul, amarelo e vermelho. Isto chamará a atenção dos alunos para a presença desta interseção que irá definir se o sistema é Possível Determinado (quando houver uma única interseção), Possível Indeterminado (quando houver várias interseções) ou Impossível (quando não houver interseções).

Ao final, a dupla irá indicar a conclusão que chegou com a discussão do sistema.

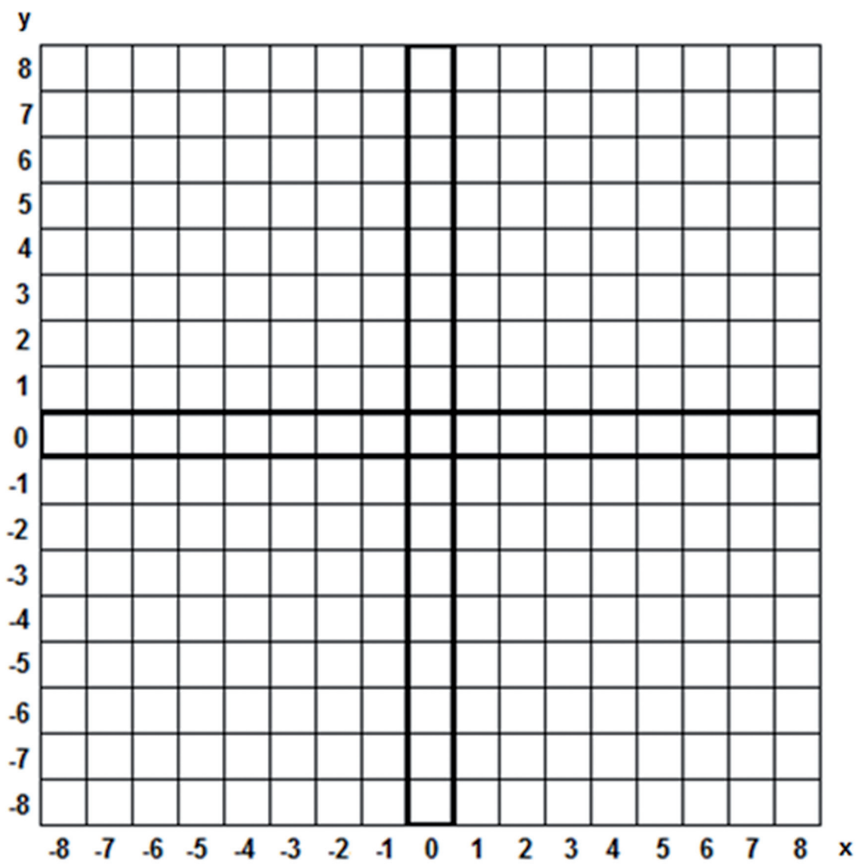
Folha de atividades – Azul, Amarelo e Vermelho

Nome da Escola: ____

Nome: ____

ESCREVA AQUI A EQUAÇÃO QUE VOCÊ SORTEOU

ESCREVA AQUI A EQUAÇÃO QUE VOCÊ SORTEOU



Conclusão

- ☐ Sistema Possível e Determinado
- ☐ Sistema Possível e Indeterminado
- ☐ Sistema Impossível

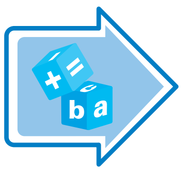
Aspectos pedagógicos

- Esta atividade não é um jogo e também não se propõe a fazer com que os alunos disputem. É uma interação entre eles que pode gerar gráficos diferentes com cores diferentes que, além de um importante gancho para o professor, é um trabalho bonito. Seria interessante que a folha de atividades pudesse ser exposta na sala de aula como trabalho dos alunos.
- Os pares ordenados obtidos para cada uma das equações devem respeitar os limites da malha quadriculada. Alguns alunos podem se sentir incomodados por haver colunas que não possuirão correspondência com as linhas exatamente por esta limitação da malha. Instrua-os neste sentido.
- A atividade gera imagens bonitas devido ao uso das cores primárias. A interseção das cores gera novas cores que serão usadas como um ponto de atenção para os alunos. Este ponto ou estes pontos irá(irão) definir se o sistema é determinado (uma interseção), indeterminado (diversas interseções) ou impossível (nenhuma interseção).

Seção 2 – Aprendendo um pouco de sistemas lineares 2 x 2

Páginas no material do aluno

9 a 14

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Galinhas, coelhos e Stringlings.	Cópias da Folha de atividades – Dieta de Cambridge (disponível no Pendrive).	O tradicional problema da quantidade de animais, de acordo com o número de patas e cabeças, se transforma numa grande discussão acerca das mais diferentes formas de resolução de um sistema de equações.	Turma dividida em duplas ou em trios.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas ou trios e distribua as folhas de atividades contendo uma descrição do problema das galinhas e dos coelhos. À medida que os alunos forem desenvolvendo as soluções, aproxime-se de cada grupo separadamente e peça para que eles expliquem o raciocínio utilizado para solucionar o problema.

Somente permita que os alunos avancem para a segunda parte da atividade após a conclusão e explicação da primeira parte.

Folha de atividades – Galinhas, coelhos e Stinglings

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Parte 1

Problema:

Num quintal existem galinhas e coelhos, ao todo 11 cabeças e 30 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos do quintal?

Resolva o problema acima de duas maneiras diferentes.

Parte 2

Problema:

Num planeta distante daqui, os Stringlings são povos muito diferentes de nós. Os Stringlings do sexo masculino possuem 2 cabeças e 3 patas e os de sexo feminino, 3 cabeças e 5 patas. Um ambiente de estudos daquele planeta reunia Stringlings de ambos os sexos, num total de 107 cabeças e 172 patas.

Utilize as duas formas de resolução aplicadas na 1ª parte desta atividade para resolver o problema dos Stringlings. Verifique se é possível utilizar o mesmo raciocínio (de forma adaptada), neste segundo problema, discutindo com seu grupo se o método de resolução utilizado anteriormente é específico para o 1º problema ou se é generalizável para todos os problemas similares a este.

Aspectos pedagógicos

Em geral, os alunos aplicam como primeiro método de resolução um sistema de equações. Mas o problema quer discutir métodos de resoluções variados através, principalmente, da aritmética. E é neste ponto que os alunos mostram mais dificuldades. Busque orientá-los dando-lhes sugestões de ideias para as resoluções diferentes para cada grupo, pois esta atividade fica mais interessante quando surgem diversos tipos de resolução. Afinal, isto permite que haja uma boa discussão sobre o problema em sala de aula.

Algumas soluções diferentes do sistema de equações podem claramente servir apenas para aquele problema das galinhas e coelhos. Não interfira junto ao grupo caso isso ocorra, pois o segundo problema poderá mostrar que não é possível resolver, daquela maneira, aquele outro problema. Isso vai enriquecer muito a discussão em sala de aula.

Oriente os alunos nas diferentes maneiras de resolução do sistema de equações e verifique quais os métodos utilizados para esta resolução. Podem ocorrer dificuldades neste momento da atividade por parte dos grupos. A ideia é que eles não fiquem "travados" nesta parte do desenvolvimento da atividade, pois a criação de mais um método de resolução do problema é um ponto de suma importância para a discussão proposta.

Aproveite métodos aritméticos para justificar a construção das equações do sistema da 1ª parte da atividade. Esta discussão auxilia no entendimento da modelagem dos dados fornecidos na questão através de variáveis, isto é, num âmbito mais algébrico.

Possíveis soluções para o problema das galinhas e coelhos.

1º método:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$$

$x = 11 - y \Rightarrow$ substituindo na segunda equação

$2(11-y)+4y=30$

$22-2y+4y=30$

$2y=30-22$

$2y=8$

$\boldsymbol{y=4}$

Portanto, *x*=11-4=**7**

Logo, são 7 galinhas e 4 coelhos.

2º método:

Se dos 11 animais (11 cabeças), 8 fossem galinhas, o nº de coelhos seria 11 – 8 = 3; se fossem 6 as galinhas, os coelhos seriam 11- 6 = 5 e se fossem 3 as galinhas, os coelhos seriam 11 – 3 = 8. Dessa forma, se existem 11 animais e o nº de galinhas é x, o nº de coelhos é 11- x. Então, como existem x galinhas, existem no quintal 2x pés de galinhas e, sendo 11 – x o nº de coelhos, 4.(11 – x) é o nº de pés de coelhos. O problema nos informa que no quintal existem 30 pés (nº de pés de galinha + nº de pés de coelhos). Simbolicamente, temos: 2x + 4(11 – x) = 30.

Resolvendo esta equação, encontramos x = 7.

Logo, o nº de galinhas é 7 e o nº de coelhos é 11 – 7 = 4.

3º método:

Se no quintal existissem apenas galinhas, o nº de pés seria 22, visto que, uma galinha possui 2 pés e 11 galinhas totalizariam 2.11 = 22 pés. Porém, o nº de pés registrados no quintal foi de 30, faltando então 30 – 22 = 8 pés, o que nos levou a afirmar que, no quintal, havia animais com mais de 2 pés, no caso os coelhos com 4. Esses 8 pés são de coelhos. Dando 2 para cada um, encontramos a quantidade dos mesmos. Logo o nº de coelhos é 4 (8 : 2). Se o nº de coelhos é 4, o nº de galinhas é 7 (11 – 4).

4º método:

Se no quintal os animais fossem só coelhos, o nº de pés seria 44, pois cada coelho possui 4 pés e o total de pés de 11 coelhos é de 11 . 4 = 44, resultado este que não bate com o nº de pés fornecido no problema. O nº de pés excedentes 14 (44 – 30) corresponde aos pés de galinhas contados a mais que devem ser retirados aos pares, facilitando o cálculo da quantidade dessas galinhas. Sendo assim, o nº de galinhas é 7 (14 : 2) e o nº de coelhos 4 (11-7).

5º método:

Primeiro, vamos ao quadro enumerar as cabeças, simbolizando cada uma delas com uma bolinha, fazendo a contagem;

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Vamos agora colocar dois pezinhos em cada uma dos animais. Foram colocados 22 (vinte e dois) pezinhos. Então, estão sobrando pés!

Sobraram 30 – 22 = 8 (oito) pés .

Então, vamos dar mais dois pés para alguns animais, para poder "gastar" esses 8 (oito) pés que sobraram. Com isso, 7 animais ficaram com dois pés e 4 ficaram com 4 pés. Portanto, no quintal existem 7 galinhas e 4 coelhos .

6º método:

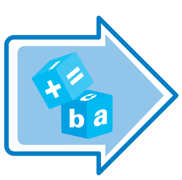
Galinhas	Coelhos	Total de cabeças	Pés de galinha	Pés de coelho	Total de pés
2	9	11	2.2=4	4.9=36	40
3	8	11	2.3=6	4.8=32	38
4	7	11	2.4=8	4.7=28	36
...	...	...	...	...	...
7	**4**	**11**	**2.7=14**	**4.4=16**	**30**

OBS: Existem mais de 20 maneiras diferentes de resolução para o mesmo exercício.

Seção 3 – Aprendendo um pouco de Sistemas lineares m x n

Páginas no material do aluno

15 a 19

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Contagem de Passos.	Os dois módulos de áudio referentes ao recurso Contagem de Passos disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1308, calculadoras e cópias da Folha de atividades – Contagem de Passos, disponível no Pendrive.	No áudio utilizado nessa atividade, o problema de determinar o comprimento de uma ponte que será enfeitada com flores é associado a um sistema linear 3×2.	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Reproduza o primeiro módulo do recurso *Contagem de Passos* para a turma. Após o primeiro módulo, discuta com os alunos como representar o problema, estratégias e possibilidades de resolvê-lo. Estimule-os a representar geometricamente o problema e a identificar quais são as incógnitas envolvidas.

Divida a turma em duplas e distribua as calculadoras e as folhas de atividades. Em seguida, reproduza o segundo módulo do recurso *Contagem de Passos* para a turma.

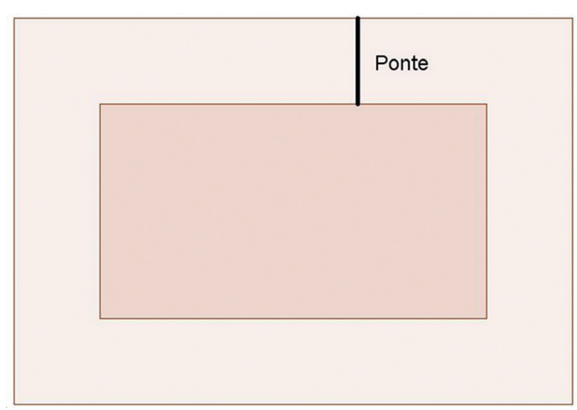
Depois que as duplas trabalharem com o problema proposto, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

Folha de atividades – O comprimento da ponte

Nome da Escola: ____

Nome: ____

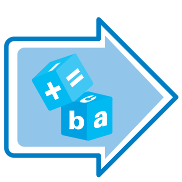
1. Vamos determinar o comprimento da ponte pela qual a mãe de Jéssica caminha todos os dias. Sabemos que uma ponte liga duas pistas retangulares: uma externa e uma interna. Elas estão separadas por um rio. Os lados dos retângulos são paralelos e a ponte é perpendicular às pistas. A distância entre os lados paralelos das pistas retangulares é sempre a mesma. Na figura a seguir, representamos as pistas e a ponte:



Além disso, sabemos que, para dar uma volta em cada pista passando-se uma vez pela ponte, a mãe de Jéssica dá 5.320 passos. Nos dias em que a mãe de Jéssica dá duas voltas na pista maior, uma, na pista menor e passa uma vez pela ponte, ela dá 8.120 passos. Qual é o comprimento da ponte em metros sabendo que cada passo da mãe de Jéssica mede 0,75 metros?

- Se julgar necessário, revise o conceito de perímetro de um retângulo.;
- Escutar o áudio exige dos alunos um esforço de abstração. É recomendável sugerir que façam anotações para melhor compreensão do problema.;
- Após a distribuição da folha de atividades, oriente os alunos a associarem o conteúdo do segundo módulo do recurso *Contagem de Passos* com a representação geométrica das pistas e da ponte, apresentadas na folha de atividades.;
- É possível que os alunos não consigam expressar as medidas dos lados do retângulo maior em função das medidas dos lados do retângulo menor e do comprimento da ponte. Destaque as informações, dadas no problema, que permitem essa associação.;
- O sistema tem mais incógnitas do que equações. No entanto, estamos apenas interessados em determinar uma das incógnitas. Explore com os alunos o caráter indeterminado do sistema. Na resolução, fica determinado que o comprimento da ponte é igual a 30 metros. No entanto, não é possível determinar unicamente as medidas dos lados das pistas retangulares. Ao final da resolução, sabemos, por exemplo, que o perímetro da pista retangular interna é igual a 1.860 metros. Peça que escolham valores para essas medidas e determinem possíveis configurações das pistas. Por exemplo, a pista interna é um quadrado, cujo lado mede 465 metros e a externa, um quadrado, cujo lado mede 525 metros.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade.	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões, tanto objetivas como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinados à Unidade 10. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, disponível para reprodução neste material, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar às suas no que tange à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- Identificar uma equação linear.
- Aprender a encontrar a solução de uma equação linear.
- Identificar um sistema linear.
- Identificar sistemas possíveis e impossíveis.
- Identificar um sistema na forma escalonada.
- Resolver um sistema por escalonamento.

Para ajudá-lo nos seus registros, sugerimos as questões a seguir, disponíveis na folha de atividades:

- Qual foi o conteúdo matemático que você estudou nesta unidade?
- Dê exemplos de situações do seu cotidiano em que seja possível modelar a partir de um sistema de equações lineares.
- Como podemos caracterizar um sistema linear
  - Possível e determinado?
  - Indeterminado?
  - Impossível?

Sugerimos também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar, com você, como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho, para, se for o caso, repensá-los de acordo com as características apresentadas.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas.

Sugerimos nesta etapa, a escolha de, pelo menos, uma questão objetiva e uma discursiva que contemplem uma habilidade pretendida nesta unidade, para compor o instrumento avaliativo.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1: (FUVEST 2012)

Em uma festa com n pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número n de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a:

(A) 100 (B) 105 (C) 115 (D) 130 (E) 135

Questão 2: (ESPM 2012)

Carlinhos possui certa quantidade de bolinhas de gude e algumas latinhas onde guardá-las. Ao colocar 4 bolinhas em cada lata, sobraram 2 bolinhas, mas quando colocou 5 bolinhas em cada lata, a última ficou com apenas 2 bolinhas. Podemos afirmar que todas as latas ficariam com o mesmo número de bolinhas se ele tivesse:

(A) 36 bolinhas (B) 42 bolinhas (C) 49 bolinhas

(D) 55 bolinhas (E) 63 bolinhas

Questão 3: (ENEM 2011)

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$120 000,00 por km construído (n) acrescidos de um valor fixo de R$150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada. Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

(A) 100n + 350 = 120n + 150

(B) 100n + 150 = 120n + 350

(C) 100 (n + 350) = 120 (n + 150)

(D) 100 (n + 350 000) = 120 (n + 150 000)

(E) 350 (n + 100 000) = 150 (n + 120 000)

Questão 4: (Vunesp 2010)

Considere o seguinte sistema linear: $\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ x + 2y + 4z = 9 \\ -x + 4y + 2z = 9 \end{cases}$

Pode-se afirmar que o valor de z é:

(A) –2. (B) –1. (C) 0. (D) 1. (E) 2.

Questão 5: (UERJ 2004)

Um comerciante deseja totalizar a quantia de R$500,00 utilizando cédulas de um, cinco e dez reais, num total de 92 cédulas, de modo que as quantidades de cédulas de um e de dez reais sejam iguais. Neste caso, a quantidade de cédulas de cinco reais de que o comerciante precisará será igual a:

(A) 12 (B) 28 (C) 40 (D) 92

Respostas das questões objetivas sugeridas

1. (D) 2. (D) 3.(A) 4.(E) 5.(A)

Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

Questão 1: (FUVEST)

Se Amélia der R$3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

Questão 2: (UERJ)

Um negociante de carros dispõe de certa quantia, em reais, para comprar dois modelos de carro, A e B. Analisando as várias possibilidades de compra, concluiu, em relação a essa quantia, que:

- faltariam R$10.000,00 para comprar cinco unidades do modelo A e duas do modelo B;
- sobrariam R$29.000,00,se comprasse três unidades de cada modelo;
- gastaria exatamente a quantia disponível, se comprasse oito unidades do modelo B.

Estabeleça a quantia de que o negociante dispõe.

Questão 3: (UERJ)

Os alunos de uma escola, para serem aprovados no exame final, deverão obter, pelo menos, sessenta pontos em uma prova de cem questões. Nesta prova, cada questão respondida corretamente vale um ponto e quatro questões erradas, ou não-respondidas, anulam uma questão correta. Calcule o número mínimo de questões que um mesmo aluno deverá acertar para que:

a. obtenha uma pontuação maior do que zero;

b. seja aprovado.

Questão 4: (UFF)

Determine os valores de a para que o sistema:

$S:\begin{cases} ax + a^2y = a^2 \\ a^6x + a^5y = a^4 \end{cases}$, seja:

a. possível e determinado;

b. indeterminado;

c. impossível.

Questão 5: (Unicamp)

Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$5,00, o quilo da castanha-de-caju, R$20,00 e o quilo de castanha-do-pará, R$16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$5,75. Além disso, a quantidade de castanha-de-caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a. Escreva o sistema linear que representa a situação descrita acima.

b. Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:

Questão 1:

Chamando a quantia em dinheiro que Amélia possui de x, a quantia em dinheiro que Lúcia possui de y e a quantia em dinheiro que Maria possui de z, podemos determinar três equações que relacionam essas quantias de acordo com as informações do problema:

Informação	Equação
Se Amélia der R$3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia.	$x-3=y+3$
Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$6,00 a mais do que Amélia.	$y+\frac{z}{3}=x+6$
Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria.	$\frac{x}{2}=\frac{z}{3}$

Assim podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x-3=y+3 \\ y+\frac{z}{3}=x+6 \\ \frac{x}{2}=\frac{z}{3} \end{cases}$

De acordo com a terceira equação, podemos substituir $\frac{x}{2}$ no lugar de $\frac{z}{3}$ na segunda equação e assim teremos:

$$\begin{cases} x-3=y+3 \\ y+\frac{x}{2}=x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-6 \\ y+\frac{x}{2}=x+6 \end{cases}$$

Substituindo o valor de y da primeira equação na segunda, temos: $x-6+\frac{x}{2}=x+6$

Resolvendo a equação do primeiro grau resultante, temos: $\cancel{x}-6+\frac{x}{2}=\cancel{x}+6 \Rightarrow \frac{x}{2}=12 \Rightarrow x=24$

Substituindo este valor nas demais equações do sistema original, temos:

$x-3=y+3 \Rightarrow 24-3=y+3 \Rightarrow y=24-6 \Rightarrow y=18$ e $\frac{x}{2}=\frac{z}{3} \Rightarrow \frac{24}{2}=\frac{z}{3} \Rightarrow \frac{z}{3}=12 \Rightarrow z=36$

Logo, Amélia possui R$24,00, Lúcia possui R$18,00 e Maria possui R$36,00.

Questão 2:

Chamando a quantia em dinheiro que o negociante possui de x, o valor do carro de modelo A de y e o valor do carro de modelo B de z, podemos determinar três equações que relacionam essas quantias de acordo com as informações do problema:

Informação	Equação
Faltariam R$10.000,00 para comprar cinco unidades do modelo A e duas do modelo B.	$x + 10000 = 5y + 2z$
Sobrariam R$29.000,00, se comprasse três unidades de cada modelo.	$x - 29000 = 3y + 3z$
Gastaria exatamente a quantia disponível, se comprasse oito unidades do modelo B.	$x = 8z$

Assim, podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x + 10000 = 5y + 2z \\ x - 29000 = 3y + 3z \\ x = 8z \end{cases}$

De acordo com a terceira equação, podemos substituir 8z no lugar de x na primeira e na segunda equações e assim teremos:

$$\begin{cases} 8z + 10000 = 5y + 2z \\ 8z - 29000 = 3y + 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8z - 2z - 5y = -10000 \\ 8z - 3z + 3y = 29000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6z - 5y = -10000x(-3) \\ 5z - 3y = 29000x(5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -18z + 15y = 30000 \\ 25z - 15y = 145000 \end{cases}$$

Somando as duas equações obtidas, temos: $7z = 175000 \Rightarrow z = 25000$. Substituindo o valor de z na terceira equação do sistema original, temos: $x = 8z \Rightarrow x = 8x25000 \Rightarrow x = 200000$

Logo, o negociante dispõe de R$ 200 000,00.

Questão 3:

Chamando a quantidade de questões respondidas corretamente de x, a quantidade de questões erradas ou não respondidas de y e a pontuação da prova de z, podemos determinar duas equações que relacionam essas quantias de acordo com as informações do problema:

Informação	Equação
Uma prova de cem questões.	$x + y = 100$
Nesta prova, cada questão respondida corretamente vale um ponto e quatro questões erradas, ou não -respondidas, anulam uma questão correta.	$x - \frac{y}{4} = z$

Assim podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - \frac{y}{4} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 100 - x \\ x - \frac{y}{4} = z \end{cases}$

a. Para que um aluno obtenha uma pontuação maior que zero, o valor de z deve ser maior que zero. Logo: $x-\frac{y}{4}=z>0\Rightarrow x-\frac{100-x}{4}>0\Rightarrow 4x-100+x>0\Rightarrow 5x>100\Rightarrow x>20$. Ou seja, o aluno deverá acertar a um número mínimo de 21 questões.

b. Para que um aluno seja aprovado, é necessário que ele obtenha uma pontuação de, pelo menos, sessenta pontos, isto é, o valor de z deve ser maior ou igual a sessenta. Logo:

$$x-\frac{y}{4}=z\geq 60\Rightarrow x-\frac{100-x}{4}\geq 60\Rightarrow 4x-100+x\geq 240\Rightarrow 5x>340\Rightarrow x\geq 68.$$

Ou seja, o aluno deverá acertar um número mínimo de 68 questões.

Questão 4:

Para facilitar a interpretação geométrica das equações do sistema dado, podemos reescrevê-las da seguinte forma:

$$S:\begin{cases} ax+a^2y=a^2 \\ a^6x+a^5y=a^4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{ax}{a^2}+\frac{a^2y}{a^2}=\frac{a^2}{a^2} \\ \frac{a^6x}{a^5}+\frac{a^5y}{a^5}=\frac{a^4}{a^4} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{x}{a}+y=1 \\ ax+y=\frac{1}{a} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=-\frac{1}{a}x+1 \\ y=-ax+\frac{1}{a} \end{cases}$$

a. Para que o sistema S seja possível e determinado, as retas que representam os gráficos das duas equações devem interceptar-se em um único ponto, ou seja, devem ter coeficientes angulares distintos. Assim, se:

$$-\frac{1}{a}\neq -a\Rightarrow\frac{1}{a}\neq a\Rightarrow a^2\neq 1\Rightarrow a\neq 1 \text{ e } a\neq -1$$

Logo, temos que para quaisquer valores de a diferentes de 1 e -1, o sistema S será possível e determinado.

b. Para que o sistema S seja indeterminado, as retas que representam os gráficos das duas equações devem coincidir em todos os pontos, ou seja, devem ter coeficientes angulares e lineares idênticos. Assim:

$$-\frac{1}{a}=-a\Rightarrow\frac{1}{a}=a\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=1 \text{ e } a=-1 \text{ e } \frac{1}{a}\neq 1\Rightarrow a\neq 1$$

Logo, temos que para a igual a -1, o sistema S será impossível.

Questão 5:

Chamando a quantidade (em quilogramas) de amendoim contida em cada lata de x, a quantidade (em quilogramas) de castanha-de-caju contida em cada lata de y e a quantidade (em quilogramas) de castanha-do-pará contida em cada lata de z, podemos determinar três equações que relacionam essas quantias de acordo com as informações do problema:

Informação	**Equação**
Cada lata deve conter meio quilo da mistura.	$x+y+z=\frac{1}{2}$
O custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$5,75.	$5x+20y+16z=5{,}75$
A quantidade de castanha-de-caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.	$y=\frac{x+z}{3}$

a. Assim podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x + y + z = \dfrac{1}{2} \\ 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ y = \dfrac{x+z}{3} \end{cases}$.

b. De acordo com a terceira equação, podemos substituir $\dfrac{x+z}{3}$ no lugar de y na primeira e na segunda equações e assim teremos:

$$\begin{cases} x + \dfrac{x+z}{3} + z = \dfrac{1}{2} \\ 5x + 20\dfrac{x+z}{3} + 16z = 5{,}75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2x + 2z + 6z = 3 \\ 15x + 20(x+z) + 48z = 17{,}25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 8z = 3 \\ 35x + 68z = 17{,}25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 - 8z}{8} \\ 35x + 68z = 17{,}25 \end{cases} \Rightarrow 35\left(\dfrac{3 - 8z}{8}\right) + 68z = 17{,}25 \Rightarrow 105 - 280z + 544z = 138 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 264z = 33 \Rightarrow z = \dfrac{33}{264} \Rightarrow z = \dfrac{1}{8}.$$

Substituindo o valor de z na equação 8x + 8z = 3, temos:

$$8x + 8z = 3 \Rightarrow 8x + 8 \times \dfrac{1}{8} = 3 \Rightarrow 8x + 1 = 3 \Rightarrow 8x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{8} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$$

Substituindo os valores de x e z na equação $x + y + z = \dfrac{1}{2}$, temos:

$$x + y + z = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{4} + y + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} \Rightarrow y = \dfrac{1}{8}$$

Logo, em cada lata há ¼ de quilograma ou 250g de amendoim, 1/8 de quilograma ou 125g de castanha- de-caju e 1/8 de quilograma ou 125g de castanha-do-pará.

Folha de atividades – Avaliação

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Momento de Reflexão:

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 10 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

Questão 1: Qual foi o conteúdo matemático que você estudou nesta unidade?

Questão 2: Dê exemplos de situações do seu cotidiano em que seja possível modelar a partir de um sistema de equações lineares.

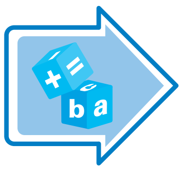
Questão 3: Como podemos caracterizar um sistema linear:

a. Possível e determinado?

b. Indeterminado?

c. Indeterminado?

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Com-plementares.	Folha de Atividades disponíveis no Pendrive, lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das noções iniciais da Geometria espacial, trabalhadas ao longo desta unidade, tanto no material do aluno, quanto nas atividades sugeridas neste material. Com esses exercícios, você, professor, terá a oportunidade de fixar os conceitos de dimensão, ponto, reta e plano, as diferenças entre poliedros e não poliedros e seus elementos e a aplicação da relação de Euler.

Esses exercícios foram distribuídos em uma "Folha de atividades" – que se encontra disponível para reprodução no pendrive – que poderá ser aplicada, de forma fracionada,ao término de cada seção do material do aluno ou, de uma só vez, no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu pendrive .

Aspectos pedagógicos

- Peça que os alunos se organizem em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno para que todos possam ficar com uma cópia do material tornando-o mais uma fonte de consulta.
- Escolha previamente quais os exercícios se adéquam melhor à realidade de sua turma e à abordagem esco-lhida para apresentação dos conceitos introduzidos na Unidade 2.
- Depois de os alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas pelos alunos, valorizando cada estratégia mesmo que esta não o tenha conduzido a uma resposta verdadeira.

- Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção, enquanto professor. Esses exercícios podem favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos, no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Folha de atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Questão 1: Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas é:

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

Questão 2: O diretor de uma empresa, o Dr. Antonio, convocou todos os seus funcionários para uma reunião. Com a chegada do Dr. Antonio à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala. Se o Dr. Antonio não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens. A quantidade de pessoas, presentes na sala, aguardando o Dr. Antonio é:

(A) 14 (B) 15 (C) 18 (D) 19 (E) 20

Questão 3: A empresa Brinque Muito realizou uma grande doação de brinquedos para um orfanato. Essa doação compreendeu 535 brinquedos, entre bolas e bonecas, 370 brinquedos entre bonecas e carrinhos, e o total da doação entre bolas e carrinhos foi de 455 brinquedos. É possível afirmar que, para realizar a doação, a empresa produziu:

(A) 320 bolas (B) 145 carrinhos (C) 235 bonecas (D) 780 brinquedos (E) 1350 brinquedos

Questão 4: Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R$ 5,40 por 2 latas de refrigerante e uma porção de batatas fritas. O segundo pagou R$ 9,60 por 3 latas de refrigerante e 2 porções de batatas fritas. Nesse local e nesse dia, a diferença entre o preço de uma porção de batas fritas e o preço de uma lata de refrigerante era de:

(A) R$ 1,40 (B) R$ 1,60 (C) R$ R$ 1,80 (D) R$ 2,00 (E) R$ 2,20

Questão 5: Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. Se a terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do de laranjas em 4 unidades, então nesse pacote há:

(A) igual número de balas dos dois tipos;

(B) duas balas de hortelã a mais que de laranja;

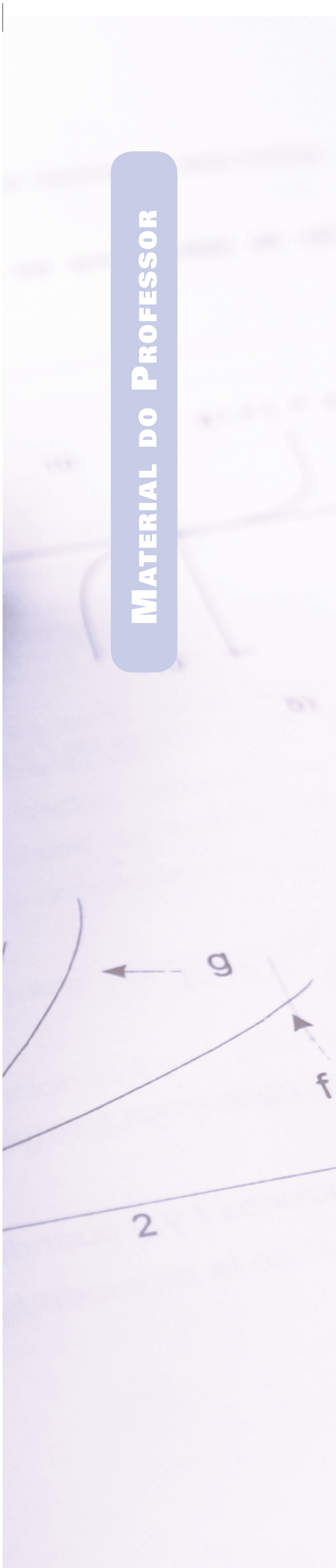
(C) 20 balas de hortelã;

(D) 26 balas de laranja;

(E) duas balas de laranja a mais que de hortelã.

Respostas - Folha de Atividades – “Exercícios de Fixação Complementares ”

1. B
2. D
3. B
4. C
5. A



Função Logarítmica

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenadora) e Luciane de Paiva Moura Coutinho

Introdução

Professor, preparamos para você um material que trata do conceito estudado na Unidade 1 do material do aluno: os logaritmos. Faz-se necessário que você não apenas domine o assunto, mas também tenha amplo conhecimento sobre a proposta apresentada.

Neste material, propomos algumas atividades para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes:

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas.
- Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

A ideia que norteou a equipe durante o processo de produção deste material foi levar até você uma proposta que pudesse contribuir de forma significativa para a ampliação do seu trabalho pedagógico nas aulas de Matemática.

A nossa sugestão é que a primeira aula desta unidade inicie-se com uma atividade disparadora, e por isso, trazemos duas atividades. Em *Os Logaritmos em nossas vidas*, os alunos irão trabalhar em grupos e deverão, a partir de uma pesquisa, apresentar uma reportagem, vídeos, textos, jogos ou qualquer outra forma de atividade relacionada a logaritmos. Na atividade *Logaritmo e Música, a* partir da exibição de um vídeo, relacionando música e Matemática, serão propostas algumas reflexões sobre os logaritmos.

Na Seção 1, você pode optar pela atividade Dominó Logarítmico, que propõe um jogo de dominó, onde as peças são formadas por logaritmos. Poderá, ainda, convidar os alunos a realizar um trabalho com o conceito de logaritmo e os procedimentos algébricos, e aritméticos, envolvidos em Procedimentos algébricos e aritméticos.

Para trabalharmos a Seção 2, sugerimos duas atividades: um jogo e uma atividade com ficha que promove a integração da Matemática com a Química. Nos dois casos, procuramos trabalhar o tema propriedades dos logaritmos, que foi priorizado nesta seção. Entretanto, além deste tema, foi-nos inevitável abordar também o próprio conceito de logaritmo. O estudo das propriedades pode levar o aluno a aprofundar seus conhecimentos conceituais, dando-lhe um tratamento mais rigoroso do ponto de vista matemático.

Por fim, aconselhamos que a última aula seja dividida em dois momentos. O primeiro, dedicado a uma revisão geral do que foi trabalhado na unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o estudo. E o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos.

As sugestões que elaboramos estão descritas nas tabelas seguintes e detalhadas nos textos subsequentes.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	Expansão	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Função Logarítmica	Logaritmos
Objetivos da unidade	
Calcular o logaritmo de um número real positivo.	
Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.	
Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas.	
Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	5 a 7
Seção 1 – Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos.	8 a 25
Seção 2 – O logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais	25 a 27
Veja ainda	28
O que perguntam por aí?	35 e 36

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

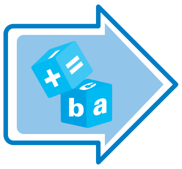
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

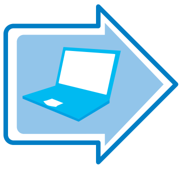
Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

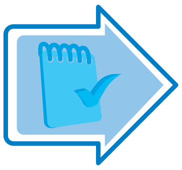


Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



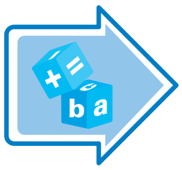
Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

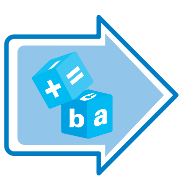
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Os Logaritmos em nossas vidas	Lousa e caneta para quadro	Em grupos, os alunos deverão apresentar uma reportagem, vídeos, textos, jogo ou qualquer outra forma de atividade relacionada a logaritmos.	A atividade deve ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos.	50 minutos
	Logaritmo e Música	Lousa, caneta para quadro, computador conectado a Internet ou Data show	A partir da exibição de um vídeo, relacionando música e Matemática, serão propostas algumas reflexões sobre os logaritmos.	Duplas	40 minutos

Seção 1 – Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Páginas no material do aluno

8 a 25

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Dominó Logarítmico	Papel cartão para fazer as peças do dominó e caneta ou folha de atividades peças dominó logarítmico.	A atividade propõe um jogo de dominó, onde as peças são formadas por logaritmos.	A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 4 alunos.	40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Procedimentos algébricos e aritméticos	Lousa, caneta para quadro e folhas de papel A4 em branco	A atividade propõe um trabalho com o conceito de logaritmo e os procedimentos algébricos e aritméticos usualmente empregados no estudo deste conceito.	A turma pode ser dividida em grupos de quatro alunos.	30 minutos

Seção 2 – Os logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais.

Páginas no material do aluno

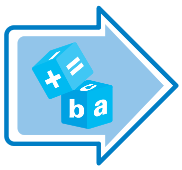
25 a 27

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Bingo dos Logaritmos	Uma cartela em branco para cada dupla de alunos e um conjunto de números com as frases de apresentação para o professor, que irá comandar o bingo.	A atividade propõe um jogo de bingo, onde serão estudadas algumas propriedades e operações com logaritmos.	Duplas	40 minutos
	Integrando Matemática e Química	Uma ficha como a que segue no Pendrive para cada grupo, acesso à Internet, a uma biblioteca ou outras fontes de pesquisa.	A partir de uma pesquisa, a atividade propõe o estudo dos logaritmos, associando Matemática a Química.	A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 3 alunos.	40 minutos

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Consolidação e registros de aprendizagem	Folha de atividades	Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos
	Questão dissertativa	Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora	Questão dissertativa que complementam a seção "O que perguntam por aí?".	Individual	10 minutos
	Questão objetiva (ENEM 2011)	Folha de atividades, lápis, borracha	Questão objetiva que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual	10 minutos

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Os Logaritmos em nossas vidas	Lousa e caneta para quadro	Em grupos, os alunos deverão apresentar uma reportagem, vídeos, textos, jogo ou qualquer outra forma de atividade relacionada a logaritmos.	A atividade deve ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos.	50 minutos

Aspectos operacionais

Professor, antes de começar esta atividade, é necessário que você peça na aula anterior que a turma traga reportagens, vídeos, textos, jogos ou qualquer outra forma de atividade relacionada a logaritmos. Inicie a aula, dividindo os alunos em grupos de pelo menos quatro integrantes e peça para que eles nomeiem esses grupos (de preferência, que usem um nome relacionado à Matemática).

Cada grupo deverá apresentar para a turma o material que eles encontraram. Esse material pesquisado pode estar relacionado a outras áreas do conhecimento, como: Física, Química, Biologia ou Economia. Isso sugere a interdisciplinaridade e você pode pedir a ajuda de outros professores neste trabalho. Estipule um tempo para a apresentação de cada grupo, lembrando que no final das apresentações você deverá fazer o fechamento da aula, que poderá acontecer com a discussão de alguns exemplos que você apresentar. Veja que os logaritmos aparecem na Física com a fórmula da NIS (Nível de Intensidade Sonora), na Biologia, temos a fórmula do crescimento de bactérias, na Química, temos a fórmula da alcalinidade (escala de PH).

Aspectos pedagógicos

Professor, nesta atividade, temos como objetivo principal fazer o aluno descobrir que o logaritmo é uma ferramenta importante, presente não só da Matemática, mas em outras áreas do conhecimento, assim como revelar sua aplicação em situações e problemas do cotidiano.

Com a atividade proposta, temos também a intenção de proporcionar a socialização dos alunos, focando o trabalho em grupo, a criatividade, a organização e a pesquisa. A maior dificuldade dos alunos certamente será apresentação da atividade, já que este é o primeiro contato que eles estarão tendo com o assunto. Por isso, auxilie-os com os termos mais técnicos e encoraje-os.

Você pode, dependendo da autonomia de cada turma, fazer um roteiro de trabalho para que eles sigam.

