nova eja

EDUCAÇÃO PARA JOVENS E ADULTOS

# MATEMÁTICA e suas TECNOLOGIAS

**Professor**

**Volume 1 • Módulo 3 • Matemática**

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
**Sergio Cabral**

Vice-Governador
**Luiz Fernando de Souza Pezão**

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Educação
**Wilson Risolia**

Chefe de Gabinete
**Sérgio Mendes**

Secretário Executivo
**Amaury Perlingeiro**

Subsecretaria de Gestão do Ensino
**Antônio José Vieira De Paiva Neto**

Superintendência pedagógica
**Claudia Raybolt**

Coordenadora de Educação de Jovens e adulto
**Rosana M.N. Mendes**

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Secretário de Estado
**Gustavo Reis Ferreira**

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
**Carlos Eduardo Bielschowsky**

PRODUÇÃO DO MATERIAL NOVA EJA (CECIERJ)

Diretoria Adjunta de Extensão
**Elizabeth Ramalho Soares Bastos**

Coordenação de Formação Continuada
**Carmen Granja da Silva**

Coordenação Geral de Design Instrucional
**Cristine Costa Barreto**

Coordenação Geral
**Agnaldo Esquincalha**
**Gisela Pinto**

Coordenador Geral de Material Didático
**Wallace Vallory Nunes**

Elaboração
**André Luiz Cordeiro dos Santos**
**André Luiz Martins Pereira**
**Cleber Fernandes**
**Érika Silos de Castro**
**Gabriela dos Santos Barbosa**
**Heitor Barbosa Lima de Oliveira**
**Josemeri Araujo Silva Rocha**
**Leo Akio Yokoyama**
**Luciana Felix da Costa Santos**
**Luciane de Paiva Moura Coutinho**
**Patrícia Nunes da Silva**
**Telma Alves**

Coordenação de Design Instrucional
**Flávia Busnardo**
**Paulo Vasques de Miranda**

Design Instrucional
**Juliana Bezerra**

Coordenação de Produção
**Fábio Rapello Alencar**

Projeto Gráfico e Capa
**Andreia Villar**

Imagem da Capa e da Abertura das Unidades
**Sami Souza**

Diagramação
**Bianca Lima**
**Juliana Fernandes**
**Juliana Vieira**

Ilustração
**Clara Gomes**
**Fernando Romeiro**

Produção Gráfica
**Verônica Paranhos**

# Sumário

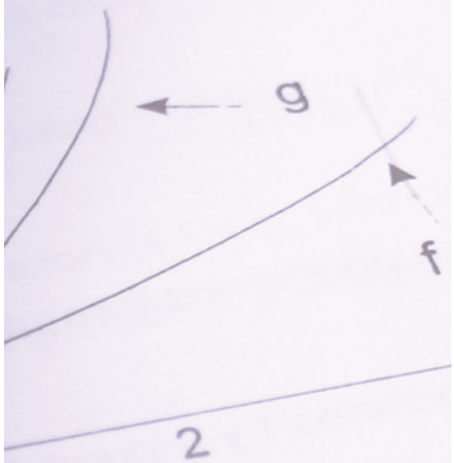

**Unidade 1 • Introdução à Geometria Espacial** **5**

**Unidade 2 • Regularidades numéricas – sequências e progressões** **55**

**Unidade 3 • Matemática Financeira** **91**

**Unidade 4 • Matemática Financeira II** **125**

**Unidade 5 • Matrizes e Determinantes** **179**






# Introdução à Geometria Espacial

*Érika Silos de Castro (coordenação), André Luiz Martins Pereira, Leo Akio Yokoyama e Luciana Felix da Costa Santos*

## Introdução

Na unidade 22 do material do aluno, é apresentada uma introdução à Geometria Espacial. Para isso, o material do aluno inicia uma reflexão sobre a tecnologia das imagens em 3D, utilizada pelos mais novos monitores e aparelhos de TV e esclarece o significado da sigla 3D a partir da ideia de 3 dimensões: altura, largura e comprimento. A partir dessa ideia, pretende-se que, nesta unidade, o aluno tenha a oportunidade de ampliar as discussões acerca de conhecimentos básicos da Geometria Espacial.

Para potencializar o material didático do aluno, pesquisamos e apresentamos alguns recursos e atividades. Nosso objetivo é colaborar com você, professor, ampliando ainda mais seu leque de opções para explorar este tema durante as aulas.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora. A proposta é que essa atividade seja realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, é esperado que eles desenvolvam algumas noções básicas relacionadas à noção de tridimensionalidade.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de se fazer alterações e adaptações quando necessárias.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro é dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo. O segundo é um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Uma descrição destas sugestões está colocada nas tabelas a seguir, e seus detalhamentos no texto que segue.

# Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

| Disciplina | Volume | Módulo | Unidade | Estimativa de aulas para essa unidade |
|---|---|---|---|---|
| Matemática | 1 | 3 | 1 | 4 aulas de 2 tempos |

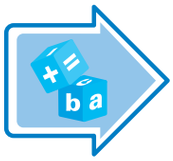
| Titulo da unidade | Tema |
|---|---|
| Introdução à Geometria Espacial | Geometria Espacial |
| **Objetivos da unidade** | |
| Entender o conceito de dimensão. | |
| Entender os conceitos básicos de ponto, reta e plano. | |
| Identificar posições relativas entre pontos, retas e planos. | |
| Identificar poliedros e não poliedros. | |
| Identificar os elementos de um poliedro. | |
| Aplicar a relação de Euler. | |
| **Seções** | **Páginas no material do aluno** |
| Para início de conversa... | 43 a 47 |
| Seção 1 – Geometria espacial: conceitos básicos. | 48 a 52 |
| Seção 2 – Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas. | 53 a 61 |

| | |
|---|---|
| Seção 3 – Sólidos Geométricos. | 62 a 70 |
| Resumo | 71 e 72 |
| Veja ainda | 78 |
| O que perguntam por aí? | 79 a 82 |

# Recursos e ideias para o Professor

## Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



**Atividades em grupo ou individuais**

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

**Ferramentas**

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

**Applets**

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

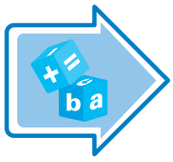
**Avaliação**

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

**Exercícios**

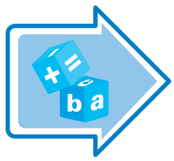
Proposições de exercícios complementares

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Os sólidos de Platão. | Computadores para os alunos, applet disponível no material do professor. | Esta atividade foi adaptada da proposta "Sólidos Platônicos", elaborada pelo projeto "Conteúdos Digitais Para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística", do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF), disponível em http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html. Este aplicativo apresenta uma pequena enciclopédia virtual interativa sobre os sólidos platônicos, apresentando suas propriedades matemáticas, os aspectos históricos, suas aplicações e modelos virtuais interativos. | A turma pode ser dividida em duplas. | 40 minutos |
|  | Imaginando outras dimensões. | Folha de atividades, lápis, caneta. | A atividade a seguir se baseia na leitura de um texto elaborado a partir do enredo do romance proposto no livro "Planolândia", de Edwin A. Abbott, propondo um exercício de imaginação, em que os alunos se imaginarão como habitantes de outras dimensões. Esse exercício de imaginação se propõe a explorar os assuntos abordados sobre espaço tridimensional nesta unidade. | A turma pode ser dividida em duplas ou trios. | 30 minutos |

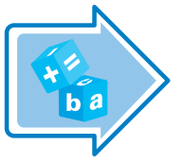
## **Seção 1** – Geometria Espacial: conceitos básicos

*Páginas no material do aluno*
**43 a 47**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Redescobrindo a Geometria Plana e Espacial. | Folha de atividades, folha em anexo, lápis, caneta, tesoura, cola e régua. | Esta atividade será dividida em duas partes, a primeira permitirá ao professor introduzir entidades fundamentais (ponto, reta, plano e espaço) como noções primitivas, enunciar os principais postulados que relacionam os conceitos primitivos da geometria. Já na segunda, será proposta a construção de um paralelepípedo a partir da sua planificação. Desta forma, acreditamos que os alunos possam identificar partes da reta, do plano e do espaço, e obter a noção de planificação (para montagem) de um modelo de um sólido através das ações que envolvem noções de plano e espaço. Finalmente, os alunos serão levados a ampliarem as discussões das etapas anteriores através de questões propostas numa folha de atividades. | A turma pode ser dividida em grupos de três ou quatro alunos. | 40 minutos |

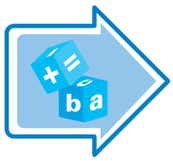
## **Seção 2** – Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas

*Páginas no material do aluno*
**48 a 52**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | O paralelepípedo e seus elementos. | Folha de atividades, lápis/caneta. | A atividade a seguir convida os alunos a identificar posições relativas entre pontos, retas e planos a partir dos elementos de um paralelepípedo. Para isso, elaboramos algumas questões que estão disponíveis como folha de atividades. | Turma dividida em duplas ou trios. | 30 minutos |

## **Seção 3** – Sólidos Geométricos

*Páginas no material do aluno*
**53 a 61**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Reconhecendo Sólidos Geométricos em objetos do cotidiano. | Folha de atividades, lápis/caneta e materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata (embalagens, caixa de fósforos, caixa de chocolate no formato de prisma, lata, copo, etc.) | Esta atividade propõe a utilização de materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata, como recursos para que os alunos reconheçam sólidos geométricos (poliedros e não poliedros) em diversos objetos do seu cotidiano, além de elucidar o conceito de um poliedro ser convexo ou não e de mostrar de forma empírica a Relação de Euler nos poliedros convexos. | A turma pode ser dividida em grupos de quatro ou cinco alunos. | 40 minutos |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Identificando vértice, aresta e face de um poliedro. | Computadores para os alunos com o softwares "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial" instalados, material do aluno, folha de atividades e lápis/caneta. | Esta atividade tem com o objetivo desenvolver a habilidade de visualização espacial com auxílio dos softwares "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial", de modo que os alunos tenham a oportunidade de identificar as características que permitem diferenciar poliedros de não poliedros e identificar os elementos básicos dos poliedros a partir da interface dinâmica oferecida pelo software. | Turma dividida em duplas ou trios. | 30 minutos |

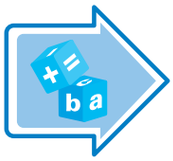
## Avaliação – O que perguntam por aí?

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | ENEM - 2010 | Imagem disponível para projeção neste material; material do aluno. | | Turma dividida em duplas | |

## Avaliação – Momento de Reflexão

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Avaliação da Unidade | Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta. | Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetivas como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor. | Participação individual dos alunos. | 40 minutos |

## Atividade complementar

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Exercícios de Fixação Complementares | Folhas de Atividades, lápis/caneta. | | Turma dividida em duplas ou em trios. | |

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Os sólidos de Platão. | Computadores para os alunos, applet disponível no material do professor. | Esta atividade foi adaptada da proposta "Sólidos Platônicos", elaborada pelo projeto "Conteúdos Digitais Para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística", do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF), disponível em http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html. Este aplicativo apresenta uma pequena enciclopédia virtual interativa sobre os sólidos platônicos, apresentando suas propriedades matemáticas, os aspectos históricos, suas aplicações e modelos virtuais interativos. | A turma pode ser dividida em duplas. | 40 minutos |

## Aspectos operacionais

A atividade inicialmente foi planejada para aplicação em laboratório de informática, onde cada aluno poderia interagir diretamente com o aplicativo proposto, mas caso a sua escola não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Nesse caso, os alunos poderão interagir com o aplicativo de maneira indireta e coletiva.

Neste aplicativo, são apresentadas diversas atividades que envolvem a visualização e que permitem ao aluno um contato interativo com a geometria espacial.

- Professor, solicite o acesso on-line http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html ou solicite a instalação off-line do aplicativo, isto é, sem a necessidade de conexão com a internet,

nos computadores que serão utilizados para a atividade. Esta instalação pode ser feita a partir do próprio site ou utilizando o pacote de arquivos disponível e, também, no seu material.

- Após certificar-se de que o aplicativo foi devidamente instalado e testado, e confirmar a aplicação da atividade no laboratório, solicite que a turma se divida em duplas ou de acordo com a viabilidade de computadores de sua escola.

- Assim que os alunos estiverem com o aplicativo aberto, você poderá apresentar o aplicativo e orientá-los a fazer um passeio virtual pela atividade.

- Sugerimos que, após este momento, sejam exploradas as atividades com os sólidos platônicos, clicando, primeiramente, no ícone tetraedro para explorar propriedades matemáticas envolvidas, como planificação e montagem através da aba "Montar".

- Repita os mesmos procedimentos para os demais sólidos platônicos: cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

## Aspectos pedagógicos

- Professor, o aplicativo pode ser executado em qualquer sistema operacional, porém, para executá-lo, é preciso que o computador tenha a linguagem JAVA instalada. A instalação da linguagem JAVA pode ser feita seguindo as orientações disponíveis no seguinte link: http://www.java.com/pt_BR/.

- Atenção: se você optar pelo uso da atividade off-line através de uma cópia local em seu computador ou no servidor do laboratório, é importante que os arquivos não estejam em um diretório cujo nome contenha acentos ou espaços. Também é importante lembrar que algumas distribuições Linux vêm com o interpretador JAVA GCJ Web Plugin, que não é compatível com o applet da atividade. Neste caso, recomendamos que você solicite ao responsável pelo laboratório da escola que instale o interpretador nativo da Sun, disponível no link http://www.java.com/pt_BR/.

- Sugerimos que você apresente o aplicativo aos alunos, resolvendo um dos desafios como exemplo e, a partir daí, deixe-os explorar livremente, tentando resolver os demais, intervindo apenas quando necessário.

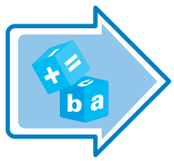
- Este é um bom momento para se explorar as potencialidades do software, que permite quase simultaneamente, a montagem e desmontagem do sólido a partir da sua planificação, analisar seções planas, entre outras propriedades matemáticas.

- Outra sugestão, é que você utilize a lousa para apresentar a tabela:

| Poliedro Regular | Número de Arestas Incidentes em Cada Vértice | Número de Vértices (V) | Número de Arestas (A | Número de Faces (F) | Valor de V - A + F |
|---|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | | | | | |
| Cubo | | | | | |
| Octaedro | | | | | |
| Dodecaedro | | | | | |
| Icosaedro | | | | | |

- Você pode orientar os alunos a usarem os softwares da atividade, para contar o número de vértices, arestas e faces dos sólidos platônicos e anotar os resultados na tabela acima. Dica: você pode usar os recursos de exibição de faces e de marcação de vértices para auxiliar na contagem. Para contar o número de faces mais facilmente, você pode planificar o sólido, usando a operação da aba "Montar".