Atividade Inicial

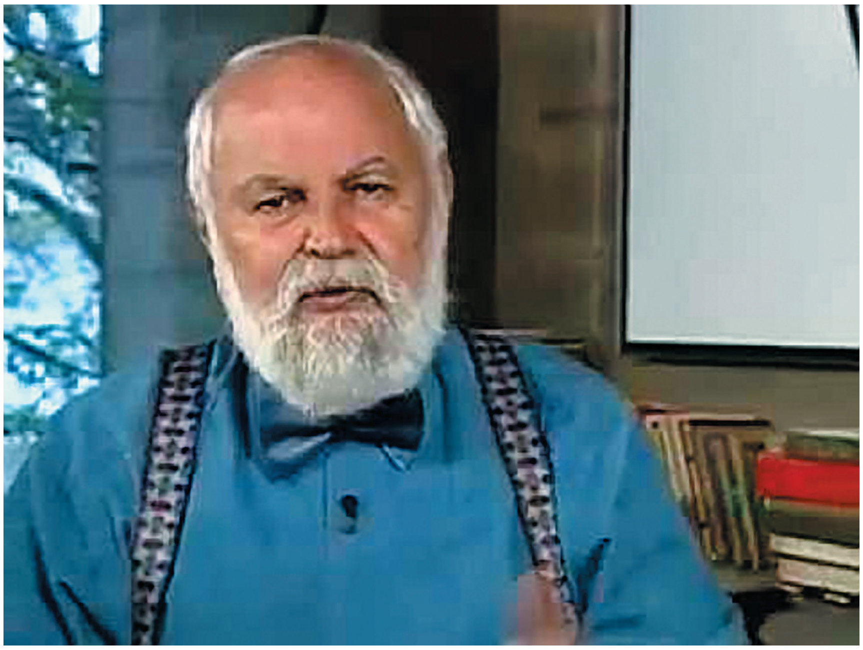
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Logaritmo e Música	Lousa, caneta para quadro, computador conectado a Internet ou Data show	A partir da exibição de um vídeo, relacionando música e Matemática, serão propostas algumas reflexões sobre os logaritmos.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade é composta de três etapas.

1ª etapa: Leve seus alunos para o laboratório de informática ou ligue o Data show na própria sala de aula. Exiba o vídeo "Arte e Matemática – Música das Esferas", disponível em

- http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=4907



Fonte: http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=4907

2ª etapa: Após a exibição do vídeo, peça para que seus alunos reflitam sobre as seguintes questões:

- Você já havia pensado na relação entre a Matemática e a música, antes de assistir ao vídeo?
- O que mudou na sua percepção da música e da Matemática após assistir ao vídeo?
- Você já ouviu falar em Logaritmos? E da relação do Logaritmo com a música?

Professor, veja se seus alunos conseguiram perceber como a música pode ter um caráter mais estruturado, mais formal e a Matemática aparece de maneira mais lúdica, quando relacionada ao cotidiano.

3ª etapa: Veja os interesses e as habilidades da turma. Que tal propor a seus alunos uma apresentação musical? Caso a turma demonstre um grande interesse, convide o professor de Artes para participar e ajudar nesta apresentação.

Aspectos pedagógicos

Professor, nada como o aprendizado interdisciplinar para preparar nossos alunos para um mundo com os conhecimentos cada vez mais interligados. Melhor ainda se conseguirmos despertar nos estudantes a relação entre um conhecimento de aspecto tão formal como a Matemática com um conhecimento aparentemente tão intuitivo como a música.

Esta atividade pode ser interessante por começar um assunto tão árduo para a grande maioria dos alunos, como o estudo de logaritmo, com uma apresentação musical na turma.

A 3ª etapa será um bom momento para que a turma entrose-se e você conheça um pouco mais dos interesses e das habilidades de cada um dos seus alunos, fortificando as relações professor-aluno, fundamentais não só para o aprendizado de logaritmo, mas para os outros assuntos que virão.

Este vídeo também traz a possibilidade de uma ampliação cultural ao analisar as combinações de cálculos matemáticos que estão por trás dos sons que se desenvolveram em diversas culturas, além de trazer um interessante aprofundamento sobre a história da Matemática.

É interessante mostrar a turma um outro aspecto que pode ser desenvolvido em sala, que é o cálculo das notas de Bach pela teoria de Napier. Por exemplo, a nota mi tem valor na escala de Bach de $2^{4/12}$. Você pode usar uma tabela de logaritmos de base 2 ou uma calculadora cientifica. Você irá obter o valor da altura do som da nota mi, 1.25999105. Que tal você propor aos alunos que pesquisem o valor das outras notas? Essa será uma boa oportunidade para familiarizar seus alunos com a calculadora científica.

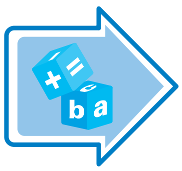
Reflita com seus alunos que no tempo de Napier esses cálculos eram feitos apenas utilizando lápis e papel, mas que hoje em dia, há muitos recursos que podem ser utilizados. Um deles é utilizar uma planilha como Excel. Vá para o laboratório de informática e utilize esse recurso, descobrindo assim, o valor das outras notas da escala de Bach. As referências são dó(1), dó#($2^{1/12}$), ré($2^{2/12}$), ré#($2^{3/12}$), mi($2^{4/12}$), fá($2^{5/12}$), fá#($2^{6/12}$), sol($2^{7/12}$), sol#($2^{8/12}$), lá($2^{9/12}$), lá#($2^{10/12}$), si($2^{11/12}$), dó em escala acima (2). O símbolo # é lido como sustenido.

Por fim, você pode pesquisar se na comunidade há músicos e convidá-los para um bate papo com a turma. Essa proposta, além de ampliar a relação escola-comunidade certamente enriquecerá sua turma com conhecimentos que extrapolam a sala de aula.

Seção 1 – Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Páginas no material do aluno

8 a 25

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Dominó Logarítmico	Papel cartão para fazer as peças do dominó e caneta ou folha de atividades peças dominó logarítmico.	A atividade propõe um jogo de dominó, onde as peças são formadas por logaritmos.	A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 4 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, elabore as peças do jogo, conforme a especificidade, competências e habilidades da sua turma. Você pode elaborar peças com a definição e propriedades do logaritmo, com seus respectivos resultados, para possibilitar o encaixe. Veja o exemplo abaixo:

$\log_a b - \log_a c$	$\log_a (b^c)$

Repare que para encaixar com a peça $\log_a b - \log_a c$ deve haver um resultado $\log_a b/c$ e para encaixar com $\log_a b^c$ deve haver uma peça do tipo $c\,.\log_a b$

Peça para que os alunos embaralhem as 28 peças que você deverá disponibilizar na mesa. Cada jogador pega sete peças para jogar. Defina com o grupo como o jogo irá começar: se será por sorteio ou se será quem tirar uma peça pré-determinada. O jogador que começa a partida coloca uma peça no centro da mesa. A partir daí, joga-se no sentido horário. Cada jogador deve tentar encaixar alguma peça sua nas peças que estão na extremidade do jogo, uma por vez. Se o jogador consegue encaixar uma peça, o jogo segue para o próximo jogador. Caso o jogador não tenha nenhuma peça que encaixe em qualquer lado, ele deve passar a vez, sem jogar nenhuma peça ou comprar no resto (para grupo com menos de 4 componentes). A partida termina quando um jogador consegue bater o jogo (fica sem nenhuma peça), ou quando o jogo fica trancado (ninguém tem peça para continuar o jogo).

Aspectos pedagógicos

Professor, esta atividade apresenta alternativas de estratégias e de recursos didáticos como tentativa de tornar a relação em sala de aula mais prazerosa e eficaz, visando à melhoria do processo de ensino-aprendizagem e desmistificando principalmente o logaritmo como uma área de difícil aprendizagem dentro da Matemática.

Esta atividade, com base na construção de materiais didáticos simples, permite a codificação, sistematização, construção e até mesmo reconstrução de conceitos. Além, é claro, de contribuir para a organização de informações e o desenvolvimento de procedimentos para resolução de problemas matemáticos.

Como já dissemos anteriormente, a elaboração das peças será livre para que você, professor, possa elaborá-las, conforme as habilidades, potencialidades e dificuldades de sua turma para que o jogo seja acessível e que o trabalho alcance de fato seus objetivos.

Caso julgue necessário, você pode propor para a turma antes do jogo, exercícios de fixação. Se não for preciso, você pode deixá-los para depois do jogo, como trabalho de casa, por exemplo. Uma alternativa interessante é passar alguns exercícios antes e outros de mesmo nível depois da atividade e analisar com a turma se o jogo foi eficaz e um diferencial para a facilitação da resolução dos exercícios.

Se sua turma não se interessar pelo jogo de dominó, para motivá-los, tente fazer uma gincana entre os grupos com uma premiação ao final.

A seguir, temos as peças sugeridas para o dominó de logaritmos.

$a^x = b$	$\log_a b = x$
$\log_a (b.c)$	$\log_a b + \log_a c$
$\log_a (b/c)$	$\log_a b - \log_a c$
$\log_a b^y$	$y.\log_a b$

$\log_a b$	$\log_x b / \log_x a$
$\log_a 1$	0
$a^{\log_a b}$	b
$\log_a a^m$	m
$\log_a a$	1
$\log_a b = \log_a c$	$b = c$
Logaritmo do Quociente	log (10/2)
Logaritmo do Produto	log (10.2)

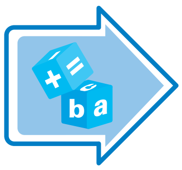
Logaritmo da Potência	$\log 10^2$
$\log_3 27$	3
$\log_{\frac{1}{5}} 125$	-3
$\log_2 \sqrt{64}$	3
$\log_x 8 = 3$	2
$\log_x \frac{1}{16} = 2$	1/4
$\log_{\frac{1}{2}} x = 2$	1/4
$\log_9 81 = x$	2

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$	-3
$\log_{5} 1$	0
log 10	1
log 6	log 2 + log 3
$\log_{2} 5$	$\log_2 10 - 1$
log 100	2. log10
$\log_5 \sqrt{5}$	1/2
$\log_{36} 6$	1/2

Seção 1 – Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Páginas no material do aluno

8 a 25

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Procedimentos algébricos e aritméticos	Lousa, caneta para quadro e folhas de papel A4 em branco	A atividade propõe um trabalho com o conceito de logaritmo e os procedimentos algébricos e aritméticos usualmente empregados no estudo deste conceito.	A turma pode ser dividida em grupos de quatro alunos.	30 minutos

Aspectos operacionais

Professor, o objetivo desta atividade é trabalhar o conceito de logaritmo e os procedimentos algébricos e aritméticos usualmente empregados, quando estudamos este assunto. Ela pode lhe servir como um instrumento para diagnosticar possíveis lacunas nos conhecimentos dos alunos e apontar caminhos para uma revisão de conteúdos. Embora não sejam situações inovadoras e enfoquem apenas expressões numéricas e equações exponenciais, e logarítmicas, é aconselhável que os alunos sejam organizados em grupo e que, durante a resolução de cada uma, você promova reflexões que os levem a compreender as razões matemáticas de cada procedimento que empregam. Para começar, você pode propor a situação 1 a seguir:

Situação 1: Achar o valor da expressão $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} - \log_2 \frac{1}{4} - \log_5 5$.

Depois que os alunos terminarem, peça que um representante de cada grupo descreva não só como fez, mas também as dúvidas que ocorreram. São questões que podem contribuir para o aprofundamento das reflexões: Como é possível transformar um radical em potência? E uma fração? Podemos generalizar a ideia de que $\log_a a$ é igual a 1 para todo valor de *a*? Por quê?

E, dando continuidade, proponhas as situações 2 e 3:

Situação 2: Qual é o valor do termo desconhecido em cada caso?

a. $\log_7 x = 2$

b. $\log_x \frac{1}{25} = 2$

c. $2^x = 64$

d. $2^x = 9$

Situação 3: O logaritmo de um número em certa base é 3. O logaritmo desse mesmo número numa base igual à metade da anterior é 6. Que número é esse?

Na reflexão sobre estas situações, é fundamental questionarmos: Observando a posição da incógnita, podemos dizer que as equações propostas nos itens a e *b* da situação 2 são do mesmo tipo? O que difere uma da outra? Comparando as equações *c* e *d*, o que torna a resolução do item *d* mais complexa? Podemos generalizar a ideia presente na situação 3 de que, mantendo o logaritmando constante, se diminuirmos a base, o valor do logaritmo aumenta?

Aspectos pedagógicos

Professor, boa parte dos estudantes de Ensino Médio apresenta sérias dificuldades para operar com radicais, frações e potências com expoentes negativos e/ou fracionários. Portanto, não se surpreenda se seus alunos não chegarem à resposta correta da expressão proposta na situação 1, que é – ½ . Se isso acontecer, sugerimos que você, junto com a turma, analise separadamente cada parcela da expressão. Assim, você poderá identificar se as dificuldades distribuem-se igualmente entre os conteúdos envolvidos em cada uma ou se há algum aspecto que se destaque, apontando a necessidade de uma revisão mais aprofundada. Nesses momentos, ter em mão livros do 9º ano pode lhe ajudar. Deles, você poderá extrair bons exercícios de revisão. E, não se esqueça: podemos, sim, generalizar a ideia de que $\log_a a$ é igual a 1 para todo valor de *a*! Afinal, todo número elevado a 1 é igual a si mesmo. Entretanto, vale também reforçar que, pela definição de logaritmo, a deve ser um número positivo e diferente de 1.

Voltando nossas atenções para as situações 2 e 3, observando a posição da incógnita, podemos afirmar que as equações propostas nos itens a e *b* da situação 2 não são do mesmo tipo: na primeira, a incógnita está no logaritmando e, na segunda, a incógnita está na base. Os alunos podem resolvê-las por um método de tentativas, entretanto, se empregarem um procedimento mais geral, na resolução da primeira, terão de lidar com a equação do 1º grau e *x* = 49, na resolução da segunda, terão de lidar com a equação do 2º grau $x^2 = \frac{1}{25}$, o que os levará a obter dois valores para a incógnita e requererá a habilidade de desprezar o que for negativo, dado que a base de um logaritmo não pode ser um número negativo.

Já, comparando as equações *c* e *d*, o que torna a resolução do item *d* mais complexa é o fato de 9 não ser uma potência de 2. Aqui é importante discutir com os alunos que, quando, numa equação exponencial, os dois membros não podem ser transformados em potências de mesma base, um procedimento adequado é "aplicar" o logaritmo aos dois membros da igualdade. Isto se fundamenta na ideia de que, se dois números positivos são iguais, os logaritmos deles numa determinada base também são iguais. Em resumo, resolvendo a equação d, obteremos $x = \frac{\log 9}{\log 2}$, e tanto o numerador quanto o denominador desta fração podem ser facilmente calculados por uma calculadora científica ou facilmente encontrados em tábuas de logaritmos.

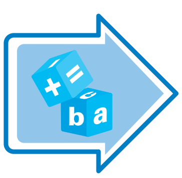
Na situação 3, apresentamos um problema em língua materna e, para resolvê-lo, é bastante adequado escrevê-lo com a simbologia matemática. Esta etapa é mais um ponto em que os alunos podem apresentar dificuldades, entretanto, quando os significados de cada símbolo forem bem compreendidos, esta simbologia poderá facilitar a resolução do problema. Assim, sugerimos que você invista na discussão dos significados de cada símbolo envolvido no estudo dos logaritmos. Se isso acontecer, facilmente seus alunos poderão concluir que o número procurado na situação 3 é 64 e que é possível generalizar a ideia de que, mantendo o logaritmando constante e diferente de 1, se diminuirmos a base, o valor do logaritmo aumenta.

Por fim, professor, esta é uma atividade de risco e gostaríamos de deixá-lo sob alerta. Embora as "manipulações" algébricas e aritméticas abordadas aqui sejam de suma importância, a falta de um contexto para os cálculos que efetuamos pode levar seus alunos a questionar a utilidade do que estão estudando. Nesse sentido, você pode, ao longo da aula, resgatar exemplos de aplicação dos logaritmos a outras áreas do conhecimento humano, como: a Economia, a Geografia, a Química e a Biologia. Retome as aplicações citadas no material do aluno! Promova atividades complementares de pesquisa sobre os logaritmos, suas aplicações e sua história, mas não abra mão de desenvolver as habilidades requeridas nesta atividade.

Seção 2 – Os logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais.

Páginas no material do aluno

25 a 27

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Bingo dos Logaritmos	Uma cartela em branco para cada dupla de alunos e um conjunto de números com as frases de apresentação para o professor, que irá comandar o bingo.	A atividade propõe um jogo de bingo, onde serão estudadas algumas propriedades e operações com logaritmos.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Nesta atividade, propomos um jogo de bingo. A diferença deste para o bingo tradicional está no conteúdo das cartelas e no modo como as pedras serão "cantadas". No tradicional, os participantes recebem uma cartela com números. Já neste, a cartela é entregue em branco a cada dupla que, antes do início do jogo, irá preenchê-la com 6 números naturais, escolhidos aleatoriamente no universo de 2 a 15. Quanto à maneira de cantar os números sorteados, o professor oferecerá informações matemáticas sobre os números em vez de simplesmente falá-los. Para cada número, serão priorizadas informações, envolvendo logaritmos e suas propriedades. Por exemplo, se o número sorteado for 2, em vez de simplesmente falar "dois", o professor deverá falar "trata-se do logaritmo de 9 na base 3".

Para realizar esta atividade, professor, você pode pedir, previamente, aos alunos que tragam de casa folhas de rascunho. Afinal, para identificar os números, quase sempre terão de efetuar cálculos. Como estamos interessados na fixação de aspectos conceituais, não encorajamos o uso de calculadoras financeiras ou científicas que trazem a função "logaritmo". Entretanto, a calculadora comum, que oferece basicamente as quatro operações, pode ser usada para agilizar as contas.

Num segundo momento da atividade, é importante que você reflita com os alunos sobre os conhecimentos que empregavam, enquanto jogavam. São questões que podem orientar esta reflexão: Que procedimentos foram empregados na identificação dos números cantados? Que cálculos realizaram para descobrir o logaritmo de um número numa determinada base? Em que circunstâncias preferiram empregar alguma propriedade dos logaritmos? Que conhecimentos matemáticos, além daqueles diretamente associados aos logaritmos, foram mobilizados?

Para finalizar, você pode pedir aos alunos que criem outras formas de apresentar os números envolvidos no jogo. Peça também que, se possível, criem um novo jogo com mais pedras e novas formas de apresentá-las.

Aspectos pedagógicos

Professor, como já discutimos em outras ocasiões, você pode ter no jogo um grande aliado para promover o processo de ensino e aprendizagem. Para que isso realmente aconteça, você e seus alunos precisam aproveitar bem as oportunidades que surgem, enquanto jogam. Por isso, nossa sugestão é que você não abra mão das reflexões após o jogo e, ainda, se, durante a sua realização, for necessário fazer interrupções para discutir os conceitos em questão, faça-o na certeza de que está no caminho certo.

É importante que os alunos reconheçam que o domínio das quatro operações e de certas técnicas de fatoração ou decomposição em fatores primos pode ajudá-los a calcular logaritmos e aplicar algumas de suas propriedades. Saber as propriedades, por sua vez, pode ser útil na hora de resolver logaritmos mais complexos ou simplificar operações com eles. As três propriedades que privilegiamos foram:

a. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

b. $\log_a b / c = \log_a b - \log_a c$

c. $\log_a b^n = n \log_a b$

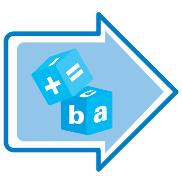
Durante esta atividade, é aconselhável que você não só leve os alunos a aplicar as propriedades, como também reflita com eles sobre os valores que *a, b, c* e *n* podem assumir para que elas façam sentido. Assim, lembre-os de que *n* pode ser substituído por qualquer número real, porém *a, b* e *c* devem ser números positivos e que o *a* ainda precisa ser diferente de um. Esteja atento à localização das letras nas fórmulas que representam as propriedades. Em muitos assuntos da Matemática, da Física e da Química, os alunos costumam memorizar fórmulas, tendo em vista determinadas letras e, quando as substituímos por outras, apresentam dificuldades no reconhecimento e aplicação destas fórmulas. Uma boa maneira para evitar isso é, antes mesmo de utilizar a simbologia matemática, pedir aos alunos que enunciem fórmulas e propriedades com palavras da língua materna. Aliás, como já comentamos em outras oportunidades, a diversificação da linguagem contribui bastante na construção de conceitos e, nesse sentido, você pode apresentar os números sorteados, alternando a "fala" com o registro na lousa da expressão que levará os alunos a reconhecê-los. Na descrição dos números que segue em anexo, sempre que possível, usamos duas maneiras. Você poderá escolher a que julgar mais adequada para os seus alunos e nada lhe impede de até usar as duas.

O fato de privilegiarmos as três propriedades listadas anteriormente não significa que você deva trabalhar apenas com elas. Você pode aproveitar a oportunidade para discutir outras como, por exemplo, $a^{\log_a n} = n$. Tudo vai depender do andamento das reflexões que você estabelecer com a turma. A solicitação de novas maneiras de cantar as pedras e a criação pelos alunos de bingos com mais números a serem cantados e diversas maneiras de cantá-los, poderá contribuir para o aprofundamento das discussões. Invista nisso e boa sorte!

Seção 2 – Os logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais.

Páginas no material do aluno

25 a 27

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Integrando Matemática e Química	Uma ficha como a que segue no Pendrive para cada grupo, acesso à Internet, a uma biblioteca ou outras fontes de pesquisa.	A partir de uma pesquisa, a atividade propõe o estudo dos logaritmos, associando Matemática a Química.	A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 3 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Para realizar esta atividade, professor, você pode pedir aos alunos que pesquisem na Internet ou na biblioteca da escola o que significa calcular o pH e o pOH das substâncias. Por que é preciso fazer isso? Que fórmula matemática é empregada nesse cálculo? Além disso, para realizar esta pequena investigação, eles também poderão entrevistar o professor de Química ou você poderá convidá-lo a participar da sua aula, prestando os esclarecimentos necessários, num bate-papo descontraído com a turma.

Em seguida, voltando as atenções para os cálculos do pH e do pOH das substâncias, distribua uma ficha como a que segue em anexo para que os alunos resolvam em grupo. Depois que resolverem, peça-lhes que exponham seus raciocínios, suas dúvidas e estratégias de resolução. Procure OUVIR os alunos! Assim você poderá ajudá-los a superar dificuldades e a identificar as causas de possíveis erros.

Aspectos pedagógicos

Nesta atividade, temos uma boa oportunidade de promover o encontro da Matemática com a Química, dando um passo importante no caminho da interdisciplinaridade. Mesmo que você e o professor de Química trabalhem em dias diferentes e, por motivos práticos, não possam se encontrar, peça-lhe que aborde minimamente o assunto em suas aulas. Embora o tema pH e pOH não esteja no currículo do 1º Ano do Ensino Médio, a sua compreensão em linhas gerais não requer muitos pré-requisitos nem tomará muito tempo da aula.

Certas substâncias químicas podem ser classificadas como ácidas, alcalinas ou neutras. Quando predominam íons H^+, temos soluções ácidas e quando o excesso é de OH^-, temos soluções alcalinas. Em meio neutro, não há predominância de nenhuma das duas.

O pH e o pOH de uma substância estão associados às concentrações de H^+ e OH^- respectivamente. Em vez de escrevermos "concentração de H^+" ou "concentração de OH^-, usamos os símbolos $[H^+]$ e $[OH^-]$. Eles podem ser calculados pelas fórmulas $pH = \log\frac{1}{[H]^+}$ e $pOH = \log\frac{1}{[OH]^-}$, onde $[H^+]$ e $[OH^-]$ são as concentrações de H^+ e OH^- em mol/*l*. É importante saber que a soma do pH com o pOH de uma substância é sempre 14. Quando pH = pOH = 7, a substância é neutra. Quando a substância é ácida, seu pH é menor que 7 e seu pOH é maior que 7. Quando a substância é alcalina, seu pH é maior que 7 e seu pOH é menor que 7. Entre muitas aplicações, saber se as substâncias são ácidas ou alcalinas pode nos ajudar a selecionar melhor os alimentos que ingerimos e os produtos de higiene pessoal que usamos. Substâncias extremamente ácidas podem ser nocivas à nossa saúde.

Voltando às atenções para as propriedades dos logaritmos, observe, professor, que, ao empregarem as fórmulas e efetuarem os cálculos para a obtenção do pH e do pOH nas situações propostas na ficha em anexo, mais uma vez os alunos poderão aplicar as propriedades $\log_a b/c = \log_a b - \log_a c$ e $\log_a b^n = n\log_a b$. Além disso, realce para eles que, quando a base do logaritmo não estiver escrita, trata-se da base decimal e que, o logaritmo de 1 em qualquer base é zero.

Para finalizar, observe que as concentrações estão escritas como números decimais e que, para empregar as propriedades, é necessário escrevê-las como potências de 10. Se você perceber que seus alunos estão apresentam dificuldades neste processo, não hesite em fazer uma pequena revisão das potências de 10.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Consolidação e registros de aprendizagem	Folha de atividades	Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos

Aspectos operacionais

Nossa sugestão é que você utilize o último tempo de aula desta unidade para a consolidação e avaliação do conteúdo estudado junto à turma. Esta etapa pode estar articulada à seção "Veja ainda" do material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade.

Para complementar as questões que você poderá propor aos alunos, apresentamos, na folha de atividades, algumas questões que têm por objetivo a avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas.

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?

2. Relembrando que no símbolo "$\log_b a = x$", representa a base, *a* representa o logaritmando e *x* o logaritmo, complete a tabela:

Base	Logaritmando	Logaritmo
2	128	
3		5
	25	2
4	1	
	16	4

3. Reflita sobre a afirmação:

"Como 16 é menor que 64, então o logaritmo de 16 na base 2 é menor que o logaritmo de 64 na base 2." O que você diz a respeito? Concorda? Por quê?

4. Você seria capaz de citar situações reais nas quais utilizamos o logaritmo?

Aspectos pedagógicos

Certifique-se de fazer com que os resultados deste momento de avaliação indiquem os pontos em que os alunos ainda não conseguiram êxito no aprendizado. Parabenize e elogie o quanto for necessário, para que este momento de avaliação torne-se agradável.

No item 1, espera-se que o aluno responda que o conceito estudado foi sobre logaritmo. Já no item 2, por $\log_b a = x$ significar que $b \quad a$, basta resolver a equação exponencial em cada uma das linhas da tabela, onde o que muda são as informações dadas. Por exemplo, na primeira linha, $2^x = 128 = 2^7$ de forma que $x = 7$. Na segunda linha, a equação correspondente é $3^5 = a$, donde $a = 7$. Na última linha, a equação correspondente é $b^4 = 16$, donde $b = 2$. As outras linhas são completadas com procedimentos análogos.

Base	Logaritmando	Logaritmo
2	128	7
3	243	5
5	25	2
4	1	0
2	16	4

No item 3, espera-se que o aluno perceba que um cálculo direto permite verificar que $\log_2 16 = 4 < 6 = \log_2 64$. Portanto, a afirmação é verdadeira. E na última questão, o item 4, eles podem citar, por exemplo, que os logaritmos aparecem em escalas para medir a intensidade dos terremotos.

Ao final dos registros de avaliação, compartilhe as informações entre os alunos. Indique exercícios e atividades para que as dúvidas e erros possam ser devidamente contornados.

Folha de atividade – Consolidação e registros de aprendizagem

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 1 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?

____

____

2. Relembrando que no símbolo " $\log_b a = x$ ", representa a base, *a* representa o logaritmando e *x* o logaritmo, complete a tabela:

Base	Logaritmando	Logaritmo
2	128	
3		5
	25	2
4	1	
	16	4

3. Reflita sobre a afirmação:

"Como 16 é menor que 64, então o logaritmo de 16 na base 2 é menor que o logaritmo de 64 na base 2." O que você diz a respeito? Concorda? Por quê?

4. Você seria capaz de citar situações reais nas quais utilizamos o logaritmo?

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão dissertativa	Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora	Questão dissertativa que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual	10 minutos

Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão dissertativa que complementa o que foi proposto na seção *"O que perguntam por aí?", p. 37 d*o material do aluno. Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

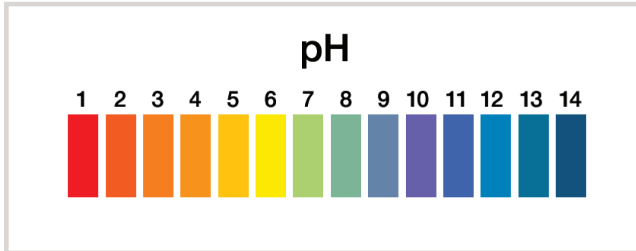
Ao trabalhar tal questão com os alunos, esperamos que haja compreensão de situações reais onde eles poderão aplicar o conceito de logaritmo e suas propriedades.

Questão

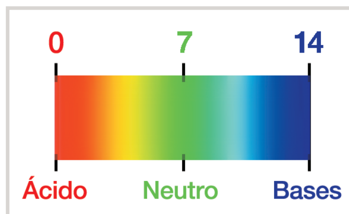
Certamente, ao escolher seu shampoo de preferência, você já leu algo do tipo "pH neutro". Ora, mas o que significa isto?

O que é pH?

pH é um sigla que significa potencial hidrogeniônico e tem esse nome pois indica a concentração de íons de hidrogênio no meio. De uma forma mais clara, pH é um índice que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer. O pH possui uma escala que vai de 0 a 14, conforme indica a figura abaixo.



Um meio é classificado como dito ser ácido, neutro ou alcalino de acordo com a faixa de seu pH. A figura a seguir ilustra esta classificação:



Escala de pH

Se $[H^{+}]$ é a concentração de íons em gramas por litro, então o pH é definido por

$$pH = -\log[H^{+}]$$

A partir dessas informações, responda aos seguintes itens:

a. Um certo shampoo tem pH igual a 2,5. Classifique este shampoo de acordo com a informação acima.

b. Indique a concentração de íons de hidrogênio neste shampoo. Se preferir efetuar os cálculos, utilize uma calculadora.

c. Shampoos para crianças são, geralmente, alcalinos, ou seja, possuem pH próximo de 14, na escala apresentada. Sabendo que o de uma certa marca possui concentração íons de 10^{-13} gramas por litro, ache o pH deste shampoo.

Aspectos pedagógicos

Primeiro, você deve alertar seus alunos que uma oportunidade de construir conhecimentos é fazê-lo através de problemas que introduzam novos conceitos. E este é o caso! Tranquilize-os em relação às informações sobre Química, presentes no contexto. Faça-os reter a atenção na fórmula que define o pH. Esta é expressa através de um logaritmo, que é o assunto presente. Para obter êxito neste problema, basta, portanto, extrair a informação básica em cada item do problema e obter a pedida. Em suma, num item é dado o logaritmo e se pede o logaritmando, e no outro, exatamente o contrário.

Ressalte a importância do assunto estudado, mostrando a abrangência e a aplicabilidade.

Folha de atividade – Questão dissertativa

Nome da escola: ____

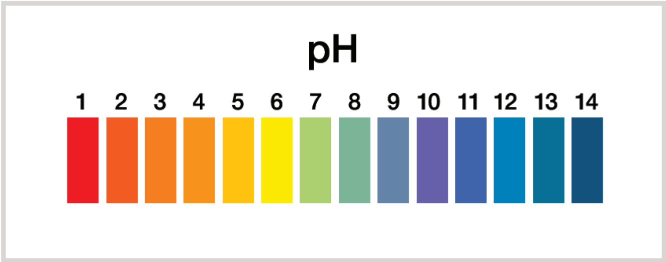
Nome do aluno: ____

Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.

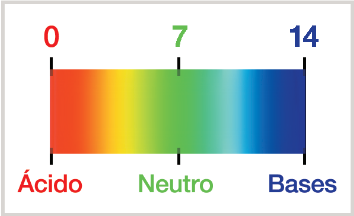
Certamente, ao escolher seu shampoo de preferência você já leu algo do tipo "pH neutro". Ora, mas o que significa isto?

O que é pH?

pH é um sigla que significa potencial hidrogeniônico e tem esse nome pois indica a concentração de íons de hidrogênio no meio. De uma forma mais clara, pH é um índice que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer. O pH possui uma escala que vai de 0 a 14, conforme indica a figura abaixo.



Um meio é classificado como dito ser ácido, neutro ou alcalino de acordo com a faixa de seu pH. A figura a seguir ilustra esta classificação:



Escala de pH

Se $[H^+]$ é a concentração de íons em gramas por litro, então o pH é definido por

$$pH = -\log[H^+]$$

A partir dessas informações, responda aos seguintes itens:

a. Um certo shampoo tem pH igual a 2,5. Classifique este shampoo de acordo com a informação acima.

____

____

b. Indique a concentração de íons de hidrogênio neste shampoo. Se preferir efetuar os cálculos, utilize uma calculadora.

c. Shampoos para crianças são, geralmente, alcalinos, ou seja, possuem pH próximo de 14 na escala apresentada. Sabendo que o de uma certa marca possui concentração íons de 10^{-13} gramas por litro, ache o pH deste shampoo.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão objetiva (ENEM 2011)	Folha de atividades, lápis, borracha	Questão objetiva que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual	10 minutos

Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão objetiva que pode ser usada como complemento ao que foi proposto no material do aluno na seção *"O que perguntam por aí?", p. 37*. Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

Sugerimos nesta etapa, a escolha de questões objetivas que contemplem as habilidades pretendidas nesta unidade, para compor o instrumento avaliativo. Se desejar, você pode buscar outras questões de acordo com o perfil da sua turma. A ideia é que além de avaliar o aprendizado, o aluno familiarize-se com questões cobradas em avaliações de larga escala, como Enem, vestibulares, concursos etc.

Questão

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade.

Assim como a escala Richer, MMS é uma escala logarítmica, donde M_w e M_0 relacionam-se pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log M_0$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de Janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7{,}3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe em (dina.cm)?

a. $10^{-5,10}$

b. $10^{-0,73}$

c. $10^{12,00}$

d. $10^{21,65}$

e. $10^{27,00}$

Aspectos pedagógicos

Você pode intervir junto aos alunos na resolução do problema, caso observe alguma dificuldade ou insegurança. É provável que a partir disto eles consigam desenvoltura para seguir adiante. Tente estimular as ideias que levem às respostas desejadas. Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas. Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Neste momento, é importante que você pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.

Você pode intervir, alertando aos alunos que, mais uma vez, trata-se de um problema contextualizado onde, para se obter a solução do mesmo, basta identificar na "fórmula" fornecida, o que é dado e o que é pedido. Enfatize, mais uma vez, o alcance desta ferramenta (logaritmo) no mundo real. As operações realizadas são simples, mas é necessário saber manusear bem com logaritmos.

Folha de atividade – Questão objetiva (Enem – 2011)

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade.

Assim como a Escala Richer, MMS é uma escala logarítmica, donde M_w e M_0 relacionam-se pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log M_0$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de Janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7{,}3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe em (dina.cm)?

a. $10^{-5,10}$

b. $10^{-0,73}$

c. $10^{12,00}$

d. $10^{21,65}$

e. $10^{27,00}$

Gabarito

Questão dissertativa

a. Um shampoo intermediário, entre ácido e neutro, possui pH = 3,5. O shampoo em questão é ácido, pois tem pH menor que 3,5.

b. Como $pH = -\log[H^+]$, resulta da definição de logaritmo que $[H^+] = 10^{-2,5}$ gramas de íons por litro. Você pode usar a calculadora, se desejar.

c. Como $[H^+] = 10^{-13}$, resulta que $pH = -\log 10^{-13} = 13$.

Questão objetiva

Como $M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log M_0$ e $M_w = 7{,}3$, resulta que

$$7{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log M_0$$

onde,

$$18 = \frac{2}{3}\log M_0 \Leftrightarrow \log M_0 = 27 \Leftrightarrow M_0 = 10^{27}$$

Isto corresponde a letra (e).

Volume 2 • Módulo 3 • Matemática • Expansão

Geometria Espacial: prismas e cilindros

Cleber Dias da Costa Neto, Heitor Barbosa Lima de Oliveira, Patrícia Nunes da Silva e Telma Alves

Introdução

Na unidade 23 do módulo 3 do material do aluno são apresentadas diversas situações e atividades sobre prismas e cilindros.

Para auxiliá-lo, pesquisamos e elaboramos algumas atividades e recursos que podem complementar a exposição deste tema em suas aulas. Uma descrição destas sugestões está colocada na tabela adiante, e seu detalhamento no texto que segue.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora. É uma atividade cujo intuito, além de iniciar a exposição do tema, é promover uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, espera-se que os alunos consigam identificar prismas e cilindros, bem como seus elementos, em situações cotidianas ou em formas presentes na paisagem.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, abordando o cálculo de área e volume de prismas e cilindros, além do Princípio de Cavalieri, disponibilizamos alguns recursos complementares vinculados ao conteúdo do material didático. Tais recursos apresentam-se associados às atividades descritas detalhadamente neste material. Sugerimos a sua realização nas aulas subsequentes à aula inicial de acordo com a realidade da sua turma. Recomendamos que sejam feitas as alterações e adaptações sempre que achar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro, dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo. E o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da mera reprodução de exercícios feitos anteriormente. Também disponibilizaremos algumas questões de avaliações de larga escala, como ENEM, Vestibulares, Concursos Público, entre outros.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	Expansão	6 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Geometria Espacial: prismas e cilindros	Geometria Espacial – Formas Geométricas
Objetivos da unidade	
Identificar prismas e cilindros, bem como seus elementos;	
Conhecer o princípio de Cavalieri;	
Calcular a área lateral, total e o volume de prismas e cilindros;	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	87 a 89
Seção 1 – Os elementos	90 a 96
Seção 2 – Área e Volume do paralelepípedo	96 a 100
Seção 3 – Princípio de Cavalieri e o volume dos sólidos em geral	101 a 104
Seção 4 – Área e volume do cilindro	104 a 108
Resumo e Conclusão	108 a 109
Veja ainda	110
O que perguntam por aí?	111 a 112

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade(s) inicial(is)

Descrevemos a seguir situações motivadoras nas quais queremos que os alunos iniciem uma discussão coletiva e se familiarizem com o conteúdo matemático a ser trabalhado de forma empírica e com atividades de fácil compreensão antes da formalização. Sugerimos que você escolha a que seja mais adequada à sua realidade ou, se preferir, utilize uma atividade própria.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Volume	Tesouras, cola, réguas, cópias do texto "O que é volume?" e da folha de atividades — Volume (disponíveis na Seção Aspectos operacionais).	Nessa atividade, os alunos irão trabalhar de forma intuitiva com o conceito de volume e vão deduzir informalmente a fórmula de volume de um paralelepípedo.	Turma disposta em grupos de 4 alunos.	25 minutos

Observação: Essa atividade foi proposta em Fontes: http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?ID_OBJETO=43125&tipo=ob&cp=994779&cb=&n1=&n2=Roteiros+de+Atividades&n3=Ensino+M%u00e9dio&n4=Matem%u00e1tica&b=s; http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20122/mat1514/cap5.pdf

Aspectos operacionais

1. Divida a turma em quartetos e distribua o texto **O que é volume?**:

O que é volume?

— Ana, aumenta o volume da TV! Não estou ouvindo nada!

— Comprei esse creme para controlar o volume do meu cabelo.

— Cheguei de viagem e, na hora de pagar o táxi, o taxista olhou para minhas malas e disse que ia me cobrar R$ 1,70 por cada volume!

Nos trechos acima, a palavra volume tem diferentes significados. Estamos interessados aqui no uso da palavra volume para indicar a QUANTIDADE DE ESPAÇO OCUPADA POR UM CORPO OU OBJETO.

Como comparar o volume de dois objetos?

Para responder a essa pergunta, precisamos decidir qual deles ocupa mais espaço. Vamos considerar uma garrafa e uma panela, por exemplo. Enchendo cada uma delas com água, vemos que a de maior volume será aquela que precisar de mais água para ficar completamente cheia. No entanto, nem sempre podemos usar estratégias como essas para comparar volumes.

Como medir o volume de um corpo ou objeto?

Quando falamos em medir, lembramo-nos de régua, trena, etc. Todos esses instrumentos são graduados, tem uma unidade de medida: o centímetro, a polegada, etc. Para medir o volume, também vamos precisar de uma unidade de medida. No caso do volume, a unidade adotada é um cubo cuja aresta mede 1 cm, por exemplo. O volume desse cubo será nossa unidade de medida e é chamada de centímetro cúbico (). Para medir o volume de um corpo ou objeto, teremos que decidir quantos desses cubinhos cabem dentro dele!

2. Após a leitura do texto, discuta-o com os alunos e esclareça possíveis dúvidas de compreensão do texto.
3. Entregue, para cada quarteto, tesouras, cola e uma cópia da folha de atividades — Volume.
4. Oriente os quartetos a recortarem os moldes e a montarem os cubos e a caixa.
5. Finalmente, oriente-os a usarem os cubos para determinar o volume da caixa.

Aspectos pedagógicos

- Depois que os alunos determinarem o volume da caixa a partir da contagem da quantidade de cubos de que cabem dentro da caixa, compartilhe os procedimentos que eles adotaram para contar a quantidade de cubos.
- Estimule-os a verbalizaram para os demais colegas como procederam; os alunos tendem a ter dificuldades de explicitar suas estratégias; esse é um exercício que favorece a fixação do aprendizado e desenvolve o raciocínio cognitivo.

- Explore os mecanismos utilizados para contagem; oriente-os a seguir um padrão de contagem (por camadas, por fileiras verticais).
- Aproveite a atividade para relembrar medidas de comprimento: peça aos alunos para verificar quantas vezes o lado da cada face do cubo cabe no comprimento da caixa que está sendo preenchida; proceda da mesma forma para a altura e a profundidade da caixa. Reforce que, agindo assim, eles estão medindo as dimensões (muitas vezes, essa palavra é complicada para eles) da caixa.
- Instigue-os a estabelecer uma relação entre os valores encontrados para a medição das dimensões da caixa e o valor encontrado para o volume da caixa.
- Oriente os alunos a construírem uma caixa de dimensões utilizando somente os cubos. Sugira que investiguem o que acontece ao volume quando alteramos as dimensões da caixa. Sugira que adicionem ou retirem camadas (ou fileiras) de cubos. Determinem as dimensões e o volume das "novas" caixas obtidas.