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Imaginando outras dimensões. | Folha de atividades, lápis, caneta. | A atividade a seguir se baseia na leitura de um texto elaborado a partir do enredo do romance proposto no livro "Planolândia", de Edwin A. Abbott, propondo um exercício de imaginação, em que os alunos se imaginarão como habitantes de outras dimensões. Esse exercício de imaginação se propõe a explorar os assuntos abordados sobre espaço tridimensional nesta unidade. | A turma pode ser dividida em duplas ou trios. | 30 minutos |

## Aspectos operacionais

Esta atividade foi baseada na sugestão apresentada na seção Para início de conversa... do material do aluno, conforme quadro a seguir:

**Saiba Mais**

Uma dica bacana é o livro " Planolândia: um romance de muitas dimensões" ( *Flatland: A Romance of Many Dimensions*) escrito por Edwin A. Abbott. Nesse livro, Abbott usou o mundo bidimensional fictício de Flatland para fazer reflexões sobre a sociedade e uma importante análise sobre as dimensões. A versão original, em inglês, está disponível para download, na íntegra e gratuitamente, no site Domínio Píblico, do Ministério da Educação. Olink direto para o arquivo é http: www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ph000007.pdf. A tradução para o portuguê foi feita pela Editora conrad, que também e responsável pela sua distribuição.

- Professor, primeiramente leia o texto a seguir para todos, promovendo assim, uma discussão coletiva.

Texto:

Imagine uma reta colocada na horizontal, para facilitar nossa descrição. Mas poderia ser uma reta qualquer. Diz-se que a reta tem apenas uma dimensão, pois tem apenas 1 grau de liberdade.

Como assim, 1 grau de liberdade?

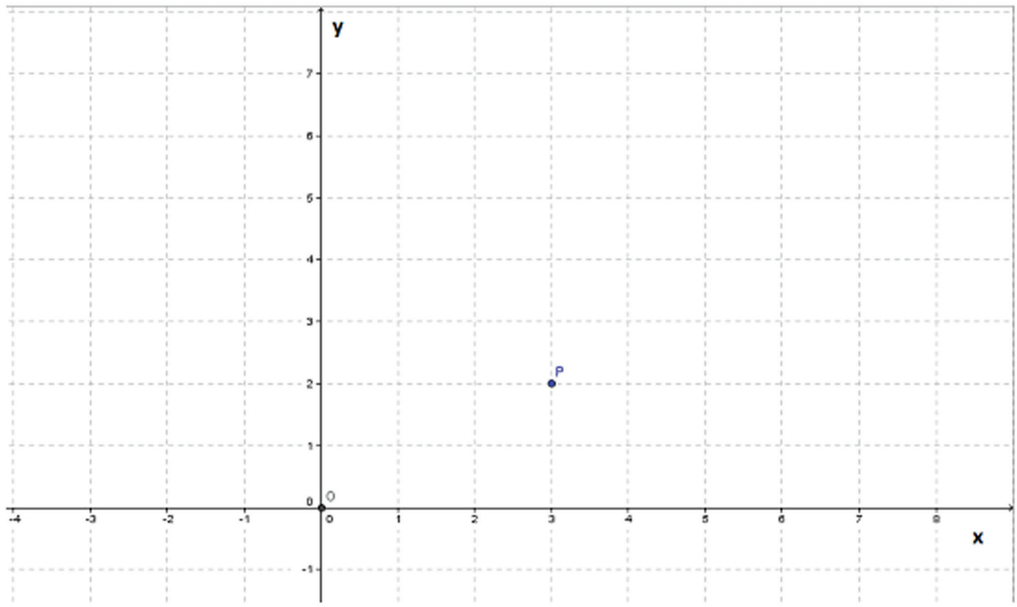
Imagine um habitante desta reta chamado de "P", ou seja, um ponto que não pode sair dela, mas pode deslocar-se ao longo de toda a sua extensão.

Observe que o ponto desloca-se apenas em **uma direção**, a direção da reta. No caso da reta na horizontal, o ponto P só pode se deslocar na direção (horizontal). Ele não pode ir para cima e para baixo, não pode sair da reta; só lhe é permitido ir para a direita ou esquerda.

Agora, imagine um mundo que fosse apenas um ponto e seu único habitante fosse o ponto P. Coitadinho, ele não pode nem se movimentar, ou seja, ele teria zero grau de liberdade...

Então, até agora, conseguimos imaginar como seria um mundo com dimensão zero (ponto) e um mundo com dimensão um (reta).

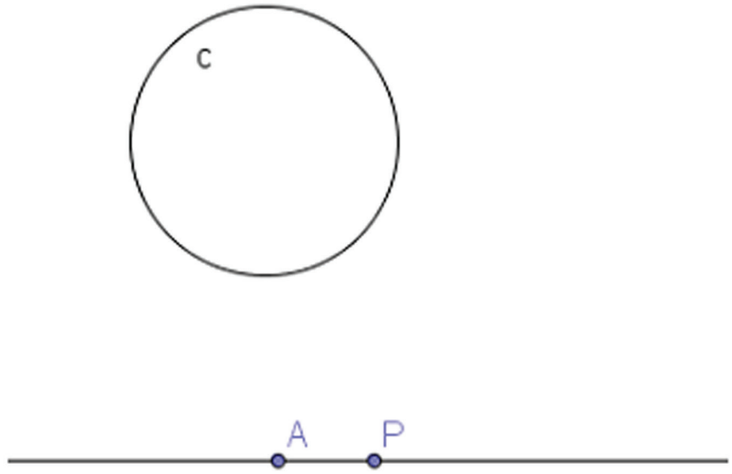
Por que não imaginarmos um mundo com duas dimensões? Vamos fazê-lo agora? Estamos no *plano*! E lá está nosso amigo, o ponto P. Desta vez, ele tem mais liberdade, mais precisamente, tem dois graus de liberdade: horizontal e vertical. Com essas duas componentes direcionais, o ponto P pode se deslocar por toda a extensão de um plano. Imagine os eixos cartesianos x e y.




Por exemplo, se o ponto P quiser se deslocar da origem O(0,0) até o ponto (3,2), basta ele ir 3 unidades para direita e 2 unidades para cima ou, ainda, 2 unidades para cima e 3 unidades para a direita.

Vamos imaginar esses "mundos" misturados?

Imagine que o ponto P, que estava inserido na reta horizontal, agora está conversando com um ponto A, também pertencente à reta, e ambos estão sendo observados por um habitante do plano, o círculo "c".




O círculo c pode enxergar os pontos A e P, mas estes não conseguem enxergar o círculo c, pois o único mundo que conhecem é a reta e só enxergam pontos à sua direita ou à sua esquerda. Por outro lado, o círculo c tem o poder de retirar o ponto P do seu mundo e colocá-lo de volta. Ele decide fazer isso para mostrar como é o mundo bidimensional para o ponto P. Nesse momento, o ponto P desaparece das vistas do seu amigo A e, instantes depois, reaparece como num passe de mágica.

Nossa imaginação pode fluir. Você, como um habitante da terceira dimensão, tem três graus de liberdade: as duas do plano do chão mais a altura. Ou seja, você pode se deslocar para qualquer ponto do espaço tridimensional. Então, você consegue observar o círculo c, mas ele não consegue observá-lo, já que vive num mundo bidimensional. Se você retirá-lo do plano e recolocá-lo, instantes depois ele desaparece do plano em que vive por alguns momentos e depois reaparece.

- Após esta leitura, solicite que os alunos organizem-se em duplas ou trios.
- Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades com antecedência.
- Distribua uma folha de atividades para cada grupo e oriente-os nas questões propostas.

## Aspectos pedagógicos

- Solicite que os alunos, durante a leitura do texto, façam anotações sobre elementos que considerarem importantes, identificando percepções de conceitos matemáticos presentes, bem como de questões que julgarem pertinentes para discutir com a turma após a leitura;

- Peça aos alunos para refletirem sobre as possibilidades dos mundos com dimensão zero (ponto), um (reta), dois (plano), três (espaço tridimensional); e discuta com eles sobre exemplos de elementos dessas dimensões.

- Ao final da atividade, promova um debate sobre a atividade baseado nos exemplos, questionando a possibilidade da existência de uma quarta dimensão geométrica, pois é possível considerar o tempo como uma quarta componente dimensional. A teoria de espaço-tempo de Albert Einstein considera o tempo como uma 4ª dimensão temporal: o espaço tridimensional mais a dimensão tempo. Uma possível referência: http://pt.wikipedia.org/wiki/Quarta_dimens%C3%A3o

- Observe, nas respostas dos alunos, como seria uma possível ação com o auxílio da 4ª dimensão.

- Sugestão de aplicação da atividade com auxílio de recursos multimídia:

Esta mesma atividade poderá ser aplicada a partir da exibição do filme "Flatland". O filme pode ser encontrado em DVD nas locadoras (ver detalhes do filme em: http://store.flatlandthemovie.com, ou acessar o trailler em: http://www.youtube.com/watch?v=C8oiwnNlyE4), ou se você, professor, preferir, poderá acessar os episódios em:

- Episódio 1 - http://www.youtube.com/watch?v=cxUUTNtILk0
- Episódio 2 - http://www.youtube.com/watch?v=0pd8LH0FBY8
- Episódio 3 - http://www.youtube.com/watch?v=kSoEGkwv1mY
- Episódio 4 - http://www.youtube.com/watch?v=SZgVi788dqk
- Episódio 5 - http://www.youtube.com/watch?v=yerWRBdaVGQ
- Episódio 6 - http://www.youtube.com/watch?v=epM_zOX4u4k
- Episódio 7 - http://www.youtube.com/watch?v=Chd_MS3J9HA
- Episódio 8 - http://www.youtube.com/watch?v=94npBEuGVkw

## Folha de Atividades – "Imaginando outras dimensões"

Nome da Escola:_____

Nome: _____

Texto:

Imagine uma reta colocada na horizontal, para facilitar nossa descrição. Mas poderia ser uma reta qualquer. Diz-se que a reta tem apenas uma dimensão, pois tem apenas 1 grau de liberdade.

Como assim, 1 grau de liberdade?

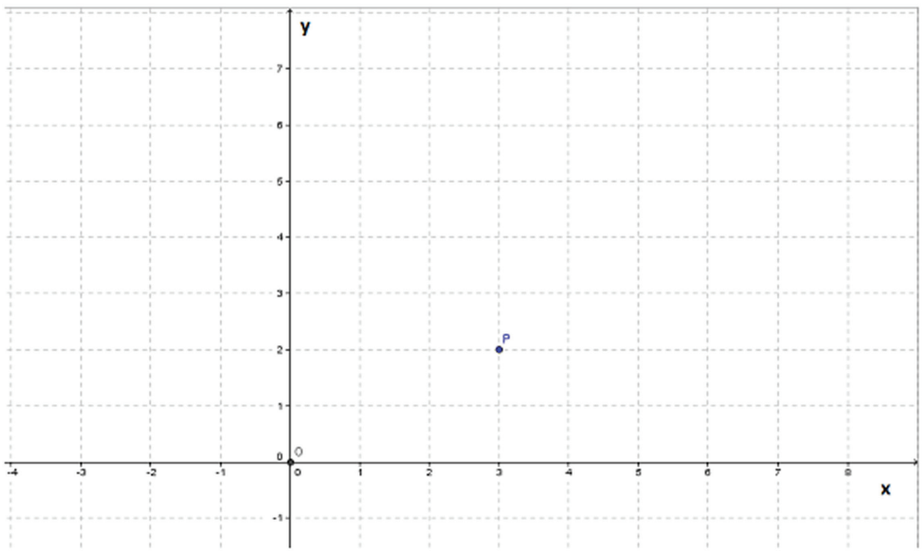
Imagine um habitante desta reta chamado de "P", ou seja, um ponto que não pode sair dela, mas pode deslocar-se ao longo de toda a sua extensão.

Observe que o ponto desloca-se apenas em **uma direção**, a direção da reta. No caso da reta na horizontal, o ponto P só pode se deslocar na direção (horizontal). Ele não pode ir para cima e para baixo, não pode sair da reta; só lhe é permitido ir para a direita ou esquerda.

Agora, imagine um mundo que fosse apenas um ponto e seu único habitante fosse o ponto P. Coitadinho, ele não pode nem se movimentar, ou seja, ele teria zero grau de liberdade...

Então até agora, conseguimos imaginar como seria um mundo com dimensão zero (ponto) e um mundo com dimensão um (reta).

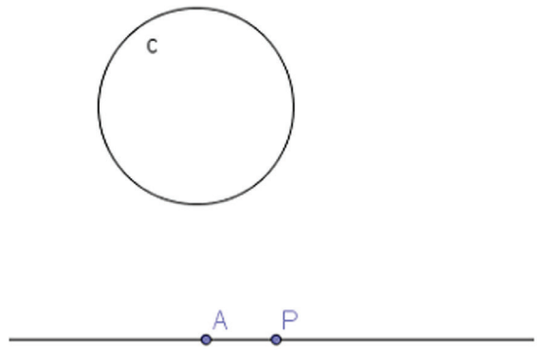
Por que não imaginarmos um mundo com duas dimensões? Vamos fazê-lo agora? Estamos no plano! E lá está nosso amigo, o ponto P. Desta vez, ele tem mais liberdade, mais precisamente, tem dois graus de liberdade: horizontal e vertical. Com essas duas componentes direcionais, o ponto P pode se deslocar por toda a extensão de um plano. Imagine os eixos cartesianos x e y.



Por exemplo, se o ponto P quiser se deslocar da origem O(0,0) até o ponto (3,2), basta ele ir 3 unidades para direita e 2 unidades para cima ou, ainda, 2 unidades para cima e 3 unidades para a direita.

Vamos imaginar esses "mundos" misturados?

Imagine que o ponto P, que estava inserido na reta horizontal, agora está conversando com um ponto A, também pertencente à reta, e ambos estão sendo observados por um habitante do plano, o círculo "c".

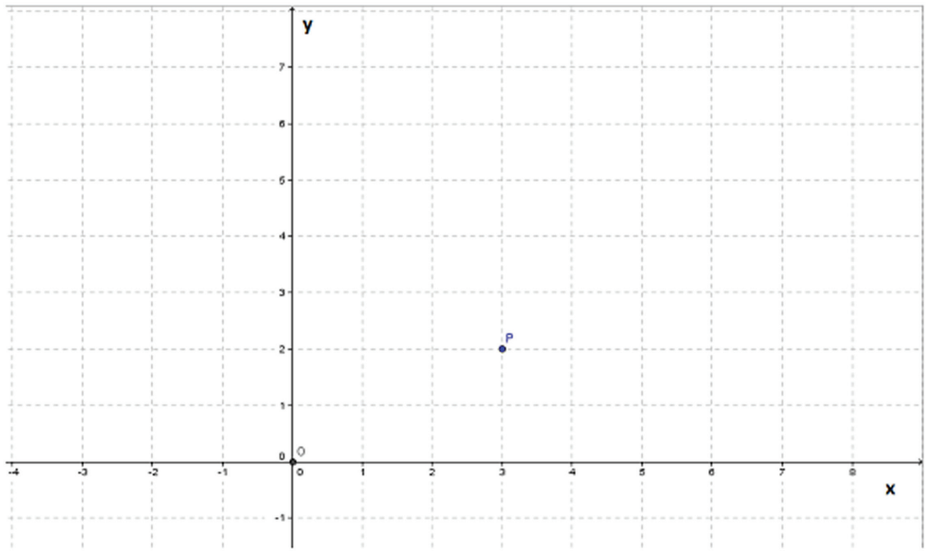



O círculo c pode enxergar os pontos A e P, mas estes não conseguem enxergar o círculo c, pois o único mundo que conhecem é a reta e só enxergam pontos à sua direita ou à sua esquerda. Por outro lado, o círculo c tem o poder de retirar o ponto P do seu mundo e colocá-lo de volta. Ele decide fazer isso para mostrar como é o mundo bidimensional para o ponto P. Nesse momento, o ponto P desaparece das vistas do seu amigo A e, instantes depois, reaparece como num passe de mágica.