Atividades – Volume

Nome da Escola: ____

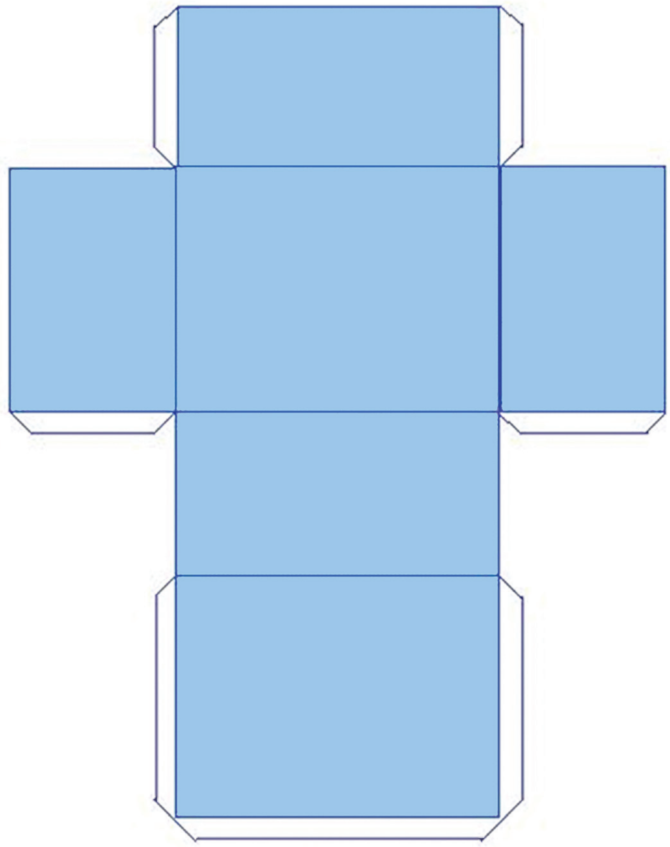
Nome: ____

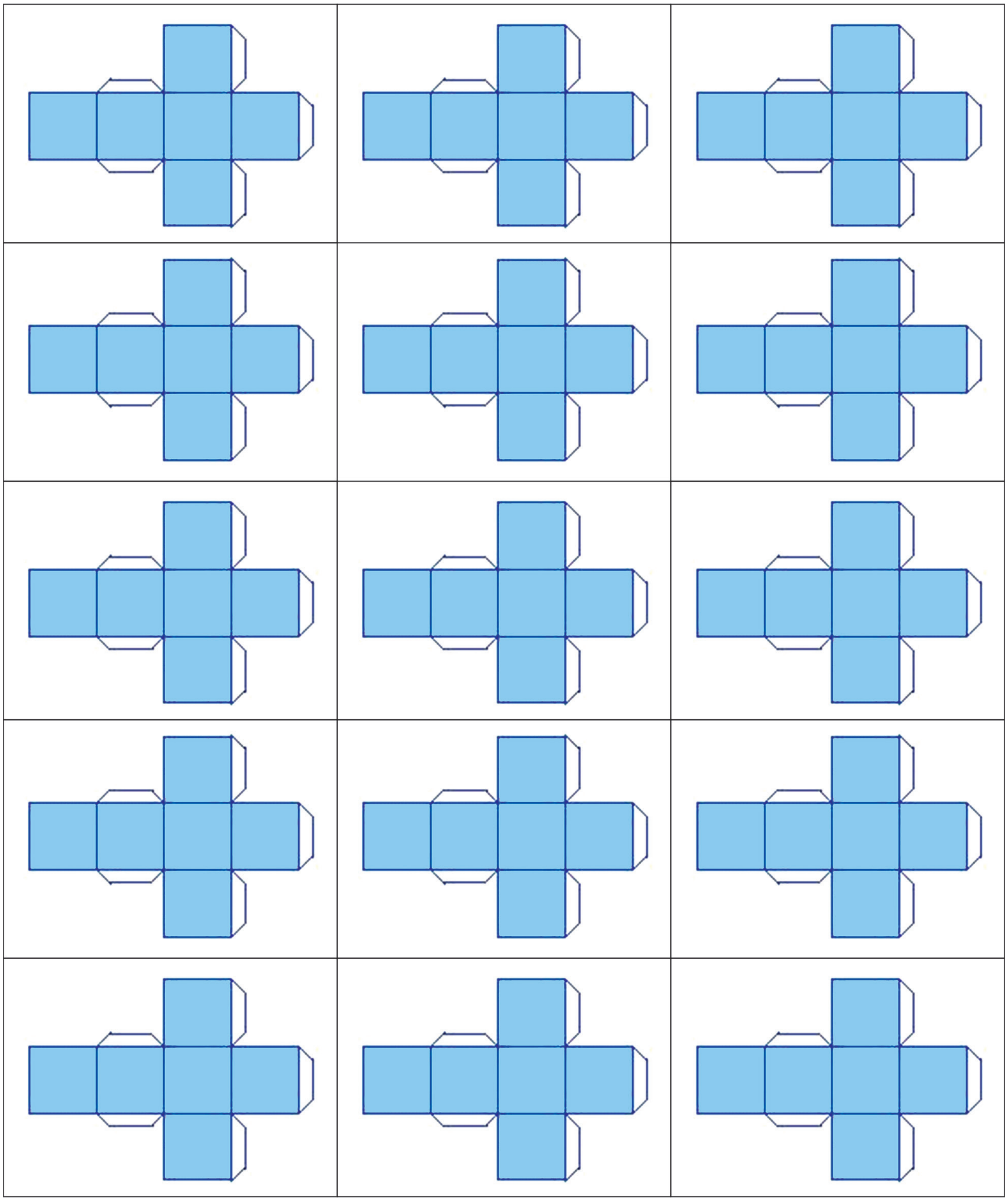
Problema:

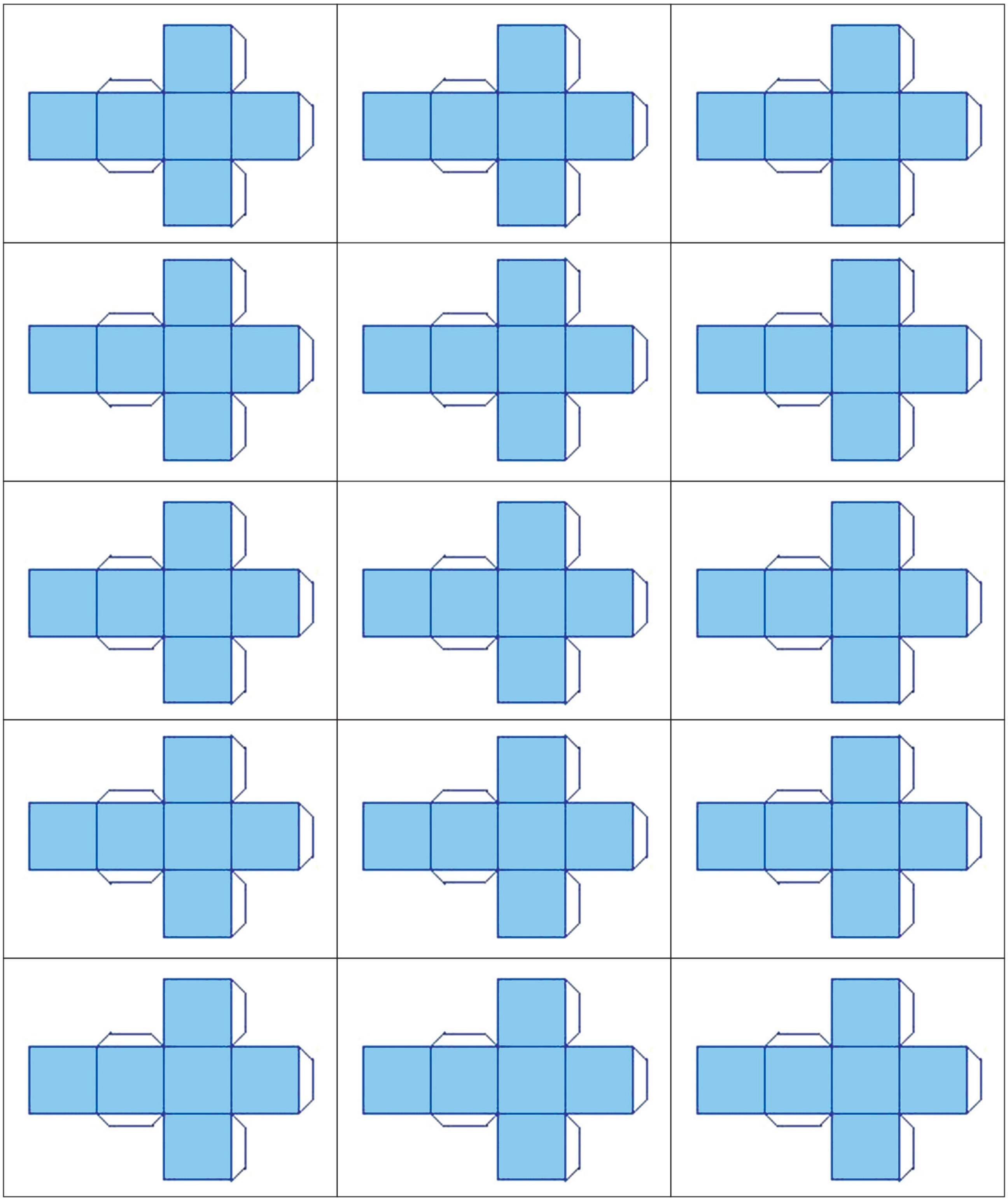
Sua tarefa é determinar o volume de uma caixa em . Isto é, você deve determinar quantos cubos de cabem dentro dela.

Incialmente, você deve montar a caixa e os cubinhos de :

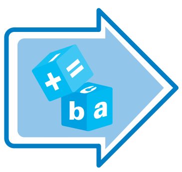
- Recorte os moldes abaixo e monte a caixa e os pequenos cubos (deixe a caixa com a tampa "aberta" — como uma caixa de sapato. Cole somente suas laterais).
- Determine quantos cubos de cabem dentro da caixa que você montou.







Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Princípio de Cavalieri	Cópias do texto **Princípio de Cavalieri** (disponível na Seção **Aspectos operacionais**).	Nessa atividade, os alunos irão trabalhar de forma intuitiva com o Princípio de Cavalieri.	Turma disposta em duplas	20 minutos

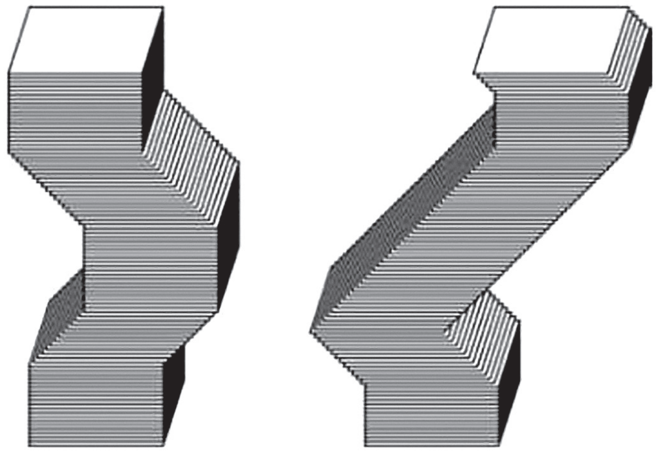
Observação: Essa atividade foi proposta em http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012762.pdf; http://ambiente.educacao.ba.gov.br/guias_pedagogicos/653.pdf

Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua o texto **Princípio de Cavalieri**.
- Oriente os alunos a lerem o texto e discutirem entre si as questões. Sugira que registrem suas considerações e tentem justificar suas respostas.

Princípio de Cavalieri

Dois amigos estavam brincando de empilhar quadrados de cartolina. Cada pilha foi feita com a mesma quantidade de quadrados. Veja as pilhas que eles fizeram:



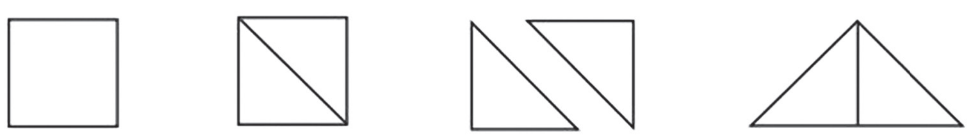
As duas pilhas têm a mesma altura.

Se revestíssemos (na lateral e no fundo) as duas pilhas com plástico e retirássemos os quadrados de cartolina, teríamos dois recipientes de mesma altura e formas diferentes. Pela maneira que esses recipientes foram construídos, sabemos que cabem neles a mesma quantidade dos quadrados de cartolina que foram empilhados.

1. E se colocássemos areia dentro deles? Precisaríamos da mesma quantidade de areia para enchê-los completamente?

2. Podemos dizer que esses dois recipientes têm o mesmo volume? (Lembre-se que quando falamos em volume de um corpo ou objeto, estamos falando da QUANTIDADE DE ESPAÇO OCUPADA PELO CORPO OU OBJETO.).

Depois de montarem as pilhas, um dos amigos decidiu cortar cada um de seus quadrados de cartolina ao meio, formando dois triângulos iguais. Ele juntou cada um desses triângulos para formar um triângulo maior como indicado na figura abaixo.



Ele usou os triângulos maiores para formar uma pilha, ao lado da pilha de quadrados de seu amigo:

3. Podemos dizer que uma das pilhas tem volume maior do que a outra?

4. O que elas têm em comum? (compare suas alturas, quantidade de peças usadas para construí-las, etc.).

Vamos analisar mais uma situação.

As pilhas da figura abaixo foram construídas usando sempre as mesmas peças de madeira.

5. O que você pode dizer sobre o volume dessas pilhas?

Aspectos pedagógicos

- Após a leitura do texto, discuta-o com os alunos e esclareça possíveis dúvidas de compreensão do texto.
- Mostre aos alunos que a altura da pilha de peças de madeira, no caso de duas fotos, passa por fora da pilha; essa é uma ideia fora do senso comum deles.
- Caso os alunos apresentem muita dificuldade, é possível usar alguns livros iguais que existam em sala para recorrer a uma estratégia concreta.
- Relembre com os alunos a noção de polígonos equivalentes: o quadrado e o triângulo têm a mesma área.
- Depois da leitura, promova uma discussão com os alunos e estimule-os a compartilhar suas justificativas. É possível que eles se restrinjam somente a explorar o fato de que foram usadas a mesma quantidade ou as mesmas peças para construir as pilhas. Tente avançar a discussão, explorando outros elementos em comum: altura; áreas das seções horizontais.

Seção 1 – Os Elementos

Páginas no material do aluno

90 a 96

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Pletora de Poliedros	Software "Uma Pletora de Poliedros", encontrado em http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-offline.zip	Nesta atividade, os alunos terão acesso a um software interativo que permite visualizar e manipular vários tipos de poliedros (dentre eles, os prismas)	Turma dividida em duplas ou trios.	30 minutos

Aspectos operacionais:

Esta é uma atividade exploradora. Nesta parte inicial do assunto Geometria Espacial, utilize este software para que os alunos possam ter os primeiros contatos com alguns prismas de diversas bases, suas planificações (com possibilidade de impressão dessas planificações) e alguns cortes que ajudarão a melhorar a visualização do Princípio de Cavalieri.

Oriente os alunos, acompanhando as folha de atividades a seguir.

Atividades – Pletora de Poliedros

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Você está acessando um software chamado "Uma Pletora de Poliedros". Neste momento inicial, você enxerga a seguinte interface:

Selecione a opção Prismas no local indicado pela seta. Logo abaixo, aparecerá o prisma regular de base triangular. Com o mouse, clique e arraste a figura para manipular e visualizar todas as suas características e responda às perguntas:

a. Quantas faces este prisma possui?

b. As faces desse prisma são formadas por quais figuras geométricas?

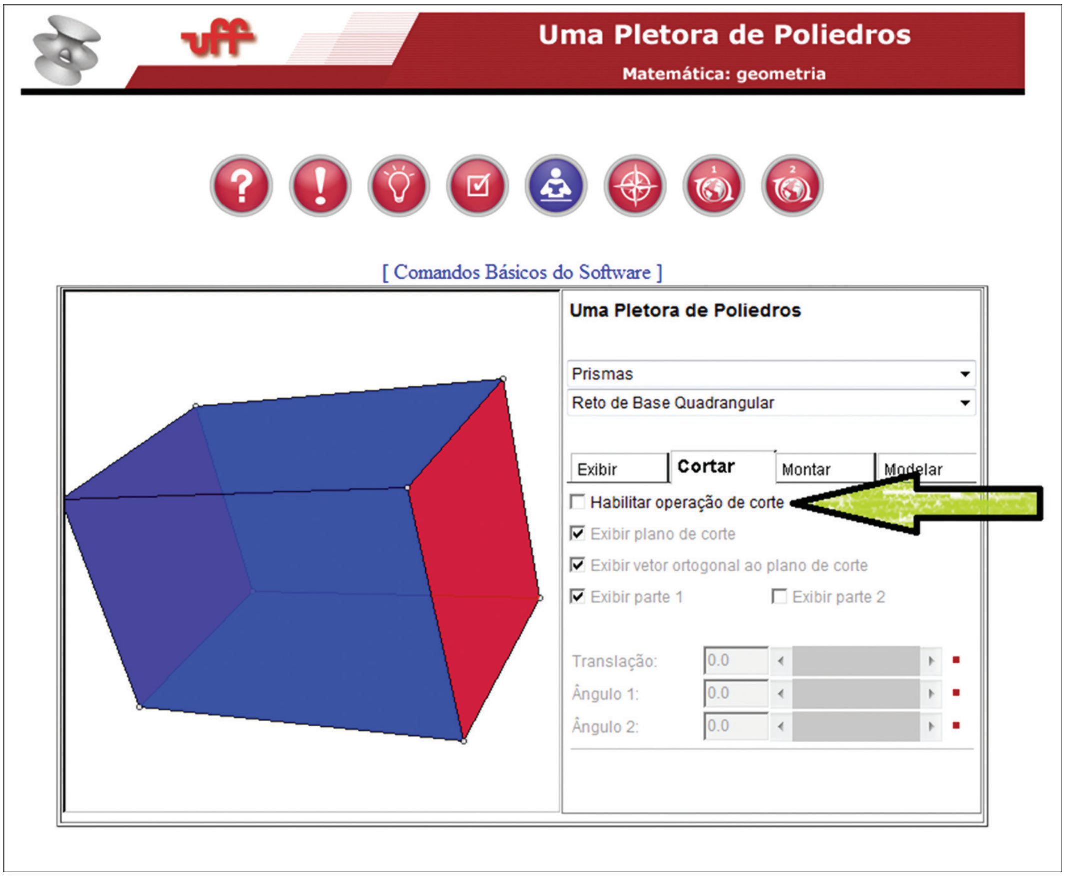
c. Quantas arestas este prisma possui? E quantos vértices?

Agora, no menu onde aparece escrito "Regular de Base Triangular", selecione a opção "Reto de Base Triangular". Escreva nas linhas abaixo as principais diferenças entre o prisma regular e o prisma reto de base triangular.

____

____

No mesmo menu, selecione agora a opção “Reto de Base Quadrangular”. Gire e explore a figura em todas as direções. Em seguida, selecione mais abaixo a aba chamada “cortar” e marque a opção “Habilitar operação de corte” (ver figura abaixo).



Em seguida, gire a figura com o auxílio do mouse. Altere os valores de “Translação”, “Ângulo 1” e “Ângulo 2” para ver o plano de corte se movimentar. Após as explorações da imagem, responda às perguntas:

a. No valor de Translação = 0.0, de Ângulo 1 = 0.0 e Ângulo 2 = 0.0, o plano de corte determina sobre o prisma uma figura geométrica. Qual é essa figura?

b. No valor de Translação = 0.0, de Ângulo 1 = –45.0 e Ângulo 2 = 30.0, o plano de corte limita sobre as faces vermelhas do prisma duas figuras geométricas diferentes. Quais são essas figuras?

c. No valor de Translação = 4.0, de Ângulo 1 = 30.0 e Ângulo 2 = –45.0, uma figura geométrica fica apoiada no plano de corte do prisma. Qual é essa figura?

Aspectos pedagógicos

- Professor, os alunos podem apresentar dificuldades na manipulação dos instrumentos de informática como o mouse. Alguns alunos precisarão de auxílio mais enfático para as manipulações.
- Explore com os alunos as características de cada prisma estudado. Saliente para a diferença de tamanhos em relação à base, a altura do prisma, a existência de variadas figuras geométricas que compõem os prismas. Saliente as diferenças básicas entre quadrados e retângulos.
- Caso ache necessário, o software disponibiliza a planificação de todos os prismas trabalhados que pode ser impressa para que os alunos possam identificar melhor os elementos do prisma através de uma melhor manipulação.

Seção 2 – Área e Volume do paralelepípedo

Páginas no material do aluno

90 a 96

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Visualizações	Computador com internet. Desafios disponíveis em http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/visualizacoes.htm	Nesta atividade, os alunos farão atividades que desafiam a visualização de figuras tridimensionais, auxiliando na aquisição dos conceitos de área lateral e volume de prismas.	turma dividida em duplas ou trios.	20 minutos

Aspectos operacionais

Projete com o Datashow a atividade contida no endereço http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/visualizacoes.htm. Neste jogo constituído de quatro desafios, são exibidas duas figuras A e B no topo da imagem. A figura A consiste no sólido original formado por diversos cubinhos. Parte dos seus cubinhos é retirada, formando, então, a figura B. Cabe aos alunos tentar adivinhar qual a peça que foi retirada de A para se obter a figura B dentre as opções exibidas.

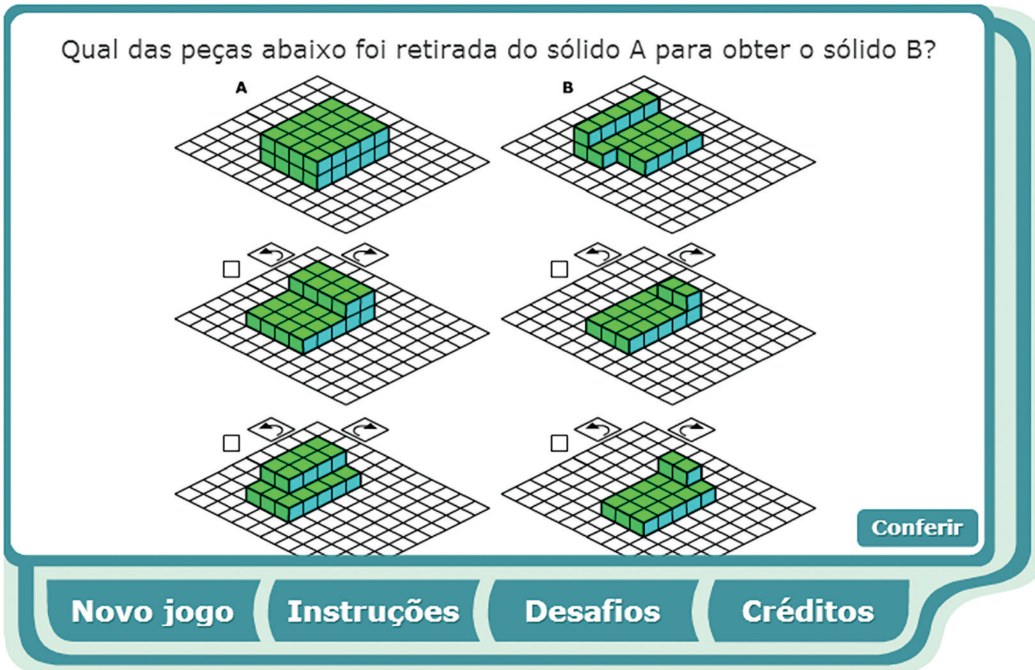


Figura da interface do jogo on-line. Aqui são exibidas as figuras A e B, além das opções de peças que podem ser rotacionadas para facilitar a visão dos alunos.

Aspectos pedagógicos

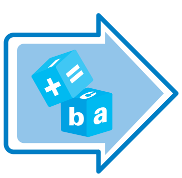
- Professor, a atividade tem por objetivos iniciar a prática de visualização de uma figura trimendisional, bem como diagnosticar os alunos que apresentem dificuldades visuais na identificação da terceira dimensão no desenho em perspectiva.
- Alerte-os que os blocos que estão nas opções de escolha estão na posição invertida da retirada, ou seja, "de cabeça para baixo" em relação à retirada do bloco original.
- Para tirar melhor proveito da atividade comece por aquelas que apresentam formas com menor volume: blocos formados por seis ou dez cubos.
- De início, eles podem sentir muita dificuldade, por ser uma atividade apenas visual, sem manipulação. Por isso, talvez seja interessante você ter dez cubos (podem ser dados ou formas de papel) para lançar mão de uma estratégia concreta: oferecer a cada grupo, de forma alternada, o conjunto de cubos para que ele materialize o que vê e tente determinar a alternativa correta.
- Para aproveitar melhor a atividade, inicie pedindo a eles que contem os cubinhos de uma determinada formação. Dessa forma, poderá identificar algumas dificuldades.
- Estimule-os a girar as figuras várias vezes; oriente-os a serem pacientes.

- Oriente-os a criarem alguma estratégia, por exemplo: olhar a altura e a profundidade do bloco original e identificar o que foi subtraído.
- Explore a noção de volume: suponha que cada cubo tem a medida padrão de 1m^3. Solicite o registro, em papel, do volume inicial e do volume final, após a retirada de certo volume da atividade em foco; esse procedimento também se torna uma estratégia para alcançar a alternativa correta.
- Explore a noção de área lateral: suponha que cada face do cubo tem a medida padrão de 1m^2.
- Solicite o registro, em papel, da superfície inicial de uma determinada face e da superfície final, após a retirada da quantidade de cubinhos da atividade; esse procedimento também se torna uma estratégia para alcançar a alternativa correta.

Seção 2 – Área e Volume do paralelepípedo e Seção 4 – Área e volume do cilindro

Páginas no material do aluno

90 a 96

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Planificações	tesouras, fitas adesivas, cópias da Folha de Atividades — Planificações (disponível na Seção **Aspectos operacionais**).	Nesta atividade, os alunos irão desenvolver suas habilidades de visualização espacial, trabalhando com o cilindro, o cubo e as suas planificações.	Turma disposta em duplas	25 minutos

Observação: Essa atividade foi proposta em http://gam.pavconhecimento.pt/projectos/pencil/pt/materiais_produzidos/pdf_rui_gracio/Planificacao_Cilindro_RG.pdf ; http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/Monografia%20FinalVanessaAngelotti.pdf

Aspectos operacionais

- A atividade será realizada em três etapas. Na primeira, os alunos visualizam algumas figuras e tentam deduzir quais delas correspondem a planificações do cilindro. Na segunda, eles recortam as figuras e tentam montá-las para verificar quais delas correspondem às planificações do cilindro. Na terceira, eles trabalham em uma tarefa que envolve planificações do cubo.

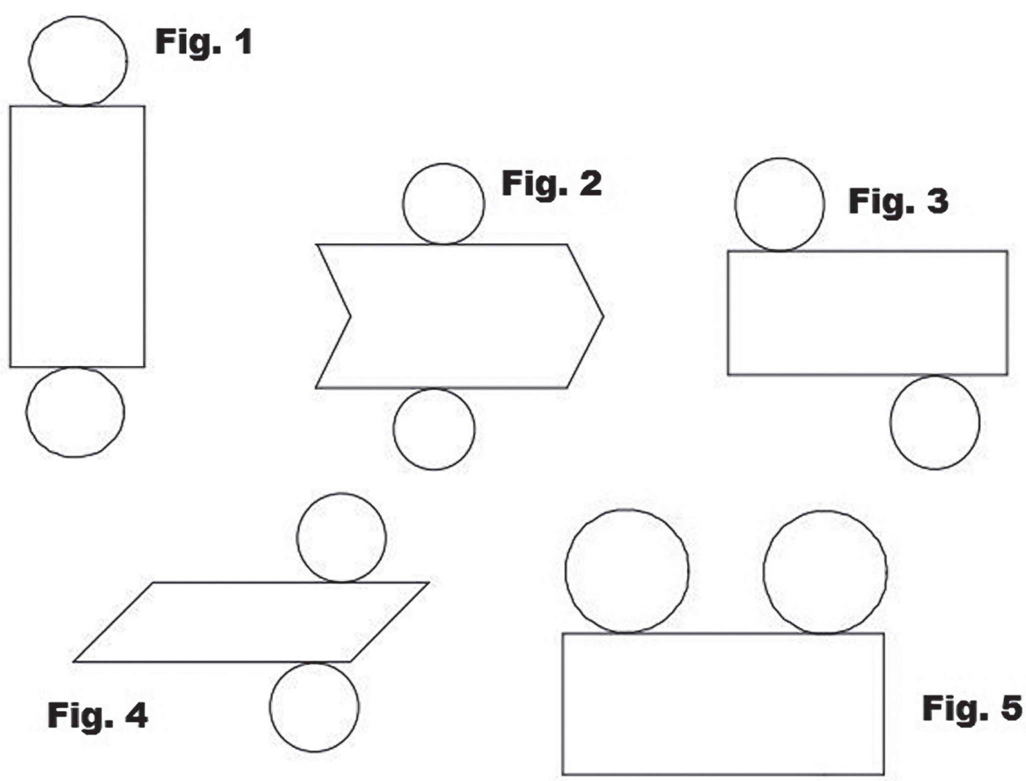
- Divida a turma em duplas e distribua a primeira página da Folha de Atividades — Planificações:

Atividades – Planificações

Nome da Escola: ____

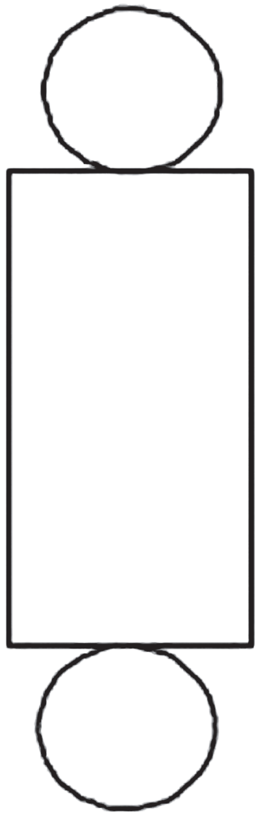
Nome: ____

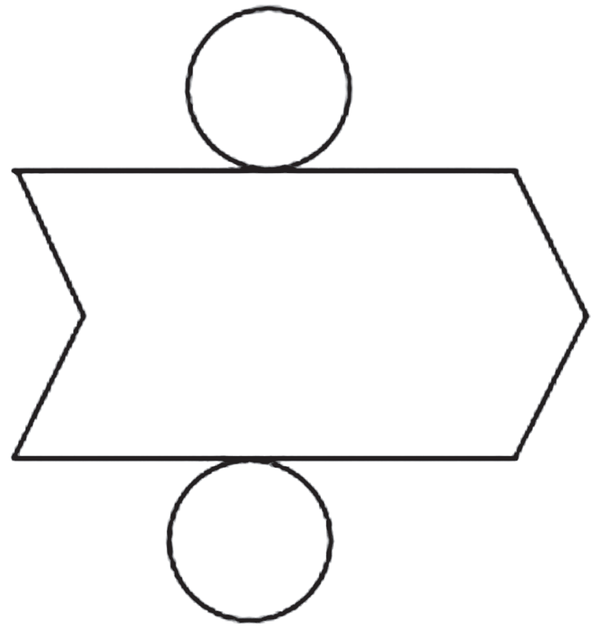
1. Observe as figuras abaixo e indique quais representam ou não a planificação de um cilindro.

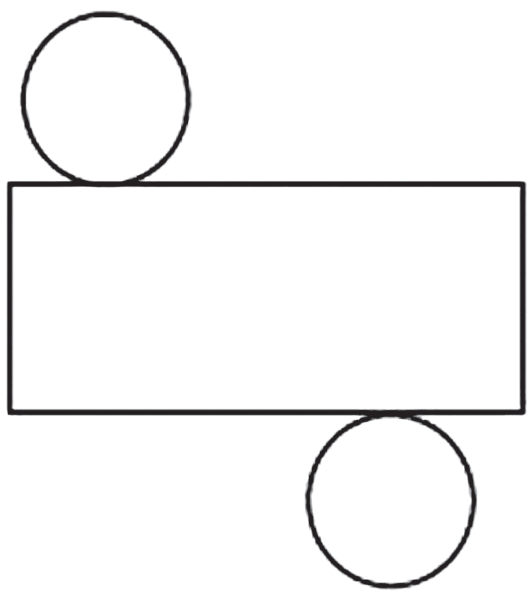


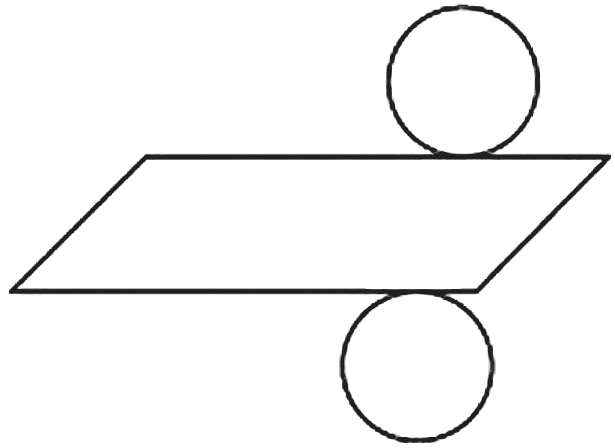
- Depois que as duplas já tiverem feito sua análise, promova uma discussão com os alunos. Solicite que elas compartilhem e justifiquem oralmente quais das figuras representam ou não planificações do cilindro.
- Registre no quadro quais figuras foram consideradas ou não planificações do cilindro. Caso não haja consenso para alguma figura, registre-a como dúvida. Deixe a avaliação definitiva para ser feita após a segunda parte da atividade.
- Distribua tesouras, fitas adesivas e as segunda e terceira páginas da Folha de Atividades — Planificações:

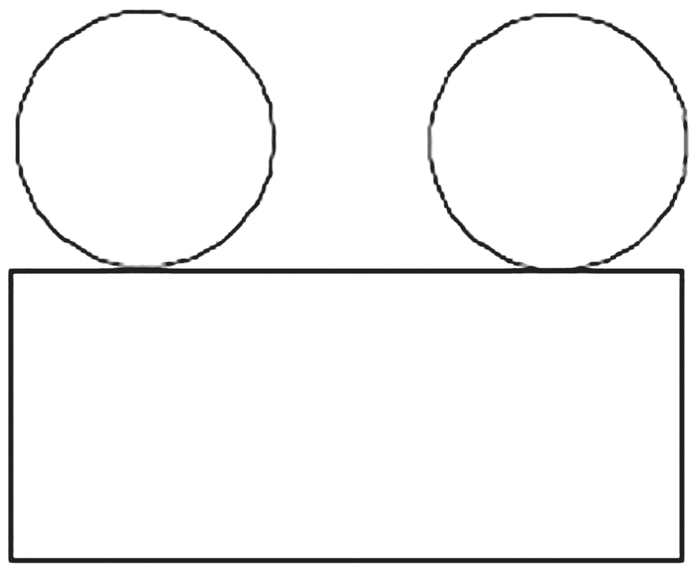
2. Use a tesoura e a fita adesiva para recorte e montar as figuras abaixo e verificar quais delas correspondem a planificações do cilindro (recorte apenas o contorno; não separe os círculos dos moldes). Isto é, quais delas permitem montar um cilindro.





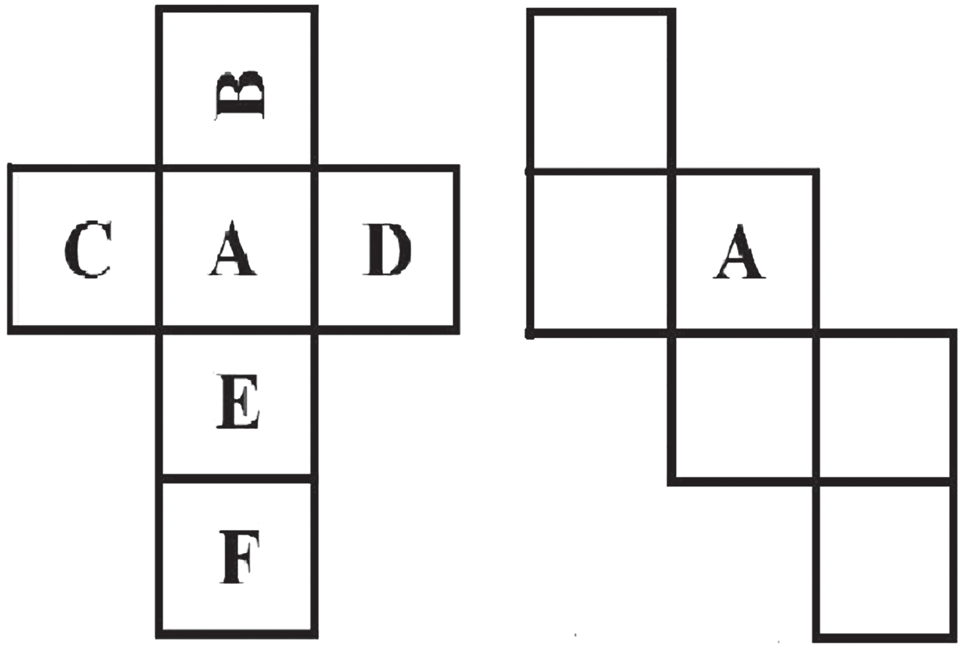




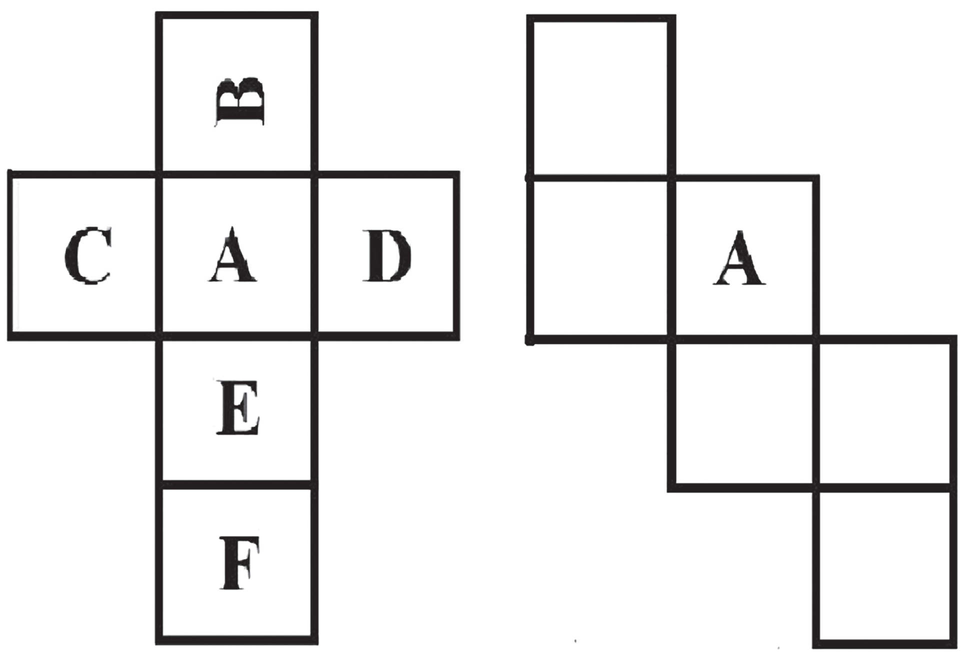


Você sabia que um cubo pode ser planificado de onze maneiras diferentes?

3. Uma das maneiras de planificar o cubo está apresentada na figura da esquerda. Em cada uma das faces desse cubo foram marcadas as letras de A a F. Na figura da direita, temos outra planificação do cubo. Sem recortar e montar o cubo, você pode preencher as cinco faces restantes de modo que, quando dobrarmos, os cubos se tornem idênticos?



4. Para conferir sua resposta, recorte as figuras abaixo e use a fita adesiva para montar os cubos.



Atenção, professor! Tenha moldes sobrando para o caso de acontecer recortes errados.

- Certifique-se de que os alunos recortem apenas o contorno dos moldes. Chame a atenção para que não separem os círculos dos moldes.
- É possível que os alunos enfrentem dificuldades em reconhecer as planificações sem recorrer à montagem dos cilindros ou do cubo. Explique que, na primeira etapa, eles não devem recortar as planificações para tentar montar o sólido. Eles devem imaginar e discutir as ideias com o colega. Recorrer à abstração é uma habilidade importante em Matemática.
- Se a atividade não estiver avançando, antecipe a execução da parte de montagem.
- Depois da montagem, explore com os alunos a relação entre o objeto tridimensional e sua representação planificada.

Seção 2 – Área e Volume do paralelepípedo e Seção 4 – Área e volume do cilindro

Páginas no material do aluno

90 a 96

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fórmula Mágica	Vídeo *Fórmula mágica,* disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1099, calculadoras científicas e cópias da Folha de atividades – Fórmula mágica (disponível na Seção **Aspectos operacionais**).	O vídeo utilizado nessa atividade apresenta mecanismos práticos de cálculos aproximados de volume. Os volumes são obtidos por aproximações dos objetos por cilindros ou paralelepípedos. No problema proposto, o erro cometido em um dos processos de aproximação é analisado.	Turma disposta em duplas	25 minutos

Observação: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1099

- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

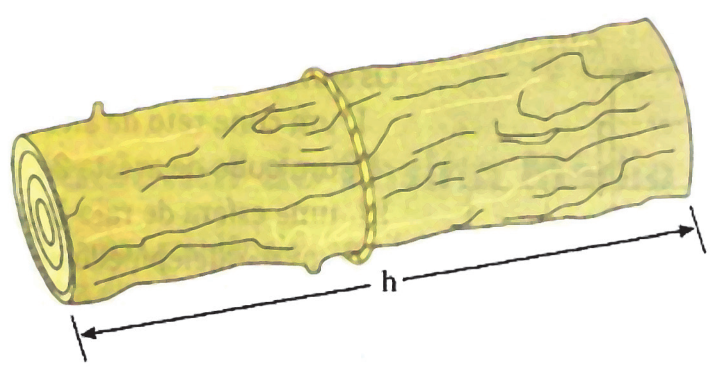
Atividades – Fórmula Mágica

Nome da Escola: ____

Nome: ____

No estado do Amazonas, é comum estimar o volume de uma tora de madeira através do seguinte procedimento:

- Com um barbante, dá-se uma volta completa em torno do tronco.



- O barbante é dobrado duas vezes pela ponta. Em seguida, o comprimento da "segunda dobra" é medido com fita métrica.

- Essa medida é multiplicada por ele mesma e depois multiplicada pelo comprimento do tronco. O resultado obtido é o volume estimado da tora de madeira.

1. Suponha que você tenha uma tora de madeira no formato de um cilindro cuja altura mede 5 metros e cuja base é círculo com perímetro igual a 3,14 metros. Calcule o volume da tora de dois modos: usando o método descrito acima e usando a fórmula para cálculo do volume de um cilindro.

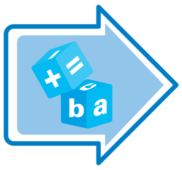
Aspectos pedagógicos

- Professor, para que a atividade seja melhor aproveitada, concretize-a utilizando, por exemplo, um frasco de remédio e um pedaço de barbante; trabalhe com aproximação para a altura do frasco.
- Para melhor entendimento pelo aluno, faça o passo a passo descrito no texto.
- Aproveite a oportunidade para mostrar ao aluno como se procede numa atividade prática com o uso da calculadora.
- Para calcular o volume do cilindro com a fórmula usual, é necessário conhecer o raio do círculo que é base do cilindro. Os alunos podem encontrar dificuldade em deduzir o valor desse raio a partir do conhecimento do perímetro do círculo. Nesse caso, será útil relembrar a fórmula de cálculo do perímetro de uma circunferência.

Seção 3 – Princípio de Cavalieri e o volume dos sólidos em geral

Páginas no material do aluno

101 a 104

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Prismas	Cola, réguas, calculadoras científicas, folhas de papel A4, transferidores, calculadoras, cópias da folha de atividades — Prismas (disponível na Seção **Aspectos operacionais**).	Nessa atividade, os alunos irão construir prismas de base triangular diferentes usando papel A4. Eles deverão ordená-los em ordem crescente de volume e tentarão descobrir qual prisma de volume máximo pode ser construído com meia folha de papel A4.	Turma disposta em trios	35 minutos

Observação: Esta atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1031

- Entregue uma cópia da folha de atividades para cada trio, 3 folhas de papel A4, cola, tesoura, régua, calculadora e transferidor.
- Oriente os alunos a lerem o texto inicial e a executarem as tarefas propostas na folha de atividades. A proposta é que cada aluno construa dois prismas.

Atividades – Prismas

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Prismas

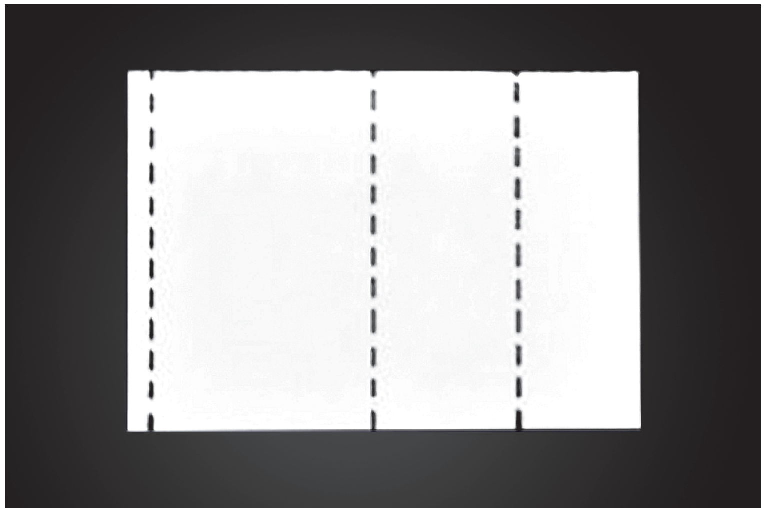
Você deve ter reparado, na prateleira do supermercado, que as embalagens de alguns produtos foram modificadas. Por exemplo, a embalagem do sabão em pó e do leite condensado. São muitas as razões para uma empresa decidir alterar a embalagem de seu produto. Mas, no caso desses dois exemplos, uma das razões foi: ECONOMIA DE MATERIAL!

Hoje vamos investigar como construir canaletas em formato de prismas de base triangular. Vamos fixar a quantidade de material que iremos usar e queremos determinar qual a canaleta que tem volume máximo.

Montagem dos Prismas

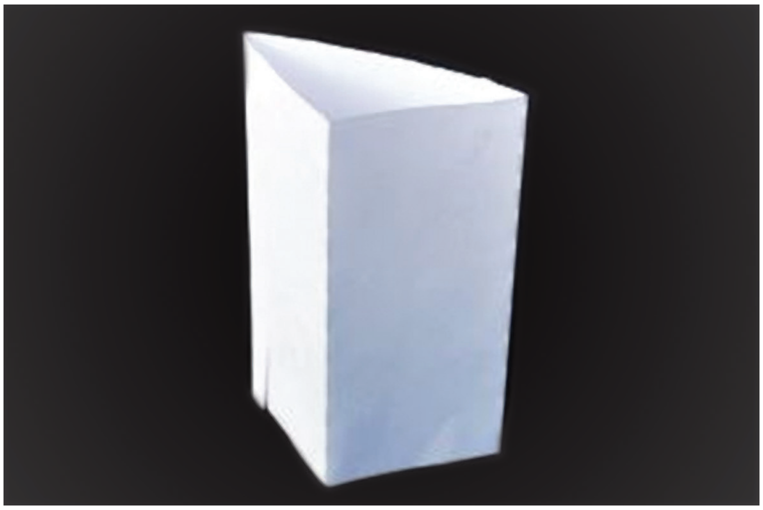
Para montar os prismas, siga os seguintes passos:

- Dividir cada folha A4 ao meio (de modo a obter duas metades de tamanho A5);
- Com meia folha, faça, com a régua, um traço paralelo ao lado menor distando 1,0 cm da extremidade e dobre. Faça mais dois traços paralelos no restante da folha; lembre-se de que esses dois traços devem ser escolhidos de modo que, ao dobrar, seja possível juntar as extremidades do papel e montar um prisma de base triangular.



- Dobre o papel ao longo dos traços.

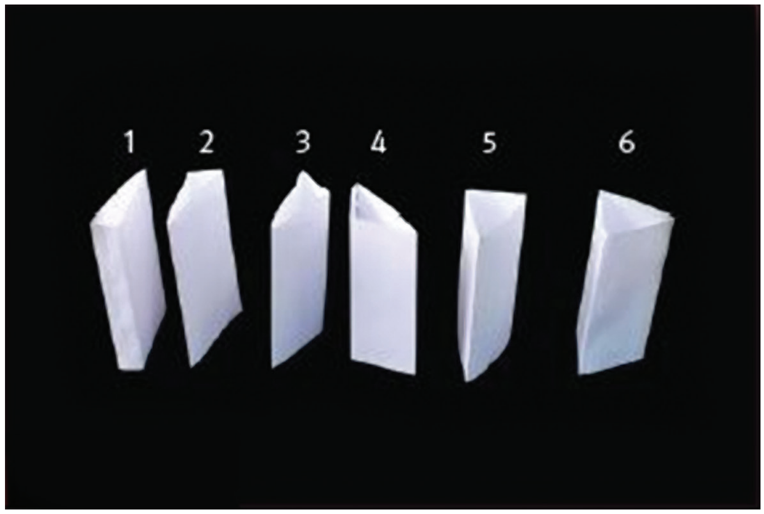
- Cole a aba de 1,0 cm na outra extremidade.



- Repita os passos anteriores com as outras 5 metades de folha A4 de modo que cada prisma tenha bases diferentes.

Comparação dos Volumes dos Prismas

- Observe os prismas que seu grupo montou. Tentem organizá-los em ordem crescente de volume.
- Numere os prismas em ordem crescente de volume: o de menor volume recebe o número 1; o próximo, 2; e assim por diante.



Cálculo dos Volumes dos Prismas

Agora, vamos calcular o volume dos prismas construídos. Sabemos que o volume *V* de um prisma é igual ao produto da área *A* de sua base por sua altura *h*.

Os prismas construídos têm base triangular. Para calcular a área da base, vamos usar a fórmula que nos diz que a área de um triângulo é igual à metade do produto das medidas de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo formado por eles. Se o triângulo tem lados com medidas iguais a *a*, *b* e *c*:

$\text{Área do triângulo} = \dfrac{a \cdot b \cdot sen\alpha}{2}$, onde é o ângulo entre os lados de medida medidas iguais a *a* e *b*.

Para cada prisma:

- Escolha dois lados do triângulo de base e meça o comprimento de cada um deles. Anote na tabela abaixo.
- Com ajuda do transferidor, meça o ângulo formado pelos dois lados escolhidos no item anterior. Anote na tabela abaixo.

Prisma	Lado 1	Lado 2	Ângulo α	Seno α	Altura	Volume
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Determine qual o prisma de maior volume que vocês construíram.

- É interessante lembrar a fórmula que nos diz que a área de um triângulo é igual à metade do produto das medidas de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo formado por eles. Se o triângulo tem lados com medidas iguais a *a*, *b* e *c*:

$\text{Área do triângulo} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$, onde α é o ângulo entre os lados de medidas iguais a *a* e *b*.

- Os alunos podem ter dificuldade em usar a calculadora científica;
- Para melhor aproveitar a atividade, escolha um dos prismas e proponha a realização da atividade na forma de estudo dirigido;
- Após, verifique se a calculadora está sendo usada corretamente no cálculo dos senos dos ângulos;
- Se alguns alunos não conseguirem formar o triângulo, lembre-lhes de que as dobras não podem ser feitas arbitrariamente na folha. É preciso respeitar a condição de existência de um triângulo: um triângulo só pode ser construído se cada lado for menor que a soma dos outros dois.
- Talvez seja necessário ajudar os alunos a usar o transferidor, pois é um instrumento que possui grau de dificuldade no posicionamento correto e na leitura da medição;
- Peça aos alunos para tomarem cuidado para não deformar os prismas na hora de coletar as medidas dos lados e ângulo.
- Ao final da atividade, discuta com os alunos se era realmente necessário calcularmos os volumes para compararmos os prismas. Observe que já sabíamos que todos os prismas tinham mesma altura (igual à metade do comprimento da folha A4). Deduza que o prisma de maior volume será aquele que tiver a maior área de base.
- A partir dos prismas construídos, discuta e levante hipóteses, com os alunos, de como o sólido deveria ser construído para que ele tivesse o maior volume possível.
- Além disso, monte uma tabela no quadro com o prisma de maior volume de cada grupo. Identifique qual o prisma de maior volume encontrado. Discuta com os alunos: a relação entre as medidas dos lados da base, dos ângulos; qual o tipo de triângulo da base: escaleno, isósceles ou equilátero? Será que há algum outro triângulo de base que gera um prisma que possui um volume maior ainda?
- O prisma com maior volume é aquele que possui como base um triângulo equilátero. Para entender o porquê é preciso observar com os alunos que todos os triângulos que formam a base de cada prisma têm o mesmo perímetro (igual à largura da folha A4 menos 1 cm usado na aba de colagem) e lembrar que dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero é o que tem maior área.

- Se ninguém tiver feito esse prisma anteriormente, peça a eles que calculem o volume que esse sólido teria se fosse montado. A medida α do lado desse triângulo da base é dada por

$$a = \frac{\text{largura da folha A4} - 1\text{cm}}{3} = \frac{20}{3} \cong 6{,}67cm.$$

Portanto, o volume do prisma, cuja base é um triângulo equilátero, é igual a:

V = área da base · altura

= área do triângulo equilátero · metade do comprimento da folha A4

$$= \frac{a^2 \cdot sen 60^\circ}{2} \cdot \frac{29{,}7}{2} = \frac{6{,}67^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{29{,}7}{2} \cong 285{,}79 cm^3.$$

Seção 3 – Princípio de Cavalieri e o volume dos sólidos em geral

Páginas no material do aluno

101 a 104

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	A geometria das abelhas	Vídeo *Abelhas matemáticas*, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042, folhas de papel A4, tesouras, fitas adesivas, réguas, cópias da folha de atividades – A geometria das abelhas (disponível na Seção **Aspectos operacionais**).	Nessa atividade, os alunos assistirão a um vídeo sobre a geometria dos alvéolos das colmeias. O vídeo mostra que as abelhas utilizam uma geometria que maximiza a capacidade de armazenamento de mel e minimiza a quantidade de cera gasta na construção dos alvéolos. Nos problemas propostos, vão trabalhar com aspectos dos prismas e suas planificações.	Turma disposta em trios	30 minutos

Observação: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042

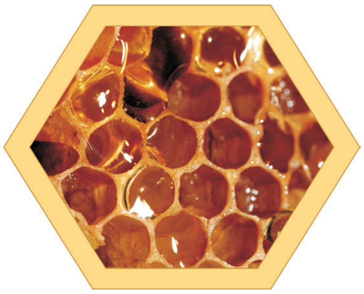
- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em trios e distribua as folhas de atividades, folhas de papel A4, réguas, fitas adesivas e tesouras.
- Depois dos trios trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

Atividades – A geometria das abelhas

Nome da Escola: ____

Nome: ____

A geometria das abelhas



Para entender a geometria dos favos de mel, é preciso atentar para dois aspectos: a justaposição e o encaixe perfeito dos favos e a quantidade de cera gasta na construção de cada alvéolo. Através da resolução dos problemas abaixo propostos, vamos discutir esses dois aspectos.

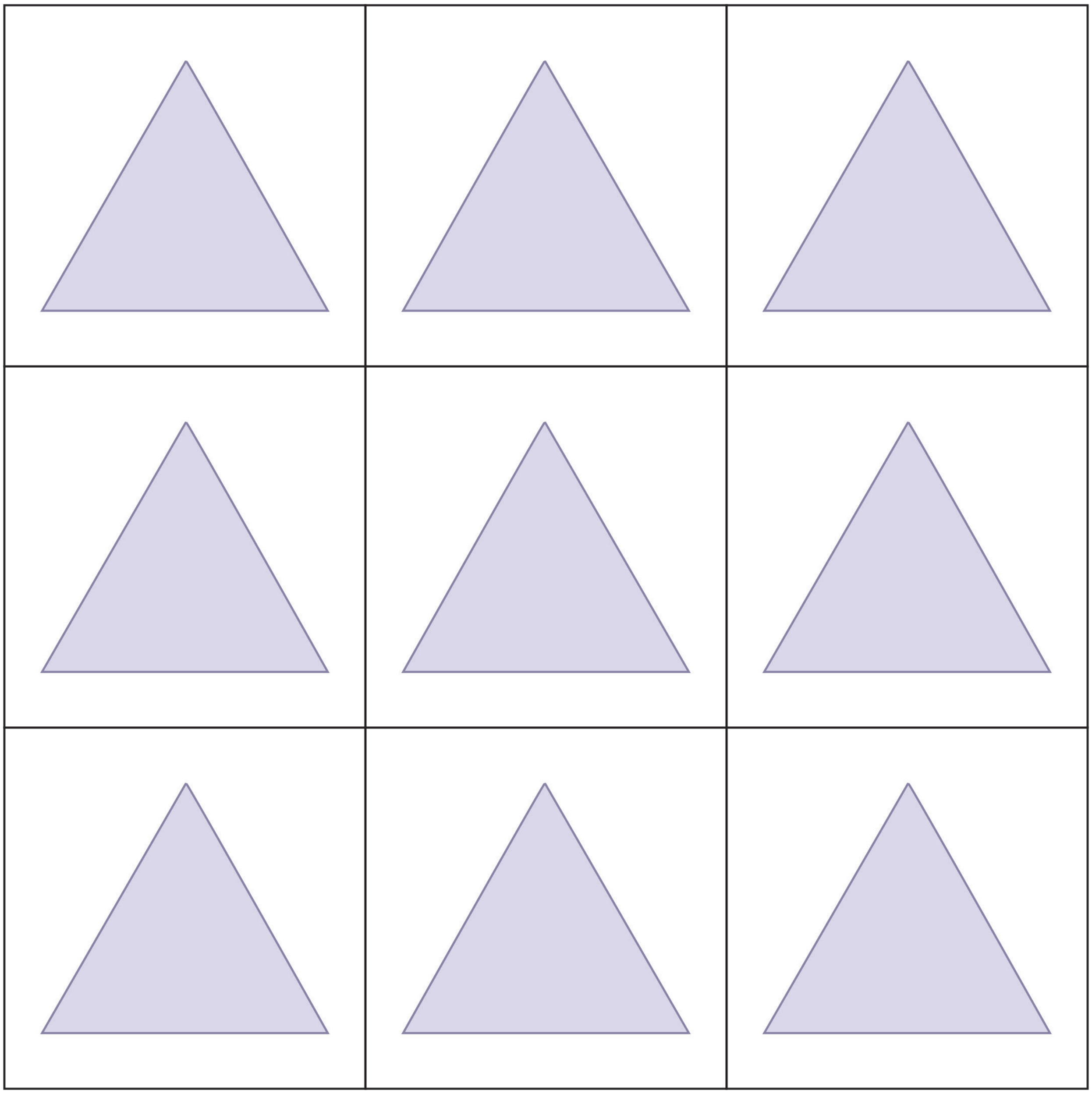
Problemas

Os alvéolos das abelhas são prismas. Para que eles se encaixem perfeitamente, é preciso que suas bases cubram uma região plana sem deixar espaços vazios e sem se sobreporem.

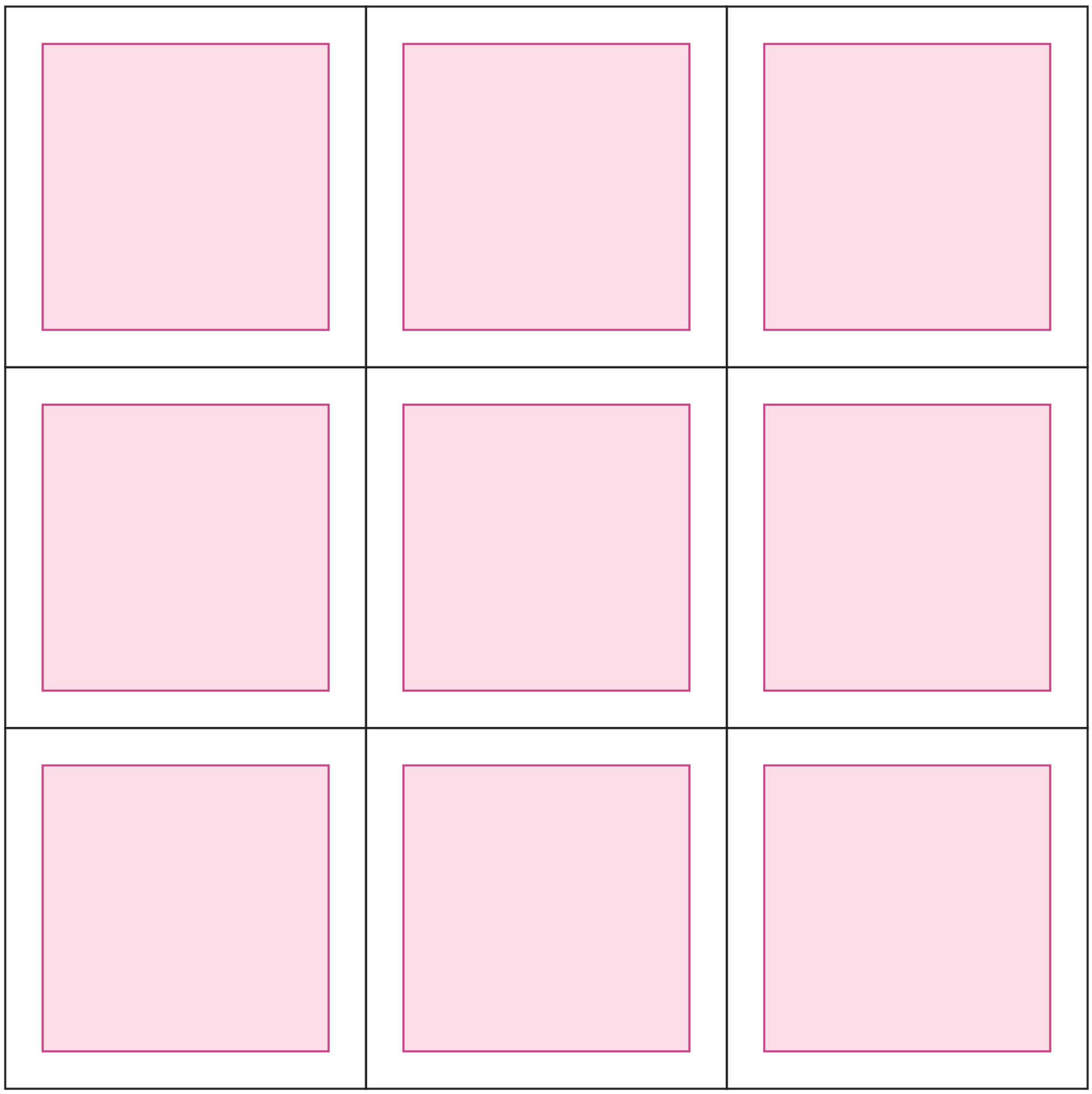
Vamos investigar quais polígonos regulares permitem esses recobrimentos.

Recortem os polígonos abaixo.

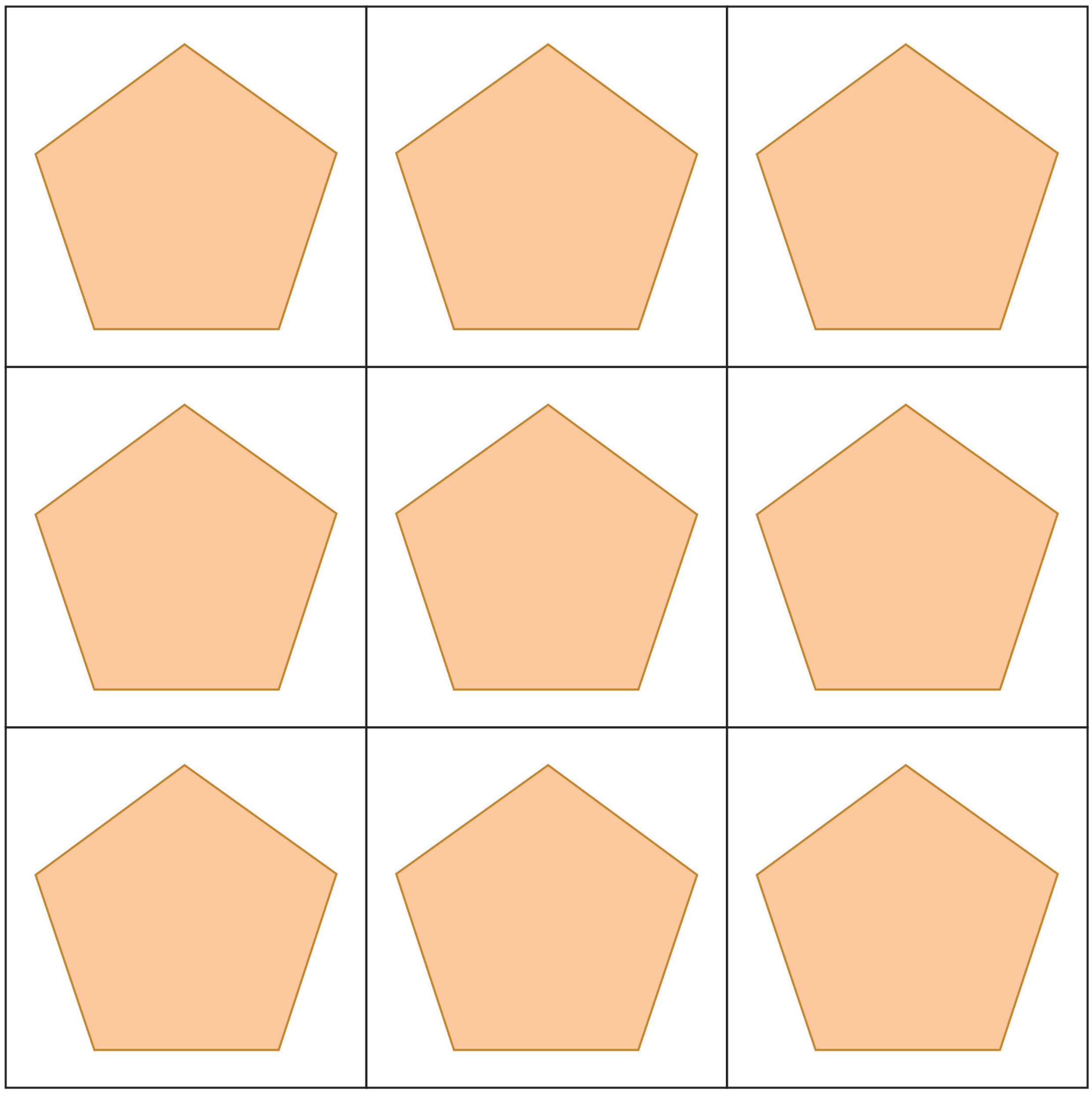
Triângulos equiláteros



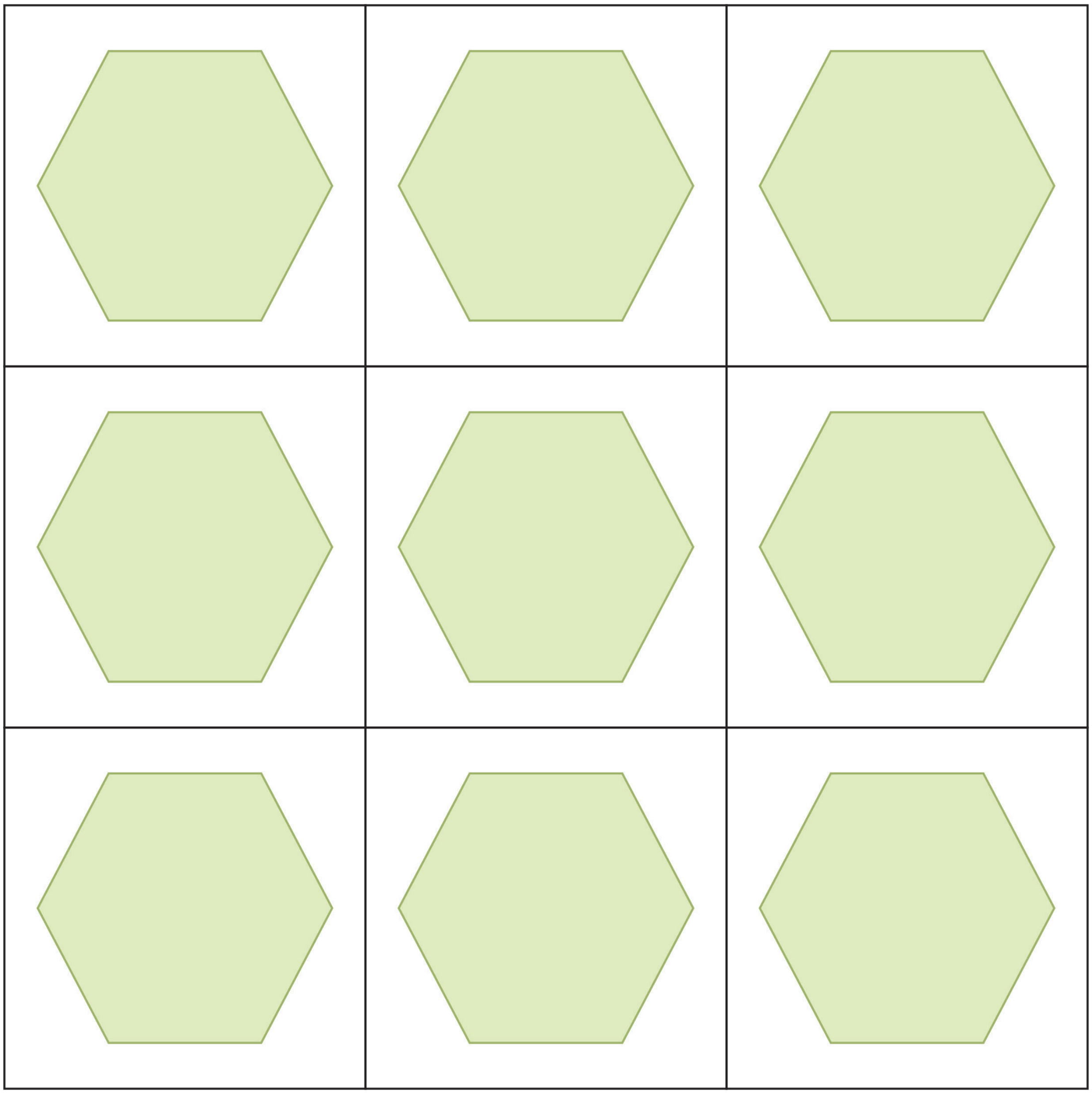
Quadrados



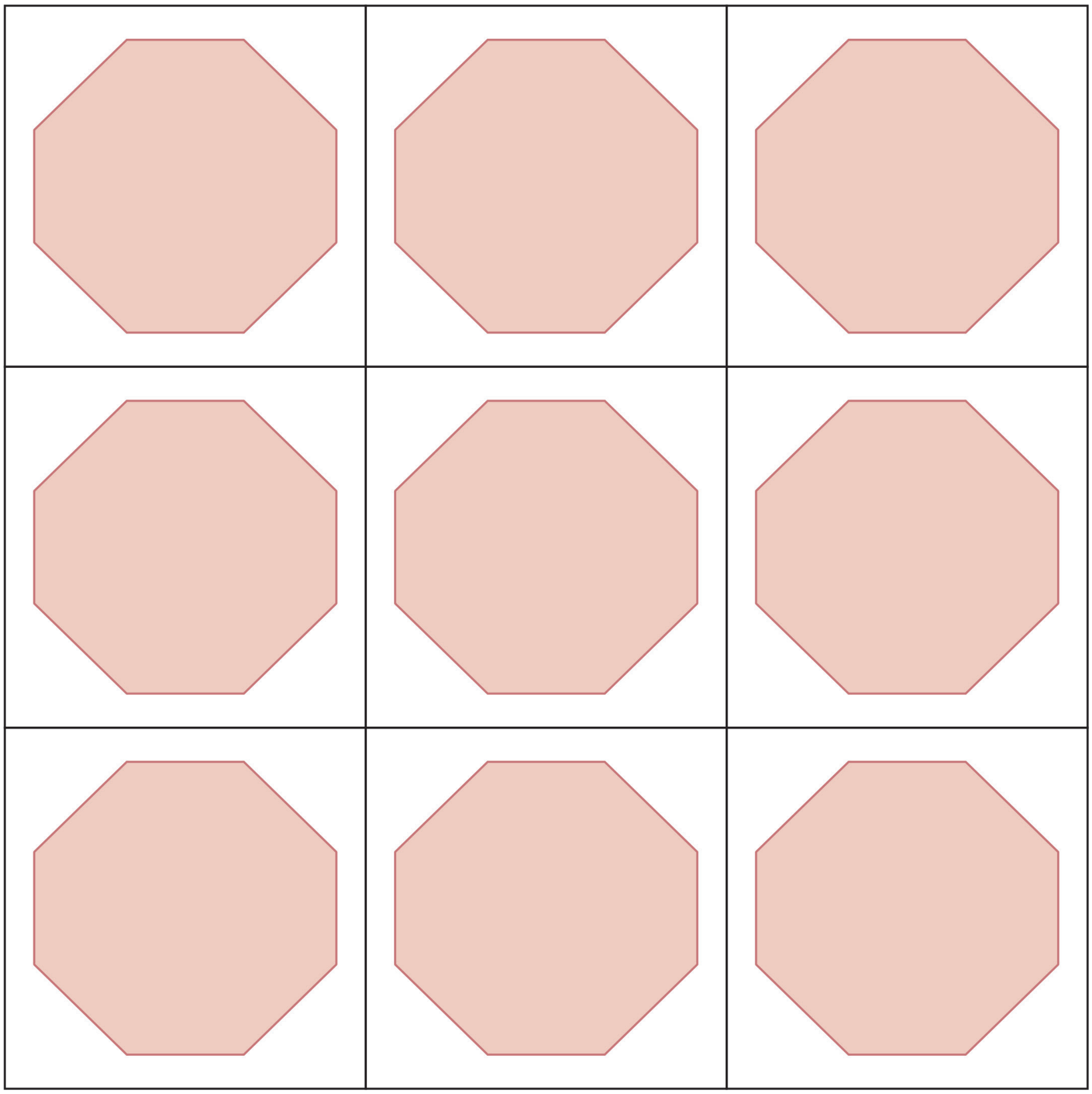
Pentágonos regulares



Hexágonos regulares



Octógonos regulares



Em matemática, o processo de tentar cobrir uma região plana com polígonos sem deixar espaços vazios e sem que eles se sobreponham é chamado de ladrilhamento. É um processo análogo ao que usamos nos pisos e paredes de nossas casas com cerâmicas e azulejos.

Tentem fazer um ladrilhamento usando apenas os triângulos que foram recortados. Isto é, verifiquem se é possível cobrir uma região plana com triângulos sem que haja superposição e sem que ocorram espaços vazios. Em seguida, faça o mesmo com os quadrados e assim sucessivamente com todos os polígonos regulares que foram recortados.

Observe seus resultados e diga quais polígonos regulares podem ser utilizados para fazer um ladrilhamento. Isto é, quais podem ser colocados lado a lado sem que haja superposição e sem que ocorram espaços vazios.

Vamos investigar agora o volume dos alvéolos. Vamos imaginar que a mesma quantidade de cera seja usada na parte lateral dos alvéolos e que todos os alvéolos tenham a mesma altura. Para concretizar essa ideia, pegue meia folha de papel A4 e construa prismas cujas alturas sejam iguais à metade do comprimento da folha A4 e cujos perímetros da base sejam iguais à largura da folha A4 (para unir a lateral do prisma, use fita adesiva sem fazer nenhuma dobra com superposição). Use as folhas para construir a parte lateral de três prismas: um cuja base seja um triângulo equilátero; outro cuja base seja um quadrado e outro cuja base seja um hexágono regular.

Calcule o volume de cada um dos prismas construídos e determine qual deles tem maior volume.

Polígono da base	Altura do prisma	Perímetro da base	Área da base	Volume do prisma
Triângulo equilátero				
Quadrado				
Hexágono				

Aspectos pedagógicos

Antes que os alunos comecem a resolver os problemas, relembre a definição e classificações de polígonos regulares.

Além disso, relembre o cálculo das áreas de: triângulos equiláteros; quadrados e hexágonos regulares.

Os alunos podem encontrar dificuldade em construir os prismas solicitados. Se necessário, pegue meia folha de A4 e construa coletivamente, discutindo o processo, por exemplo: o prisma cuja base é um triângulo equilátero; a altura é igual à metade do comprimento da folha A4 e cujo perímetro da base seja igual à largura da folha A4.

Ressalte a relação entre o perímetro e a medida do lado do polígono da base (no caso do triângulo, devemos dividir a largura da folha em três partes iguais).

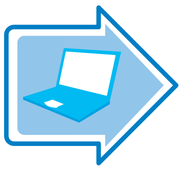
Lembre a eles de montar o prisma com o auxílio de fita adesiva sem dobrar nenhuma aba para colagem.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

Nessa seção, apresentaremos atividades que retomam as habilidades verificadas nas seções anteriores, com o intuito de consolidar e avaliar o processo de ensino/aprendizagem do conteúdo proposto. Uma parte dessa seção também enfatizará a reflexão do aluno sobre os conteúdos abordados.

Sugerimos a utilização dos dois últimos tempos de aula destinados a esta unidade. A seguir, apresentamos sugestões para a retomada dos conteúdos trabalhados e para avaliação das habilidades pretendidas. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir:

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Registros de aprendizagens	Cópias do texto da seção aspectos operacionais.	Esta etapa pode estar articulada à seção "**Veja ainda**" no material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade, bem como a resolução dos exercícios de revisão.	Individual	25 minutos

Aspectos operacionais

Distribua a folha de atividades – Registro de Aprendizagem - e solicite aos alunos que preencham de forma individual. Ao final, faça um breve levantamento sobre as dúvidas e dificuldades apresentadas pelos alunos e promova uma pequena discussão em torno dessas dificuldades, a fim de auxiliar seus alunos com mais essa ferramenta.

Atividades – Registro de Aprendizagem

Nome da Escola: ____

Nome: ____

1. Pense bem em tudo o que exploramos em nossas atividades em sala e responda.

   a. Uma lata de óleo de cozinha fica mais bem apoiada quando colocada em pé ("sobre a base circular") ou quando deitada? Por quê?

____

____

____

b. “*Todas as formas espaciais que existem no nosso planeta são cilíndricas ou poliédricas.*” Isso é verdade? Explique.

____

____

____

c. “*Apesar de atribuirmos a ideia de plano a uma folha de papel, sabemos que esta é tridimensional.*” Como é possível verificar essa afirmação?

____

____

____

2. Dispondo-se de uma folha de papelão de 50 cm x 40 cm, pode-se construir uma caixa aberta cortando-se um quadrado de 10 cm de lado em cada canto da folha. Calcule o volume da caixa e desenhe-a.

3. As áreas de três faces de um paralelepípedo retangular medem 6 cm^2, 8 cm^2 e 12 cm^2. Calcule o volume desse paralelepípedo.

Aspectos pedagógicos

- Durante a execução da tarefa, verifique como os alunos utilizam as informações do enunciado para a resolução dos problemas.
- Auxilie os alunos que apresentam dificuldades, relembrando as definições e resultados.
- O problema 2 não apresenta uma figura para facilitar o entendimento, mas a ideia é justamente propor essa percepção mais abstrata.
- O problema 3 pode ser um pouco mais difícil de visualizar, pois as informações são sobre as áreas, e não sobre as dimensões. Mostre que isso tem uma relação com o volume.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de avaliações de larga escala ou concurso	Cópias das questões	Sugerimos, nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como ENEM, vestibulares, concursos, etc.	Individual	20 minutos

Aspectos operacionais

Distribua a folha de exercícios e promova a realização das atividades individualmente. Após um breve período de tempo, percorra as carteiras dos alunos e busque auxiliá-los na resolução de cada um dos exercícios a seguir.

A seguir, oferecemos questões sobre prismas e cilindros.

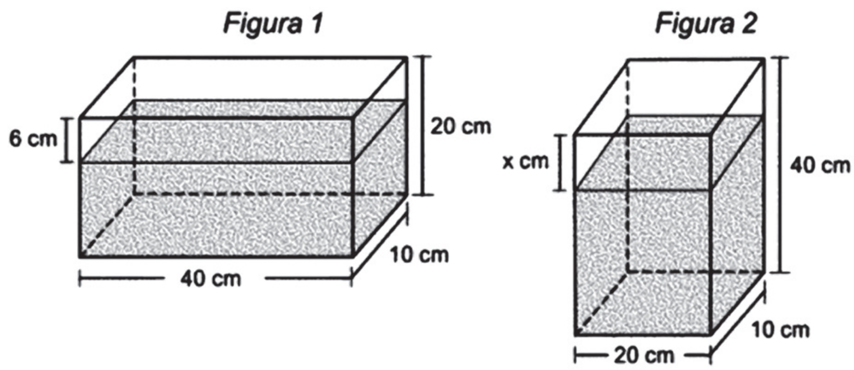
Atividades – Exercícios Adicionais

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Questão 1 (UFRRJ- 2006)

Observe o bloco retangular da figura 1, de vidro totalmente fechado com água dentro. Virando-o, como mostra a figura 2, qual o valor de x?