Nossa imaginação pode fluir. Você, como um habitante da terceira dimensão, tem três graus de liberdade: as duas do plano do chão mais a altura. Ou seja, você pode se deslocar para qualquer ponto do espaço tridimensional. Então, você consegue observar o círculo c, mas ele não consegue observá-lo, já que vive num mundo bidimensional. Se você retirá-lo do plano e recolocá-lo, instantes depois ele desaparece do plano em que vive por alguns momentos e depois reaparece.

**Atividade:**

Imagine que você seja o ponto P(3,2) no plano (bidimensional).




a. Quantos graus de liberdade você tem? _____.

b. O que você poderia fazer para ir até o ponto de origem O(0,0), utilizando os graus de liberdade que possui? _____.

c. Se um habitante do espaço tridimensional retirasse você do plano, quantos graus de liberdade você passaria a ter? Por quê? _____

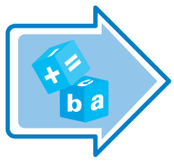
_____.

Agora, é sua vez de imaginar como seria viver numa 4ª dimensão!

Discuta com seus colegas sobre quantos graus de liberdade você teria; que elementos você pode visualizar desta nova dimensão; esses elementos podem ver você nesta dimensão superior? Tente responder a essas questões, a partir de uma comparação dos exemplos citados no texto.

## **Seção 1** – Geometria Espacial: conceitos básicos

*Páginas no material do aluno*
**43 a 47**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Redescobrindo a Geometria Plana e Espacial. | Folha de atividades, folha em anexo, lápis, caneta, tesoura, cola e régua. | Esta atividade será dividida em duas partes, a primeira permitirá ao professor introduzir entidades fundamentais (ponto, reta, plano e espaço) como noções primitivas, enunciar os principais postulados que relacionam os conceitos primitivos da geometria. Já na segunda, será proposta a construção de um paralelepípedo a partir da sua planificação. Desta forma, acreditamos que os alunos possam identificar partes da reta, do plano e do espaço, e obter a noção de planificação (para montagem) de um modelo de um sólido através das ações que envolvem noções de plano e espaço. Finalmente, os alunos serão levados a ampliarem as discussões das etapas anteriores através de questões propostas numa folha de atividades. | A turma pode ser dividida em grupos de três ou quatro alunos. | 40 minutos |

## Aspectos operacionais

1ª parte:

Professor, primeiramente você pode usar uma folha de papel como exemplo e colocá-la sobre a mesa, levando os alunos a imaginarem o plano como se fosse essa folha de papel que se estende infinitamente em todas as direções.

A partir daí, você pode mostrar a eles que a noção primitiva “ponto” pode ser pensada como a marca deixada pela ponta do lápis ao tocar a folha. O desenho da parte de uma reta é feito com o auxílio de uma régua. Lembre-os de que a reta é ilimitada nos dois sentidos.

O material do aluno traz um quadro (p. 46) com um pouco da história da Matemática e a definição desses conceitos primitivos:

**Saiba Mais**

Estes conceitos foram propostos pela primeira vez pelo matemático grego Euclides, que viveu na Alexandria da primeira metade do séc. III a.C. (a data e o local de seu nascimento não são precisos).

Euclides possivelmente adquiriu seus primeiros conhecimentos matemáticos dos discípulos de outro importante filósofo grego: Platão. Amais importante obra de Euclides foi "Os Elementos". São treze capítulos fundamentais para matemática sobre Aritmética, Geomentria e Álgebra.

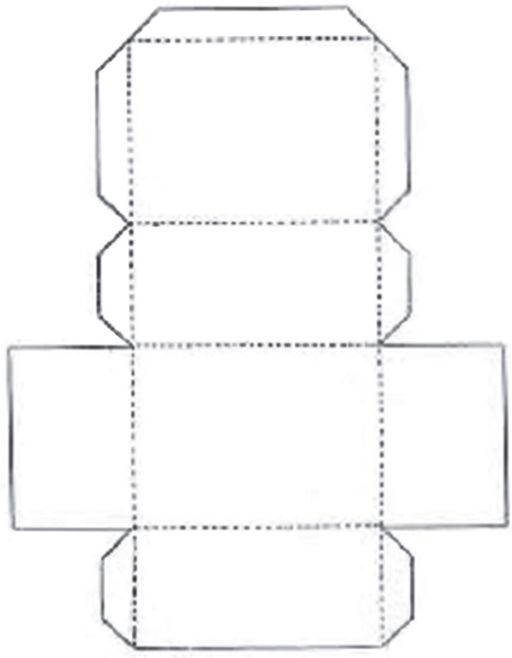
A obra "Os Elementos" já está em domínio público e pode ser baixada gratuitamente no portal Domínio Público, do Ministério da Educação. O link direto para o arquivo é http:www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf.

Nos Elementos, Euclides afirma que "ponto é o que não tem partes ou grandeza alguma", "linha é o que tem comprimento sem largura" e "superfície é o que tem comprimento e largura". Parecido com o que acabamos de ver? E olha que o livro já tem mais de dois mil anos!

Nesta etapa, você pode recorrer às aproximações e aos exemplos intuitivos ilustrados na seção *Para início de conversa...* e na seção 1, *Geometria espacial: conceitos básicos* do material do aluno.

2ª parte:

Após esta etapa, você pode utilizar a planificação para montagem de um paralelepípedo a seguir, e disponível no seu material, pedir que os alunos escolham um dos retângulos dessa planificação, nomeando os vértices como A, B, C e D e sobre este retângulo e considerando a aresta AB. Peça que eles marquem dois pontos, E e F, entre A e B , e assim identifiquem que A, B, E e F são colineares ou alinhados. Oriente-os a observarem que os pontos A, B, C e D são coplanares.



Estabeleça uma discussão com os alunos, indagando-os sobre as seguintes questões:

- Numa reta, bem como fora dela, existem quantos pontos?
- Por dois pontos distintos, passam quantas retas?
- Num plano, bem como fora dele, existem quantos pontos?
- Por três pontos distintos passam quantos planos?

Após uma discussão informal destas questões, você, professor, pode formalizar estas respostas como postulados:

**P1- Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos;**

**P2- Por dois pontos distintos, passa uma única reta;**

**P3- Num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos;**

**P4- Por dois pontos distintos (ou pela reta que eles determinam), passam infinitos planos;**

**P5- Por três pontos distintos não colineares, passa um único plano;**

**P6- Se dois pontos distintos pertencem a um plano, então, a reta que eles determinam está contida no plano.**

Após esta discussão coletiva:

- Solicite que os alunos organizem-se em grupos de três ou quatro;

- Distribua um modelo de planificação para cada aluno e oriente-os a montarem um modelo para o paralelepípedo.
- Distribua uma folha de atividades para cada aluno, promovendo uma ampliação das discussões propostas nas etapas anteriores.

## Aspectos pedagógicos

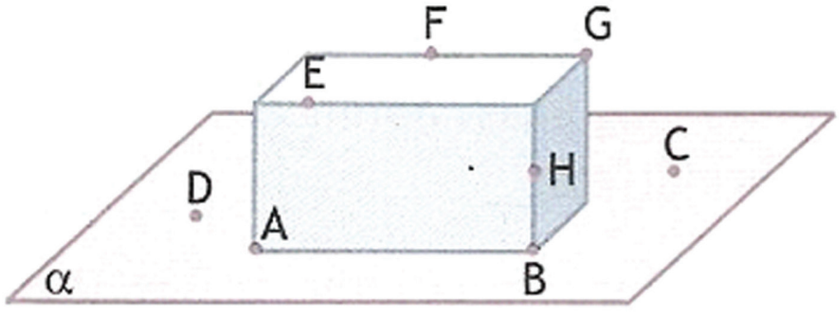
- Professor, você pode usar o material concreto (o modelo montado do paralelepípedo) para simular situações de investigação. Para isso, estimule os alunos a observarem, explorarem e manipulem este material de forma a auxiliar no desenvolvimento de noções geométricas não somente pelo treinamento de memorização e técnicas operatórias.
- Após montarem o paralelepípedo, você pode estimulá-los a identificarem objetos do seu cotidiano que apresentem formas similares àquela montada (ex.: caixas de sapato, de pasta de dente, etc.).
- Também seria interessante instigá-los a identificarem objetos que representem formas planas e outros que representem formas espaciais.
- Para complementar esta atividade, você pode recorrer à atividade multimídia, disponível *on-line* no site http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html e *off-line* no seu material.

## Folha de Atividades – "Redescobrindo a Geometria Plana e Espacial"

Nome da Escola:_____

Nome: _____

A partir das discussões promovidas em aula, observe a figura e responda às questões propostas:



**Questão 1:** Existe uma reta que passe por G e C da figura?

_____.

**Questão 2:** Dois pontos são sempre colineares? Justifique a sua reposta.

_____.

**Questão 3:** Sob que condições três são colineares? Que figura geométrica plana pode ser formada por três pontos não colineares?

_____.

**Questão 4:** Os pontos A, B, E e H são coplanares? E os pontos A, B e G? E os pontos E, F, G e H?

_____.

**Questão 5:** Três pontos distintos são coplanares? Baseado nesta resposta, você saberia justificar por que uma mesa com três pés é mais firme do que uma com quatro? Que postulado de Euclides, justifica esta resposta?

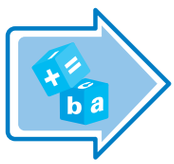
_____

_____

_____.

## **Seção 2** – Os logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais.

*Páginas no material do aluno*
**53 a 61**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | O paralelepípedo e seus elementos. | Folha de atividades, lápis/caneta. | A atividade a seguir convida os alunos a identificar posições relativas entre pontos, retas e planos a partir dos elementos de um paralelepípedo. Para isso, elaboramos algumas questões que estão disponíveis como folha de atividades. | Turma dividida em duplas ou trios. | 30 minutos |

## Aspectos operacionais

Professor, a partir da representação plana do paralelepípedo a seguir, você poderá trabalhar posições relativas entre pontos, retas e planos. Para isso, sugerimos algumas questões numa folha de atividades, disponível no seu material, que foram planejadas para serem realizadas após as atividades propostas *na seção 2 - Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas* do material do aluno.

Primeiramente, os alunos serão levados a observarem os pontos, retas e planos a partir da observação dos elementos da figura dada, para que ao final, possam identificar algumas posições relativas entre esses elementos.

## Aspectos pedagógicos

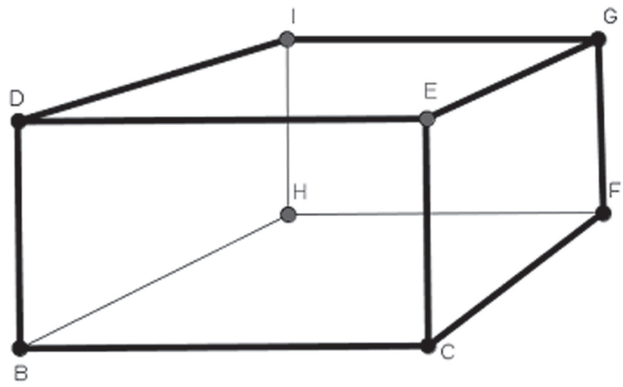
- Solicite que os alunos organizem-se em duplas ou trios;
- Primeiramente deixe-os analisar a figura e as questões propostas;
- Se achar necessário, você pode levar uma caixa na forma de paralelepípedo (de sapatos, de leite, etc. ) para auxiliá-los na transição da visualização plana para a espacial;
- Estimule os alunos a identificarem os vértices do paralelepípedo como pontos, suas arestas como segmentos de reta e suas faces como planos. E, a partir dessas observações, analisarem algumas posições relativas.
- Ao final da atividade, promova um debate sobre a atividade baseado nos resultados obtidos, questionando:
  - Um plano pode ser definido com apenas 3 pontos?;
  - Apesar de a reta ser definida por 2 pontos, quantos pontos há numa reta?
  - E num segmento de reta?
- Esta é uma boa oportunidade de lembrar a eles que três pontos definem um plano. No entanto, ao visualizarem uma face do paralelepípedo, poderão notar que cada vértice está no plano gerado pelos outros três da mesma face.

## Folha de Atividades – "O paralelepípedo e seus elementos"

Nome da Escola:_____

Nome: _____

Observe a representação em perspectiva do paralelepípedo a seguir:




1. Tente identificar todos os pontos, retas (segmentos) e planos definidos pelos pontos da figura acima.

   a. Quantos pontos você encontrou? Quais?

   b. Quantas retas você identificou a partir das arestas do paralelepípedo? Quais?

   c. Quantos planos formam as faces do paralelepípedo? Quais?

2. Complete corretamente as lacunas com os símbolos $\in$ ou $\notin$ para relacionar pontos a retas ou a planos:

   a. B _____ reta BD

   b. C _____ reta BC

   c. H _____ reta EG

   d. H _____ reta HF

   e. I _____ reta DE

   f. E _____ reta GI

   g. G _____ plano EFC

   h. H _____ plano BCD

   i. F _____ plano BCH

j. E ____ plano GHI

k. D _____ plano EGI

l. C ____ plano BDH

3. Identifique a posição relativa entre as retas abaixo:

a. retas BC e BD _____.

b. retas DE e IG _____.

c. retas CF e DE _____.

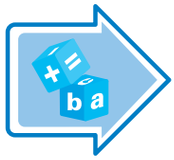
d. retas BC e EG _____.

e. retas HF e BH _____.

f. retas EG e BH_____.

## **Seção 3** – Sólidos Geométricos

*Páginas no material do aluno*
**62 a 70**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Reconhecendo Sólidos Geométricos em objetos do cotidiano. | Folha de atividades, lápis/caneta e materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata (embalagens, caixa de fósforos, caixa de chocolate no formato de prisma, lata, copo, etc.) | Esta atividade propõe a utilização de materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata, como recursos para que os alunos reconheçam sólidos geométricos (poliedros e não poliedros) em diversos objetos do seu cotidiano, além de elucidar o conceito de um poliedro ser convexo ou não e de mostrar de forma empírica a Relação de Euler nos poliedros convexos. | A turma pode ser dividida em grupos de quatro ou cinco alunos. | 40 minutos |

## Aspectos operacionais

Na seção 3 - *Sólidos Geométricos* do material do aluno, é introduzida uma discussão a respeito de objetos reais em que podemos encontrar representações de sólidos geométricos e identificá-los entre representações de poliedros e não poliedros.

A partir da definição de poliedro como o sólido limitado por regiões poligonais pla¬nas, primeiramente, propõe-se aos alunos a separação dos materiais trazidos para a aula em poliedros e não poliedros, depois pede-se que os alunos classifiquem os poliedros em convexos e não convexos, para que, ao final da atividade, possam experimentar a validade da relação de Euler para os convexos.

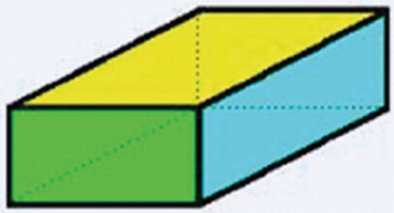
- Professor, você pode levar para a aula ou solicitar na aula anterior que os alunos levem materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata, como copo, lata, caixas, objetos com formas variadas;
- Divida a turma em grupos de quatro ou cinco alunos e distribua entre os grupos alguns dos materiais levados para a aula.
- Uma vez que os materiais tenham sido distribuídos, peça para que os alunos os manuseiem livremente, para que possam observar características e se familiarizar com esses objetos.
- Em seguida, peça aos seus alunos que identifiquem, de acordo com a definição de poliedro apresentada no material do aluno (p. 62), os materiais que representam poliedros e os que não representam e, depois, separem os poliedros em convexos e não convexos, de acordo com os exemplos apresentados no material do aluno (p. 64).
- Após esta etapa, distribua uma folha de atividades para cada aluno e solicite que eles realizem as questões propostas.

## Aspectos pedagógicos

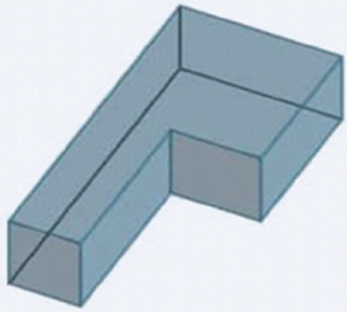
- Professor, oriente os alunos a observarem características dos materiais recebidos, quanto às faces, por exemplo, se o sólido apresentado é limitado por faces poligonais planas, assim como vértices e arestas.
- Dependendo da quantidade de materiais disponíveis, você pode utilizar como sólidos aquelas embalagens sem tampa, mas é importante chamar atenção dos alunos para a necessidade desta face, quando queremos visualizar o sólido como um todo, por exemplo os poliedros. Você pode levar os alunos a imaginarem uma tampa para que possam compor as faces do poliedro analisado.
- Ainda nesta discussão, você pode trabalhar a ideia de poliedros convexos e não convexos a partir dos materiais concretos apresentados ou apresentando exemplos de acordo com o quadro apresentado no material do aluno (p. 64) e ilustrado a seguir:

**Poliedro Convexo**

Um poliedro é convexo se o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido no poliedro.



exemplo de poliedro convexo



exemplo de poliedro não convexo

- Professor, após essa primeira discussão, auxilie os alunos na resolução das questões propostas na folha de atividades, usando somente os poliedros convexos. Verifique se os grupos estão obtendo os valores desejados na tabela, orientando-os quando necessário.

| Objeto | N° de Vértices (V) | N° de Faces (F) | N° de Arestas (A) | V + F - A |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

- Estimule uma discussão entre os grupos para que tentem perceber a relação entre o número de vértices, faces e arestas desses poliedros convexos. Após preencherem a tabela, você pode pedir que cada grupo troque as folhas com os outros grupos e observem os resultados obtidos na última coluna da tabela, indagando-os sobre o que observam. Espera-se que, após esta discussão, os alunos percebam que o valor é sempre igual a 2.
- Por fim, utilize a lousa para concluir com os alunos a Relação de Euler: **V + F = A + 2**.

## Folha de Atividades – "Reconhecendo Sólidos Geométricos em objetos do cotidiano"

Nome da Escola:_____

Nome: _____

A partir dos objetos e materiais trazidos para a aula, respondam às questões propostas:

**Questão 1:** Quais dos objetos analisados representam poliedros?

_____

_____.

**Questão 2:** Quais dos objetos que foram classificados como poliedros são convexos e quais são não convexos?

_____

_____

_____.

**Questão 3:** Com somente os objetos que foram classificados como poliedros convexos, preencha a seguinte tabela:

| Objeto | N° de Vértices (V) | N° de Faces (F) | N° de Arestas (A) | V + F - A |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Questão 4:** Você consegue observar se existe alguma relação entre os números de vértices, faces e arestas dos objetos selecionados na questão 3? Dica: Observe a última coluna da tabela.

## **Seção 3** – Sólidos Geométricos

*Páginas no material do aluno*
**62 a 70**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Identificando vértice, aresta e face de um poliedro. | Computadores para os alunos com o softwares *"Poly Pro"* e "3D Learning - Geometria Espacial" instalados, material do aluno, folha de atividades e lápis/caneta. | Esta atividade tem com o objetivo desenvolver a habilidade de visualização espacial com auxílio dos softwares "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial", de modo que os alunos tenham a oportunidade de identificar as características que permitem diferenciar poliedros de não poliedros e identificar os elementos básicos dos poliedros a partir da interface dinâmica oferecida pelo software. | Turma dividida em duplas ou trios. | 30 minutos |

## Aspectos operacionais

Esta atividade foi elaborada para ser aplicada em laboratório de informática em complementação à atividade 4 proposta no material do aluno. Nessa atividade, são apresentadas representações planas de objetos espaciais. No entanto, não podemos considerar que seja absolutamente fácil para os alunos visualizar esses objetos a partir de tais representações. Esta atividade complementar poderá auxiliar você, professor, nesse processo.

Esta atividade tem com o objetivo desenvolver a habilidade de visualização espacial com auxílio dos softwares *"Poly Pro"* e "3D Learning - Geometria Espacial". Além disso, os alunos terão a oportunidade de identificar as características que permitem diferenciar poliedros de não poliedros (também chamados de corpos redondos em algumas literaturas) a partir da interface dinâmica oferecida pelo *software* e identificar os elementos básicos dos poliedros.

- Inicialmente, você, professor, deverá estabelecer juntamente com a sua turma uma analogia entre os elementos do poliedro: vértice, aresta e face, com as noções primitivas de ponto, reta e plano, respectivamente.
- Leve, então, os seus alunos até o laboratório de informática (certifique-se de que os softwares "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial", já estejam devidamente instalados e prontos para serem acessados pelos alunos) e peça para que eles formem duplas ou trios.
- Em seguida, você, professor, poderá aplicar a atividade proposta na Folha de Atividades (que está disponível em seu Grid de aula no seu DVD).

**Atividade:**

1. Abra o *software* **Poly Pro**. Em seguida, selecione as opções "Sólido de Arquimedes" e depois "Cuboctaedro" nas caixas flutuantes na janela de ferramentas. Esse sólido corresponde ao primeiro exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre ele e arraste para movê-lo e girá-lo livremente.

2. Agora abra o software **3D Learning - Geometria Espacial**.

   a. Na caixa de ferramentas (apresentada do lado direito da tela) clique sobre a ferramenta "Inserir Objetos" ( ). Na janela que se abrirá, selecione o objeto "cilindro" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao primeiro exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   b. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "esfera" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao segundo exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   c. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "paralelepípedo" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao segundo exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   d. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "octaedro" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao terceiro exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   e. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "cone" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao terceiro exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   f. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "pirâmide" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao quarto exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

3. Agora que você já explorou quase todos os sólidos apresentados na atividade 4 através dos *softwares*, destaque:

   a. O que você observou em relação às características que os poliedros têm em comum?

   b. O que você observou em relação às características que os não poliedros têm em comum?

4. A partir do que foi observado no item anterior, responda:

   a. Sobre as superfícies dos poliedros observados podemos identificar elementos de 2, 1 ou nenhuma dimensão? Tomando como exemplo o octaedro, quantos são os elementos de 2, 1 e nenhuma dimensão sobre a sua superfície? (Esses são os números de faces, arestas e vértices desse poliedro)

   b. É possível identificar, da mesma forma, os mesmos elementos também na superfície dos não poliedros? Em que estes se diferem dos poliedros?

Os *softwares* "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial" (ambos livres), bem como suas instalações, estão disponíveis em seu DVD. No entanto, para que o *software* "3D Learning - Geometria Espacial" seja devidamente registrado em seu computador ou nos computadores do laboratório de informática da sua unidade escolar, é necessário efetuar um cadastro no endereço http://www.christmas.com.br/3dlearning/cadastro/. Esse cadastro é indispensável para a obtenção do número de registro do software.

## Aspectos pedagógicos

- Deixe que os alunos manipulem livremente os *softwares* e as representações dinâmicas dos sólidos.
- Discuta com os alunos quais as características dos poliedros e não poliedros. Deixe que eles indiquem suas próprias caracterizações, mesmo que sejam informais. Adeque suas propostas à linguagem matemática, quando possível.
- Ao final da atividade, você pode promover um debate a partir dos resultados obtidos na folha de atividades em relação às diferenças entre os tipos de sólidos trabalhados.
- Caso a sua unidade escolar não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com auxílio de um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Nesse caso, os alunos poderão interagir com o *software* de maneira indireta e coletiva.

## Folha de Atividades – Identificando vértice, aresta e face de um poliedro

Nome da Escola: _____

Nome: _____

1. Abra o software Poly Pro. Em seguida, selecione as opções "Sólido de Arquimedes" e depois "Cuboctaedro" nas caixas flutuantes na janela de ferramentas. Esse sólido corresponde ao primeiro exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre ele e arraste para movê-lo e girá-lo livremente.

2. Agora abra o software 3D Learning - Geometria Espacial.

   a. Na caixa de ferramentas (apresentada do lado direito da tela) clique sobre a ferramenta "Inserir Objetos" ( ). Na janela que se abrirá, selecione o objeto "cilindro" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao primeiro exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   b. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "esfera" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao segundo exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   c. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "paralelepípedo" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao segundo exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   d. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "octaedro" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao terceiro exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   e. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "cone" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao quarto exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   f. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "pirâmide" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao quarto exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

3. Agora que você já explorou quase todos os sólidos apresentados na atividade 4 através dos softwares, destaque:

   a. O que você observou em relação às características que os poliedros têm em comum?

   b. O que você observou em relação às características que os não poliedros têm em comum?

4. A partir do que foi observado no item anterior, responda:

   a. Sobre as superfícies dos poliedros observados podemos identificar elementos de 2, 1 ou nenhuma dimensão? Tomando como exemplo o octaedro, quantos são os elementos de 2, 1 e nenhuma dimensão sobre a sua superfície? (Esses são os números de faces, arestas e vértices desse poliedro)

   b. É possível identificar, da mesma forma, os mesmos elementos também na superfície de todos os não poliedros? Em que estes se diferem dos poliedros?

   c. Um dos sólidos apresentados na atividade 4 não foi explorado com auxílio dos softwares. Você seria capaz de indicar algum objeto cuja forma se assemelhe à desse sólido?

## Avaliação – O que perguntam por aí?

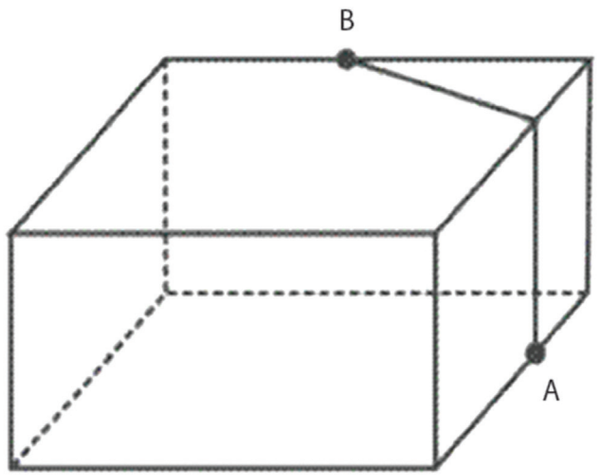
| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | ENEM - 2010 | Imagem disponível para projeção neste material; material do aluno. | | Turma dividida em duplas | |

## Aspectos operacionais

Na seção O que perguntam por aí? do material do aluno, a atividade é uma questão do ENEM que envolve noção básica de geometria espacial. Você poderá trabalhar esta proposta com a imagem disponível neste material e pedir que os alunos discutam e resolvam a seguinte questão proposta:

## ENEM - 2010

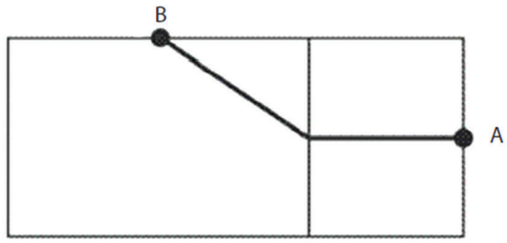
A figura seguinte representa um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B:



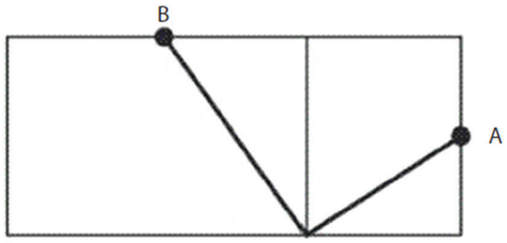
Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado  em A. Afim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

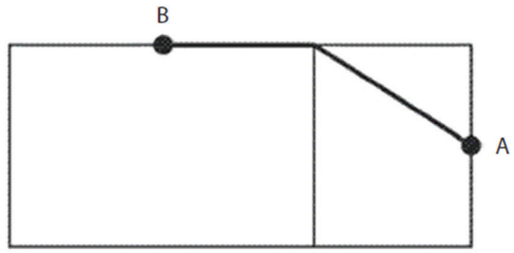
a)



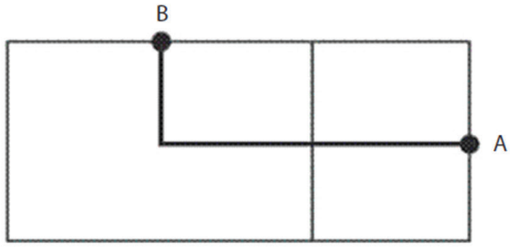

b)



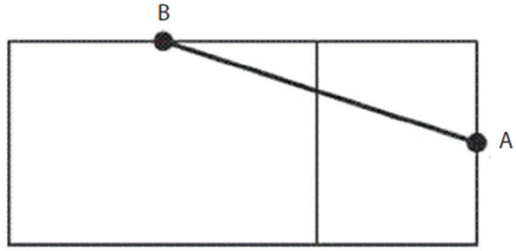

c)




d)




e)



- Após a resolução desta questão em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos.

**Gabarito comentado:**

Gabarito E: perceba o seguinte: o retângulo em que se situa o ponto B é o teto da sala eo retângulo em que se situa o ponto A é uma das paredes. Conseguiu ver? Muito bem. Então, num pimeiro momento, podemos afirmar que os pontos estão em planos diferentes e, neste caso, um fio que percorresse o caminho mais curto entre A e B passaria pelo meio da sala. No entanto, o fato de o fio "correr" por dentro da parede faz com que as coisas mudem de figura: podemos considerar que os planos do teto e da parede são, na verdade, um plano contínuo. Dessa maneira, os pontos A e B estarão no memso plano e a menor distância entre eles será o tamanho da linha reta que os une. Assim, a resposta é letra E.

## Avaliação – Momento de Reflexão

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Avaliação da Unidade | Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta. | Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetivas como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor. | Participação individual dos alunos. | 40 minutos |

## Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à unidade 2. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

**Etapa 1:** Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, disponível para reprodução neste material, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar às suas no que tange à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- Identificar posição relativa entre pontos, retas e planos.
- Identificar Poliedros e Não Poliedros
- Aplicar a Relação de Euler.