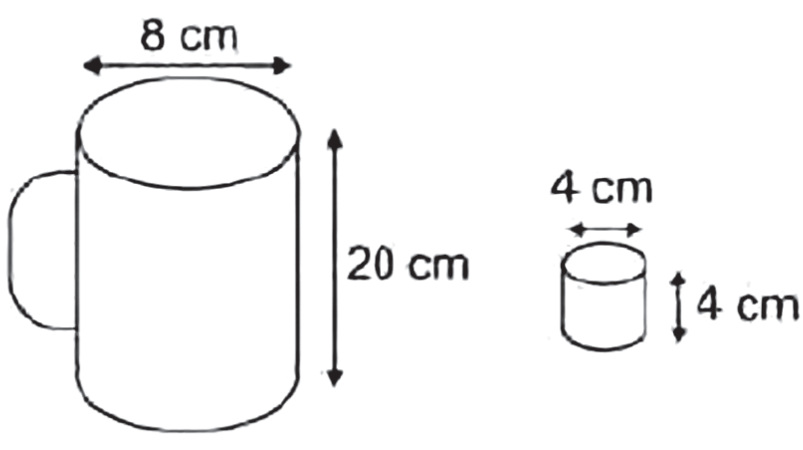


Questão 2 (Uel 2003)

Uma caixa é totalmente preenchida por cinquenta cubos idênticos. Quantos cubos iguais a esses podem ser colocados em uma caixa cujas dimensões internas têm, respectivamente, o dobro das dimensões da caixa anterior?

Questão 3 (ENEM 2010)

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

a. encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

b. encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

c. encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

d. encher duas leiteiras de água, pois elas têm um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

e. encher cinco leiteiras de água, pois elas têm um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

Aspectos pedagógicos

- Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas.
- Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.
- Ressalte a complexidade de algumas questões desse tipo que, em alguns casos, abordam diferentes conteúdos.
- As questões objetivas de vestibulares, em geral, têm em suas alternativas erradas sempre uma justificativa com erro plausível. Obviamente, isso não está evidente na alternativa. Dessa forma, procure identificar o erro que gerou cada uma das alternativas e discuta com os alunos.

Referências

Cilindro

- O cilindro e sua área http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28286
- Volume — (CEDERJ 2011)

  http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/downloads/cm/cm_11_10_2S_3.pdf

Paralelepípedo

- Volume — exercício 13 (UNIRIO) http://www.singularsantoandre.com.br/portal/emd/ar/professores/enzo/APOSTILA%20GEOMETRIA%20ESPACIAL%202013.pdf
- Volume Mariana dispõe

  http://crv.educacao.mg.gov.br/SISTEMA_CRV/index.aspx?id_projeto=27&id_objeto=39777&tipo=ob
- Volume Estágio concreto-abstrato

  http://pt.scribd.com/doc/5045012/Matematica-Suplemento-de-Apoio-do-Professor-Manual

Planificações

- http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7BFD1A79A4-98ED-47C7-A67C-425E442635DF%7D_planificacoes.pdf
- http://sosprofessor-atividades.blogspot.com.br/2012/03/solidos-geometricos.html

Prismas

- Abelhas http://super.abril.com.br/mundo-animal/geometria-instintiva-abelhas-439742.shtml
- http://www.apacame.org.br/mensagemdoce/59/artigo.htm
- http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo2310200312.htm

Questões

- http://www.eja.educacao.org.br/bibliotecadigital/enem/Simulados1/questoes_geometria.pdf
- http://books.google.com.br/books?id=GIs76b-2VkcC&pg=PA74&lpg=PA74&dq=atividade+ensino+medio+planificacao+cubo&source=bl&ots=ftIZrJ2Uqc&sig=tjZupfwMTcDNBtulk86ZrMkyI8Q&hl=en&sa=X&ei=zpquUYeOO6fs0QGVr4HwDg&ved=0CGwQ6AEwCQ#v=onepage&q=atividade%20ensino%20medio%20planificacao%20cubo&f=false

Cavalieri

- http://www.inf.ufes.br/~ldsecchin/cavalieri.pdf
- http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20122/mat1514/cap5.pdf
- EXEMPLO 8: http://www.uss.br/arquivos;jsessionid=878FE3484470177F9A43419B1A7EA8C0/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/produto/2010/produto-julianelli-vfinal.pdf

  http://www.youtube.com/watch?v=eTynAqsTNJ4

Volume 1 • Módulo 3 • Matemática • Expansão

Geometria Espacial: pirâmides e cones

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha e Luciane de Paiva Moura Coutinho

Introdução

Professor, vimos que foi trabalhado na Unidade 4 do material do aluno o assunto Pirâmides e Cones. Com base nesse material, preparamos para você um material complementar para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes:

- Identificar os principais elementos de uma pirâmide;
- Calcular área e volume de uma pirâmide;
- Identificar os principais elementos de um cone;
- Calcular área e volume de um cone.

Faz-se necessário que você não apenas domine o assunto, mas também tenha amplo conhecimento sobre a proposta aqui apresentada antes de levá-la para a sala de aula.

A ideia que norteou a equipe durante o processo de produção deste material foi levar até você uma proposta que pudesse contribuir de forma significativa para a ampliação do seu trabalho pedagógico nas aulas de matemática.

É através de objetos presentes no cotidiano humano que começa a discussão sobre Pirâmides e Cones na unidade do aluno, onde as famosas Pirâmides do Egito são destacadas. E não poderíamos trabalhar de outra forma aqui no material do professor, trazendo para a sala de aula as vivências dos alunos, suas observações, seu cotidiano.

A nossa sugestão é que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora e, por isso, trazemos duas atividades. Em *Fotografando Pirâmides*, inspirados nas pirâmides do Egito, os alunos deverão fotografar pirâmides presentes na arquitetura do seu bairro e em objetos do seu cotidiano para uma bela exposição em sala de aula. Na atividade *Construindo Pirâmides e Cones,* os alunos deverão montar pirâmides e cones a partir de planificações desses sólidos, e os mesmos serão utilizados em outras tarefas ao longo do estudo.

Na Seção 1, você pode optar pela atividade *Avançando na Geometria Espacial,* que propõe um divertido jogo de tabuleiro, onde serão trabalhados elementos que compõem pirâmides e cones. *Poderá, ainda, convidar os alunos a jogar* no *Superquadrado Mágico* e desvendar propriedades dos sólidos em estudo.

Para trabalharmos a Seção 2, sugerimos duas atividades. Na primeira delas, os alunos construirão pirâmides de mesma altura, mas com bases poligonais diferentes e, daí, comparar de maneira experimental os volumes das pirâmides construídas. Já na segunda, a partir de algumas observações, os alunos irão discutir sobre alguns aspectos de uma pirâmide, como número de faces, tipo de base, e até mesmo como calcular o volume de seu tronco.

Na Seção 3, é possível construir um cone a partir de sua planificação, usando instrumentos de construções geométricas, e ainda manipular esse sólido e fazer um estudo mais aprofundamento dele.

Fechando as atividades relacionadas às seções do material do aluno, vem a Seção 4 com a atividade *"A origem do chorinho"*, onde, a partir de uma situação cotidiana, os alunos poderão descobrir como calcular o volume de um copo em formato cilíndrico. Além disso, eles poderão construir um cone e um cilindro a partir de suas planificações, calculando assim o volume do cone por comparação ao volume do cilindro.

Por fim, aconselhamos que a última aula seja dividida em dois momentos. O primeiro dedicado a uma revisão geral do que foi trabalhado na unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o estudo. E o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos.

As sugestões que elaboramos estão descritas nas tabelas seguintes e detalhadas nos textos subsequentes.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	Expansão	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Geometria Espacial: pirâmides e cones	Geometria Espacial
Objetivos da unidade	
Identificar os principais elementos de uma pirâmide;	
Calcular área e volume de uma pirâmide;	
Identificar os principais elementos de um cone;	
Calcular área e volume de um cone.	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	121 e 122
Seção 1 – O que são pirâmides?	123 a 130
Seção 2 – Como calcular área e volume de pirâmides?	131 a 138
Seção 3 – O que é um cone?	138 a 140
Seção 4 – Como calcular a área e o volume de um cone?	140 a 144
Resumo	145
Veja ainda	145
O que perguntam por aí?	153 e 154

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

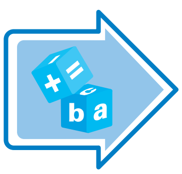
Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

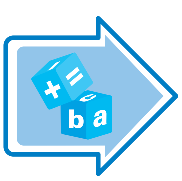
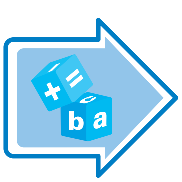
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fotografando pirâmides	Câmera fotográfica, Computador e Datashow para exibição das fotos.	Inspirados nas pirâmides do Egito, os alunos deverão fotografar pirâmides presentes na arquitetura do seu bairro e em objetos do seu cotidiano para uma exposição em sala de aula.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 2 a 3 alunos.	40 minutos
	Construindo pirâmides e cones	Moldes para construção das figuras geométricas disponibilizadas no pendrive, tesoura e cola.	Os alunos deverão montar pirâmides e cones a partir de planificações desses sólidos.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos.	40 minutos

Seção 1 – O que são pirâmides?

Páginas no material do aluno

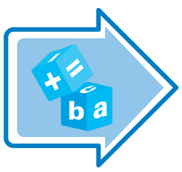
123 a 130

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avançando na Geometria Espacial	Papel cartão, cartolina, caneta, etiquetas, objetos que servirão de peças no jogo.	Os alunos participarão de um jogo de tabuleiro. Ao longo do jogo, serão trabalhados elementos de pirâmides e cones.	A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos.	40 minutos.
	Superquadrado Mágico	Papel colorido, tesoura, caneta.	Os alunos jogarão no superquadrado mágico com pirâmides e cones.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos.	40 minutos.

Seção 2 – Como calcular área e volume de pirâmides?

Páginas no material do aluno

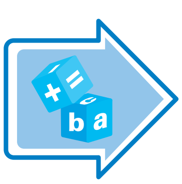
131 a 138

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Volume de Pirâmides	Uma folha de sulfite, papelão, tesoura, régua, canudo, copo descartável e areia.	Os alunos construirão pirâmides de mesma altura, mas com bases poligonais diferentes. Em seguida, os alunos irão comparar, de maneira experimental, os volumes das pirâmides construídas.	Essa atividade pode ser realizada com grupos de 2 a 4 alunos.	40 minutos
	Movimentos da pirâmide e a obtenção do tronco	Computador com acesso à internet, Datashow, folhas de papel A4, lápis e borracha para cada trio.	A partir de algumas observações, os alunos irão discutir sobre alguns aspectos de uma pirâmide, como número de faces, tipo de base, e até mesmo como calcular o volume de seu tronco.	A turma pode ser dividida em grupos de 2 ou 3 alunos.	40 minutos.

Seção 3 – O que é um cone?

Páginas no material do aluno

138 a 140

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Construindo a planificação de um cone	Três folhas de papel A4, tesoura, cola, régua, compasso, par de esquadros e transferidor para cada dupla.	Construir um cone a partir de sua planificação, usando instrumentos de construções geométricas.	Duplas	40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jogo de maquetes	Cola, tesoura, lápis de cor, papel A4, sucatas e um conjunto de planificações como o que segue em anexo para cada grupo.	O objetivo da atividade é favorecer a manipulação de sólidos geométricos com ênfase nos cones.	A atividade deve ser em grupos com 4 ou 5 componentes.	40 minutos.

Seção 4 – Como calcular a área e o volume do cone?

Páginas no material do aluno

140 a 144

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Comparação do cone com o cilindro	Cola, tesoura, 200 g de arroz ou qualquer outro grão, um conjunto de planificações como o que segue em anexo para cada trio.	Os alunos irão construir um cone e um cilindro a partir de suas planificações, calculando assim o volume do cone por comparação ao volume do cilindro.	A turma pode ser dividida em grupos de 3 ou 4 alunos.	40 minutos
	As origens do "chorinho".	Uma ficha como as que seguem em anexo, para cada dupla.	A partir de uma situação cotidiana, os alunos poderão descobrir como calcular o volume de um copo em formato cilíndrico.	Duplas.	40 minutos.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Consolidação e registros de aprendizagem	Folha de atividades	Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos
	Questão dis-sertativa	Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora.	Questão dissertativa que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual	10 minutos
	Questão obje-tiva (UERJ)	Folha de ati-vidades, lápis, borracha.	Questão objetiva que com-plementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual.	10 minutos

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fotografando pirâmides	Câmera fotográfica, Computador e Datashow para exibição das fotos.	Inspirados nas pirâmides do Egito, os alunos deverão fotografar pirâmides presentes na arquitetura do seu bairro e em objetos do seu cotidiano para uma exposição em sala de aula.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 2 a 3 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, após uma leitura da seção *Pra início de conversa,* do material do aluno, que tem como motivação as pirâmides do Egito, proponha aos alunos a seguinte atividade:

Peça que façam fotografias da arquitetura do bairro ou de objetos do cotidiano que tenham o formato de pirâmide. Estipule uma quantidade específica de fotos para cada grupo apresentar (como sugestão, você pode pedir de 2 a 3 fotos por grupo). Assim que eles retornarem com as fotos, faça uma exibição para a turma. Por fim, elabore um álbum da turma com as fotografias.

Aspectos pedagógicos

Caro professor, você pode organizar um pequeno seminário para que um professor de artes e/ou de história, da escola, fale um pouco sobre as pirâmides do Egito, buscando assim, a interdisciplinaridade.

Para a realização das fotografias, caso você sinta resistência da turma em sair da escola para realizar tal atividade, que tal organizar uma aula-passeio para facilitar esse procedimento? Você pode escolher previamente o lugar ou pedir que a turma faça sugestões. Não deixe de acompanhá-los e dar dicas de onde eles podem encontrar construções ou objetos com formato de pirâmide.

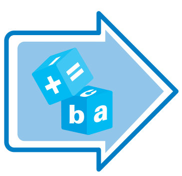
Antes de exibir as fotos para a toda a turma, é aconselhável que você faça uma pré-visualização das mesmas, até para ver a qualidade do material pesquisado. Ao longo da exibição em sala, discuta com os alunos o que os levou a fotografar aqueles objetos e como eles os identificavam como pirâmide.

Você pode ampliar o trabalho fazendo uma eleição das 5 melhores fotos para uma exibição para toda a escola.

Nessa atividade, além de levar os alunos a observarem a presença de pirâmides em objetos, na arquitetura, na história, os alunos serão estimulados intuitivamente a definir pirâmide e reconhecer seus diferentes tipos.

Essa proposta diferenciada tem como objetivo motivar os alunos para o estudo da geometria que, se for feita por meios prazerosos, poderá ter como consequência estimular também o estudo dos outros assuntos que virão. Além disso, essa atividade pode permitir que os alunos passem a enxergar o mundo à sua volta de maneira diferenciada, fazendo comparações, análises, e reconhecendo a matemática de maneira mais efetiva.

Atividade Inicial

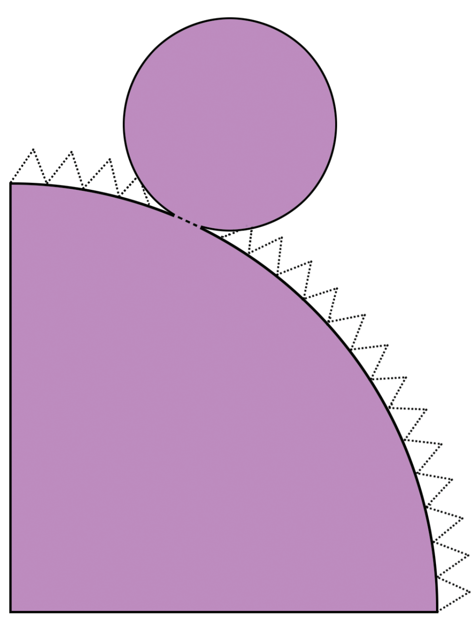
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Construindo pirâmides e cones	Moldes para construção das figuras geométricas disponibilizadas no pendrive, tesoura e cola.	Os alunos deverão montar pirâmides e cones a partir de planificações desses sólidos.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Reproduza para cada grupo de alunos os moldes para a montagem dos seguintes sólidos: Cone, pirâmide de base triangular, pirâmide de base quadrada, pirâmide de base pentagonal, pirâmide de base hexagonal. A seguir, seguem os moldes que você pode utilizar para reprodução.

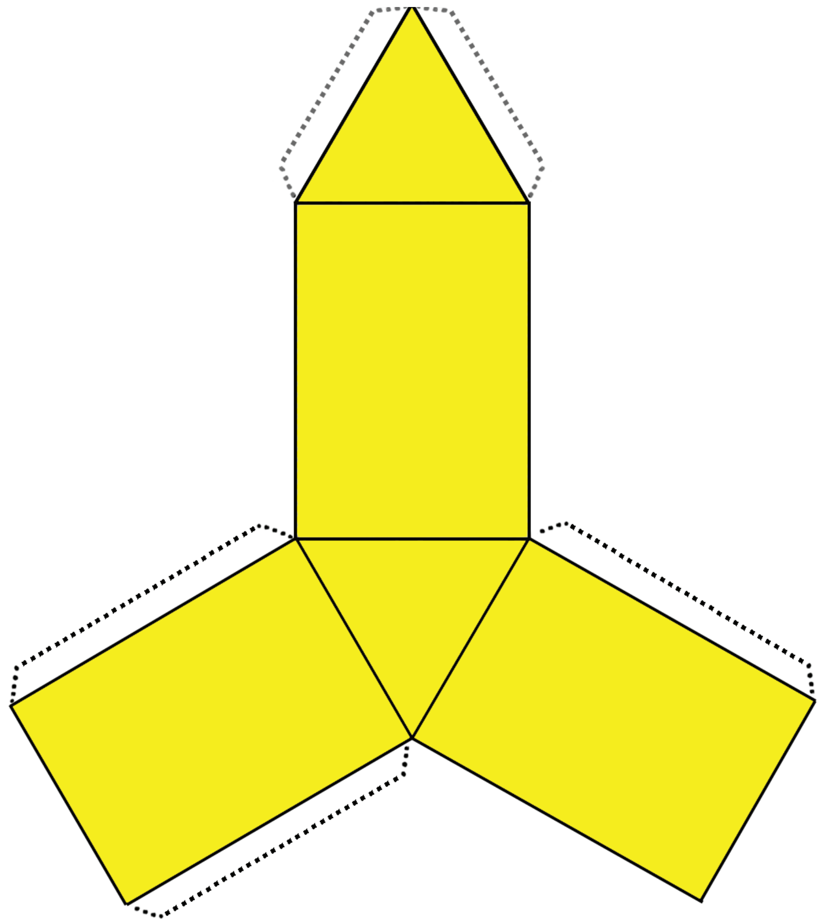
Cone

Dobrar
Cortar
Colar

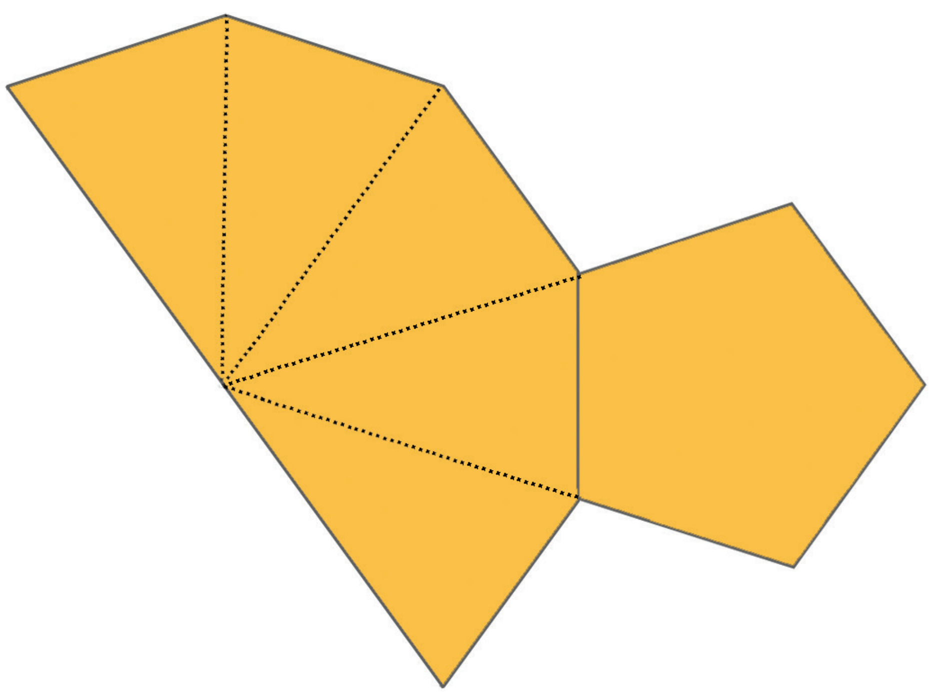


Prisma de base triangular

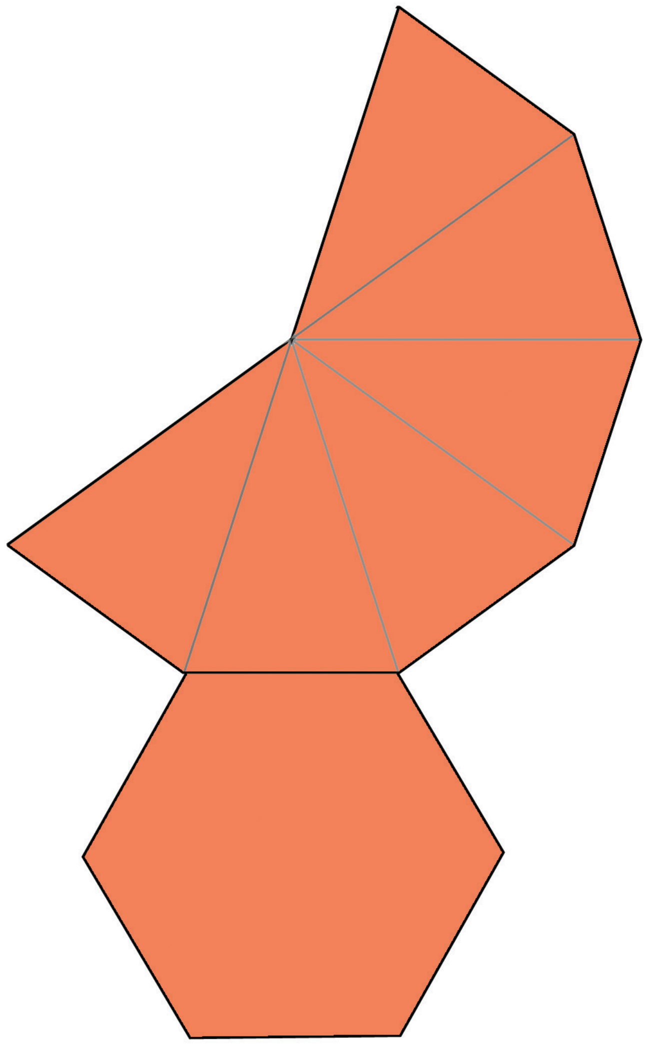
Dobrar
Cortar
Colar



Fonte: http://www.ensinar-aprender.com.br/2011/05/solidos-geometricos-recortar-e-montar.html



Fonte: www.brasilescola.com



Fonte: www.educ.fc.ul.pt

Peça para que os alunos recortem as figuras e as montem, utilizando cola.

Aspectos pedagógicos

Professor, caso ache mais conveniente, você poderá dividir a turma em grupos de 5 alunos, para que cada aluno monte apenas uma figura.

Antes da montagem dos sólidos, o professor poderá realizar as montagens e planificações virtuais utilizando o software Poly Pro, que é gratuito e de fácil manipulação. Esse programa pode ser baixado em http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/softwares/soft_geometria.php . Veja que também o disponibilizamos no pendrive.

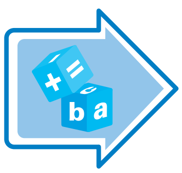
Apesar do foco dessa atividade ser as pirâmides e os cones, será uma boa oportunidade para o professor trabalhar paralelamente os conceitos já vistos em geometria plana, uma vez que os sólidos serão construídos a partir de suas planificações.

Além disso, reforce com seus alunos a importância da manipulação dos sólidos para o desenvolvimento da visão espacial, visto as inúmeras dificuldades que os alunos trazem ao trabalhar com temas tridimensionais. Em seguida, esse primeiro momento de contato com os sólidos poderá ser substituído pela abstração, fundamental para a resolução dos mais diversos problemas.

Por fim, na Seção 1, os sólidos construídos neste momento serão utilizados em outra atividade.

Seção 1 – O que são pirâmides?

Páginas no material do aluno
123 a 130

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avançando na Geometria Espacial	Papel cartão, cartolina, caneta, etiquetas, objetos que servirão de peças no jogo.	Os alunos participarão de um jogo de tabuleiro. Ao longo do jogo, serão trabalhados elementos de pirâmides e cones.	A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Professor, você deverá elaborar em parceria com a turma:

- Um tabuleiro retangular com a folha de papel-cartão contendo 50 casas, todas numeradas em ordem crescente a partir do número 1. Na última casa, deverá ser escrita a palavra FIM.
- Cada grupo deverá ter uma peça/objeto para representá-lo no tabuleiro. Podem ser feitas bolinhas de papel de cores variadas, para diferenciar os jogadores.
- Um cubo pequeno de papel que servirá de dado. Em cada face, deverá ser desenhada uma figura geométrica plana: triângulo, retângulo, pentágono, hexágono, heptágono e octógono. Estas figuras indicarão a quantidade de casas que cada jogador irá andar no tabuleiro.
- Cones e pirâmides elaborados na Atividade 2 da seção *Pra início de conversa*.

Coloque etiquetas em cada um dos sólidos conforme a sequência a seguir:

a. Cone

b. Pirâmide base triangular

c. Pirâmide base quadrada

d. Pirâmide base pentagonal

e. Pirâmide base hexagonal

- Fichas de cartolina contendo cada uma as seguintes perguntas:
    - Como é o nome da figura A?
    - Como é o nome da figura B?
    - Como é o nome da figura C?
    - Como é o nome da figura D?
    - Como é o nome da figura E?
    - Quantos vértices tem a figura B?
    - Quantos vértices tem a figura C?
    - Quantos vértices tem a figura D?
    - Quantos vértices tem a figura E?
    - Quantas arestas tem a figura B?
    - Quantas arestas tem a figura C?
    - Quantas arestas tem a figura D?
    - Quantas arestas tem a figura E?
    - Quantas faces tem a figura B?
    - Quantas faces tem a figura C?
    - Quantas faces tem a figura D?
    - Quantas faces tem a figura E?
    - A figura A é um poliedro?
    - A figura B é um poliedro?
    - A figura C é um poliedro?
    - A figura D é um poliedro?
    - A figura E é um poliedro?
    - Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura B?

- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura C?
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura D?
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura E?
- Explique a diferença entre as figuras geométricas planas e espaciais.

- Uma ficha-bônus que dobra o valor de casas que o aluno tirou nos dados. Elabore essa ficha com uma cor diferenciada.

Para jogar:

Cada grupo deverá responder às fichas empilhadas, previamente embaralhadas. O jogador deverá responder à 1ª carta da pilha e, para responder, pode manusear as figuras espaciais.

Após ser utilizada, a ficha deve ser colocada novamente na mesma pilha, mas por baixo.

Se a resposta não estiver correta, o jogador permanece no mesmo lugar do tabuleiro. Caso contrário, ou seja, se o aluno responder corretamente, ele deverá avançar o número de casas correspondentes à figura que cair no dado. Exemplo:

- Triângulo - três casas
- Retângulo - quatro casas
- Pentágono - cinco casas
- Hexágono - seis casas
- Heptágono - sete casas
- Octógono - oito casas

Vence o jogador que alcançar primeiro a casa "FIM".

Aspectos pedagógicos

Professor, uma boa estratégia no ensino e aprendizagem da Matemática é a utilização de jogos. Nesse, em particular, pretendemos desenvolver o raciocínio geométrico para amadurecer os conceitos da geometria espacial e solidificar os conceitos de pirâmides e cones trabalhados por você em sala.

Caso você resolva construir os elementos do jogo com sua turma, essa será uma boa oportunidade de desenvolver a afetividade entre o professor e os alunos e entres os alunos, certamente gerando uma aproximação das relações.

Com essa atividade, em que o aluno, para responder, pode manusear as figuras previamente construídas por ele, esperamos colaborar também para uma aprendizagem significativa dos conceitos trabalhados. Caso sinta necessidade, você poderá alterar as perguntas que serão feitas ao longo do jogo ou acrescentar novos questionamentos. Sinta-se à vontade para fazer as alterações que julgar necessárias.

A prática desse tipo de jogo, além de tudo, torna possível desenvolver nos alunos a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo, a autoconfiança e o senso cooperativo.

Respostas das fichas:

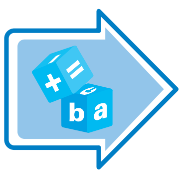
- Como é o nome da figura A? Cilindro
- Como é o nome da figura B? Pirâmide base triangular
- Como é o nome da figura C? Pirâmide base quadrada
- Como é o nome da figura D? Pirâmide base pentagonal
- Como é o nome da figura E? Pirâmide base hexagonal
- Quantos vértices tem a figura B? 4
- Quantos vértices tem a figura C? 5
- Quantos vértices tem a figura D? 6
- Quantos vértices tem a figura E? 7
- Quantas arestas tem a figura B?6
- Quantas arestas tem a figura C?8
- Quantas arestas tem a figura D?10
- Quantas arestas tem a figura E?12
- Quantas faces tem a figura B?4
- Quantas faces tem a figura C?5
- Quantas faces tem a figura D?6
- Quantas faces tem a figura E?7
- A figura A é um poliedro? Não
- A figura B é um poliedro? Sim
- A figura C é um poliedro? Sim
- A figura D é um poliedro? Sim
- A figura E é um poliedro? Sim
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura B? Triângulos
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura C? Quadrado e triângulos
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura D? Pentágono e triângulos

- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura E? Hexágono e triângulos
- Explique a diferença entre as figuras geométricas planas e espaciais. R.: As figuras geométricas planas são bidimensionais e as figuras espaciais são tridimensionais.

Seção 1 – O que são pirâmides?

Páginas no material do aluno

123 a 130

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Superquadrado Mágico	Papel colorido, tesoura, caneta.	Os alunos jogarão no superquadrado mágico com pirâmides e cones.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Professor, para o jogo, você deverá construir para cada grupo da turma:

- Uma tabela 4 x 4 com 16 espaços;
- Sólidos geométricos de acordo com a tabela abaixo:

	Cone	Pirâmide base triangular	Pirâmide base quadrada	Pirâmide base pentagonal
Amarelo	4	4	4	4
Verde	1	1	1	1
Branco	1	1	1	1
Roxo	1	1	1	1
Laranja	1	1	1	1

Essas figuras podem ser elaboradas em três dimensões ou simplesmente podem estar apenas desenhadas em papel colorido.

Os tamanhos da tabela e das figuras ficarão a seu critério .

Nesta atividade, diferentes sólidos geométricas serão colocadas no painel com 16 espaços.

O jogo funciona em duas etapas:

1ª Etapa: os alunos não podem repetir figuras na mesma linha e coluna;

2ª Etapa: os alunos não podem repetir figuras e cores na mesma linha e coluna.

Aspectos pedagógicos

Professor, esse jogo é uma adaptação do antigo quebra-cabeças numérico. Segundo uma lenda chinesa, uma tartaruga mostrava em sua carcaça pontos que representavam números de 1 a 9, distribuídos em suas costas. Ao somar estes pontos na horizontal, vertical e diagonais, o seu resultado dava sempre 15. Esta regularidade matemática causou tanto espanto como admiração, e esse jogo ficou conhecido como Quadrado Mágico. Além de ele ter sido usado como jogo matemático educativo, era também utilizado como um talismã, propagando-se pela Índia, países árabes e Europa.

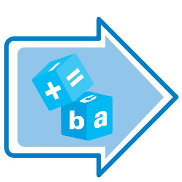
Do quadrado mágico de 3 por 3, de 1 a 9, surgiu o Superquadrado Mágico, com um grau de complexidade maior, de 4 por 4, com números de 1 a 16. Essa é a versão que estamos utilizando nessa atividade.

Nesse jogo, não temos somente uma interessante fonte recreativa, uma vez que, além de familiarizar os alunos com os sólidos geométricos que estão sendo trabalhados nessa unidade - cones e pirâmides - suas definições, conceitos e elementos, podemos também ajudar os alunos a elaborarem estratégias de resolução de problemas. Espera-se que com os desafios que são propostos no jogo, o aluno sinta-se mais seguro e torne-se apto à resolução de problemas de forma mais eficiente.

Seção 2 – Como calcular área e volume de pirâmides?

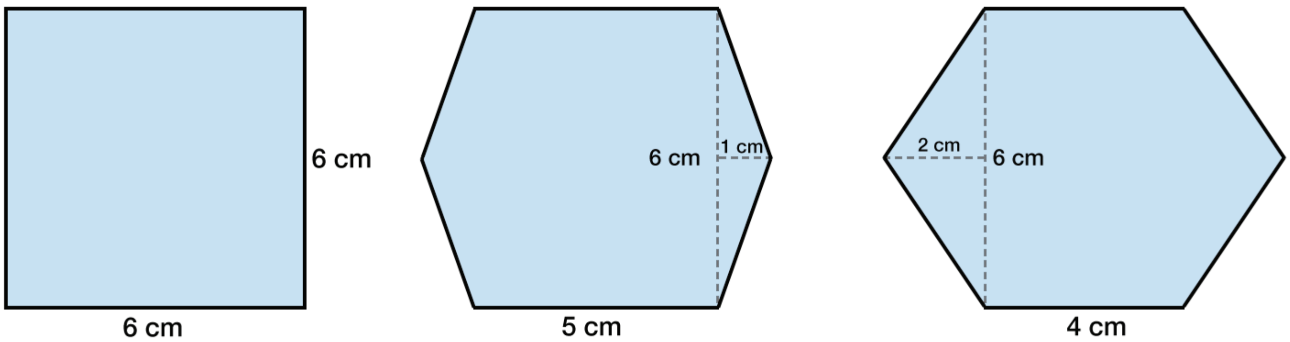
Páginas no material do aluno

131 a 138

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Volume de Pirâmides	Uma folha de sulfite, papelão, tesoura, régua, canudo, copo descartável e areia.	Os alunos construirão pirâmides de mesma altura, mas com bases poligonais diferentes. Em seguida, os alunos irão comparar, de maneira experimental, os volumes das pirâmides construídas.	Essa atividade pode ser realizada com grupos de 2 a 4 alunos.	40 minutos

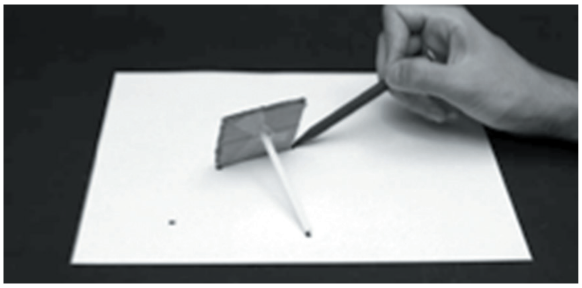
Aspectos operacionais

Professor, peça para que cada grupo escolha a base que desejar para construir sua pirâmide. Seguem alguns modelos de base:



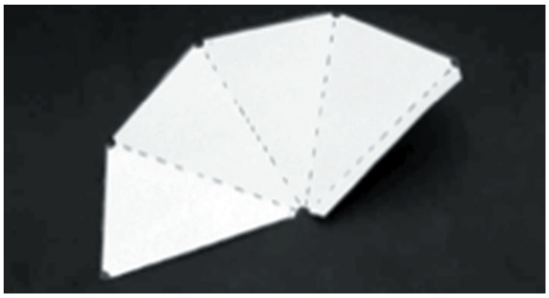
Em seguida, os alunos deverão reproduzir no papelão o molde da base da sua pirâmide. Peça para eles perfurarem o papelão num local qualquer da base e nele fixarem o canudo ortogonal à base com a fita adesiva.

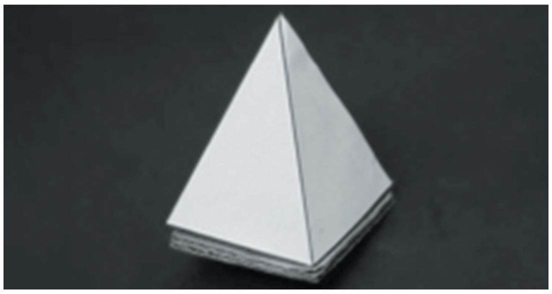
Os alunos deverão fazer a planificação da pirâmide, marcando em uma folha de papel A4 os pontos que correspondem aos seus vértices.



Fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1039

Por fim, eles deverão ligar todos os pontos marcados na folha e desenhar uma aba para facilitar a montagem, como na figura a seguir,.





Para dar firmeza ao modelo, os alunos poderão colar pedaços de papelão nas faces.

Depois dessa etapa concluída, cada grupo deve preencher a sua pirâmide com areia e despejá-la no copo descartável.

Peça para que os níveis dos copos de todos os grupos sejam comparados. Indague seus alunos sobre qual conclusão chegaram sobre o volume das pirâmides construídas. Certifique-se de que todos perceberam que o volume é o mesmo.

Aspectos pedagógicos

Esperamos que, com esse experimento, seja estimulada a percepção geométrica do aluno. Primeiramente, desconstroem-se os modelos de pirâmides mais utilizados e amplia-se o leque de representação de pirâmides de diferentes formatos (todas com altura e área da base iguais).

Você, professor, poderá propor como desafio para a aula seguinte outros dois modelos de pirâmide: um com a área da base diferente da que foi utilizada no experimento e com a mesma altura e outro com a mesma área da base, mas com a medida da altura diferente das demais. Tanto a conclusão tirada do experimento que as pirâmides de mesma altura e mesma área da base possuem o mesmo volume como esses dois outros modelos ajudarão a constatar que o cálculo do volume tem como elementos fundamentais a área da base e da altura da pirâmide.

Você pode aproveitar essa discussão e comparar o volume da pirâmide com o volume do prisma correspondente.

Mostre aos alunos que o volume da pirâmide é um terço do produto da altura pela área da base. Depois de chegar a essa conclusão de maneira intuitiva, você poderá demonstrar este fato a partir do Princípio de Cavalieri.

Seção 2 – Como calcular área e volume de pirâmides?

Páginas no material do aluno

131 a 138

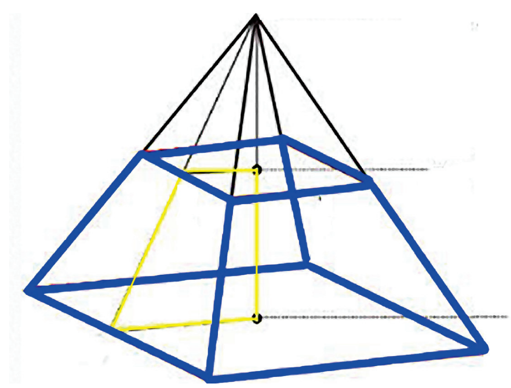
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Movimentos da pirâmide e a obtenção do tronco	Computador com acesso à internet, Datashow, folhas de papel A4, lápis e borracha para cada trio.	A partir de algumas observações, os alunos irão discutir sobre alguns aspectos de uma pirâmide, como número de faces, tipo de base, e até mesmo como calcular o volume de seu tronco.	A turma pode ser dividida em grupos de 2 ou 3 alunos.	40 minutos.

Aspectos operacionais

A atividade tem três etapas. Na primeira, recomendamos que os alunos assistam à animação da planificação da pirâmide, disponível na página **http://www.calques3d.org/examples.html**. Essa animação também está disponível no pendrive, basta instalar o Calques 3D no computador.

Depois disso, ainda nesta etapa, sugerimos que você reflita e procure responder junto com a turma às seguintes questões: Se, em vez de base quadrangular, tivéssemos uma pirâmide de base triangular, como ficaria a planificação? Quantas faces triangulares teríamos? O que mudaria na base? Sugerimos ainda que você repita os mesmos questionamentos para pirâmides pentagonais e hexagonais e solicite aos alunos que façam um esboço das planificações nestes casos, supondo que sejam pirâmides regulares.

A segunda etapa tem início a partir da observação do tronco de pirâmide da figura a seguir.



Você pode ampliá-la e colocá-la fixada na lousa ou entregar uma ficha como a que segue em anexo com seu desenho para cada trio. Enquanto os trios fazem suas observações, você já pode iniciar os questionamentos: Quantas pirâmides podem ser observadas na figura? Como ficaria a planificação desta figura? Você pode finalizar esta etapa, pedindo aos alunos que façam a planificação apenas do tronco. Mostre-lhes a animação de uma figura como esta também disponível em **http://www.calques3d.org/examples.html**. Isto poderá ajudá-los.