Para ajudá-lo nos seus registros, sugerimos as questões a seguir, disponíveis na folha de atividades:

- Qual foi o conteúdo matemático que você estudou nesta unidade?
- Dê exemplos de objetos do seu cotidiano que representem modelos de sólidos estudados nesta unidade. Tente nomear esses sólidos.
- Quais dos sólidos citados acima são poliedros? Algum entre eles não é convexo?
- Que relação importante você aprendeu para relacionar os elementos de um poliedro convexo?

Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho para, se for o caso, repensá-los de acordo com as características apresentadas.

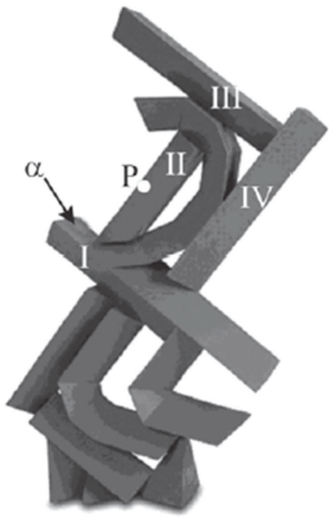
**Etapa 2:** Questões objetivas e discursivas

Sugerimos nesta etapa a escolha de, pelo menos, uma questão objetiva e uma discursiva que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

## Questão 1: (ENEM - 2009)

Suponha que, na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.




Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

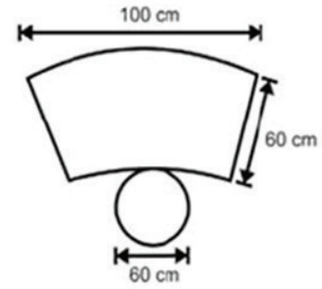
- **A** dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos.
- **B** dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos.
- **C** dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares.
- **D** dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos.
- **E** dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

## Questão 2: (ENEM - 2010)

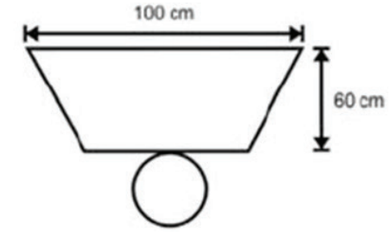
Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

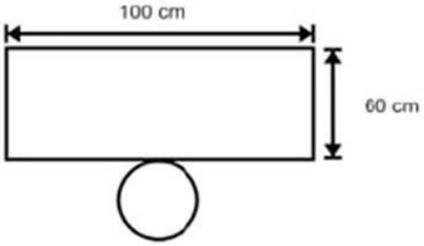
A



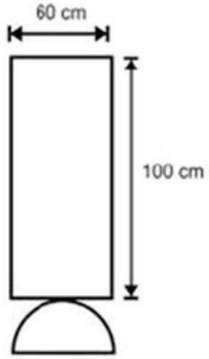

B



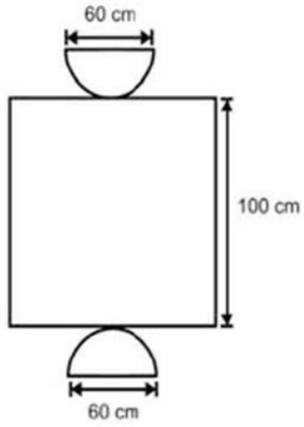

C




D

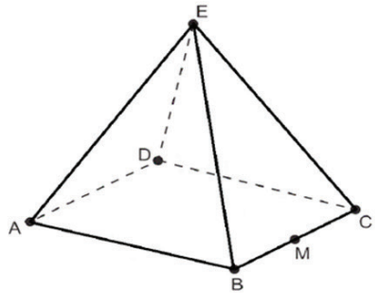



E



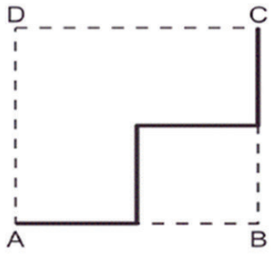
## Questão 3: (ENEM- 2012)

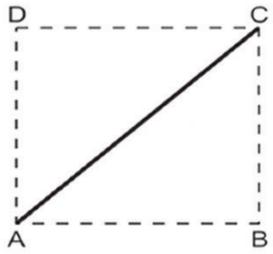
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

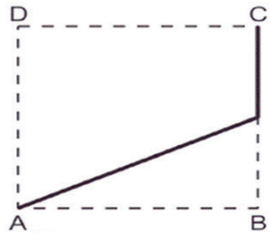


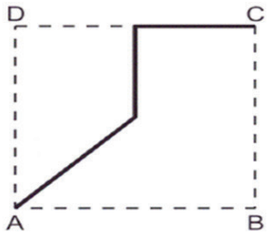

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

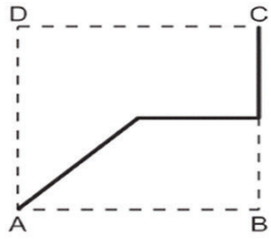
O desenho que Bruno deve fazer é

A)



D)



B)



E)



C)


Respostas das questões objetivas sugeridas:

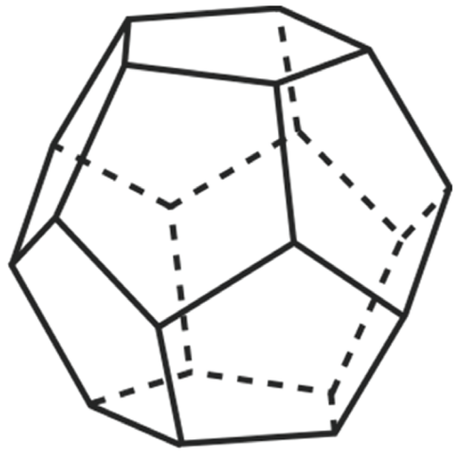
1. (A)

2. (E)

3. (C)

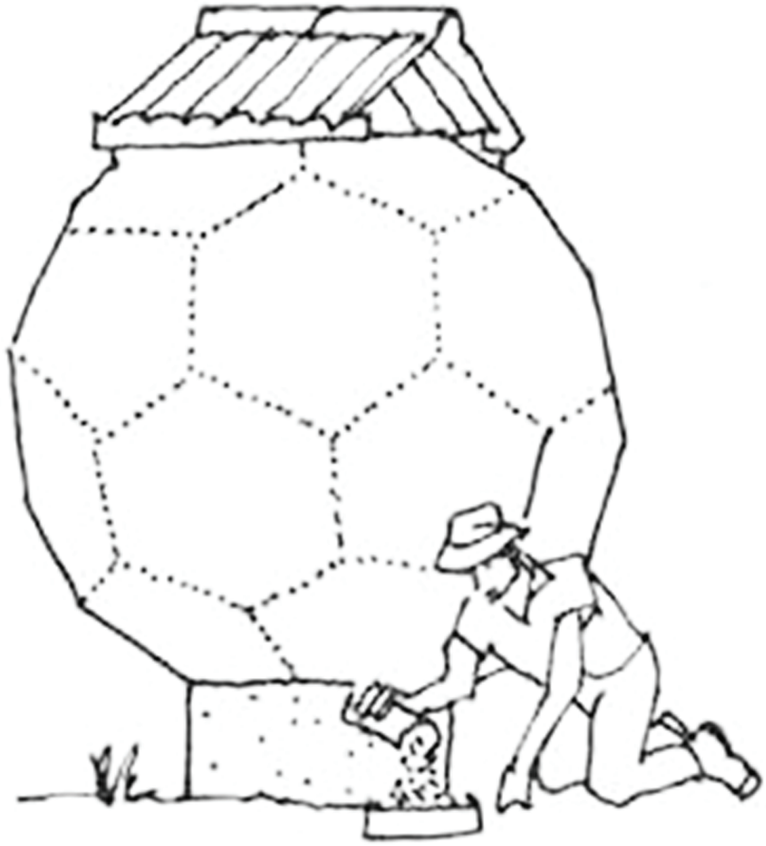
Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

**Questão 1:** A figura abaixo mostra um dodecaedro regular, poliedro convexo com 20 vértices e 12 faces, todas pentagonais.



Seja C o conjunto de todos os triângulos que podem ser formados ligando quaisquer dos 20 vértices de um dodecaedro regular. O número de triângulos de C que não estão contidos em uma das faces será:

**Questão 2:** No México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema de armazenagem da pós-colheita de grãos com um tipo de silo em forma de bola colocada sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais.



Quantas arestas e quantos vértices tem esse silo?

**Questão 3:** Num poliedro convexo, o número de vértices é 5 e o de arestas é 10. Qual é o número de faces?

**Questão 4:** Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro que satisfaz a relação de Euler, com 60 faces triangulares. Calcular o número de vértices desse cristal.

**Questão 5:** Um poliedro convexo tem cinco faces triangulares e três pentagonais. O número de arestas e o número de vértices deste poliedro são:

**Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:**

**Questão 1:** Observe que, para obter o número de elementos de C (conjunto de todos os triângulos que podem ser formados ligando quaisquer dos 20 vértices de um dodecaedro regular), podemos fazer $C_{20,3} = \frac{20!}{3!17!} = 1140$. No entanto, o problema pede o número de triângulos de C que não estão contidos em uma das faces. Note que em cada face há $C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ triângulos e, como há 12 faces, precisamos subtrair 12X10=120 triângulos; daí, o número de triângulos procurado ser 1140-120=1020.

**Questão 2:** Como o poliedro tem 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, então F = 12 + 20 = 32. Para obter o número de arestas, podemos contar pelas faces pentagonais, ou seja, 5 . 12 = 60 e pelas faces hexagonais temos 6 . 20 = 120. Observando que cada aresta foi contada 2 vezes, temos que 2A = 60 + 120, isto é, 2A = 180, logo A = 90 arestas.

Como o poliedro é convexo, podemos usar a relação de Euler (V + F = A + 2) para calcular o número de vértices. Assim, V + 32 = 90 + 2, portanto V = 92 – 32, ou seja V = 60 vértices.

**Questão 3:** Como o poliedro é convexo, podemos usar a relação de Euler (V + F = A + 2) para calcular o número de faces. Assim, 5 + F = 10 + 2, portanto F = 12 – 5, ou seja F = 7 faces.

**Questão 4:** Como podemos usar a relação de Euler (V + F = A + 2) e sabendo que F = 60 faces triangulares , podemos calcular o número de arestas fazendo 60 . 3 =180. Observando que cada aresta foi contada 2 vezes, temos que 2A = 180, logo A = 90 arestas. Assim, V + 60 = 90 + 2, portanto V=92-60, ou seja V = 32 vértices.

**Questão 5:** Como o poliedro tem 5 faces triangulares e 3 faces pentagonais, então F = 5 + 3 = 8. Para obter o número de arestas, podemos contar pelas faces triangulares, ou seja, 3 . 5 = 15 e pelas faces pentagonais temos 5 . 3 = 15. Observando que cada aresta foi contada 2 vezes, temos que 2A=15 +15, isto é, 2A = 30, logo A = 15 arestas.

Como o poliedro é convexo, podemos usar a relação de Euler (V + F = A + 2) para calcular o número de vértices. Assim, V + 8 = 15 + 2, portanto V = 17 – 8, ou seja V = 9 vértices.

## Folha de Atividades – Avaliação

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Momento de Reflexão

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na unidade 2 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

**Questão 1:**

Qual foi o conteúdo matemático que você estudou nesta unidade?

_____.

**Questão 2:**

Dê exemplos de objetos do seu cotidiano que representem modelos de sólidos estudados nesta unidade. Tente nomear esses sólidos.

_____

_____

_____

_____.

**Questão 3:**

Quais dos sólidos citados acima são poliedros? Algum entre eles não é convexo? Se positivo, identifique-os.

_____

_____

_____

_____.

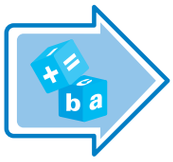
**Questão 4:**

Que relação importante você aprendeu para relacionar os elementos de um poliedro convexo? Escreva o nome e a equação que a representa.

_____

_____.

## Atividade Complementar

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Exercícios de Fixação Complementares | Folhas de Atividades, lápis/caneta. | | Turma dividida em duplas ou em trios. | |

## Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das noções iniciais da Geometria espacial, trabalhadas ao longo dessa unidade tanto no material do aluno quanto nas atividades sugeridas neste material. Com esses exercícios, você, professor, terá a oportunidade de fixar os conceitos de dimensão, ponto, reta e plano, as diferenças entre poliedros e não poliedros e seus elementos e a aplicação da relação de Euler.

Esses exercícios foram distribuídos em uma "Folha de atividades" – que se encontra disponível para reprodução no "pendrive do professor" – que poderá ser aplicada de forma fracionada ao término de cada seção do material do aluno ou de uma só vez no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu pendrive.

## Aspectos pedagógicos

- Peça que os alunos organizem-se em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno, para que todos possam ficar com uma cópia do material, tornando-a mais uma fonte de consulta.
- Escolha previamente quais os exercícios se adequam melhor à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos na Unidade 2.
- Depois de os alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas por eles, valorizando cada estratégia, mesmo que esta não os tenha conduzido a uma resposta verdadeira.
- Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção, enquanto professor. Esses exercícios podem favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

## Folha de Atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

Nome da Escola: _____

Nome: _____

1. Responda às perguntas no espaço entre parênteses usando (P) para ponto, (R) para reta e (S) para plano.

   a. (  ) Olhando para o mapa do seu estado, você identifica a cidade onde você mora. Qual é a ideia que você tem dessa representação?

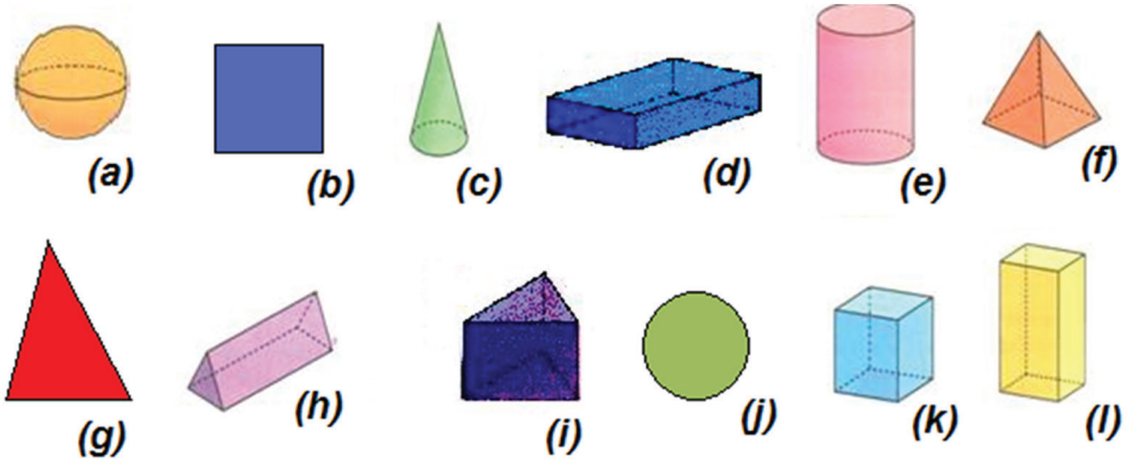
b. (  ) Lendo uma página do livro de matemática, qual é a ideia que uma folha deste livro lhe traz?

c. (  ) Assistindo a um jogo de futebol, você observa a linha divisória do campo. Qual é a ideia que esta linha divisória lhe dá?

d. (  ) Quando você olha o vidro colocado em uma janela, qual a ideia que este vidro lhe dá?

e. (  ) Você está vendo um palito de churrasco. Que ideia esse palito lhe traz?

2. Em Geometria, qualquer figura que pode estar toda contida em um plano é uma figura plana. As que não podem estar contidas inteiramente em um plano, por possuírem três dimensões, são chamadas de espaciais. As figuras geométricas espaciais mais conhecidas compõem dois grupos: os poliedros e os corpos redondos. Analise as figuras geométricas representadas abaixo e responda:




a. Quais delas são figuras planas? _____

b. Quais são os corpos redondos? _____

c. Quais são os poliedros? _____

3. Determine o número de vértices de um poliedro convexo de 10 faces e 30 arestas.

_____.

4. Determine o número de faces de um poliedro convexo de 12 vértices, cujo número de arestas é o dobro do número de faces.

_____.

5. Determine o número de vértices de um poliedro convexo de 9 faces, das quais 4 são triangulares e 5 são quadrangulares.

_____.

6. Determine o número de faces de um poliedro convexo de 6 vértices, sabendo que de cada vértice partem 4 arestas.

_____.

7. Um professor de matemática decidiu que, na festa de aniversário de 6 anos de seu filho, seriam distribuídos, como "lembrancinha", pequenos poliedros coloridos, feitos de madeira. Contratou um marceneiro para fazer trinta poliedros e lhe passou a seguinte orientação:

- Todos os poliedros devem ser regulares e a aresta de cada um deve medir 4 cm.
- 10 deles devem ser pintados de azul, ter 6 arestas e 4 vértices.
- Outros 10 devem ser pintados de rosa e ter 12 faces pentagonais.
- Os 10 poliedros restantes devem ser pintados de amarelo e ter oito faces triangulares.

De acordo com a orientação do professor:

a. Que tipos de poliedros o marceneiro deve confeccionar?

_____.

b. Quantas arestas terá o poliedro rosa?

_____.

c. Quantos vértices terá o poliedro amarelo?

_____.

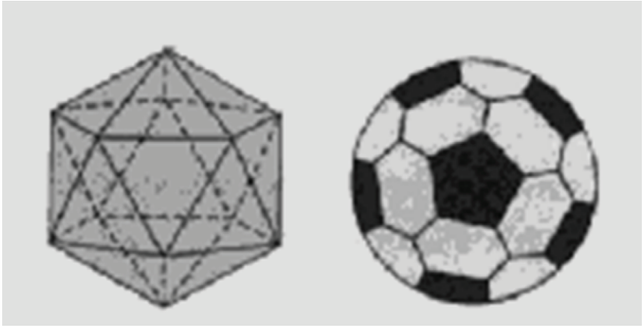
8. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais.

_____.

9. (Unirio) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices desse cristal é igual a:

(A) 35 (B) 34 (C) 33 (D) 32 (E) 31

10. (UERJ) Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais tiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

(A) 7,0 m (B) 6,3 m (C) 4,9 m (D) 2,1 m

## Respostas da Folha de Atividades – Exercícios Complementares

1. a) (P) b) (S) c) (R) d) (S) e) (R)
2. a) b, g, j b) a, c, e c) d, f, h, i, k, l
3. 18 vértices
4. 10 faces
5. 9 vértices
6. 8 faces
7. a) 10 tetraedros azuis, 10 dodecaedros rosas e 10 octaedros amarelos.

   b) 30 arestas (se são doze faces pentagonais e o pentágono possui 5 lados, teríamos um total de 60 arestas. Mas cada aresta pertence a dois pentágonos, logo elas estão contadas duas vezes. Assim, 30 é o número de arestas do dodecaedro regular).

   c) 6 vértices (aqui basta aplicar a relação de Euler. O octaedro regular possui 8 faces com 3 lados cada, logo terá 12 arestas.)

(Obs.: Esse exercício é um bom momento para apresentar os ditos poliedros de Platão: tetraedro, hexaedro ou cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

8. 10 vértices (aqui basta aplicar a relação de Euler. O número de faces é dado e o número de arestas pode ser obtido dividindo pela metade o número total de lados das faces indicadas).

9. D

10. B

# Regularidades numéricas – sequências e progressões

*Cleber Dias da Costa Neto, Heitor Barbosa Lima de Oliveira, Patrícia Nunes da Silva e Telma Alves. Juliana Bezerra*

## Introdução

Na unidade 26 do módulo 3 do material do aluno são apresentadas diversas situações e atividades sobre sequências.

Para auxiliá-lo, pesquisamos e elaboramos algumas atividades e recursos que podem complementar a exposição deste tema em suas aulas. O detalhamento dessas atividades está presente no texto que segue.

Sugerimos que a primeira aula desta unidade inicie-se com uma atividade disparadora. É uma atividade cujo intuito, além de iniciar a exposição do tema, é promover uma dinâmica entre os alunos. Neste momento, espera-se que os alunos consigam identificar sequências numéricas, obtendo a expressão algébrica do seu termo geral, além disso, que utilizem o conceito de sequência para resolver problemas que abordem situações cotidianas.

Para dar sequência ao estudo desta unidade, abordando Progressões Aritméticas (P.A.) e Progressões Geométricas (P.G.), disponibilizamos alguns recursos complementares vinculados ao conteúdo do material didático. Tais recursos apresentam-se associados às atividades descritas detalhadamente neste material. Sugerimos a sua realização nas aulas subsequentes à aula inicial de acordo com a realidade da sua turma. Recomendamos que sejam feitas as alterações e adaptações sempre que achar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro, dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo. E o segundo, um momento de

avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da mera reprodução de exercícios feitos anteriormente. Também disponibilizaremos algumas questões de avaliações de larga escala, como Enem, Vestibulares, Concursos Público, entre outros.

# Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

| Disciplina | Volume | Módulo | Unidade | Estimativa de aulas para essa unidade |
|---|---|---|---|---|
| Matemática | 1 | 3 | 2 | 6 aulas de 2 tempos |

| Titulo da unidade | Tema |
|---|---|
| Regularidades numéricas – sequências e progressões | Sequências |
| **Objetivos da unidade** | |
| Identificar sequências numéricas e obter a expressão algébrica do seu termo geral; | |
| Utilizar o conceito de sequência numérica, para resolver problemas; | |
| Diferenciar Progressão Aritmética (P.A.) de Progressão Geométrica (P.G.); | |
| Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G., na resolução de problemas. | |
| **Seções** | **Páginas no material do aluno** |
| Para início de conversa... | ---- |
| Seção 1 – As sequências, regularidades e generalizações. | ---- |
| Seção 2 – As progressões Aritméticas. | ----- |
| Seção 3 – Progressões Geométricas. | ----- |
| Resumo e Conclusão | ---- |
| Veja ainda | ----- |
| Respostas das atividades | ----- |
| O que perguntam por aí? | ---- |
| Caiu na rede | ----- |

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

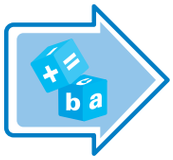
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

# Recursos e ideias para o Professor

## Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



**Atividades em grupo ou individuais**

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

**Ferramentas**

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

**Applets**

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

**Avaliação**

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

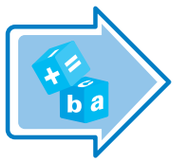
**Exercícios**

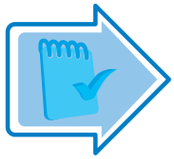
Proposições de exercícios complementares

## Atividade(s) inicial(is)

Descrevemos a seguir situações motivadoras nas quais queremos que os alunos iniciem uma discussão coletiva e familiarizem-se com o conteúdo matemático a ser trabalhado de forma empírica e com atividades de fácil compreensão antes da formalização. Sugerimos que você escolha a que seja mais adequada à sua realidade, ou, se preferir, utilize uma atividade própria.

### Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Torre de Hanói | Aplicativo Torre de Hanói, disponível em http://www.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/ e cópias da folha de atividades — Torre de Hanói (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão tentar resolver o problema da Torre de Hanói para diferentes números de discos. Para isso, eles terão de criar uma sequência que associa o número de discos ao menor número de movimentos necessários à resolução e vão tentar estabelecer uma regra para o "termo geral" dela.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1361 | Turma disposta em duplas | 25 minutos |

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Reconhecimento de Padrões | Cópias da folha de atividades — Reconhecimento de padrões (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão tentar identificar padrões em sequências numéricas e não numéricas.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching, N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (disponível em http://bookos.org/s/?q=approaches+to+algebra+perspectives+for+research+and+teaching&t=0) | Turma disposta em duplas. | 25 minutos |

## **Seção 1** – As sequências, regularidades e generalizações

*Páginas no material do aluno*

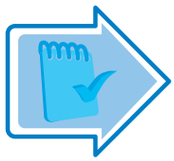
---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Cloro na piscina | Vídeo Cloro na piscina, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1068, calculadoras e cópias da Folha de atividades – Medicação (disponível na Seção Aspectos operacionais) | O vídeo utilizado nesta atividade apresenta rotinas de aplicação de cloro em uma piscina, deduzindo e analisando matematicamente a sequência associada à quantidade de cloro adicionada semanalmente. No problema proposto, os alunos deverão fazer uma análise análoga à apresentada no vídeo no caso de administração de um remédio.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1068 | Turma dividida em duplas ou trios | 25 minutos. |
| | Generalizando os termos da Sequência | Cópias da Folha de atividades – Generalizando os termos da Sequência (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão observar uma sequência de imagens e deduzirão expressões algébricas que generalizem as sucessões.<br>Obs: Essa atividade foi adaptada de http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/generalizacoes-calculos-algebricos-602390.shtml. Acesso em 22/06/2013 | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## **Seção 2** – As Progressões Aritméticas

*Páginas no material do aluno*

---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Números Vizinhos | Cópias da folha de atividades — Números Vizinhos (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão tentar identificar padrões em sequências numéricas dispostas em tabelas. | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |
| | Para correr a São Silvestre | Vídeo Para correr a São Silvestre disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1150 e cópias da Folha de atividades – Sequência de quadradinhos (disponível na Seção Aspectos operacionais) | O vídeo utilizado nesta atividade descreve a logística de distribuição de água aos atletas durante a corrida de São Silvestre. Ele também deduz e analisa matematicamente a sequência associada à quantidade de água distribuída. Nos problemas propostos, os alunos deverão identificar o padrão de uma sequência e obter a fórmula de seu termo geral.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1150 | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## **Seção 3** – Progressões Geométricas

*Páginas no material do aluno*

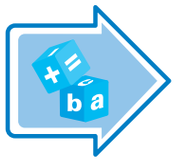
---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Para salvar o mundo | Vídeo Para salvar o mundo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1151 e cópias da Folha de atividades – Para salvar o mundo (disponível na Seção Aspectos operacionais) | O vídeo utilizado nesta atividade descreve a dinâmica de transmissão de uma doença. Ele também deduz e analisa matematicamente a sequência associada à quantidade de pessoas infectadas em uma população. Os problemas propostos envolvem progressões geométricas.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1151 | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |
| | Número do meio | Cópias da folha de atividades — Número do meio (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão preencher os números que aparecem no meio de cada uma das sequências, utilizando, para isso, as propriedades de PA e PG. | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Registros de aprendizagens | Lápis de cor, canetas coloridas ou hidrocor e Cópias do texto da Seção Aspectos Operacionais | Esta etapa pode estar articulada à seção "Veja ainda" no material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as resoluções dos exercícios de revisão, enfatizando as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. | Individual | 25 minutos |
| | Questões de avaliações de larga escala ou concurso | Cópias das questões. | Sugerimos nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno familiarize-se com questões cobradas em avaliações de larga escala, como Enem, vestibulares, concursos etc. | Individual | 20 minutos |

## Atividade Inicial

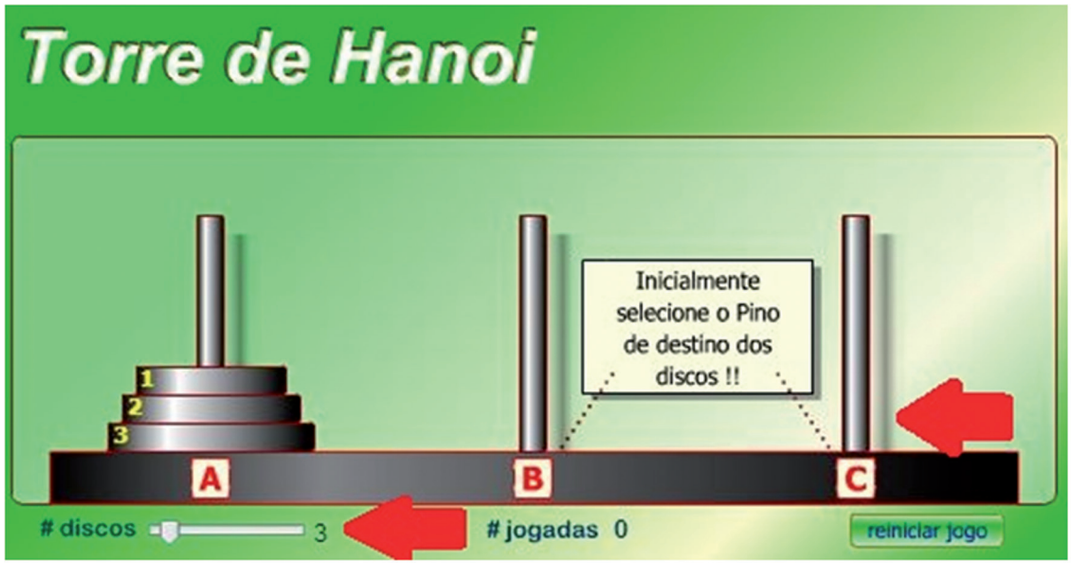
| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Torre de Hanói | Aplicativo Torre de Hanói, disponível em http://www.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/ e cópias da folha de atividades — Torre de Hanói (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão tentar resolver o problema da Torre de Hanói para diferentes números de discos. Para isso, eles terão de criar uma sequência que associa o número de discos ao menor número de movimentos necessários à resolução e vão tentar estabelecer uma regra para o "termo geral" dela.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1361 | Turma disposta em duplas | 25 minutos |

## Aspectos operacionais

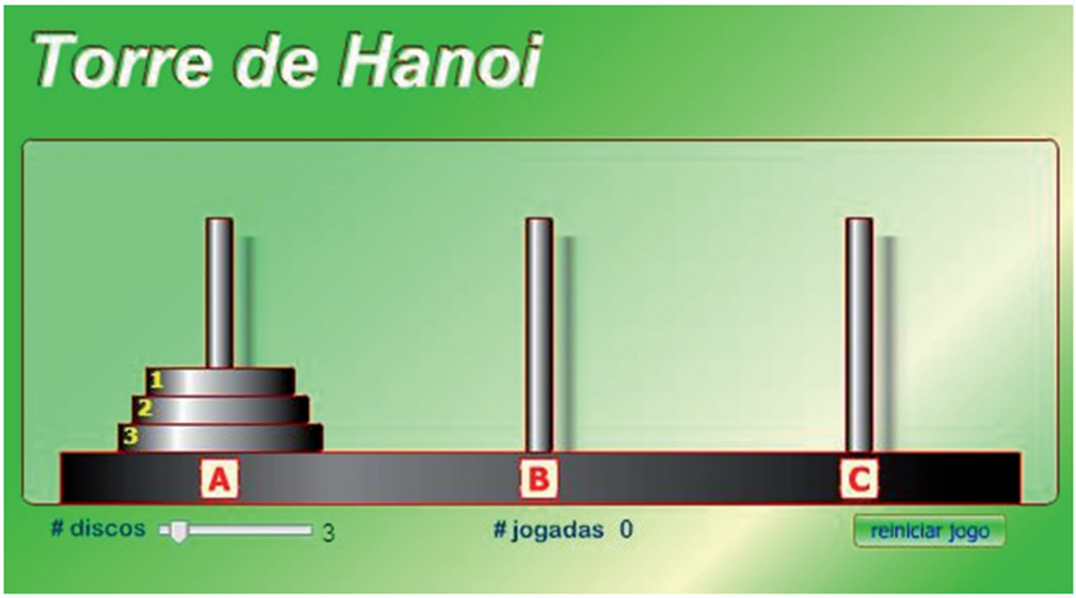
Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades. Oriente-os a lerem a parte inicial do texto que fala sobre o jogo Torre de Hanói e ilustra a resolução, quando a torre é formada por um disco e por dois discos.