A última etapa consiste na obtenção do volume do tronco da pirâmide. Peça aos alunos que, relembrando todas as fórmulas que estudaram até agora em geometria espacial, verifiquem se conheceram alguma fórmula específica para o cálculo do volume do tronco de pirâmide. Certamente, eles dirão que não. Então, você pode levá-los a reconhecer que o volume do tronco é a diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor. Neste momento, sugerimos que você dê um tempo para que seus alunos efetuem os cálculos e cheguem ao volume do tronco. Compare os resultados que cada trio obtiver. Peça-lhes que exponham seus raciocínios. Conclua a atividade deduzindo com eles a fórmula para o volume do tronco de pirâmide:

$$V=\frac{h}{3}\cdot\left(S_b+\sqrt{S_B\cdot S_b}+S_b\right)$$

Onde,

V $\rightarrow$ é o volume do tronco

h $\rightarrow$ é a altura do tronco

SB $\rightarrow$ é a área da base maior

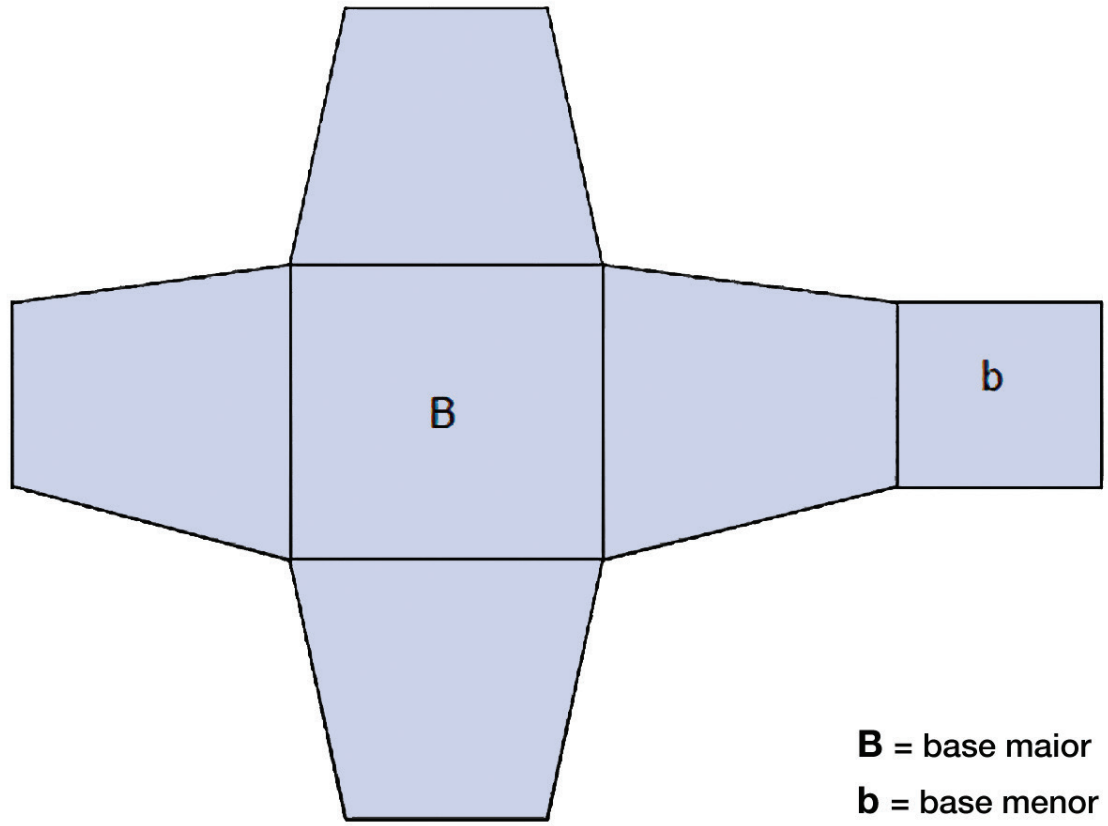
Sb $\rightarrow$ é a área da base menor

Aspectos pedagógicos

Há várias possibilidades para que seus alunos visualizem a planificação da pirâmide sugerida na primeira etapa desta atividade. Você pode acoplar seu computador com acesso à internet a um Datashow e mostrá-la de uma só vez para toda a turma, mas, se sua escola dispuser de um laboratório de informática, você pode também conduzir sua turma até lá e pedir que cada dupla ou trio acesse a página onde a animação está disponível. Perceba que, na pior das hipóteses, se sua escola estiver sem acesso à internet, você pode levar uma planificação da pirâmide num papel para que seus alunos recortem e simulem o movimento disponível na internet.

Como você deve ter observado, na página em que as planificações estão disponíveis, há ainda outras animações de sólidos geométricos feitas no Calques 3D. O Calques 3D é um software livre que permite a construção com animação de várias figuras geométricas espaciais. Além das orientações para baixá-lo, há ainda na mesma página um tutorial que explica passo a passo o funcionamento do programa. Recomendamos que você, aos poucos, vá se apropriando desta importante ferramenta de ensino.

Enquanto os alunos desenham suas planificações, é importante que percebam que o número de faces triangulares irá variar de acordo com o número de lados do polígono que está na base da pirâmide. Além disso, devem reconhecer que a planificação do tronco pode ser obtida a partir da planificação da pirâmide maior, bastando que sejam apagados os triângulos que correspondem às faces laterais da pirâmide menor, como mostra a figura abaixo:

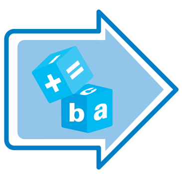


Por fim, aconselhamos que você evite ao máximo oferecer a fórmula do volume do tronco da pirâmide como algo “pronto” que não pode ser deduzido. Lembre-se de que o primeiro passo para a dedução da fórmula é escrever com linguagem matemática que o volume do tronco é a diferença entre o volume da pirâmide maior e o da menor. Em seguida, basta substituir o volume de cada pirâmide pela expressão matemática que o fornece que, com mais alguns passos algébricos simples, chega-se à fórmula. Nossos alunos frequentemente nos questionam não só sobre as aplicações daquilo que estudam como também sobre a origem das fórmulas que empregam. Temos aí uma excelente oportunidade para começarmos a responder a eles!

Seção 3 – O que é um cone?

Páginas no material do aluno

138 a 140

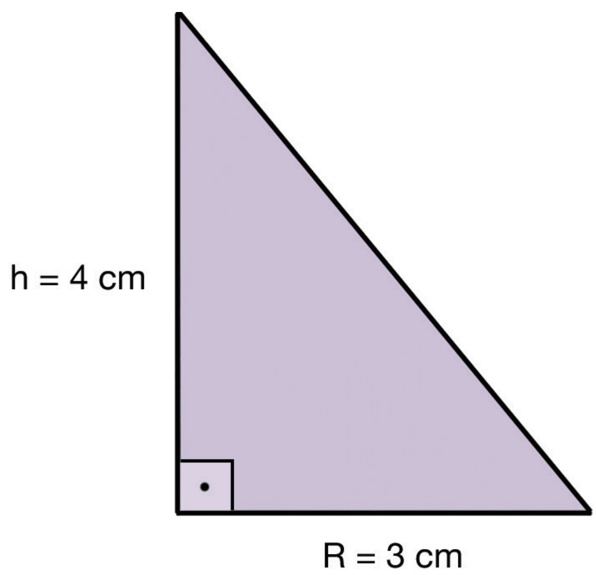
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Construindo a planificação de um cone	Três folhas de papel A4, tesoura, cola, régua, compasso, par de esquadros e transferidor para cada dupla.	Construir um cone a partir de sua planificação, usando instrumentos de construções geométricas.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é a construção da planificação de um cone cujo raio da base é 3 cm e cuja altura é 4 cm. Recomendamos que você peça previamente aos alunos que tragam de casa os materiais para construção geométrica: régua, compasso, par de esquadros e transferidor e, também, para a montagem de sólidos a partir de sua planificação, ou seja, cola e tesoura.

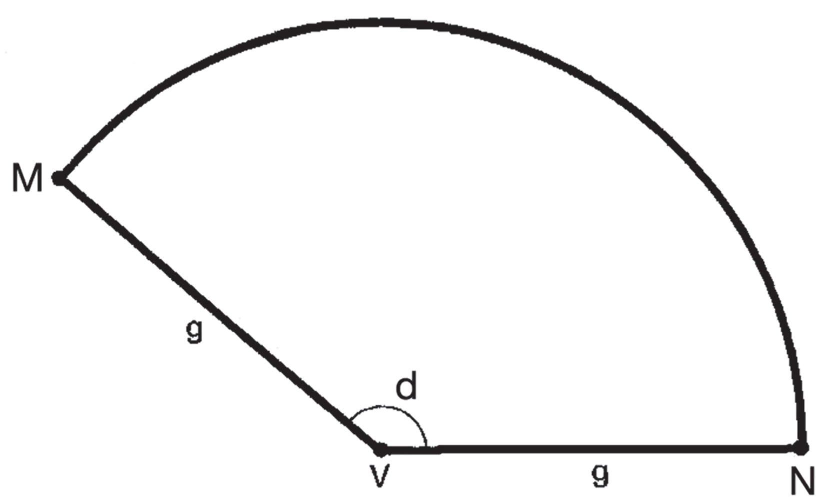
Para começar, você pode pedir aos alunos que tentem imaginar e descrever como fica a planificação de um cone. Em seguida, peça-lhes que tentem desenhar, a mão livre, como acham que ficaria esta planificação. Permita-lhes que montem suas construções para verificarem se elas contemplam as condições propostas (raio da base igual a 3 cm e altura igual a 4 cm. Dificilmente isso acontecerá; o método de tentativas pode conduzir facilmente à base, mas não o faz com a altura. Quando, então, ficar claro para os alunos que é preciso planejar a construção, podemos dizer que chegou o momento de propor a sequência de etapas a seguir:

1ª etapa: Identificar o valor da geratriz do cone. Para isso, é necessário construir, com o par de esquadros, um triângulo retângulo cujos catetos são o raio e a altura do cone, pois a geratriz do cone é a hipotenusa deste triângulo.



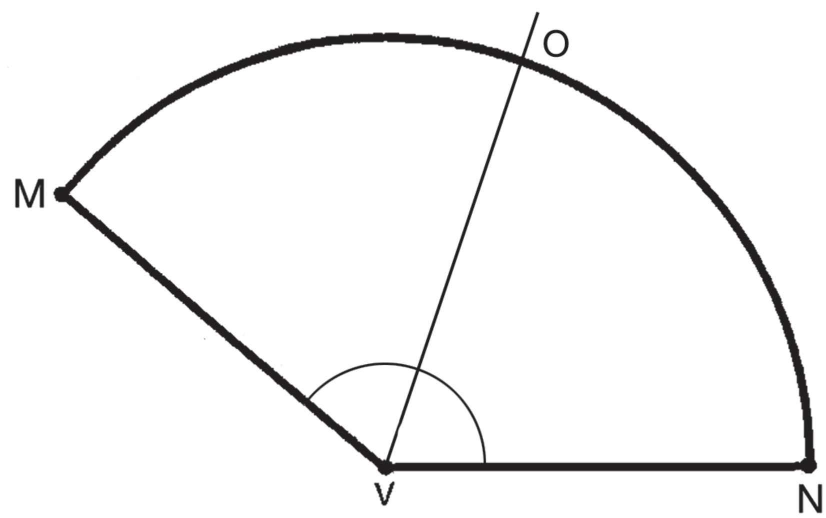
Observando a figura anterior e empregando o Teorema de Pitágoras, podemos concluir que a geratriz do cone cuja planificação foi solicitada é 5 cm.

2ª etapa: Traçar, utilizando o transferidor, o setor circular, que será a superfície lateral do cone. Neste momento, é importante observar que o comprimento do setor é o mesmo da base: $2\pi R$. O raio do setor é a geratriz, e a medida do ângulo do setor pode ser obtida por uma regra de três simples:

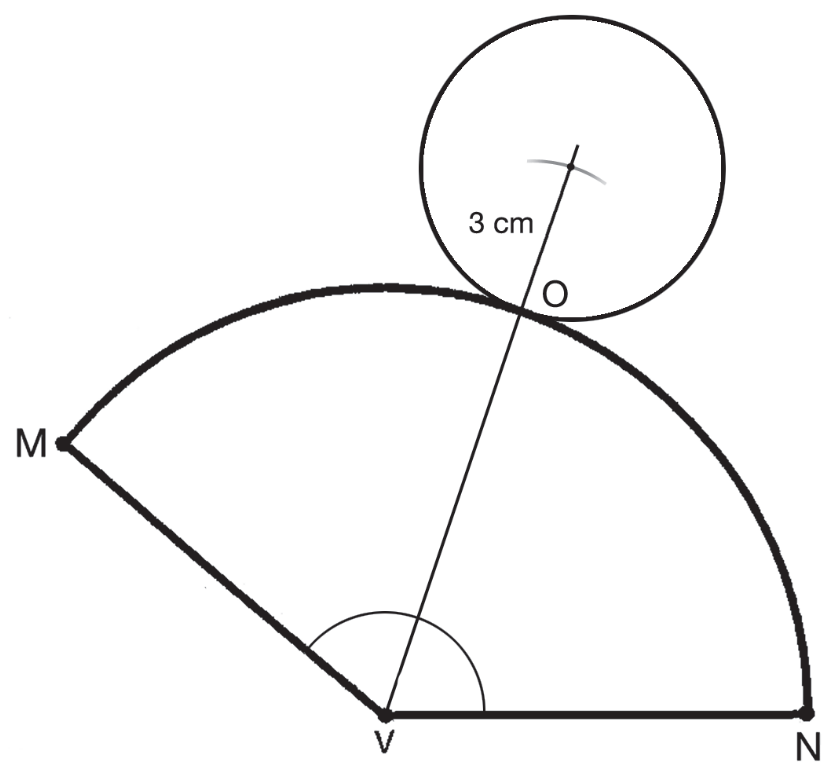


Substituindo os valores de g e R, e resolvendo a regra de três simples, facilmente se conclui que $\alpha = 216^\circ$.

3ª etapa: Construir uma semirreta de origem V, de modo que ela intercepte o arco MN. Chame de O o ponto dessa intersecção.



4ª etapa: Construir a base do cone; tangente ao setor circular em O e de raio 3 cm. Para tanto, sobre a semirreta VO, a partir de O, marque o segmento de medida OT = 3 cm.

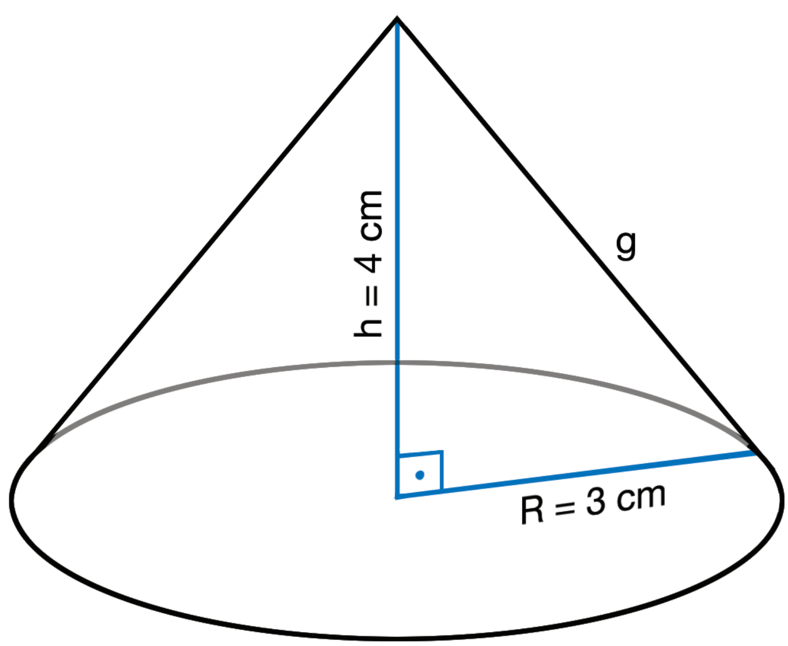


Para finalizar, procure refletir sobre cada etapa da construção: Que dificuldades eles enfrentaram em cada uma? Por que cada uma é indispensável?

Aspectos pedagógicos

Caro professor, esteja atento às possíveis dificuldades dos alunos para manipular os instrumentos de construção geométrica e, antes de iniciar a construção da planificação com eles, procure fazer um esboço com base nas sugestões e intuições deles sobre como imaginam que seja tal planificação. Para auxiliá-los, leve alguns objetos que se assemelhem a cones, como, por exemplo, aqueles antigos chapeuzinhos de festa de aniversário, para que possam planificá-los, mas ressalte que alguns objetos não possuem base, como é o caso do próprio chapeuzinho ou da casquinha de sorvete. Depois que a planificação estiver construída, lembre-se de acrescentar "abas", para que seja possível colar as extremidades do setor circular e manter o cone montado.

Observe que, durante a realização desta atividade, os alunos estarão identificando elementos importantes do cone, como a base, o vértice, a superfície lateral, a altura, a geratriz e o raio da base. Para que eles se certifiquem de que a hipotenusa do triângulo retângulo que constroem na primeira etapa é, de fato, a geratriz do cone, você pode mostrar-lhes figuras como a que segue:



Além disso, na segunda etapa, se for preciso, complete o setor circular para fechar um círculo inteiro e os alunos conseguirem compreender a regra de três que foi montada.

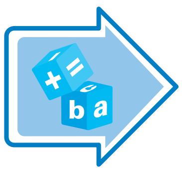
Aproveite a oportunidade para refletir com os alunos sobre a utilidade de planificarmos figuras geométricas espaciais. As planificações permitem, entre outras coisas, calcular rapidamente a área lateral, a área da base e a área total de cada sólido, ou seja, a quantidade de papel gasta para a construção de objetos que se assemelham a estas formas. Não deixe de solicitar dos alunos exemplos de objetos que se assemelhem aos cones. Isto irá levá-los a reconhecer que aquilo que estão estudando tem aplicações no mundo real.

Por fim, repare que a construção proposta nesta atividade poderia ser feita também com o auxílio de softwares como o Geogebra. Veja que temos aí uma oportunidade de utilizar a tecnologia como recurso didático.

Seção 3 – O que é um cone?

Páginas no material do aluno

138 a 140

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jogo de maquetes	Cola, tesoura, lápis de cor, papel A4, sucatas e um conjunto de planificações como o que segue em anexo para cada grupo.	O objetivo da atividade é favorecer a manipulação de sólidos geométricos com ênfase nos cones.	A atividade deve ser em grupos com 4 ou 5 componentes.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Nesta atividade, é recomendável que você peça, com antecedência, aos alunos que tragam de casa cola, tesoura, lápis de cor e sucatas (caixas de remédio, embalagens de produtos alimentícios ou de higiene pessoal, entre outras coisas). O objetivo é favorecer a manipulação de sólidos geométricos com ênfase nos cones. Acreditamos que, por meio da manipulação, os alunos terão oportunidade de verificar algumas propriedades dos sólidos. No jogo, os grupos deverão confeccionar maquetes que atendam a um tema sorteado e, num segundo momento, tentar adivinhar o que está sendo representado nas maquetes dos outros grupos. Ganhará o jogo aquele grupo que conseguir adivinhar mais.

Para começar, distribua as planificações que seguem em anexo entre os grupos. Antes que eles comecem a recortar e montar os sólidos, procure sortear secretamente o tema de cada um. Assim, eles poderão planejar o que construirão e, se julgarem necessário colorir as superfícies laterais e as bases dos sólidos, conseguirão fazer isso enquanto eles ainda estiverem planificados. Entre os temas para as maquetes, sugerimos aldeia indígena, estacionamento, autoestrada, jogo de futebol e uma praça, mas você pode pensar e propor muitos outros.

Uma maneira de conduzir a uma observação mais detalhada do cone (foco desta seção) é estabelecer critérios para a confecção das maquetes como, por exemplo, além das sucatas, entre os sólidos disponíveis, todos os cones deverão ser utilizados.

Depois que as maquetes estiverem prontas, dando continuidade ao jogo, você pode colocá-las em exposição na sala de aula, entregar uma folha de papel A4 para cada grupo e pedir que as observem e escrevam sem que os outros grupos tomem conhecimento do que está representado em cada uma. Assim que todos os grupos concluírem, inicie a apuração, identificando aquele que mais adivinhou.

Ao final, recomendamos que você converse com a turma, procure identificar o que eles acharam da atividade e se conseguiram reconhecer alguma propriedade dos sólidos que, até então, não tinham se dado conta.

Aspectos operacionais

Confeccionar maquetes é uma tarefa de que os alunos gostam muito e, dificilmente, uma turma não se motiva diante de um jogo. Nesta atividade, tentamos integrar as duas coisas. Porém, se depois do jogo, você não refletir com a turma sobre as propriedades dos sólidos geométricos envolvidos nas maquetes, ela não terá o alcance que pretendemos ao desenvolvê-la. Entre as propriedades, destacamos algumas a seguir. Durante a conversa com seus alunos, poderão surgir muitas outras.

Há sólidos que possuem faces triangulares em maior quantidade ou faces retangulares em maior quantidade. Há ainda aqueles que possuem faces opostas idênticas e aqueles que não possuem faces poligonais.

- Podemos classificar os sólidos entre aqueles que rolam e os que não rolam.
- Podemos identificar ainda os que possuem vértices e os que não possuem. Dos sólidos que disponibilizamos planificados, apenas os cilindros não possuem vértices.

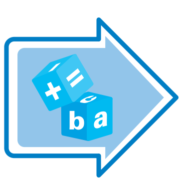
Voltando-nos para esta última propriedade, pode acontecer de os alunos generalizarem a equivocada ideia de que corpos redondos não possuem vértices, uma vez que, além dos cilindros, as esferas também não os possuem. Entretanto, vale lembrar que exatamente o cone, nosso principal objeto de estudo aqui, é um corpo redondo que possui um vértice.

Por fim, você pode propor aos alunos que observem também as sucatas que levaram: A que formas geométricas se assemelham? Que propriedades se observam? E, se possível, faça uma exposição das maquetes para toda a escola.

Seção 4 – Como calcular a área e o volume do cone?

Páginas no material do aluno

140 a 144

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Comparação do cone com o cilindro	Cola, tesoura, 200 g de arroz ou qualquer outro grão, um conjunto de planificações como o que segue em anexo para cada trio.	Os alunos irão construir um cone e um cilindro a partir de suas planificações, calculando assim o volume do cone por comparação ao volume do cilindro.	A turma pode ser dividida em grupos de 3 ou 4 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

No pendrive, você encontra a planificação de três cilindros e três cones. Você pode começar entregando um material deste para cada trio e solicitar que recortem e montem os sólidos. Observe que uma das bases do cilindro e a base do cone não devem ser coladas, para que os alunos possam encher e esvaziar estes sólidos com os grãos. Depois que os sólidos estiverem montados, você pode questionar a turma sobre os volumes de cada um: Qual deles tem o maior volume? Sólidos diferentes podem ter volumes iguais? Quantas vezes um sólido "cabe" no outro? Sugira-lhes que façam todas as combinações possíveis entre os pares de sólidos, preenchendo um com arroz e despejando este conteúdo no outro, para tentarem estabelecer alguma relação entre seus volumes.

Depois disso, dê oportunidade para que exponham suas conclusões, discuta sobre os erros das medições e deduza, com base nas observações dos alunos, a fórmula para o volume do cone. Ao longo de toda a atividade, é razoável que você reflita também sobre os seguintes itens:

a. Os nomes e a identificação de linhas importantes dos cones, como o raio da base, a geratriz e a altura;

b. Formas presentes no dia a dia que se assemelham a cones;

c. A utilidade de se calcular o volume dos sólidos, entre eles, dos cones.

No final da aula, você pode ainda propor as situações a seguir, para que os alunos apliquem a fórmula que deduziram:

Situação 1: Uma casquinha de sorvete se assemelha a um cone cujo diâmetro da base é 6 cm e cuja altura é 12 cm. Quantos mililitros de sorvete são necessários para preenchê-la completamente?

Situação 2: O volume de um cone é 200 cm^3. Considerando $\pi = 3$, que medida encontraremos para o raio da base deste cone?

Aspectos pedagógicos

A ideia central desta atividade é que os alunos possam comparar o volume de um cone com o volume de um cilindro, porém, como sabemos, não estamos nos referindo a um cilindro qualquer. Para estabelecerem tal comparação, devem ser tomados um cone e um cilindro que possuem a mesma altura e o mesmo raio da base. Esperamos que, ao encherem o cone três vezes com arroz e despejarem este conteúdo no cilindro, os alunos percebam que o volume do cilindro é o triplo do volume do cone. Disponibilizamos a planificação de três cones distintos e três cilindros distintos. Cabe aos alunos, depois de montá-los, fazer experimentos procurando estabelecer relações entre os volumes destes sólidos. Nossa sugestão é que você permita que eles experimentem livremente e concluam por conta própria a relação de igualdade que deve haver entre o raio da base e a altura, para que se verifique a razão 3 para 1 entre o volume do cilindro e o volume do cone.

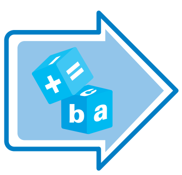
Não é de se estranhar que, durante as comparações dos volumes, alguns alunos confundam volume com área total. Se for preciso, dê alguns exemplos de sólidos que possuem a mesma área total e volumes diferentes e vice-versa. É importante deixar claro que há uma margem de erro na comparação dos volumes, uma vez que, além do erro humano comum a qualquer processo de medição, há sempre um pequeno espaço ocupado pelo ar entre os grãos de arroz. Vale a pena esclarecer também que o grão de arroz, neste caso, está sendo usado como unidade de medida. Se substituíssemos estes grãos por grãos de areia, que são bem menores, o erro na medição seria menor.

É fundamental que, no desfecho da atividade, você reforce a dedução da fórmula para o volume do cone, encontrada no material do aluno, e proponha exemplos para que eles possam calcular volumes de cones variados sem precisar confeccioná-los. Ao utilizar as situações descritas anteriormente, esteja atento à conversão de centímetro cúbico para mililitro (1 cm^3 = 1 ml). Isso pode não ser fácil para alguns alunos. Aproveite a situação 2 para alertar seus alunos que, dependendo do valor que atribuímos a π, teremos valores diferentes para o volume do cilindro ou para qualquer outra medida sua que estejamos interessados em calcular. Temos, na resolução de problemas, uma oportunidade para a reflexão mais ampla sobre a abstração que as ferramentas matemáticas tornam possível, que lhe aconselhamos não deixar passar.

Seção 4 – Como calcular a área e o volume do cone?

Páginas no material do aluno

140 a 144

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	As origens do "chorinho".	Uma ficha como as que seguem em anexo, para cada dupla.	A partir de uma situação cotidiana, os alunos poderão descobrir como calcular o volume de um copo em formato cilíndrico.	Duplas.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Professor, esta atividade foi extraída de um roteiro de ação do Curso de Formação Continuada oferecido para professores da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro. Nela, procuramos criar condições para que os alunos utilizem os conhecimentos sobre cones para resolver uma situação-problema inspirada em uma possível mudança de hábito da população carioca ocorrida com a substituição do copo cônico de papel para o consumo de caldo de cana.

Para iniciá-la, acreditamos ser interessante que você faça comentários e/ou promova um debate sobre os hábitos saudáveis, que são cada vez mais comuns à população carioca, devido à facilidade de disseminação de informação da atualidade, comparando com os hábitos comuns a essa população há algumas décadas. A substituição do copo cônico de papel é, em parte, fruto da aquisição de novos hábitos para manutenção da saúde.

Depois do debate, você pode distribuir uma ficha como a que segue em anexo para cada dupla de alunos. Peça-lhes que a leiam atentamente e tentem responder a todas as perguntas propostas. Quando eles concluírem, dê oportunidade para que exponham suas soluções e as estratégias que empregaram.

Aspectos pedagógicos

Falar nos hábitos da população de uma cidade, professor, inquestionavelmente, demanda alguns conhecimentos de Geografia; falar em manutenção da saúde, por sua vez, requer conhecimentos de Biologia. Sendo assim, temos nesta atividade uma ótima oportunidade para a realização de um trabalho interdisciplinar, e é aconselhável que você convide os professores dessas disciplinas a participarem da sua aula. Se isso não for possível, você pode também sugerir aos seus alunos que entrevistem esses profissionais.

Do ponto de vista matemático, para que seus alunos acompanhem e consigam realizar esta atividade, será necessário que eles utilizem os teoremas de proporcionalidade entre os volumes de figuras geométricas espaciais semelhantes.

Apresente estes teoremas antecipadamente a esta atividade. Releia-os, se julgar pertinente, para que sejam lembrados com todos os detalhes.

Existe certa analogia entre os procedimentos empregados no cálculo do volume do tronco de cone e aqueles empregados no cálculo do volume do tronco de pirâmide. É interessante que, durante as reflexões sobre a situação apresentada na ficha, você procure destacar esta analogia. Se tiver oportunidade, deduza, juntamente com a turma, a fórmula que permite calcular o volume do tronco de cone:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + Rr + r^2\right]$$

Onde

$h \rightarrow$ é a altura do tronco do cone

$R \rightarrow$ é o raio da base maior

$r \rightarrow$ é o raio da base menor

Lembre-se de que o ponto de partida para deduzi-la é identificar que o volume do tronco é a diferença entre o volume do cone maior e o volume do tronco menor.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Consolidação e registros de aprendizagem	Folha de atividades	Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos

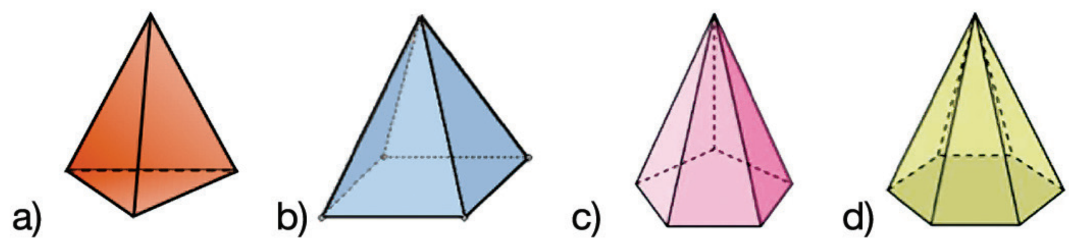
Aspectos operacionais

Nossa sugestão é que você utilize o último tempo de aula desta unidade para a consolidação e avaliação do conteúdo estudado junto à turma. Esta etapa pode estar articulada à seção "Veja ainda", do material do aluno, que irá enriquecer ainda mais a aula com novidades. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade.

Para complementar as questões que você poderá propor aos alunos, apresentamos, na folha de atividades, algumas questões que têm por objetivo a avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas.

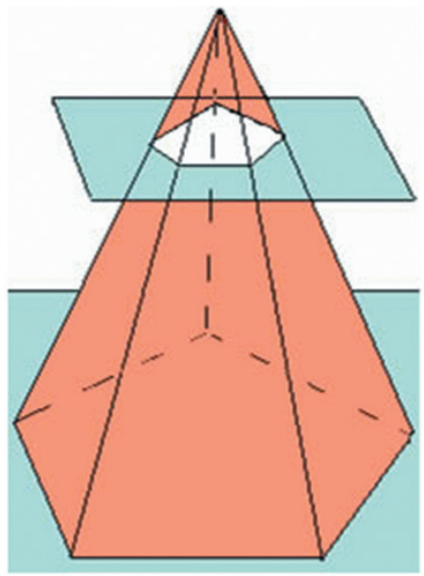
1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?

2. Classifique cada uma das pirâmides regulares a seguir, de acordo com suas bases. Em cada caso, dê o número total de arestas e faces laterais. Você poderia descrever, em palavras, como calcular a área total de cada um destes sólidos?



3. Na figura que segue, é apresentado um tipo de "container" muito utilizado em processos de moagem de certos grãos, bem como para armazenagem destes. Como se denomina o sólido abaixo? Como obter o volume que este sólido é capaz de armazenar?

4. Imagine que o plano da figura abaixo possa ser movido de acordo com sua vontade. Indique, explicando sua razão, onde este plano deve ser posto, de modo que o sólido situado acima do plano tenha volume igual ao sólido abaixo do plano.



5. Ainda com respeito à figura acima, se a área da base for e a área de uma das faces laterais for ,calcule , sabendo-se que a área total da pirâmide é de e que

Aspectos pedagógicos

1. Certifique-se de fazer com que os resultados deste momento de avaliação indiquem os pontos em que os alunos ainda não conseguiram êxito no aprendizado. Parabenize e elogie o quanto for necessário, para que este momento de avaliação se torne agradável. No item 1, espera-se que o aluno responda pirâmides e cones.

2. a. pirâmide triangular, 4 faces, 6 arestas; b) pirâmide quadrangular, 5 faces, 8 arestas; c) pirâmide pentagonal, 6 faces, 10 arestas; d) pirâmide hexagonal, 7 faces, 12 arestas; em qualquer caso, a área total será a área da base adicionada a n vezes a área de uma das faces laterais, onde n é o número de lados do polígono da base.

3. O sólido é um cone, e seu volume pode ser calculado multiplicando-se a área de sua base por um terço de sua altura.

4. À medida que o plano desce (paralelamente) em direção à base, o volume da pirâmide, limitada pelo vértice e este plano, cresce. Como a base é mais "larga", é intuitivo e bastante notório que o plano deverá ficar bem mais próximo à base que ao vértice da pirâmide.

5. Como $A_b + 5\,A_f = 50$ (área total), e $A_b = 3\,A_f$, resulta que $8\,A_f = 50$, donde $A_f = 6{,}25\ m^2$ e, portanto, $A_b = 18{,}75\ m^2$.

Ao final dos registros de avaliação, compartilhe as informações entre os alunos. Indique exercícios e atividades para que as dúvidas e erros possam ser devidamente contornados.

Folha de atividade – Consolidação e registros de aprendizagem

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

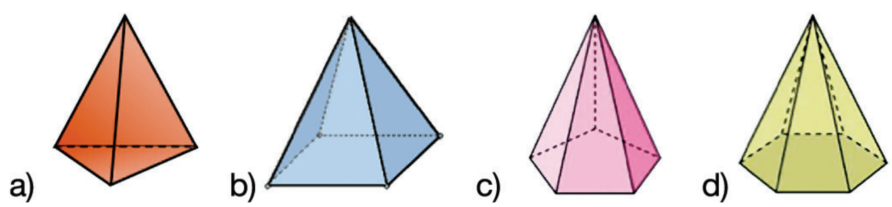
Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 4 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta Unidade?

____

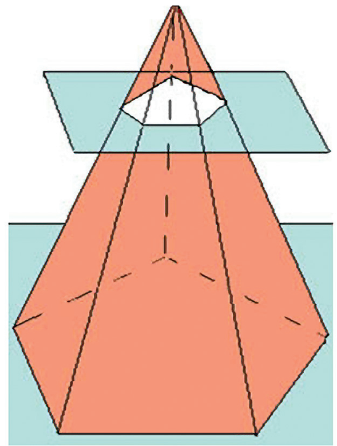
____

2. Classifique cada uma das pirâmides regulares a seguir, de acordo com suas bases. Em cada caso, dê o número total de arestas e faces laterais. Você poderia descrever, em palavras, como calcular a área total de cada um destes sólidos?



3. Na figura que segue, é apresentado um tipo de "container" muito utilizado em processos de moagem de certos grãos, bem como para armazenagem destes. Como se denomina o sólido abaixo? Como obter o volume o qual este sólido é capaz de armazenar?

4. Imagine que o plano da figura abaixo possa ser movido de acordo com sua vontade. Indique, explicando sua razão, onde este plano deve ser posto, de modo que o sólido situado acima do plano tenha volume igual ao sólido abaixo do plano.



5. Ainda com respeito à figura acima, se a área da base for e a área de uma das faces laterais for ,calcule , sabendo-se que a área total da pirâmide é de e que

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão dissertativa	Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora.	Questão dissertativa que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual	10 minutos

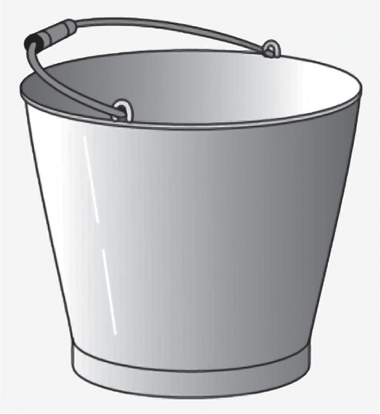
Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão dissertativa que complementa o que foi proposto na seção *"O que perguntam por aí?", do* material do aluno. Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

Ao trabalhar tal questão com os alunos, esperamos que haja compreensão de situações reais onde eles poderão aplicar o estudo de Pirâmides e Cones.

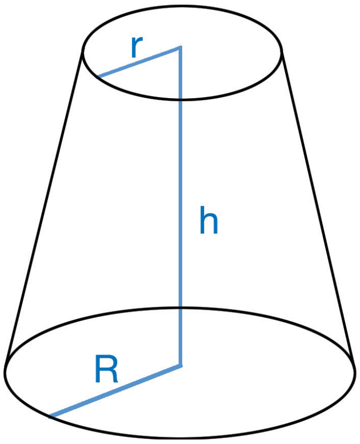
Questão

Classicamente, baldes utilizados em serviços domésticos têm uma forma de "tronco de cone", a saber,



Qual o volume de um balde?

Usando-se conhecimentos de geometria, pode-se calcular o volume do tronco de cone



por meio da fórmula

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(r^2+rR+R^2\right) \qquad \text{(I)}$$

Para fins práticos, você considera a aproximação e considera a fórmula mais simples

$$V=h\left(r^2+rR+R^2\right) \qquad \text{(II)}$$

Finalmente, imagine que você vai a uma loja e quer adquirir um balde com, pelo menos, 15 litros de capacidade. Por uma desatenção do funcionário da loja, não há referências nos baldes, de modo que não é possível identificar a capacidade dos produtos expostos. O gerente da loja, sabendo da sua necessidade, aponta um dos baldes e garante que este balde atende sua necessidade. Por sorte, você percebe que a loja vende fitas métricas e, gentilmente, você solicita uma para fazer medições do balde indicado pelo gerente.

Se as medidas encontradas são , e, você confiará na informação do gerente? Por quê?

Desenhe a figura que corresponde ao caso em que . Você conhece este sólido?

Observação:

$$\boxed{1 \text{ litro} = 1000\ cm^3}$$

Aspectos pedagógicos

Primeiramente, você deve alertar seus alunos que uma oportunidade de construir conhecimentos é fazê-lo através de problemas que introduzam novos conceitos. E este é o caso! Tranquilize-os em relação às informações sobre química, presentes no contexto. Tranquilize-os em relação às fórmulas que, num primeiro momento, podem trazer desconforto a alguns. Junto com os alunos, identifique cada um dos elementos da figura (tronco de cone), de modo que ele saiba exatamente que medidas indicadas na figura correspondem às do balde. Ressalte a importância do assunto estudado, mostrando a abrangência e a aplicabilidade em situações do cotidiano, pelas quais qualquer um de nós pode passar.

Folha de atividade – Questão dissertativa

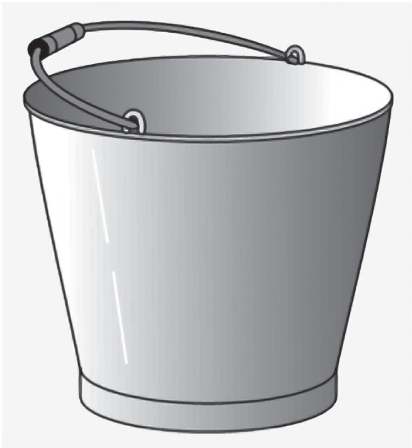
Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.

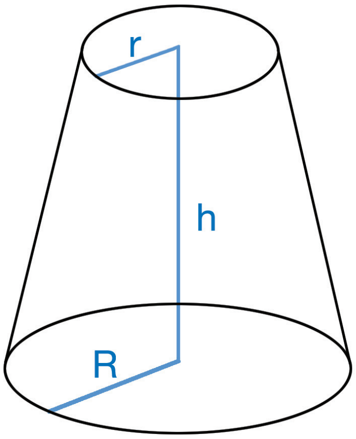
Questão

Classicamente, baldes utilizados em serviços domésticos têm uma forma de "tronco de cone", a saber,



Qual o volume de um balde?

Usando-se conhecimentos de geometria, pode-se calcular o volume do tronco de cone



por meio da fórmula

$V = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right)$

Para fins práticos, você considera a aproximação e considera a fórmula mais simples

$V = h\left(r^2 + rR + R^2\right)$

Finalmente, imagine que você vai a uma loja e quer adquirir um balde com, pelo menos, 15 litros de capacidade. Por uma desatenção do funcionário da loja, não há referências nos baldes, de modo que não é possível identificar a capacidade dos produtos expostos. O gerente da loja, sabendo da sua necessidade, aponta um dos baldes e garante que este balde atende sua necessidade. Por sorte, você percebe que a loja vende fitas métricas e, gentilmente, você solicita uma para fazer medições do balde indicado pelo gerente.

a. Se as medidas encontradas são , e, você confiará na informação do gerente? Por quê?

---

b. Desenhe a figura que corresponde ao caso em que . Você conhece este sólido?

Observação:

1 litro = 1000

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão objetiva (UERJ)	Folha de atividades, lápis, borracha.	Questão objetiva que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual.	10 minutos

Aspectos operacionais

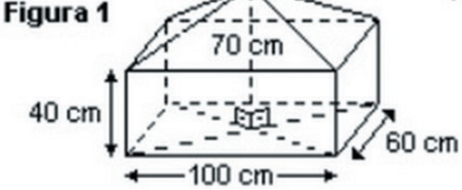
Disponibilizamos uma questão objetiva que pode ser usada como complemento ao que foi proposto no material do aluno na seção *"O que perguntam por aí?"*. Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

Sugerimos, nesta etapa, a escolha de questões objetivas que contemplem as habilidades pretendidas nesta unidade, para compor o instrumento avaliativo. Se desejar, você pode buscar outras questões de acordo com o perfil da sua turma. A ideia é que além de avaliar o aprendizado, o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como ENEM, vestibulares, concursos, etc.

Questão

Leia os quadrinhos abaixo.

Figura 1



Suponha que o volume de terra acumulado no carrinho de mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura 1, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.

Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em , igual a:

a. 12

b. 13

c. 14

d. 15

Observação: 1 dm^3 = 1000 cm^3

Aspectos pedagógicos

Você pode intervir junto aos alunos na resolução do problema, caso observe alguma dificuldade ou insegurança. É provável que a partir disto eles consigam desenvoltura para seguir adiante. Tente estimular as ideias que levem às respostas desejadas. Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas. Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Neste momento, é importante que você pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.

Alerte os alunos que o que há de fundamental no problema é notar que o sólido geométrico apresentado na figura 1 pode ser decomposto em dois outros sólidos bem conhecidos. Feito isto, o cálculo é rotineiro e direto. Atenção devida deve ser dada aos quadrinhos, pois requerem que se utilize a informação ali contida.

Folha de atividade – Questão objetiva (UERJ)

Nome da escola: ____

Nome do aluno: ____

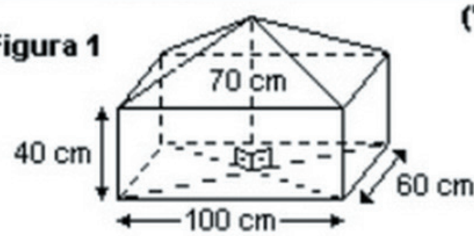
Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.

Questão

Leia os quadrinhos abaixo.

("O Globo", março 2000)

Figura 1



Suponha que o volume de terra acumulado no carrinho de mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura 1, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.

Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em , igual a:

a. 12

b. 13

c. 14

d. 15

Gabarito

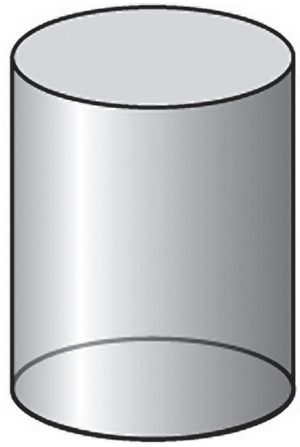
Questão dissertativa

a. De acordo com a fórmula *(II)* (simplificada), verifica-se que, com as medidas $r = 10\,cm$, $R = 18\,cm$ e $h = 20\,cm$, o volume do referido balde é

$V = 20\,(10^2 + 10.20 + 18^2) = 12.480\ cm^3 = 12{,}48$ *litros*

Portanto, a informação do gerente não é verdadeira.

b. Se , a figura obtida é



conhecido como cilindro.

Questão objetiva

O volume do paralelepípedo é dado por

40 cm x 60 cm x 100 cm = 24 x 10^4 cm^3 = 240 dm^3,

enquanto o volume superior, correspondente à pirâmide, cuja área da base é 100 cm x 60 cm e cuja altura é 30cm, é dado por

$\frac{1}{3}$ 100 *cm* x 60 *cm* x 30 *cm* = 6 x 10^4 cm^3 = 60 dm^3

Portanto, o volume total do carrinho é

240 dm^3 + 60 dm^3 = 300 dm^3

Consequentemente, o volume acumulado a cada ano, foi de

$\frac{300}{20}$ dm^3 = 15 dm^3

Referências Bibliográficas

- http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1500-6.pdf
- http://jucienebertoldo.files.wordpress.com/2012/11/atividades-de-laboratc3b3rio-de-matemc3a1tica-2.pdf
- http://jucienebertoldo.files.wordpress.com/2012/11/atividades-de-laboratc3b3rio-de-matemc3a1tica-2.pdf
- http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1039

Geometria Espacial: esferas

André Luiz Martins Pereira, Érika Silos de Castro, Juliana Bezerra, Leo Akio Yokoyama, Luciana Felix da Costa Santos e Renata Cardoso Pires de Abreu

Introdução

Na Unidade 5 do material do aluno, são apresentadas várias situações cotidianas em que é possível observar elementos que podem representar uma esfera, tais como uma laranja, uma bola de futebol etc. Nesta Unidade, o aluno terá a oportunidade de ampliar as discussões realizadas nos módulos anteriores, compreendendo os elementos de uma esfera, a área da superfície esférica, volume de uma esfera, além dos conceitos de fuso esférico e cunha esférica.

Para potencializar o material didático do aluno, pesquisamos alguns recursos e atividades para auxiliar a você, professor, a ampliar possibilidades para exploração deste tema em suas aulas.

Sugerimos que a primeira aula dessa Unidade se inicie com uma atividade disparadora. Esta é uma atividade proposta para ser realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, é esperado que eles desenvolvam algumas noções básicas relacionadas ao conceito de esfera e seus elementos.

Para dar sequência ao estudo dessa Unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta Unidade seja dividida em dois momentos: o primeiro, dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta Unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo; o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Uma descrição destas sugestões está colocada nas tabelas a seguir, e seus detalhamentos no texto que segue.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

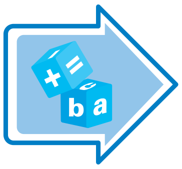
Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	Expansão	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Geometria Espacial: esferas	Geometria Espacial
Objetivos da unidade	
Reconhecer os elementos de uma esfera.	
Calcular a área da superfície e o volume da esfera.	
Calcular a área de um fuso esférico e o volume de uma cunha esférica.	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	161 e 162
Seção 1 – O que é uma esfera?	163 a 171
Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?	171 a 177
Seção 3 – Fuso e Cunha	177 a 184
O que perguntam por aí?	189 e 190

Recursos e ideias para o Professor

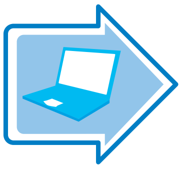
Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

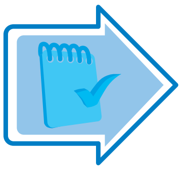


Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



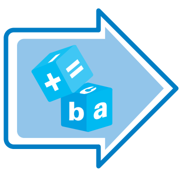
Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

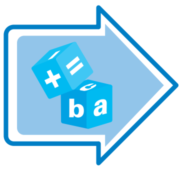
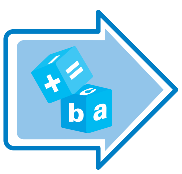
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Espelhos esféricos.	Concha polida de cozinha, simulador em flash disponível no material multimídia do professor, computadores para os alunos, cadernos ou folhas para anotações e folha de atividades.	Esta atividade é composta de dois momentos. No primeiro momento, os alunos poderão experimentar, de uma forma mais concreta, a formação de imagens em espelhos esféricos usando para isso uma concha de cozinha polida. No segundo, os alunos poderão utilizar um simulador virtual para esquematizar a representação das imagens formadas por espelhos esféricos.	A turma pode ser dividida em duplas ou trios.	40 minutos
	Monitoramento por satélite	Folha de atividade, uma bola de isopor, barbante, datashow com computador e vídeo.	Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre alguns dos conceitos básicos da geometria da esfera a partir de um vídeo.	Turma dividida em duplas.	40 minutos

Seção 1 – O que é uma esfera?

Páginas no material do aluno

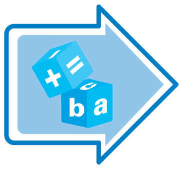
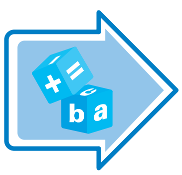
163 a 171

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Esfera X superfície esférica.	Lápis (ou palito tipo de churrasco), tesoura, papel, compasso, fita adesiva, um pedaço de arame fino e maleável e folha de atividades.	A atividade a seguir propõe a observação da esfera e da superfície esférica através da rotação de semicírculos e semicircunferências ao redor de um eixo. Posteriormente, sugerimos que o professor apresente diferentes objetos do cotidiano, para a identificação e fixação das definições de esfera e casca esférica.	Turma dividida em duplas ou trios.	40 minutos
	Aventuras do Geodetetive.	Datashow, laptop ou sala multimídia, lápis caneta e folha de atividade .	Através desta atividade será possível explicar como são estabelecidas as coordenadas geográficas, latitude e longitude, usadas na localização de qualquer ponto da superfície da Terra.	Turma dividida em duplas.	40 minutos

Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?

Páginas no material do aluno

171 a 177

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando o Volume da Esfera.	Folha de atividades, lápis/caneta, bolas de gude e uma proveta (ou um copo medidor) com água.	O objetivo dessa atividade é aplicar o cálculo de volume de uma esfera a partir de experiências que permitam construir estimativas.	Turma dividida em grupos de quatro alunos.	40 minutos
	Método empírico de determinação do volume da esfera.	Papel-cartão, molde de apoio para construção de sólidos, tesoura, cola, massa de modelar, estilete (é opcional, servindo apenas para ajudar a modelar), recipiente cilíndrico transparente (pode ser um pote de detergente, um copo, etc.), caneta hidrocor, régua e água.	Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de construir, usando massa de modelar, um cone e um cilindro de alturas iguais ao raio de suas bases e uma semiesfera de mesmo raio. Em seguida, após mergulhar os sólidos construídos um a um em um recipiente com água, poderão perceber que a altura que a água sobe para o cone, semiesfera e cilindro são proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente. Dessa forma é possível verificar de maneira experimental as fórmulas de determinação do volume do cone e da esfera a partir do volume do cilindro.	Turma dividida em trios.	40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando a área da superfície esférica.	Folha de atividades, lápis/caneta, calculadora.	Esta atividade tenta contextualizar o estudo da área da superfície esférica através da resolução de uma situação-problema que aborda as bolas dos esportes olímpicos como tema motivador.	Turma dividida em grupos de três ou quatro alunos.	40 minutos

Seção 3 – Fuso e Cunha

Páginas no material do aluno

177 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Visualizando Cunhas e Fusos Esféricos.	Uma ou duas laranjas grandes e uma faca (sempre com o professor).	Esta atividade visa a apresentar aos alunos o que vem a ser uma cunha esférica e um fuso esférico por meio de cortes realizados em uma laranja grande.	Participação coletiva e registros individuais.	20 minutos

Seção: O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno

189 e 190

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de Vestibulares.	Imagem disponível para projeção neste material; material do aluno.		Turma dividida em duplas.	

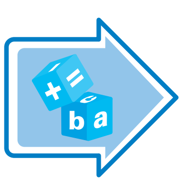
Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Momento de Reflexão.	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a Unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetiva como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Participação individual dos alunos.	40 minutos

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares.	Folha de Atividades disponível para reprodução no Grid de aula do “DVD do professor”, lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Espelhos esféricos.	Concha polida de cozinha, simulador em flash disponível no material multimídia do professor, computadores para os alunos, cadernos ou folhas para anotações e folha de atividades.	Esta atividade é composta de dois momentos. No primeiro momento, os alunos poderão experimentar, de uma forma mais concreta, a formação de imagens em espelhos esféricos usando para isso uma concha de cozinha polida. No segundo, os alunos poderão utilizar um simulador virtual para esquematizar a representação das imagens formadas por espelhos esféricos.	A turma pode ser dividida em duplas ou trios.	40 minutos

Aspectos operacionais

Essa atividade foi planejada de forma que os alunos pudessem, num primeiro momento, experimentar, de uma forma mais concreta, a formação de imagens em espelhos esféricos usando para isso uma concha de cozinha polida e, em seguida, utilizar um simulador virtual para esquematizar a representação das imagens formadas por esse tipo de espelho. Para que cada aluno possa interagir diretamente com o simulador virtual, recomendamos que a segunda parte dessa exploração seja aplicada no laboratório de informática da sua unidade escolar, de modo que o simulador seja instalado em cada um dos computadores do laboratório e acessado a partir do browser ou navegador neles já disponível. Dessa maneira, a atividade proposta tem como objetivo apresentar, de uma forma interativa, uma das aplicações físicas da forma de uma superfície esférica: os espelhos esféricos.

Os espelhos esféricos são normalmente usados na entrada de elevadores e de estacionamentos, em saídas de ônibus, em estojos de maquiagem e em retrovisores. Eles são constituídos de uma superfície lisa e polida com formato esférico. Quando a parte refletora for interna à superfície, o espelho recebe o nome de espelho côncavo; quando for externa, é denominado convexo.

- Com antecedência, proponha que os alunos se distribuam em duplas ou trios e recomende que cada grupo traga uma concha de cozinha para o dia da aplicação da atividade. Essa concha deverá ser de material polido: aço inox polido, por exemplo. A concha poderá ser utilizada para experimentar tanto na formação de imagens no espelho côncavo quanto no espelho convexo.

- No dia da aplicação da atividade, certifique-se de que o simulador está devidamente instalado nos computadores do laboratório de informática. Uma vez que tudo esteja preparado, leve os alunos até o laboratório de informática e peça para que se reúnam de acordo com as duplas ou trios formados anteriormente, dispondo-os diante dos computadores.

- Peça que os alunos olhem para a parte côncava (interna) da concha que trouxeram a uma certa distância, e verifiquem como é a imagem. Depois peça para que vão aproximando da concha até muito próximo dos olhos, sempre verificando a imagem. Depois peça para que repitam o mesmo procedimento com a parte convexa da concha. Esse momento da atividade não deve levar mais que 10 minutos.

- Depois de terminada a experimentação com a concha, peça para que os alunos abram o simulador virtual "Simulador_Espelhos_Esfericos.swf" e o apresente rapidamente. Se preferir, o mesmo simulador também pode ser acessado pela internet no site: http://www.edy.pro.br/espelhos/simulador.swf.

- Em seguida, distribua a cópia impressa da folha de atividades que se encontra disponível para reprodução em seu material multimídia.

- Uma vez aberto o simulador, peça que seus alunos leiam com atenção as "instruções" e a "introdução ao conteúdo" clicando sobre os respectivos links.

- Convide-os, então, a explorar os recursos do simulador propriamente dito, pedindo que os alunos cliquem sobre o link "Simulador (Atividade)". Ao abrir o link, peça para que os alunos selecionem a aba correspondente ao "espelho plano" (que provavelmente já estará selecionada).

- Deixe que explorem a tela livremente e daí peça que respondam o conjunto de questões da primeira parte da folha de atividades: "Espelhos Planos".
- Uma vez terminada a etapa anterior, peça para que os alunos selecionem a aba correspondente ao "espelho côncavo".
- Deixe que, novamente, explorem a tela livremente e daí peça que respondam ao conjunto de questões da segunda parte da folha de atividades: "Espelhos Côncavos".
- Uma vez terminada a etapa anterior, peça para que os alunos selecionem a aba correspondente ao "espelho convexo".
- Deixe que, novamente, explorem a tela livremente e daí peça que respondam ao conjunto de questões da terceira parte da folha de atividades: "Espelhos Convexos".
- Depois da exploração do simulador, peça para que os alunos respondam, finalmente, ao conjunto de questões da quarta parte da folha de atividades: "Aplicações".

Caso a sua unidade escolar não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com auxílio de um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Nesse caso, os alunos poderão interagir com o software de maneira indireta e coletiva.

Aspectos pedagógicos

- Antes de conduzir seus alunos até o laboratório de informática, certifique-se de que o simulador tenha sido devidamente instalado e testado, para que não seja necessário realizar tais procedimentos durante a aula.
- Esclareça que a parte côncava da concha funciona como um espelho esférico côncavo, enquanto a parte convexa da concha funciona como um espelho esférico convexo. Também esclareça que a concha não se trata de uma esfera completa, mas de uma calota esférica. Peça que imaginem a esfera da qual a concha seria a calota e seu centro.
- Durante a leitura das "instruções" e da "introdução ao conteúdo", você poderá lê-las junto com seus alunos ajudando-os a sanar as possíveis dúvidas de vocabulário que possam ocorrer.
- Explore com maior cuidado e ênfase a tela da "introdução ao conteúdo" que se refere aos espelhos esféricos. Ela contém uma animação bastante interessante que pode ajudar a ilustrar um dos tipos de secção da esfera: a calota esférica.
- Chame a atenção para o fato de que em cada esquema de representação do objeto e sua respectiva imagem no espelho estamos observando de uma perspectiva transversal. A imagem que vemos "atrás" do espelho é a que é vista através do espelho do ponto de vista do objeto.

Folha de atividades – Espelhos Esféricos

Nome da Escola:____

Nome: ____

Primeira Parte: Espelhos Planos

Movimente o objeto (vela) e observe o comportamento da representação da sua imagem formada no espelho.

a. O tamanho da imagem se altera em relação ao do objeto de acordo com a posição dele?

b. A orientação da imagem (direita ou invertida) se altera em relação ao do objeto de acordo com a posição dele?

c. Ao se olhar em um espelho plano (normal), o campo visual aumenta ou diminui?

Segunda Parte: Espelhos Côncavos

Movimente o objeto (vela) e observe o comportamento da representação da sua imagem formada no espelho.

a. O tamanho da imagem se altera em relação ao do objeto de acordo com a posição dele?

b. Afastando o objeto deste espelho, o que acontece com a imagem no que diz respeito ao seu tamanho e à sua orientação?

c. Pensando no experimento com a concha, nesse tipo de espelho o campo visual aumenta ou diminui?

Terceira Parte: Espelhos Convexos

Movimente o objeto (vela) e observe o comportamento da representação da sua imagem formada no espelho.

a. O tamanho da imagem se altera em relação ao do objeto de acordo com a posição dele?

b. Afastando o objeto deste espelho, o que acontece com a imagem no que diz respeito ao seu tamanho e à sua orientação?

c. Pensando no experimento com a concha, nesse tipo de espelho o campo visual aumenta ou diminui?

Quarta Parte: Aplicações

1. Você pode imaginar por que em alguns retrovisores de motocicletas e de automóveis são usados espelhos esféricos e não espelhos planos? De que tipo seriam: côncavo ou convexo? Justifique.

2. Você pode imaginar por que em espelhos de dentistas, são usados espelhos esféricos e não espelhos planos? De que tipo seriam: côncavo ou convexo? Justifique.

3. Você pode imaginar por que em espelhos de porta de elevador ou estacionamentos, são usados espelhos esféricos e não espelhos planos? De que tipo seriam: côncavo ou convexo? Justifique.

4. Você pode imaginar por que em alguns espelhos de estojo de maquiagem, são usados espelhos esféricos e não espelhos planos? De que tipo seriam: côncavo ou convexo? Justifique.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Monitoramento por satélite	Folha de atividade, uma bola de isopor, barbante, datashow com computador e vídeo.	Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre alguns dos conceitos básicos da geometria da esfera a partir de um vídeo.	Turma dividida em duplas.	40 minutos

Aspectos operacionais

Essa atividade foi retirada (e adaptada) de "recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio" da UNICAMP.

Nessa Unidade, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre os conceitos básicos da geometria da esfera. Para facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos na atividade, sugerimos a utilização de uma bola de isopor para representar nosso grande planeta: Terra.

Nosso objetivo é desenvolver conceitos básicos de geometria esférica, e também de comparar a geometria euclidiana com a geometria não-euclidiana, procurando através das semelhanças e diferenças existentes entre elas, mostrar a importância de cada uma delas.

Sugerimos algumas atividades para realizar com os alunos em sala de aula, após a apresentação do vídeo, disponível no sitio: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1054.

- É interessante que os alunos se organizem em duplas para uma melhor discussão das atividades.
- Professor, procure se certificar de que cada dupla está com uma folha de atividades, uma bola de isopor e um pedaço de barbante.

Atividade 1

"Um jovem caçador saiu de sua fazenda e andou 10 Km ao sul. Depois virou a oeste e andou mais 10 Km. Então virou ao norte e andou novamente por mais 10 Km. Ele ficou espantado, pois descobriu que tinha retornado à sua fazenda."

a. Em uma folha de papel, desenhe o caminho percorrido pelo jovem caçador. Adote para cada centímetro do papel o equivalente a um quilômetro.

b. De acordo com a história descrita acima é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Discuta com sua dupla e escreva as conclusões.

c. Em uma bola de isopor, marque com auxílio do barbante, o caminho percorrido pelo jovem caçador.

d. Analisando o caminho desenhado na bola, é possível que o jovem caçador volte ao mesmo ponto de partida (sua fazenda)? Justifique sua resposta.

Atividade 2

"Retornando a história do jovem caçador, imagine agora a seguinte situação: suponha que o jovem tenha saído de sua fazenda e inicie uma longa caminhada em linha reta para muito, muito distante (imaginando nunca parar...!)".

a. Em uma folha de papel, desenhe o caminho percorrido pelo jovem caçador.

b. De acordo com o caminho percorrido desenhado na folha de papel é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Discuta com sua dupla e escreva as conclusões.

c. Novamente utilize uma bola de isopor e o barbante e marque o caminho percorrido pelo jovem caçador.

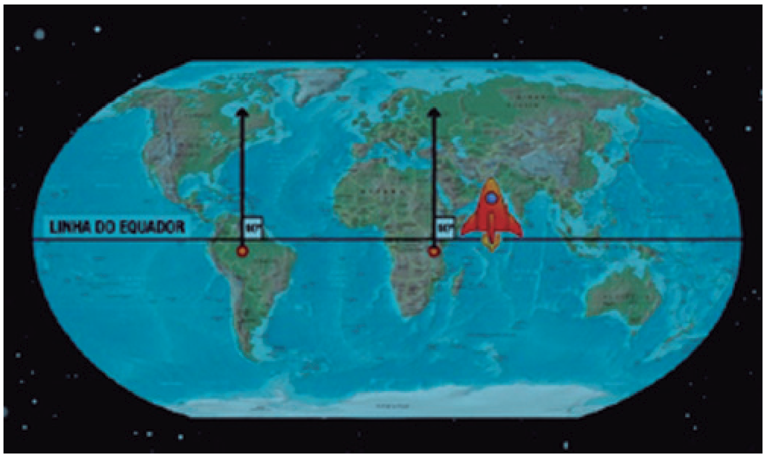
d. De acordo com o caminho percorrido desenhado na bola de isopor, é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Escreva suas conclusões.

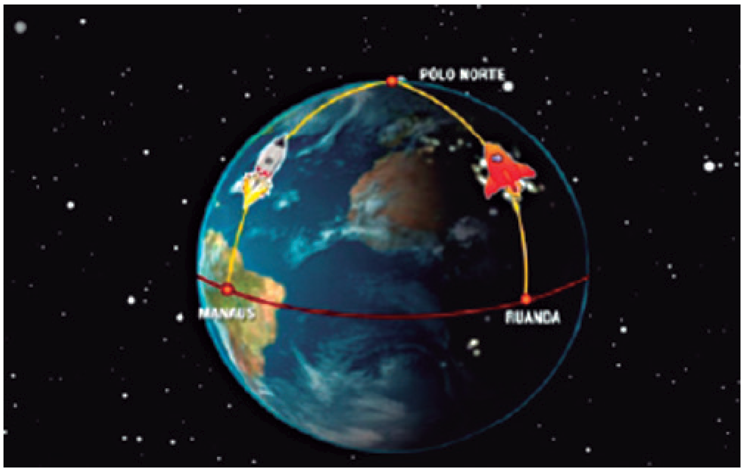
Aspectos pedagógicos

- Professor, no momento em que o vídeo estiver em torno dos 7 minutos, caso julgue conveniente, sugerimos pausar o vídeo e propor as seguintes questões aos alunos:

1. Em qual geometria estão as naves do super-herói Radix e do vilão Capitão Bum?
2. O que poderia acontecer com as naves do super-herói Radix e do vilão Capitão Bum ao serem lançadas no mesmo momento e na mesma velocidade ao espaço?

- Igualmente, quando o vídeo estiver em 8 minutos e 48 segundos, sugerimos que uma nova pausa seja feita para reforçar a ideia com os alunos de que as naves do herói Radix e do vilão Capitão Bum estão em uma geometria Esférica (superfície da Terra), e, portanto o Nelson não poderia considerar a definição da geometria Euclidiana de que retas paralelas não se cortam!
- Tão logo termine o vídeo, a atividade deve ser iniciada.





Folha de Atividade – Monitoramento por satélite

Nome da Escola: ____

Nome dos Alunos: ____

Atividade 1

"Um jovem caçador saiu de sua fazenda e andou 10 Km ao sul. Depois virou a oeste e andou mais 10 Km. Então virou ao norte e andou novamente por mais 10 Km. Ele ficou espantado, pois descobriu que tinha retornado à sua fazenda."

a. Em uma folha de papel, desenhe o caminho percorrido pelo jovem caçador. Adote para cada centímetro do papel o equivalente a um quilômetro.

b. De acordo com a história descrita acima é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Discuta com sua dupla e escreva as conclusões.

c. Em uma bola de isopor, marque com auxílio do barbante, o caminho percorrido pelo jovem caçador.

d. Analisando o caminho desenhado na bola, é possível que o jovem caçador volte ao mesmo ponto de partida (sua fazenda)? Justifique sua resposta.

Atividade 2

“Retornando a história do jovem caçador, imagine agora a seguinte situação: suponha que o jovem tenha saído de sua fazenda e inicie uma longa caminhada em linha reta para muito, muito distante (imaginando nunca parar...!)”.

a. Em uma folha de papel, desenhe o caminho percorrido pelo jovem caçador.

b. De acordo com o caminho percorrido desenhado na folha de papel é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Discuta com sua dupla e escreva as conclusões.

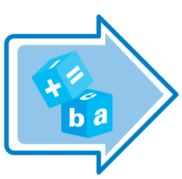
c. Novamente utilize uma bola de isopor e o barbante e marque o caminho percorrido pelo jovem caçador.

d. De acordo com o caminho percorrido desenhado na bola de isopor, é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Escreva suas conclusões.

Seção 1 – O que é uma esfera?

Páginas no material do aluno

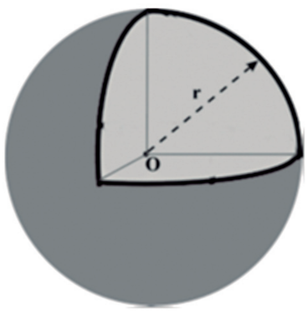
163 a 171

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Esfera X superfície esférica.	Lápis (ou palito tipo de churrasco), tesoura, papel, compasso, fita adesiva, um pedaço de arame fino e maleável e folha de atividades.	A atividade a seguir propõe a observação da esfera e da superfície esférica através da rotação de semicírculos e semicircunferências ao redor de um eixo. Posteriormente, sugerimos que o professor apresente diferentes objetos do cotidiano, para a identificação e fixação das definições de esfera e casca esférica.	Turma dividida em duplas ou trios.	40 minutos

Aspectos operacionais

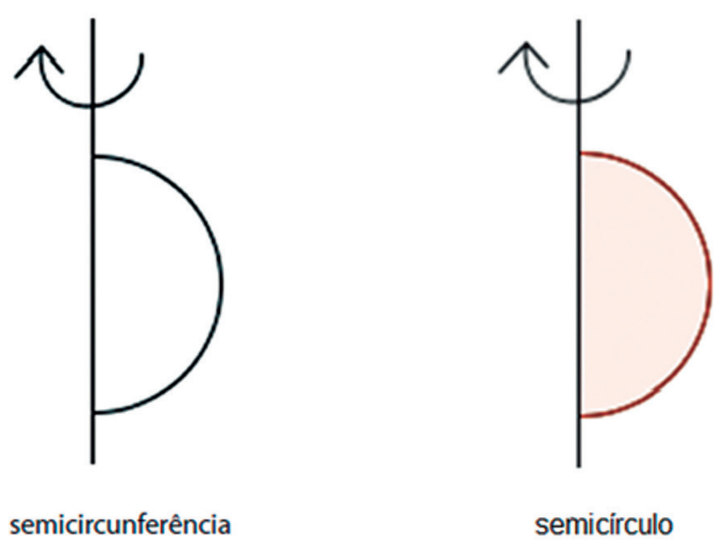
Essa atividade foi elaborada para auxiliar os alunos a identificarem a diferença entre esfera e superfície esférica a partir das noções de superfície e sólido de revolução e depois a fazerem correspondências entre diferentes objetos do cotidiano utilizando os conceitos trabalhados.

Como destacado no material do aluno, página 43:



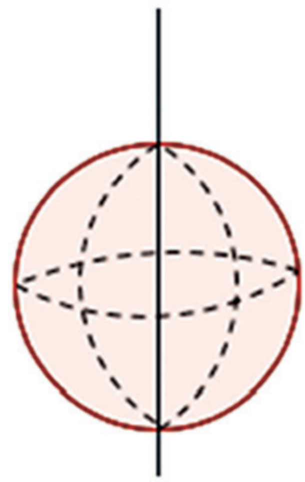
"Dado um ponto O e uma distância r, chamamos de esfera ao conjunto de pontos cuja distância até o ponto O é menor ou igual ao raio r. Se essa distância for exatamente igual a r, chamamos o conjunto de pontos de superfície da esfera, pois, neste caso, estaremos tomando somente a "casca" da esfera (em cinza escuro). Se a distância for menor do que r, teremos apenas o "miolo" da esfera (em cinza claro)."

- Peça para que seus alunos organizem-se em duplas ou em trios.
- Procure se certificar de que cada dupla está com uma folha de atividades, uma bola de isopor e um pedaço de barbante.
- Com o compasso, oriente os alunos a traçarem um arco de circunferência, de modo que possa ser marcada uma semicircunferência e o diâmetro na folha de papel e a recortarem como molde de um semicírculo e depois obter a semicircunferência a partir do contorno feito com o pedaço de arame;
- Após a confecção dos moldes, oriente-os a utilizarem um lápis ou um palito como eixo, colando-o sobre o diâmetro da semicircunferência e fixando o arame no caso do semicírculo, conforme a figura a seguir:



- A seguir, leve os alunos a girarem completamente a semicircunferência e o semicírculo, ou seja, 360° em torno do eixo, e estimule-os a tirarem conclusões.

superfície esférica



Esfera

- Por fim, sugerimos que você use a lousa para apresentar diferentes objetos do cotidiano, para que os alunos identifiquem e fixem a ideia de esfera e casca esférica, conforme o exemplo a seguir:

1. Classifique os seguintes objetos esféricos a seguir como "esfera" ou "casca esférica". Discuta com seus colegas a sua escolha.

a. Laranja:	m. Rolimã:
b. Bolinha de tênis de mesa:	n. Lustre em formato esférico
c. Planeta Terra:	o. Bala de canhão antiga
d. Bolinha de gude:	p. Bexiga em formato esférico
e. Bola de futebol:	q. Bola de tênis de campo
f. Bola de boliche:	r. Bola de pilates
g. Lua:	s. Bola do lançamento de pelota (atletismo)
h. Bola de enfeite de Natal:	t. Bola de beisebol
i. Limão:	u. Bola do lançamento de martelo (atletismo)
j. Bola de basquete:	v. Bola de golfe
k. Bola de sinuca:	
l. Bolha de sabão:	

Aspectos pedagógicos

- Após a rotação dos objetos ao redor do eixo, estimule os alunos a identificarem a distinção entre esfera e superfície esférica. Para isso, abra uma discussão inicial sobre as impressões dos alunos a respeito dos conceitos de esfera e de superfície (casca) esférica e posteriormente, formalize esses conceitos e apresente os elementos que compõem estes objetos matemáticos.

- Ao apresentar os exemplos do cotidiano, você pode discutir com a turma sobre os objetos esféricos apresentados, ajudando-os a decidirem se tal objeto se assemelha mais com uma esfera ou com uma casca esférica, e por quê.

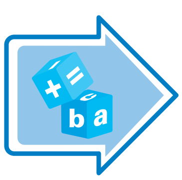
- Incentive os estudantes a darem outros exemplos de esfera e casca esférica.

- Alguns objetos se referem a bolas de alguns esportes com os quais muitos podem não estar familiarizados. Você poderá propor que seus alunos pesquisem sobre o formato e confecção dessas bolas, ou utilizar um projetor multimídia (datashow) e um laptop para exibir os resultados de uma busca na internet para esclarecer na hora possíveis dúvidas que possam ser levantadas em relação ao formato delas.

Seção 1 – O que é uma esfera?

Páginas no material do aluno

163 a 171

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Esfera X superfície esférica.	Lápis (ou palito tipo de churrasco), tesoura, papel, compasso, fita adesiva, um pedaço de arame fino e maleável e folha de atividades.	A atividade a seguir propõe a observação da esfera e da superfície esférica através da rotação de semicírculos e semicircunferências ao redor de um eixo. Posteriormente, sugerimos que o professor apresente diferentes objetos do cotidiano, para a identificação e fixação das definições de esfera e casca esférica.	Turma dividida em duplas ou trios.	40 minutos

Aspectos operacionais

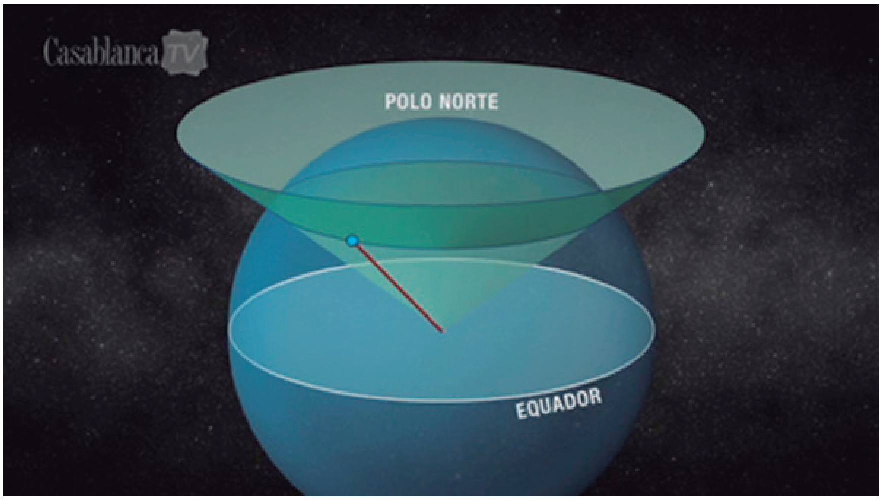
O vídeo dessa atividade consta nos "recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio" da UNICAMP, disponível on-line em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1103 ou off-line no material multimídia do professor.

Nessa Unidade, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre como são estabelecidas as coordenadas geográficas, latitude e longitude, usadas na localização de qualquer ponto da superfície da Terra.

- É interessante que os alunos se organizem em duplas para uma melhor discussão das atividades.
- Professor, após a apresentação do vídeo, distribua para cada grupo uma folha de atividades, disponível para reprodução no seu material multimídia. Se necessário apresente o vídeo mais de uma vez.
- Procure se certificar de que cada dupla está com uma folha de atividades.

Aspectos pedagógicos

- Oriente os alunos nas questões propostas na folha de atividades.
- No item 3, caso seja necessário, mostre a imagem a seguir para os alunos, para que eles percebam que uma mesma latitude corresponde a vários pontos da circunferência corresponde a esse ângulo.



Além disso, se achar conveniente você pode falar para seus alunos que, geralmente, a altitude (em relação ao nível do mar) também é informada para que a localização seja precisa.

- No item 5, é interessante destacar para os alunos que, diferentemente da linha do Equador, que corresponde a uma circunferência máxima no plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra, o meridiano correspondente ao grau 0 poderia ser qualquer um.

Você pode usar as duas imagens a seguir para comparar latitude e longitude com a turma.

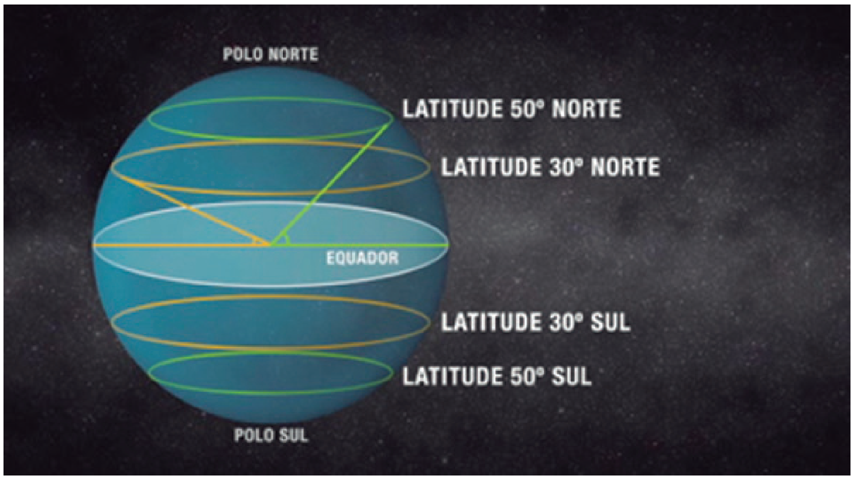
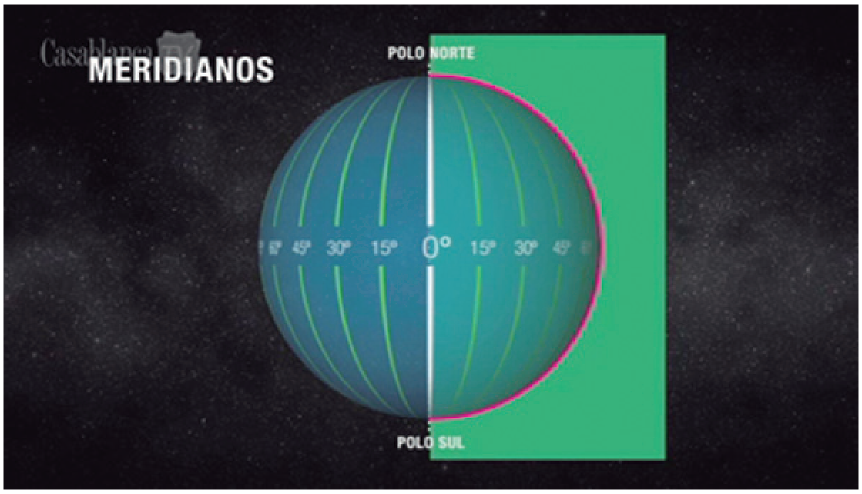
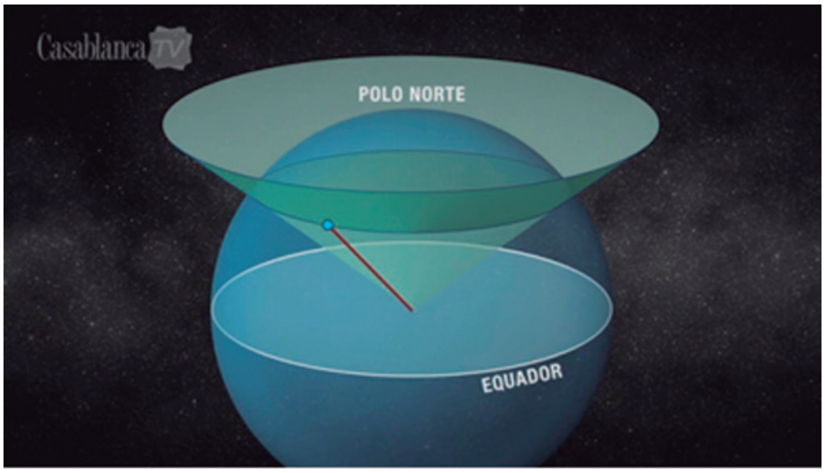


Imagem capturada no vídeo.



É interessante reforçar com os alunos que a determinação na latitude 0 é única, enquanto a escolha da longitude 0 foi uma questão de convenção.

- No item 7, se necessário volte à imagem abaixo e destaque com os alunos o fato de os paralelos darem uma volta completa.



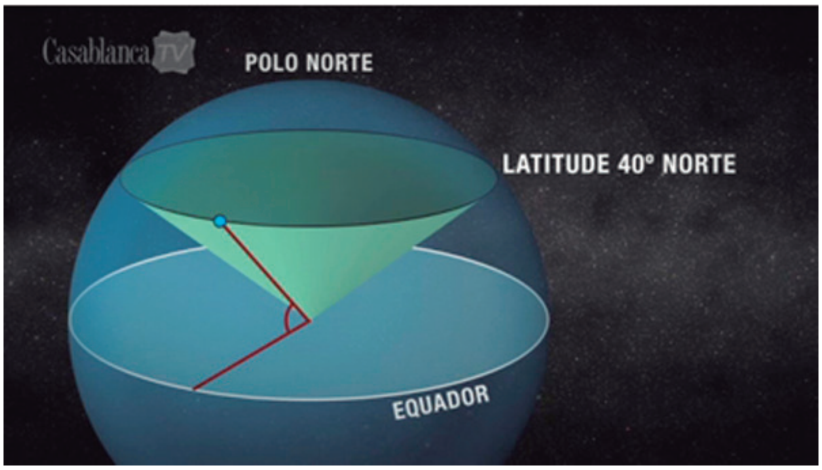
Nesse caso, você também pode mostrar aos alunos que os polos correspondem a 90o.

Caso os alunos tenham dificuldade em perceber essas relações a partir das imagens, você pode lançar mão de um globo terrestre escolar, geralmente utilizado por professores de Geografia. É, portanto, um interessante momento para fazer um trabalho interdisciplinar.

Já para o caso dos meridianos, como eles correspondem a semicircunferências a variação vai de 0o a 180o. O globo terrestre escolar pode ser muito útil para explicar essa diferença em relação aos paralelos. Caso na sua escola não tenha um disponível, você pode usar uma bola de isopor (ou qualquer outra) na qual você possa riscar as linhas.

Não deixe de destacar para os alunos que, se completarmos a volta correspondente ao meridiano de Greenwich, formamos uma circunferência completa que divide a Terra em Oriente e Ocidente.

- Já no item 8, a imagem a seguir pode ajudar os alunos a entenderem por que é necessário indicar o ângulo, bem como o hemisfério correspondente à latitude.