Discuta com os alunos e certifique-se que as regras e o objetivo do jogo tenham ficado bem claros.

Abra o aplicativo Torre de Hanói disponível em http://www.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/

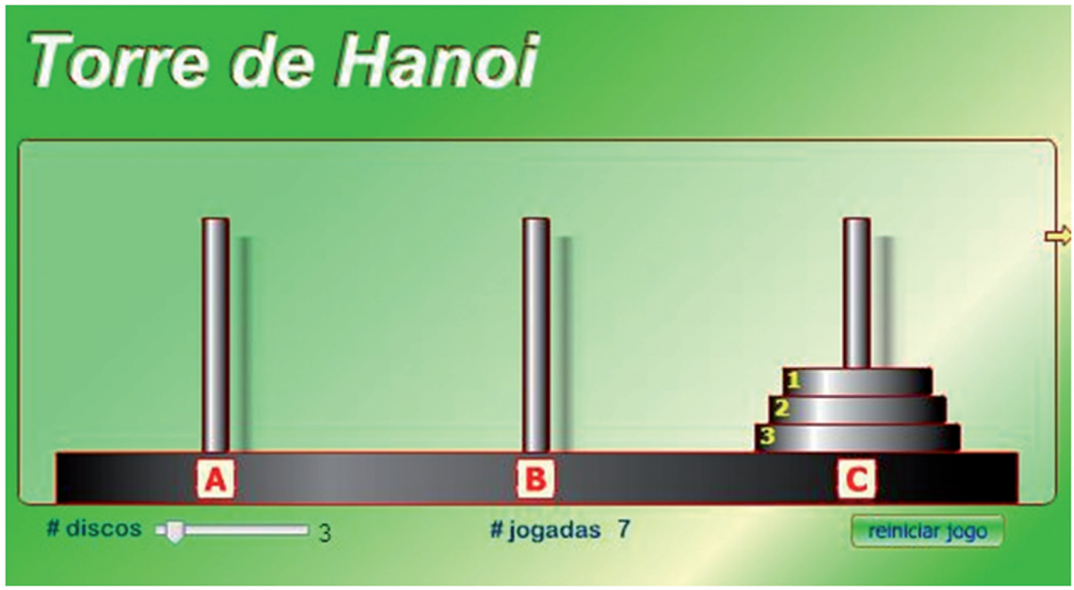



- A barra deslizante #discos configura a quantidade de discos que farão parte do jogo. Essa quantidade pode variar de 3 a 7 discos. Inicialmente, selecione 3 discos.
- Clique sobre a letra C para selecionar o terceiro pino como o pino para o qual a torre será transferida.




- Solicite às duplas que pensem em como transferir a torre de um pino para outro de acordo com as regras do jogo.

- Para mover cada disco, clique sobre ele (mantenha o botão do mouse abaixado) e o leve até o pino desejado. Para soltar o disco, solte o botão do mouse.
- Realize os movimentos sugeridos pelas duplas até que a torre seja completamente transferida.




Caso o número de movimentos tenha sido maior do que o mínimo necessário, proponha aos alunos recomeçar o jogo e discuta com eles meios de evitar movimentos desnecessários.

- Quando a transferência for feita com o menor número de movimentos, peça aos alunos para anotarem esse valor na tabela da folha de atividades.
- Repita o procedimento acima e jogue novamente com eles com 4 e 5 discos.

## Folha de atividades – Torre de Hanói

Nome da Escola: _____

Nome: _____

A Torre de Hanói é um jogo de origem oriental, composto por uma base contendo três pinos. Em um deles, estão colocados discos, formando uma pilha com os menores sobre os

maiores. O desafio do jogo consiste em transferir essa pilha de discos para outro pino, de modo que fiquem dispostos como originalmente. Há apenas duas regras que devem ser obedecidas:

- Apenas um disco pode ser movimentado de cada vez;

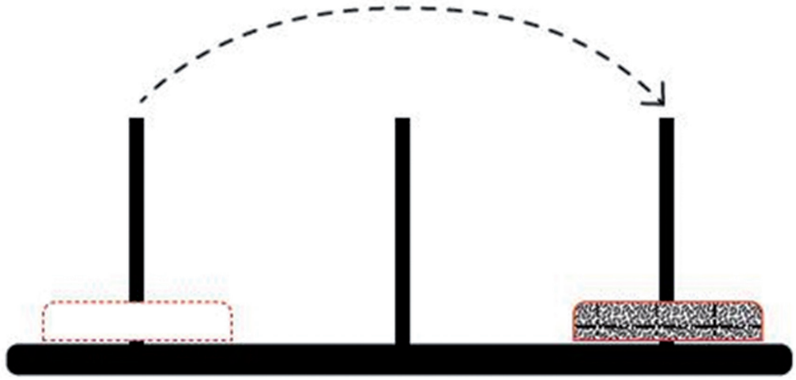
- Não se pode colocar um disco maior sobre um outro menor.

Vamos discutir hoje como resolver este problema. Queremos também determinar o menor número de movimentos necessários para a transferência da pilha. Além disso, queremos investigar a relação entre este número e o número de discos utilizados.

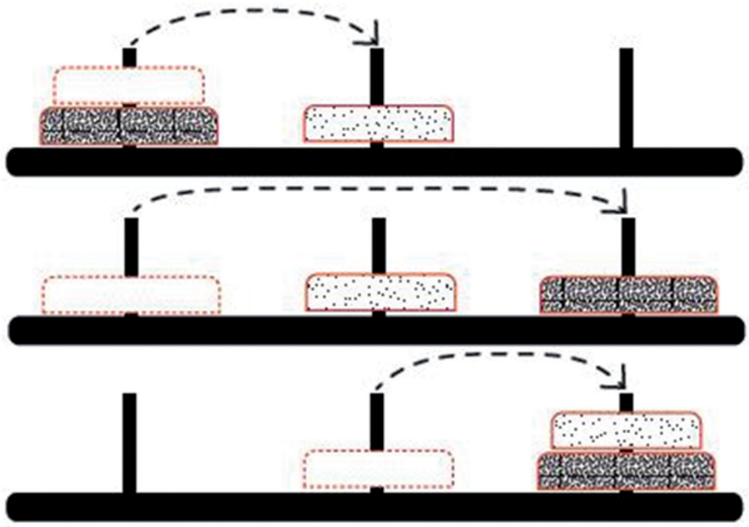
Em 1883, inspirado pela lenda sobre a Torre de Brahma, o matemático francês Edouard Lucas inventou o jogo Torre de Hanói.

Para organizar nossa investigação, vamos trabalhar pouco a pouco.

Vamos considerar a torre formada por apenas um disco. Para transferir esse disco, respeitando as regras do jogo, precisamos de apenas um movimento, certo?



E se fossem dois discos?



Você poderia colocar o menor disco no pino do meio.  Mover o maior disco do primeiro pino para o último. Finalmente, você move o disco que está no pino do meio para o último pino. Foram 3 movimentos, para transferir a torre!

Vamos montar uma tabela que associa a quantidade mínima de movimentos com o número.

| $n$ = Quantidade de discos na torre | $J$ = número mínimo de movimentos para transferir a torre. | Regra geral |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| 2 | 3 | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| $n$ | | |

## Aspectos pedagógicos

- Deixe que eles tentem deduzir sem o auxílio do aplicativo a quantidade mínima de movimentos para os casos: 6 e 7 discos.
- Observe a sequência (1,3,7,15,31,…) de movimentos necessários para transferir as torres. Discuta e tente, se possível, deduzir com os alunos um padrão e uma relação entre a quantidade de discos e a quantidade de movimentos. Tentem obter a relação geral entre o número $n$ de discos e o número mínimo $J$ de movimentos necessários para a transferência da torre: $J=2^n-1$.
- Caso não obtenha a expressão geral, tente instigá-los a observar a relação entre dois termos consecutivos: o segundo é o dobro do anterior mais 1. Por exemplo, $7=2\times3+1$.

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Reconhecimento de Padrões | Cópias da folha de atividades — Reconhecimento de padrões (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão tentar identificar padrões em sequências numéricas e não numéricas.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching, N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (disponível em http://bookos.org/s/?q=approaches+to+algebra+perspectives+for+research+and+teaching&t=0) | Turma disposta em duplas. | 25 minutos |

## Aspectos operacionais

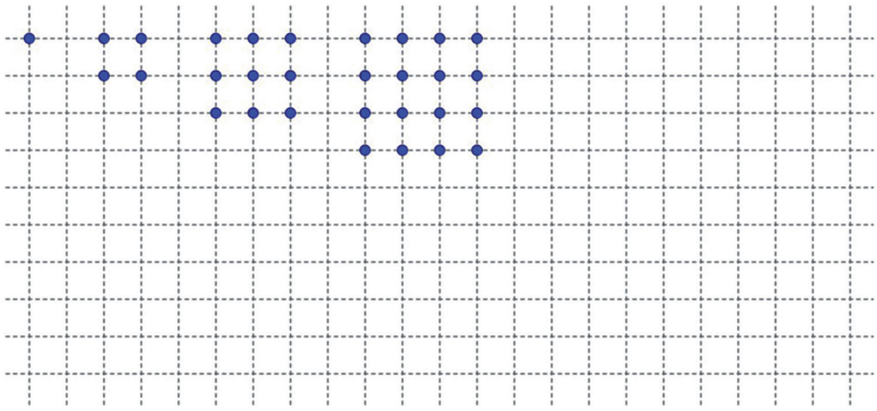
Divida a turma em duplas e distribua a folha de atividades.

## Folha de atividades – Reconhecimento de padrões

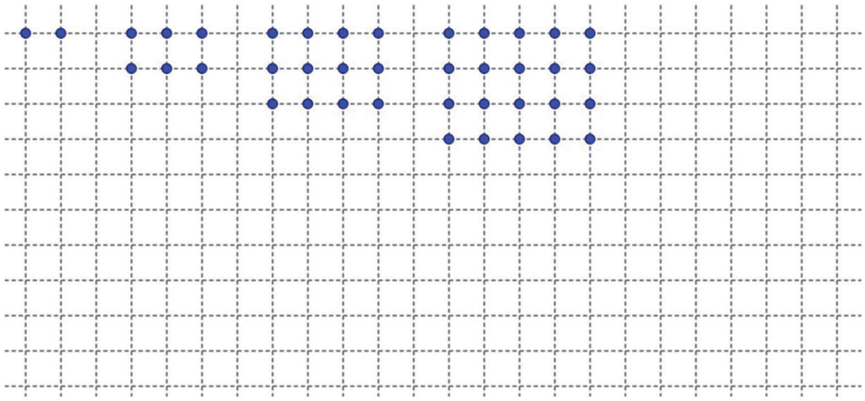
Nome da Escola: _____

Nome: _____

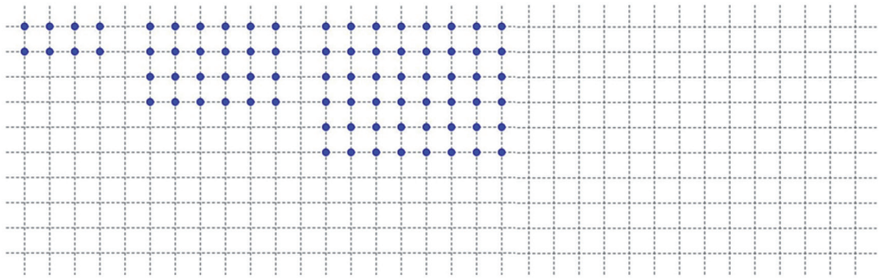
1. Determine o próximo termo da sequência.



2. Determine o próximo termo da sequência.



3. Determine o próximo termo da sequência.



4. Observe a sequência

1,5,1,5,1,5,1,5,…

5. Qual é o próximo termo da sequência? Você saberia dizer qual é o 100o termo desta sequência? E o 21o? E o 22o? E o 105o?

6. Observe a sequência

0,1,0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,1,1…

Quais são os próximos sete termos da sequência?

## Fim da folha de atividades

- Ao final da atividade, peça que as duplas socializem suas resoluções. Discuta coletivamente as estratégias e soluções apresentadas.
- Depois da troca de ideias, para explorar ainda mais o raciocínio que a atividade propõe, peça a cada dupla que crie sua própria sequência com três termos e apresentem como desafio às outras duplas.

## Aspectos pedagógicos

- A habilidade em identificar e reconhecer padrões é importante no estudo de sequências. É fundamental explorar essa habilidade em sequências não numéricas e em numéricas cujos termos gerais não podem ser escritos em uma única fórmula fechada.
- Os alunos podem ter dificuldade de como expressar o próximo termo, por isso peça para que eles desenhem o próximo termo.
- Ao explorar as sequências não numéricas, sugira aos alunos que observem a variação da quantidade de pontos nos lados das figuras. Peça, também, que expliquem em palavras as regras de formação das sequências.

## **Seção 1** – As sequências, regularidades e generalizações

*Páginas no material do aluno*

---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Cloro na piscina | Vídeo Cloro na piscina, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1068, calculadoras e cópias da Folha de atividades – Medicação (disponível na Seção Aspectos operacionais) | O vídeo utilizado nesta atividade apresenta rotinas de aplicação de cloro em uma piscina, deduzindo e analisando matematicamente a sequência associada à quantidade de cloro adicionada semanalmente. No problema proposto, os alunos deverão fazer uma análise análoga à apresentada no vídeo no caso de administração de um remédio.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1068 | Turma dividida em duplas ou trios | 25 minutos. |

## Aspectos operacionais

- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas ou trios e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

# Folha de atividades – Medicação

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Quando um médico prescreve um medicamento, você toma na hora certa? Você interrompe o tratamento, assim que melhora ou respeita o tempo indicado pelo médico?

Não respeitar os intervalos entre as doses de um medicamento pode atrapalhar seu tratamento. Quando você ingere um medicamento, a quantidade de medicamento no organismo vai diminuindo e pode alcançar um nível em que ele não tenha mais eficácia. Por isso, é importante tomar o medicamento, respeitando os intervalos indicados para manter um nível adequado da droga no corpo e garantir que ele será capaz de combater sua doença! O nível adequado da droga no corpo é chamado de nível de manutenção.