- Finalmente no item 9, os alunos devem perceber que, como Porto Alegre se encontra mais ao sul das quatro cidades citadas nos itens, então a sua latitude é a maior. Por isso, a opção que está em desacordo é o item C, na qual a cidade de Salvador, BA, está na latitude 32o.

Um globo terrestre ou até mesmo um mapa do Brasil pode ajudar os alunos a fazerem essa questão.

Não deixe de conversar com o professor de Geografia da sua escola na busca de um trabalho interdisciplinar. Existem mapas-múndi com a identificação das latitudes e longitudes que podem também ajudar na explicação desses conceitos. Contudo, recomendamos que o globo terrestre seja utilizado, inclusive para comparar com o mapa-múndi, pois, como sabemos, não há planificação para a esfera, bem como para a Terra. Se você tiver a oportunidade de levar para a sala de aula esses dois objetos, poderá ainda falar um pouco sobre o que acontece ao se planificar a Terra – distorção dos polos e dos países mais próximos deles.

Folha de Atividade – Aventuras do Geodetetive

Nome da Escola: ____

Nome dos Alunos: ____

Responda às perguntas, de acordo com o que você assistiu no vídeo.

1. Qual é o nome da linha imaginária que divide o planeta em hemisfério norte e hemisfério sul?

2. A partir dessa linha, quais outras linhas imaginárias são formadas?

3. Para localizar um ponto na superfície terrestre, essas linhas são suficientes? Por quê?

4. Qual é o nome dado às outras linhas utilizadas para a localização na superfície terrestre? (resposta: meridianos ou longitudes)

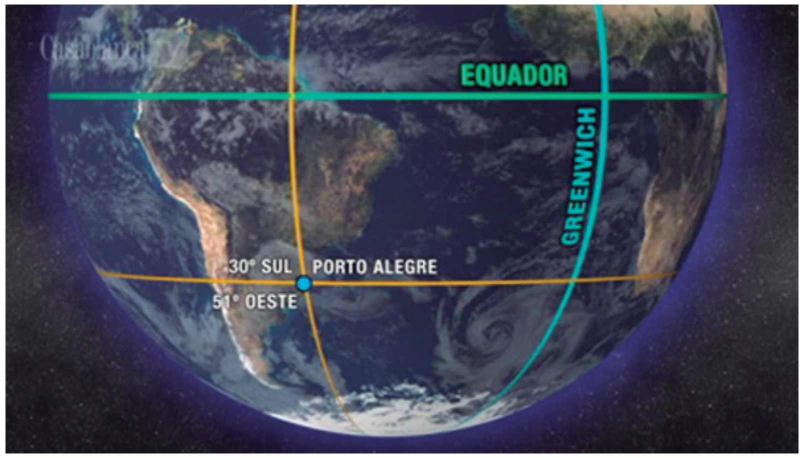
5. Qual o nome dado à linha imaginária do item 4 correspondente ao grau 0?

6. A cidade do Rio de Janeiro está localizada em qual hemisfério: Norte ou Sul? Qual a linha imaginária que orienta essa determinação?

7. Você saberia justificar por que as latitudes variam de 0° a 90° e as longitudes de 0° a 180°? Se necessário, volte a assistir o vídeo.

8. Ao identificar uma latitude, por que é preciso dizer a medida do grau e se foi para Norte ou para Sul?

9. De acordo com o vídeo, a cidade de Porto Alegre fica aproximadamente na latitude 30° ao sul do Equador e na longitude 51° a oeste de Greenwich.



Considerando que Porto Alegre está localizado latitude 30o ao sul do Equador, é incorreto afirmar que:

a. A cidade de Petrópolis, RJ está aproximadamente na latitude 22o ao sul do Equador.

b. A cidade de Rio Branco, AC está aproximadamente na latitude 10o ao sul do Equador.

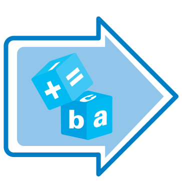
c. A cidade de Salvador, BA está aproximadamente na latitude 32o ao sul do Equador.

d. A cidade de Olinda. PE está aproximadamente na latitude 8o ao sul do Equador.

Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?

Páginas no material do aluno

171 a 177

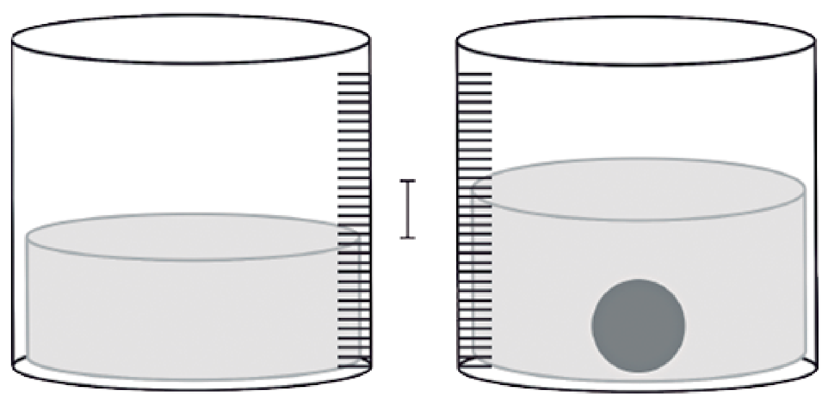
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando o Volume da Esfera.	Folha de atividades, lápis/ caneta, bolas de gude e uma proveta (ou um copo medidor) com água.	O objetivo dessa atividade é aplicar o cálculo de volume de uma esfera a partir de experiências que permitam construir estimativas.	Turma dividida em grupos de quatro alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Essa é uma atividade inspirada no trabalho do professor Antônio Rodrigues Neto que se encontra disponível no site: http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/medio/matematica-como-explorar-o-volume-da-esfera.htm

A atividade consiste em levar para a sala de aula vários objetos esféricos e desafiar os alunos a calcularem o volume desses objetos, e seus respectivos raios. Para isso utilizemos uma proveta com água ou um vasilhame (tipo copo medidor) com marcações de volume na qual as bolinhas serão imersas e a sequência de passos a seguir:

- Coloque um objeto esférico dentro do vasilhame com água de forma que este objeto fique totalmente imerso e verifique o deslocamento do nível da água.



Feito isso, será possível estabelecer um procedimento para o cálculo do volume dessas esferas?

- Peça que cada grupo escreva na folha de atividade o raciocínio que eles usaram para calcular o volume de cada objeto esférico considerado.
- É importante que a proveta tenha um marcador de volume e que sejam colocadas as bolinhas até uma variação de volume que possa ser medida simplesmente olhando as marcas da proveta.
- Após isso, apresente aos alunos a fórmula de cálculo de volume da esfera:

$$v = \frac{4\pi}{3} r3$$

- Peça a todos os grupos que comparem o volume obtido pelo deslocamento do nível da água com a fórmula dada e calculem o raio de cada objeto esférico, aproximando o valor de π para 3,14.

Por exemplo, a diferença do nível foi de 20 ml = 0,02 L = 0,02 dm^3 = 20 cm^3. Então **20 =** $\boldsymbol{v = \frac{4\pi}{3} r3}$

E o raio é igual a 1,68 cm.

- Agora peça para medirem, aproximadamente, o raio da esfera com uma régua e compararem com o resultado obtido através da fórmula.

- Solicite que os alunos organizem-se em grupos de quatro;
- Desafie o aluno a estabelecer uma maneira de calcular o volume de cada objeto esférico, sem precisar recorrer à fórmula do volume da esfera;
- Vale ressaltar que no caso do uso de um copo medidor, a medida é obtida em ml não em centímetros e a comparação é feita a partir do volume de água deslocado e não pela altura do deslocamento.
- Ao final da atividade, promova um debate sobre a atividade baseado nos resultados obtidos, questionando:
  - Como se pode obter o volume do sólido imerso totalmente abaixo do nível da água?
  - O valor aproximado utilizado para π foi satisfatório para o cálculo do raio?

Esperamos que os alunos obtenham valores muito próximos àqueles obtidos pela fórmula, e identifiquem que a diferença obtida se deve aos possíveis erros de medição do raio e de aproximação usada para o valor de π.

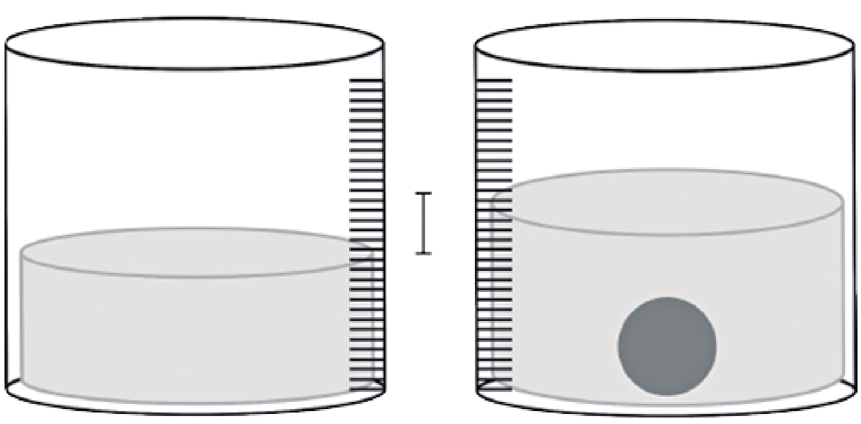
Folha de Atividades – "Explorando o Volume da Esfera"

Nome da Escola:____

Nome: ____

Experimento:

- Coloque um objeto esférico dentro do vasilhame com água e verifique o deslocamento do nível da água em relação ao momento anterior. No caso do copo medidor, verifique a variação do volume.



Feito isso, será possível estabelecer um procedimento para o cálculo do volume de uma esfera sem recorrer à fórmula? Você tem alguma ideia?

Questão 1: Discuta com os seus colegas e tente descrever uma maneira de calcular, o volume de um dos objetos esféricos usados no experimento, por exemplo, o de uma bolinha de gude.

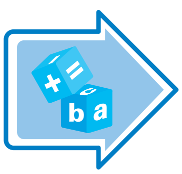
Questão 2: Agora, utilizando a fórmula do volume da esfera, calcule o raio de um objeto esférico utilizado no experimento.

Questão 3: Utilizando a fórmula do volume da esfera e considerando $\pi \cong 3{,}14$, calcule o volume do mesmo objeto esférico analisado na questão 1.

Questão 4: Compare os resultados obtidos nas questões 1 e 3. O que você observa? A partir desses resultados, é possível afirmar que o método proveniente do experimento é eficaz no cálculo do volume?

Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?

Páginas no material do aluno
171 a 177

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Método empírico de determinação do volume da esfera.	Papel-cartão, molde de apoio para construção de sólidos, tesoura, cola, massa de modelar, estilete (é opcional, servindo apenas para ajudar a modelar), recipiente cilíndrico transparente (pode ser um pote de detergente, um copo, etc.), caneta hidrocor, régua e água.	Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de construir, usando massa de modelar, um cone e um cilindro de alturas iguais ao raio de suas bases e uma semiesfera de mesmo raio. Em seguida, após mergulhar os sólidos construídos um a um em um recipiente com água, poderão perceber que a altura que a água sobe para o cone, semiesfera e cilindro são proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente. Dessa forma é possível verificar de maneira experimental as fórmulas de determinação do volume do cone e da esfera a partir do volume do cilindro.	Turma dividida em trios.	40 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade é uma adaptação da atividade "Cilindro = cone + esfera/2?" desenvolvida pelo IME – UNICAMP de autoria das professoras Maria Lúcia Bontorim de Queiroz, Claudina Izepe Rodrigues e Eliane Quelho Frota Rezende, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/experimentos/ExperimentosM3Matematica/cilindro=cone+esfera2/arquivos/cilindro=cone+esfera2---oexperimento.pdf.

Essa adaptação permitiu a elaboração de uma atividade complementar que tem o objetivo de ilustrar a demonstração da fórmula do cálculo do volume da esfera $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, proposta na seção *"Como calcular área e volume de esferas?"* da Unidade 25 do material do aluno (página 50), tornando-a um pouco mais palpável.

Nosso objetivo é levar os alunos a obter as relações que fornecem o volume do cone e o da esfera a partir do volume do cilindro de maneira experimental.

No trabalho "O Método", o matemático grego Arquimedes explora um modo mecânico para investigar problemas da matemática, dentre eles a relação entre os volumes da esfera, do cilindro e do cone. Destaca também a importância de uma demonstração posterior aos resultados obtidos. Sendo assim, no trabalho "Sobre a Esfera e o Cilindro", escrito em dois livros e constituído de cinquenta e três proposições, ele apresenta uma demonstração rigorosa da relação entre os volumes.

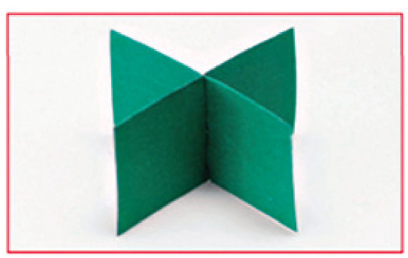
Neste experimento, seus alunos terão contato com uma maneira experimental de verificar que o volume de um cone é igual a um terço do volume de um cilindro de mesmo raio da base e altura, e que o volume de uma esfera é igual a quatro terços do volume de um cilindro cujo raio da base e altura são iguais ao seu raio.

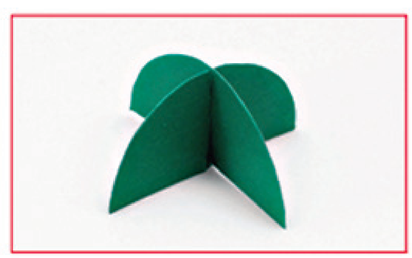
Por ser uma atividade experimental, ela se torna interessante no sentido de que os alunos, por terem um contato manual com os sólidos citados, poderão se lembrar das relações de volume mais facilmente.

- Divida a classe em grupos e dê um pedaço de papel cartão, uma folha contendo os moldes de apoio para construção dos sólidos (que se encontra disponível para reprodução em arquivo PDF em seu Grid de aula de seu DVD), massa de modelar e um recipiente transparente para cada um.
- Como, inicialmente, serão construídos três sólidos, o ideal é que os grupos sejam compostos por três alunos. Para facilitar a montagem, será usado o molde de apoio que deverá ser transferido para o papel-cartão.
- Oriente seus alunos a realizarem os seguintes procedimentos:

1. Colar os moldes sobre o papel-cartão e, depois, recortá-los;
2. Encaixar as duas partes de cada sólido usando os cortes centrais (conforme ilustração a seguir);


Molde cone


Molde cilindro


Molde semiesfera

3. Com massinha de modelar, construir finalmente os sólidos, usando os moldes anteriores (conforme ilustração a seguir).


Cone


Cilindro


Semiesfera

- Agora, com os sólidos prontos, seus alunos poderão fazer a comparação de seus volumes. Para essa comparação, será necessário o uso de um recipiente cilíndrico transparente (frasco de detergente, por exemplo) com água. Peça aos seus alunos para:

1. Marcar, no recipiente, o nível da água;
2. Mergulhar o cilindro no recipiente e marcar novamente o nível.
3. Retirar o cilindro e voltar a colocar a água no nível inicial.
4. Mergulhar o cone e marcar novamente o nível da água.
5. Retirar o cone e voltar a colocar a água no nível inicial.
6. Mergulhar a semiesfera marcando novamente o nível da água.

- Depois desse experimento, seus alunos terão elementos para observar que os volumes estão em proporções de 1 : 2 : 3 para o cone, semiesfera e cilindro, respectivamente.
- A partir dessa constatação, eles poderão deduzir a expressão do volume da esfera.

Aspectos pedagógicos

- Professor, depois de lembrar que o volume de água deslocado em cada caso corresponde ao volume de cada sólido mergulhado, chame a atenção para a relação entre os volumes desses sólidos de modo que os alunos possam observar que o volume da semiesfera corresponde a 2/3 e o cone corresponde a 1/3 do volume do cilindro.

- Assim, se a expressão para calcular o volume do cilindro é igual a $\pi r^2 . h$, sendo que para esse cilindro usado no experimento temos h = r, então, a expressão para o cálculo do volume de um cone de mesma altura e mesmo raio da base desse cilindro será $\frac{\pi r^2 . h}{3}$ e a expressão para o cálculo do volume de uma semiesfera de mesmo raio da base do cilindro será $\frac{2\pi r^2 x h}{3} = \frac{2\pi r^2 x r}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}$. Logo a expressão para o cálculo do volume de uma esfera será $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?

Páginas no material do aluno

171 a 177

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando a área da superfície esférica.	Folha de atividades, lápis/caneta, calculadora.	Esta atividade tenta contextualizar o estudo da área da superfície esférica através da resolução de uma situação-problema que aborda as bolas dos esportes olímpicos como tema motivador.	Turma dividida em grupos de três ou quatro alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é associar as áreas das superfícies esféricas às bolas utilizadas nos esportes olímpicos. Primeiramente apresentamos na forma de problema uma situação que envolve o cálculo da área de superfícies esféricas através do material necessário para a fabricação de diferentes bolas esportivas, em seguida propomos algumas questões baseadas no problema anterior para que possam ser discutidas pelos alunos conforme expostas a seguir:

Situação-problema: Uma fábrica de materiais esportivos prevê um aumento nas vendas dos diferentes tipos de bolas utilizadas nas mais variadas modalidades olímpicas. Para estimar a quantidade e o custo de material que será utilizado no revestimento das mesmas, o setor de produção criou uma planilha de controle.

Esporte	Raio da bola (cm)	Área da superfície esférica (cm^2)	Valor em reais do revestimento (por cm^2)	Custo unitário de produção
Basquetebol	13		R$ 0,02	
Futebol	11		R$ 0,03	
Voleibol	10,5		R$ 0,04	
Handebol	9,5		R$ 0,02	
Polo Aquático	11		R$ 0,05	
Ginástica Rítmica	11		R$ 0,01	
Tênis	3		R$ 0,10	
Tênis de mesa	1		R$ 0,05	

- É interessante que os alunos se organizem em grupos de três a quatro alunos para uma melhor discussão das atividades.
- Distribua uma folha de atividades para cada grupo.

Aspectos pedagógicos

- Professor, oriente os alunos na resolução do problema proposto e no preenchimento da tabela baseando-se nos dados fornecidos.
- É possível que os alunos tenham dificuldades na multiplicação envolvendo números decimais ou os fazem com muita morosidade. Neste caso, oriente-os neste tipo de operação e se preferir, permita o uso de calculadora para agilizar os cálculos.
- É importante que você lembre aos alunos da fórmula da área da superfície esférica, isto é, $A_{superfície esférica} = 4\pi r^2$.
- Em caso de dúvidas no preenchimento, você pode iniciar completando uma linha da tabela, escolhendo um dos esportes descritos como exemplo.
- Ao final da atividade, promova um debate sobre baseado nos conceitos trabalhados. Esta atividade sugere um trabalho interdisciplinar que pode ser planejado juntamente com o professor de Educação Física. Desta forma, acreditamos que as reflexões sobre os elementos da esfera possam ser enriquecidas.

Folha de Atividades – "Explorando Áreas de Superfícies Esféricas"

Nome da Escola:____

Nome: ____

Situação-problema: Uma fábrica de materiais esportivos prevê um aumento nas vendas dos diferentes tipos de bolas utilizadas nas mais variadas modalidades olímpicas. Para estimar a quantidade e o custo de material que será utilizado no revestimento das mesmas, o setor de produção criou uma planilha de controle.

Baseado nos dados fornecidos, complete corretamente a tabela a seguir:

Esporte	Raio da bola (cm)	Área da superfície esférica (cm^2)	Valor em reais do revestimento (por cm^2)	Custo unitário de produção
Basquetebol	13		R$ 0,02	
Futebol	11		R$ 0,03	
Voleibol	10,5		R$ 0,04	
Handebol	9,5		R$ 0,02	
Polo Aquático	11		R$ 0,05	
Ginástica Rítmica	11		R$ 0,01	
Tênis	3		R$ 0,10	
Tênis de mesa	1		R$ 0,05	

Questões propostas:

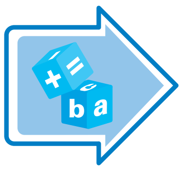
1. Após as comparações das diferentes esferas, é possível concluir que quanto maior o raio, maior a área da superfície esférica. A partir daí, observe e complete a tabela a seguir:

Raio da esfera (cm)	Área da superfície esférica (cm^2)	Razão $\left(\frac{A_{2r}}{A_r}\right)$
1	$A_1 = 4\pi$	$\frac{A_2}{A_1} =$
2	$A_2 = 16\pi$	
4		$\frac{A_4}{A_2} =$
r		$\frac{A_{2r}}{A_r} =$
2r		

2. Baseando-se na terceira coluna da tabela acima, é possível notar que ao dobrar o raio de uma esfera, o que ocorre com a área da superfície esférica?

Seção 3 – Fuso e Cunha

Páginas no material do aluno
177 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Visualizando Cunhas e Fusos Esféricos.	Uma ou duas laranjas grandes e uma faca (sempre com o professor).	Esta atividade visa a apresentar aos alunos o que vem a ser uma cunha esférica e um fuso esférico por meio de cortes realizados em uma laranja grande.	Participação coletiva e registros individuais.	20 minutos

Aspectos operacionais

- Professor, corte uma laranja no sentido meridional, conforme a figura a seguir, no sentido dos gomos, em pelo menos oito partes iguais.
- Você pode instigar os alunos, perguntando se os gomos representam alguma forma geométrica conhecida por eles.

- Aproveite para apresentar as noções de fuso esférico e cunha esférica a partir deste exemplo e explique que as formas desses gomos são chamadas de cunhas esféricas.

- Em seguida, cuidadosamente retire a casca de cada cunha. A superfície externa da casca de cada parte representa um fuso esférico.

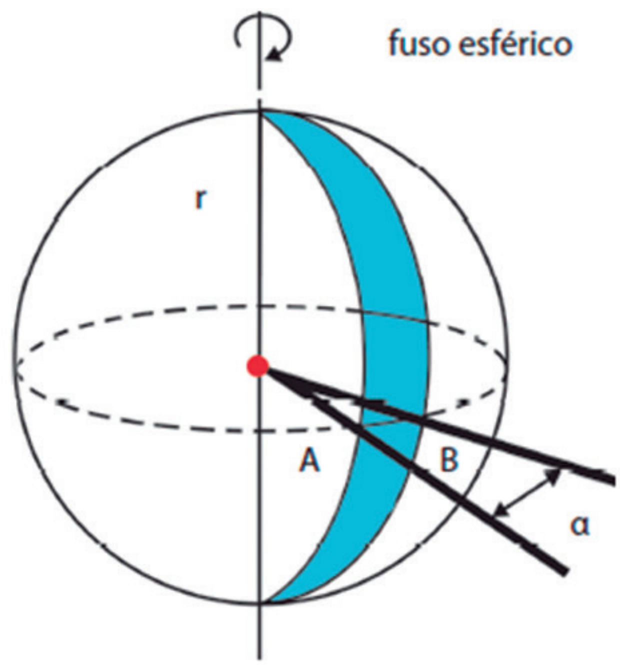
- Você pode destacar que as cunhas esféricas tem volume, pois são sólidos e os fusos esféricos tem área, pois são superfícies.
- Após esta apresentação, você pode conceituar formalmente esses objetos matemáticos de acordo com as explicações sobre volume da cunha esférica e a área do fuso esférico nas pp. 56 a 61 do material do aluno.

Aspectos pedagógicos

- Sugerimos que a manipulação da faca seja feita somente pelo professor, assim acreditamos que podemos evitar acidentes.
- Ao final da atividade, certifique-se de que todos os alunos entenderam as definições de cunho e fuso esférico, estimulando-os a citarem outros exemplos.
- Destaque que cunho esférico tem volume, pois é um sólido, para isso mostre o gomo da laranja.
- Destaque que fuso esférico tem área e não volume, pois este é uma superfície, mostrando, neste caso, a casca do gomo da laranja.
- Aproveite para conceituar de maneira formal esses elementos conforme exposto nas p.p. 59 a 61 do material do aluno.

Fuso esférico:

Fuso esférico é uma parte da superfície esférica cujas extremidades estão nos pólos. Uma definição mais precisa, mais rigorosa, é a superfície obtida pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Veja na figura



Esfera com fuso esférico destacado

Para calcularmos a área do fuso esférico, devemos fazer uma regra de três que relaciona a área da superfície esférica com o ângulo da superfície esférica, ou seja, quando temos uma superfície esférica sua área é de $4\pi R^2$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da superfície esférica então teremos um certo ângulo α e portanto uma área A:

Área -------------- Ângulo (em graus)

$4\pi R^2$--------------- 360°

A --------------------- α

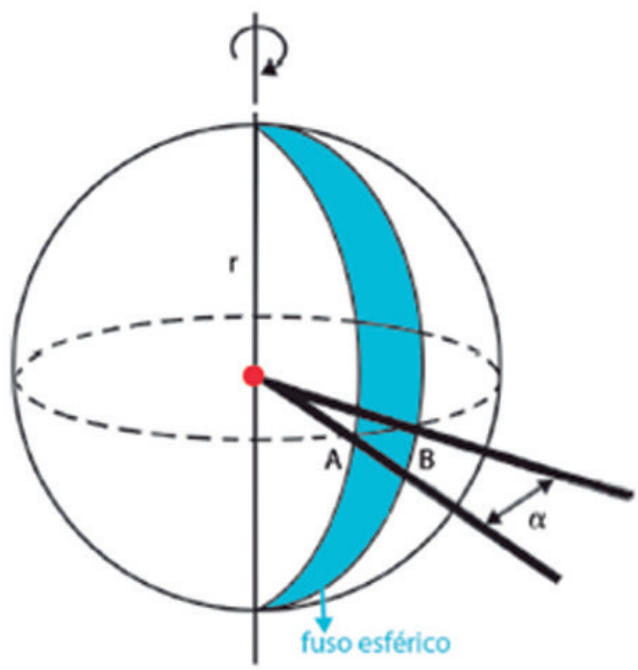
Área---------------Ângulo (em radianos)

$4\pi R^2$--------------- 2π rad

A--------------------- α rad

Cunha esférica:

Cunha esférica é uma parte da esfera cujas extremidades estão nos pólos. Percebam aqui a diferença: o fuso é uma parte da superfície, da casca esférica. Já a cunha é parte da esfera, do sólido. Para definirmos de forma mais rigorosa, podemos dizer que cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.



Esfera com cunha esférica destacada

Para calcularmos o volume da cunha esférica devemos fazer uma regra de três que relaciona o volume da esfera com o ângulo da cunha, ou seja, quando temos uma esfera completa seu volume é de e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da esfera então teremos um certo ângulo α e portanto um volume V:

Volume ---------- Ângulo (em graus)	Volume-----------Ângulo (em radianos)
$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ --------------- 360°	$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ --------------- 2π rad
V--------------------- α	V --------------------- α rad

- A partir dessa apresentação, acreditamos que os alunos estejam preparados para realizar as atividades propostas na seção 3 do material do aluno.

Seção – O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno
189 e 190

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de Vestibulares.	Imagem disponível para projeção neste material; material do aluno.		Turma dividida em duplas.	

Aspectos operacionais

Na seção *O que perguntam por aí?*, do material do aluno, as atividades são questões que envolvem a noção de cálculo de volumes. Você poderá trabalhar esta proposta com a imagem disponível neste material e pedir que os alunos discutam e resolvam a seguinte questão proposta:

1) (UFRRJ) Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5 m, em homenagem ao anti-herói "Zeca Diabo".

O cidadão "Nezinho do Jegue" foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento:

a) menor que 50 mil reais   e) entre 50 e 200 mil reais

b) entre 50 e 200 mil reais

c) entre 200 e 300 mil reais

d) entre 300 e 400 mil reais

e) acima de 400 mil reais

Observação: Considere $\pi \cong 3{,}14$.

Solução:

O volume do pedestal é V = 4/3 x 3,14 x125 , ou seja, V = 523,3 m^3. Como o m^3 custa 260 reais, então 523,3 m^3 custam R$136058,00. Tendo assim um superfaturamento de 500000 – 136058, ou seja, entre 330 e 400 mil reais.

2) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. O recipiente v1 é um cone, a parte inferior do recipiente v2 é uma semi esfera e a parte superior cilíndrica, e o recipiente v3 é (uma clepsidra?). Representando por V1, V2 e V3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:

a. V1 = V2 = V3

b. V1 < V3 < V2

c. V1 = V3 < V2

d. V3 < V1 < V2

e. V1 < V2 = V3

Solução:

A letra correta é a B, pois, nos três recipientes, a altura é a mesma, mas em V1, a base é menor do que em V2 e em V3. Já comparando V2 e em V3, temos que a altura do cone é igual ao raio da semiesfera, as bases são iguais, mas a área de V2 é calculada por :

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} \cong \frac{2.3{,}14.R^3}{3} \cong 2{,}09.R^3$$

Já o volume de V3 é calculado por:

$$\frac{1}{3}\pi R^2.R \cong \frac{1}{3}.3,14.R^3 \cong 10,5.R^3$$

(altura é igual a R)

Portanto, V1 < V3 < V2.

Aspectos pedagógicos

- Após a resolução desta questão em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Momento de Reflexão.	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a Unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetiva como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Participação individual dos alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à Unidade 5. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta Unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, disponível para reprodução neste material e no material multimídia, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar às suas no que tange à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- Cálculo de Área e Volume de Esferas
- Fuso e Cunha

Sugerimos também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho para, se for o caso, repensá-los de acordo com as características apresentadas.

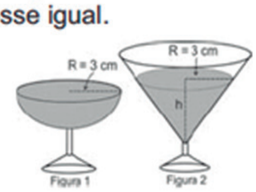
Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Sugerimos nesta etapa, a escolha de, pelo menos, uma questão objetiva que contemple uma habilidade pretendida nesta Unidade para compor o instrumento avaliativo.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1 (ENEM 2010)

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

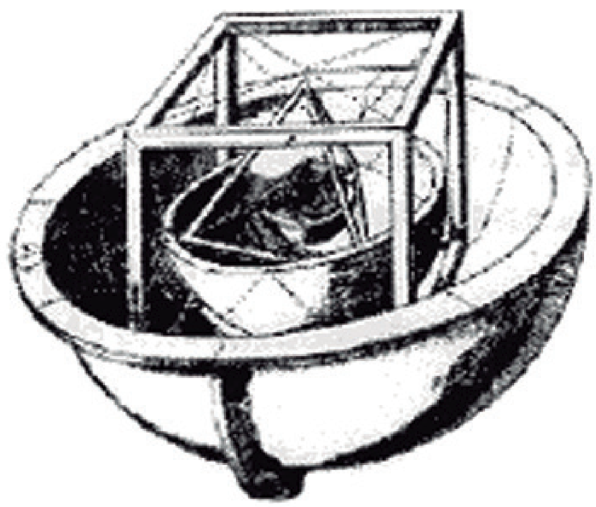
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad e \qquad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

Ⓐ 1,33.
Ⓑ 6,00.
Ⓒ 12,00.
Ⓓ 56,52.
Ⓔ 113,04.

Questão 2 (UERJ - 2001)

O modelo astronômico heliocêntrico de Kepler, de natureza geométrica, foi construído a partir dos cinco poliedros de Platão, inscritos em esferas concêntricas, conforme ilustra a figura abaixo:



(LER, J. "*Dissertatio e Narratio*". Turim: Bottega d'Erasmo, 1972.)

A razão entre a medida da aresta do cubo e a medida do diâmetro da esfera a ele circunscrita, é:

a. 3

b. 3/2

c. 1

d. 3/4

Questão 3 (UFSM - 2000)

Bolas de tênis são vendidas, normalmente, em embalagens cilíndricas contendo 3 unidades.

Supondo-se que as bolas têm raio a em centímetros e tangenciam as paredes internas da embalagem, o espaço interno dessa embalagem que NÃO é ocupado pelas bolas é, em cm^3

a. $2\pi a^3$

b. $\frac{4\pi a^3}{3}$

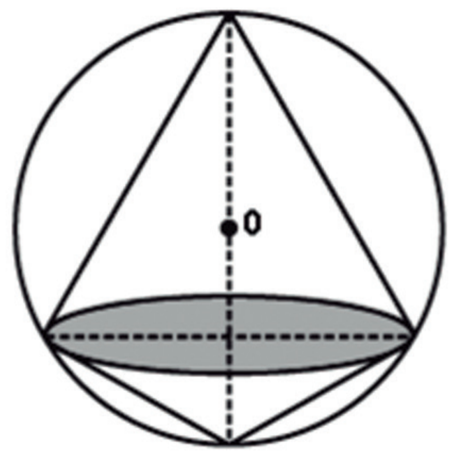
c. $\frac{\pi a^3}{3}$

d. a^3

e. $\frac{2\pi a^3}{3}$

Questão 4

A intersecção de um plano com uma esfera de raio R é a base comum de dois cones circulares retos, como mostra a região sombreada da figura a seguir.



Se o volume de um dos cones é o dobro do volume do outro, a distância do plano ao centro O é igual a:

a. R/5

b. R/4

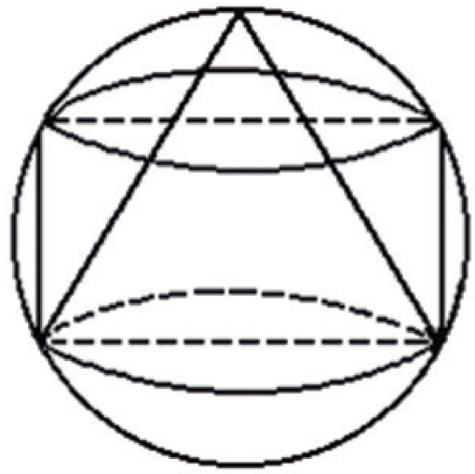
c. R/3

d. 2R/5

e. 2R/3

Questão 5 (UFMG - 1994)

Observe a figura.



Nessa figura, um cone reto e um cilindro de bases comuns estão inscritos em uma esfera. O volume do cilindro é igual ao volume do cone.

A distância do centro da esfera à base comum, em função da altura H do cone, é

a. H/2

b. H/3

c. H/4

d. H/5

e. H/6

Respostas das questões objetivas sugeridas

1 (B)

2 (C)

3 (A)

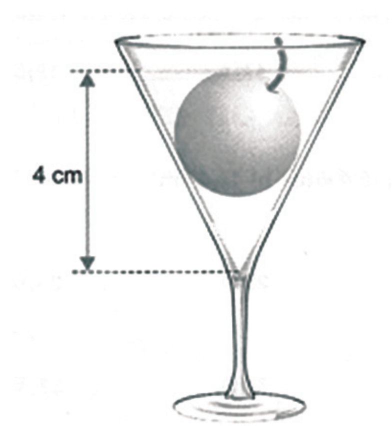
4 (C)

5 (E)

Sugestões de questões discursivas para a avaliação

Questão 1

Um cálice com a forma de um cone mantém V cm^3 de uma bebida. Uma cereja de forma esférica, com diâmetro 2cm, é colocada dentro do cálice, supondo que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice, e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4cm a partir do vértice do cone, determinar o valor de V.



Questão 2

Duas esferas de chumbo, uma de 3 cm e outra de 6 cm de raio, fundem-se e formam outra esfera. Calcule o raio dessa nova esfera.

Questão 3

Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio 0,5 cm podemos fazer a partir de um brigadeiro de raio 1 cm?

Questão 4

Qual a área da superfície da esfera, cuja secção meridiana tem 10 m^2 de área?

Questão 5

Calcular a área de um fuso esférico de uma esfera de raio 3 cm, sendo de 60º o seu ângulo equatorial:

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas

Questão 1: $4\pi / 3$

Questão 2: $\sqrt[3]{243} \sim 6{,}24$

Questão 3: 8 brigadeiros

Questão 4: 40 m^2

Questão 5: $6\pi cm^2$

Folha de Atividades – Momento de Reflexão

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 5 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

Questão 1: Qual foi o assunto estudado nesta Unidade? Cite alguns conceitos matemáticos explorados neste assunto.

____

____

Questão 2: Cite seis exemplos de objetos do cotidiano que representam objetos esféricos e classifique-os em esfera ou superfície esférica.

____

____

____

____

Questão 3: Baseado nas atividades desenvolvidas, tente descrever a diferença entre esfera e superfície esférica.

____

____

____

____

Questão 4: Baseado nas atividades desenvolvidas, descreva o que você entendeu por fuso esférico e cunha esférica. Cite as diferenças entre esses objetos matemáticos.

____

____

____

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares.	Folha de Atividades disponível para reprodução no Grid de aula do "DVD do professor", lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação dos elementos da esfera, bem como as expressões de sua área superficial e volume, trabalhadas ao longo dessa Unidade tanto no material do aluno quanto nas atividades sugeridas neste material. Com esses exercícios você, professor, terá a oportunidade de fixar os conceitos de centro, raio e diâmetro da esfera, casca esférica e sua área, círculo máximo e volume da esfera.

Esses exercícios foram distribuídos em uma "Folha de atividades" – que se encontra disponível para reprodução no material multimídia do professor – que poderá ser aplicada de forma fracionada ao término de cada seção do material do aluno ou de uma só vez no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

- Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no seu material multimídia.
- Peça que os alunos organizem-se em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno para que todos possam ficar com uma cópia do material, tornando-o mais uma fonte de consulta.

Aspectos pedagógicos

- Escolha previamente quais os exercícios se adéquam melhor à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos na Unidade 5.
- Depois dos alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas pelos alunos, valorizando cada estratégia mesmo que esta não tenha o conduzido a uma resposta verdadeira.
- Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção, enquanto professor. Esses exercícios podem favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Folha de Atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

Nome da Escola: ____

Nome: ____

1. Determine o volume de uma esfera de raio 9 cm. (Obs.: considere $\pi = 3{,}14$)

2. Considere que o diâmetro de uma determinada esfera mede 10 cm. Considerando $\pi = 3{,}14$, determine:

   a. a área de sua superfície ou casca esférica.

   b. a área de um de seus círculos máximos.

   c. o seu volume.

3. O volume de uma esfera é 288π cm^3. Calcule:

a) a área de um círculo máximo dessa esfera.

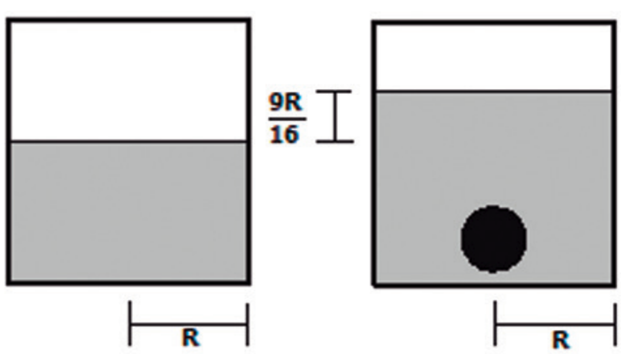
b) a que distância do centro da esfera deve estar uma secção para que sua área seja a metade da área de um círculo máximo.

4. Considere a Terra como uma esfera de raio 6.370km. Qual é sua área superficial? Descubra a área da superfície coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente 3/4 da superfície total.

5. Uma esfera está inscrita num cubo cuja aresta mede 20 cm. Calcule a área da superfície esférica.

6. Um plano secciona uma esfera de raio 5 cm, segundo um círculo de área 9π cm^2. Determine a distância do plano da secção ao centro da esfera.

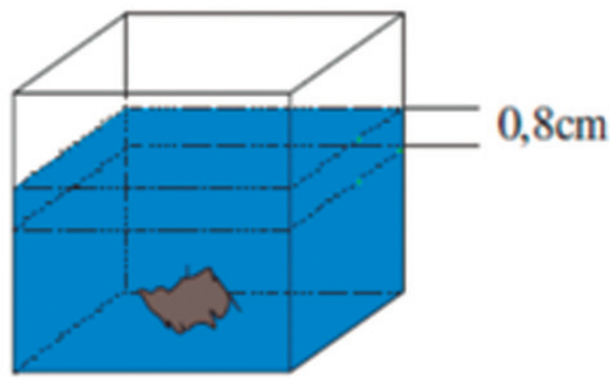
7. Duas esferas de chumbo, uma de 3 cm e outra de 6 cm de raio, fundem-se e formam outra esfera. Calcule o raio dessa nova esfera.



8. (Cesgranrio) Um tanque cilíndrico com água tem raio da base **R**. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível de água sobe 9R/16 (vide figura). Qual a medida do raio da esfera?

Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio 0,5 cm podemos fazer a partir de um brigadeiro de raio 1 cm?

9. Um aquário tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e contém água até uma certa altura. As medidas internas da base do aquário são 40cm por 25cm. Uma pedra é colocada dentro do aquário, ficando totalmente submersa e fazendo com que o nível da água suba 0,8cm. Qual é o volume dessa pedra?



Respostas da Folha de Atividades – Exercícios Complementares

1. 3052,08 cm^3

2. a) 100π cm^2 ou 314 cm^2 b) 25π cm^2 ou 78,5 cm^2 c) $\frac{500\pi}{3}$ cm2 ou, aproximadamente, 523,33 cm2

3. a) 36 π cm^2 b) 3 $\sqrt{2}$ cm^2

4. 162307600 π km^2 ; 121730700 π cm^2.

5. 400 π cm^2

6. 4 cm

7. $3\sqrt[3]{9}$ cm

8. $\frac{3}{4}R$

9. 8 brigadeiros

10. 800 cm^3