**Problema**

Um jovem sofreu uma contusão no joelho após uma partida de futebol. O médico prescreveu um anti-inflamatório. Ele orientou o jogador a tomar a cada 8 horas, um comprimido de 440 mg durante 10 dias. A bula do remédio informa que os rins do organismo humano eliminam 60% desta droga a cada 8 horas.

Indique por $A_n$ a quantidade de medicamento que estará no corpo do jogador imediatamente depois da ingestão de cada comprimido e use a **calculadora** para preencher a tabela abaixo

| $n$ | $A_n$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 11 | |
| 12 | |
| 13 | |
| 14 | |
| 15 | |
| 16 | |
| 17 | |
| 18 | |

Se o medicamento for tomando corretamente, a quantidade da droga permanece praticamente constante. Essa quantidade é chamada de nível de manutenção. Quando este anti-inflamatório atinge o seu nível de manutenção e qual é?

## Aspectos pedagógicos

- O vídeo e o problema proposto exigem o cálculo de porcentagens. Talvez seja necessário fazer uma pequena revisão sobre o tema.
- Sugere-se, para melhor aproveitamento da atividade, que ela seja realizada na forma de estudo dirigido. Acompanhando cada passo, é possível corrigir erros de cálculo e dificuldades de interpretação que podem desestimular os alunos.
- Os alunos podem sentir dificuldades na compreensão do padrão que representa a eliminação dos 60% da droga a cada 8 horas; além das dificuldades de efetuar os cálculos, mesmo com a calculadora. Caso seja possível utilizar a calculadora do computador através de um data show, eles poderão ver como o professor efetua os cálculos e podem repetir na própria calculadora.
- É uma boa oportunidade para mostrar a Matemática que existe por trás de práticas do cotidiano: garantir que a substância mantenha os níveis necessários ao tratamento do organismo.
- Os alunos podem encontrar dificuldade para calcular a quantidade de anti-inflamatório. É importante destacar que se 60% da droga são eliminados, resta no corpo a diferença: 100% - 60% = 40% da droga.

**Seção 1** – As sequências, regularidades e generalizações

*Páginas no material do aluno*

---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Generalizando os termos da Sequência | Cópias da Folha de atividades – Generalizando os termos da Sequência (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão observar uma sequência de imagens e deduzirão expressões algébricas que generalizem as sucessões.<br>Obs: Essa atividade foi adaptada de http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/generalizacoes-calculos-algebricos-602390.shtml. Acesso em 22/06/2013 | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

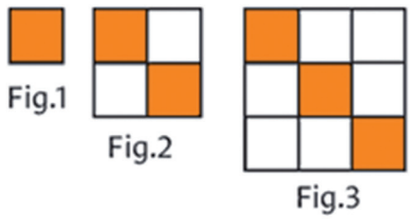
- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.

## Folha de atividades – Generalizando os termos da Sequência

Nome da Escola: _____

Nome: _____

1ª Parte: Observe a sequência de imagens abaixo.

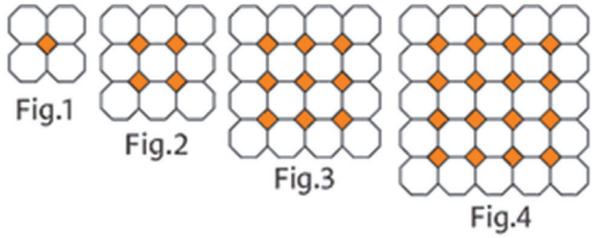



Construa as três próximas figuras abaixo e responda em seguida às perguntas.

a. A Figura 11 terá quantos quadrados no total? E quantos serão coloridos?

b. Se uma das figuras tem 144 quadrados no total, quantos são coloridos? Por quê?

2ª Parte: Observe a sequência de figuras abaixo. Sem desenhar as Figuras 5 e 6, aponte a quantidade de quadrados coloridos que elas devem ter.




Complete a tabela a seguir com os resultados obtidos nesta sequência.

| Figura | Hexágonos | Quadrados Coloridos |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 |
| 2 | 9 | 4 |
| 3 | | |
| 4 | | |
| n | | |

- Ao final da atividade, peça que as duplas socializem suas resoluções. Discuta coletivamente as estratégias e soluções apresentadas.
- Depois da troca de ideias, para explorar ainda mais a atividade proposta, recomendamos que peça a cada dupla que crie sua própria sequência com três termos, apresentando-a como desafio às outras duplas.

## Aspectos pedagógicos

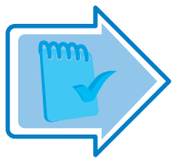
- Identificar e reconhecer padrões são ações fundamentais para o estudo de sequências. Assim, explorar sequências que, a princípio, parecem não numéricas, como as desta atividade, é importante para desenvolver a identificação de padrões.
- Os alunos podem ter dificuldade na representação das próximas figuras. Para ajudá-los, dê dicas sobre as formas presentes nas sequências.
- Ao explorar as sequências, sugira aos alunos que observem a variação da quantidade de quadradinhos/hexágonos que compõem os lados das figuras.

Peça, também, que expliquem em palavras as regras de formação das sequências.

## **Seção 2** – As Progressões Aritméticas

*Páginas no material do aluno*

---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Números Vizinhos | Cópias da folha de atividades — Números Vizinhos (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão tentar identificar padrões em sequências numéricas dispostas em tabelas. | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## Aspectos operacionais

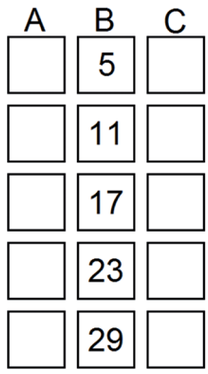
- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.

## Folha de atividades – Números Vizinhos

Nome da Escola: _____

Nome: _____

A tabela abaixo é constituída de três colunas: A, B e C. Preencha as colunas A e C com os antecessores e sucessores, respectivamente, dos números que aparecem na coluna B.




Responda às perguntas a seguir:

a. Os números contidos na coluna B formam uma progressão aritmética. Determine a razão desta progressão.

b. Os números escritos na coluna A também formam uma progressão aritmética? Em caso positivo, qual a razão desta sequência?

c. Faça o mesmo para os números da coluna C.

d. Se a sequência continuasse infinitamente, qual seria a próxima linha?

e. Qual o número que apareceria da 10ª linha da coluna A? E na 11ª linha?

f. Quais os números que aparecem na n-ésima linha em cada uma das colunas?

g. O número 100 pertence a que coluna?

h. Qual das três colunas contém o número 350?

## Aspectos pedagógicos

- Vale a pena auxiliar os alunos na questão da nomenclatura característica deste tópico, tal como n-ésimo elemento da sequência, termo geral, entre outros...
- Uma das dificuldades esperadas está em torno das sequências neste problema, pois na vertical, há sequências de razão 6 e na horizontal há sequências de razão 1.
- Nesta atividade, a sequência construída pelas colunas é infinita, enquanto que a sequência formada pelas linhas é finita (apenas três elementos). É possível que, neste sentido, os alunos demonstrem alguma dificuldade.
- A escrita algébrica do termo geral das progressões é um fator de muita dificuldade para os alunos. Auxilie-os nesta escrita.

## **Seção 2** – As Progressões Aritméticas

*Páginas no material do aluno*

---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Para correr a São Silvestre | Vídeo Para correr a São Silvestre disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1150 e cópias da Folha de atividades – Sequência de quadradinhos (disponível na Seção Aspectos operacionais) | O vídeo utilizado nesta atividade descreve a logística de distribuição de água aos atletas durante a corrida de São Silvestre. Ele também deduz e analisa matematicamente a sequência associada à quantidade de água distribuída. Nos problemas propostos, os alunos deverão identificar o padrão de uma sequência e obter a fórmula de seu termo geral.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1150 | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## Aspectos operacionais

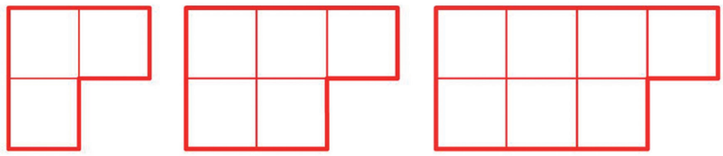
- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

## Folha de atividades – Sequência de quadradinhos

Nome da Escola: _____

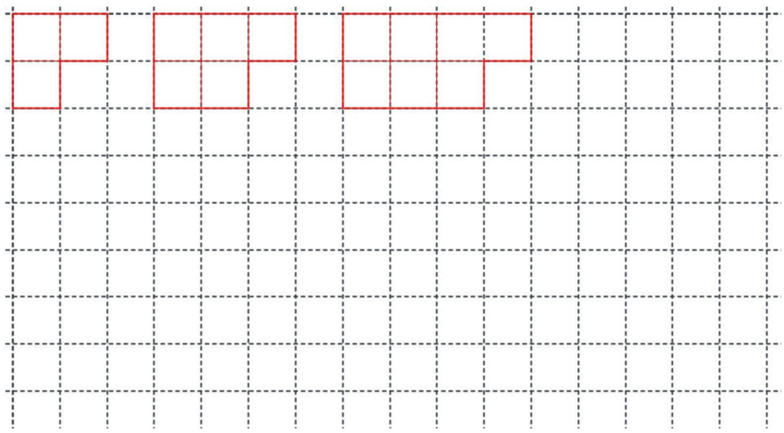
Nome: _____

Observe a sucessão de figuras



**Problemas**

1. Use a malha quadriculada abaixo para obter as próximas três figuras da sucessão.



2. Considere que cada quadrado da malha tenha a medida da área igual a 1 $cm^2$. Obtenha uma sequência numérica que expresse a medida da área de cada uma das figuras na sucessão apresentada anteriormente.

3. Deduza a fórmula do termo geral da sequência numérica.

## Aspectos pedagógicos

- É possível que os alunos encontrem dificuldade em reconhecer o padrão da sucessão de figuras. Explore as diferenças entre duas figuras consecutivas.
- É provável que os alunos apresentem, de forma "seca" (de cabeça), cada termo. Neste momento, com uma atitude de reforço positivo, os induza a escrever a resposta dada, utilizando o termo anterior.
- Estimule os alunos a verificarem qual é a diferença das medidas das áreas de duas figuras consecutivas para obtenção da razão da PA.

- Explore com os alunos a relação entre a medida da área obtida por contagem e através da fórmula obtida para o termo geral. Para facilitar, peça que preencham uma tabela:

| *n* | Área obtida por contagem para a figura na posição *n* | Área obtida pela fórmula do termo geral $a_n=a_1+(n-1)r$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| *n* | | |

## **Seção 3** – Progressões Geométricas

*Páginas no material do aluno*

---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Para salvar o mundo | Vídeo Para salvar o mundo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1151 e cópias da Folha de atividades – Para salvar o mundo (disponível na Seção Aspectos operacionais) | O vídeo utilizado nesta atividade descreve a dinâmica de transmissão de uma doença. Ele também deduz e analisa matematicamente a sequência associada à quantidade de pessoas infectadas em uma população. Os problemas propostos envolvem progressões geométricas.<br>Obs: Essa atividade foi proposta em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1151 | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## Aspectos operacionais

- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

## Folha de atividades – Para salvar o mundo

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Problemas

1. Determine a razão de cada uma das progressões geométricas:

   a. (3, 12, 48, 192,...)

   b. $(10{,}5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots)$

   c. (5, -15, 45, -135, 405,...)

   d. (10, 50, 250, 1250,...)

Nos próximos exercícios, o termo da progressão geométrica (PG) que está na posição *n*, será representado por $a_n$ e a razão da PG, por *q*.

2. Escreva uma PG de quatro termos em que $a_1=5$ " e " $q=3$.
3. Escreva uma PG de seis termos em que $a_1=-2$ "e " $q=2$.
4. Escreva uma PG de cinco termos em que $a_1=540$ "e " $q=1$.

## Aspectos pedagógicos

- Para melhor aproveitamento do vídeo e dos problemas propostos, é importante relembrar, a cada momento necessário, as regras de potenciação e resolução de equações exponenciais.
- Será necessário relembrar a divisão de frações; aproveite para chamar a atenção para o comportamento de uma progressão geométrica com razão cujo valor está entre 0 e 1;
- Os alunos podem ter dificuldades em compreender que o produto de um número por uma fração (número decimal) entre 0 e 1 é sempre menor. Existe o senso comum, entre os alunos, que a multiplicação sempre

aumenta o valor multiplicado.

- Professor, aproveite o exercício 1 para, depois de determinada a razão das progressões, escrever os termos de cada sequência em função da razão q;
- Na resolução dos problemas propostos, é possível que os alunos encontrem dificuldade em lidar com razões negativas, e também com razões cujos valores estão entre 0 e 1.
- No caso da sequência (5,-15,...), sugira que eles montem uma PG com razão 3: (5,15,45,...) e depois voltem à sequência com razão -3 para perceber o efeito de alternância provocado por uma razão negativa: (5,-15,45,...).
- No caso da sequência do item b, sugira que eles montem uma PG de razão 1 e outra de razão 0,5. Dessa forma, é possível que eles identifiquem a PG constante e a PG decrescente, pois a cada termo o fator (razão elevada a n) é cada vez menor.
- É comum os alunos apresentarem dificuldades com os sinais, por isso relembre as regras de sinais para a multiplicação e divisão.
- Fomente uma pequena discussão acerca das sequências alternadas que não são nem crescentes e nem decrescentes.
- Explore, através de outros exemplos de sequências decrescentes, a questão de que nenhum termo será igual ao elemento zero, mesmo sendo uma sequência infinita e decrescente.

## **Seção 3** – Progressões Geométricas

*Páginas no material do aluno*

---

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Número do meio | Cópias da folha de atividades — Número do meio (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão preencher os números que aparecem no meio de cada uma das sequências, utilizando, para isso, as propriedades de PA e PG. | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas e distribua a folha de atividades. Evite que os alunos saiam, fazendo os dois conjuntos de sequências de forma aleatória. Acompanhe-os na resolução da atividade, expondo, se necessário, as propriedades de progressão aritmética e geométrica.

## Folha de atividades – Para salvar o mundo

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Nesta atividade, buscaremos encontrar o número do meio em cada uma das sequências a seguir:

1ª sequência: Abaixo, há três sequências que estão em progressão aritmética. A tarefa é descobrir qual o número que está no meio. Para isso, lembre-se da propriedade das progressões aritméticas.

| | | |
|---|---|---|
| 20 | | 30 |
| 11 | | 19 |
| 23 | | 31 |

2ª sequência: Abaixo, há três sequências que estão em progressão geométrica. A tarefa é descobrir qual o número que está no meio. Para isto, lembre-se da propriedade das progressões geométricas.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | 8 |
| 10 | | 90 |
| 3 | | 48 |

- Possivelmente, alguns alunos não lembrarão ou não saberão utilizar as propriedades de PA e PG. Fazer uma revisão deste assunto é fundamental para a realização da atividade.
- Após os alunos inserirem os números do meio, verifique junto a eles que, de fato, trata-se de uma PA ou de uma PG, respectivamente. Como sugestão, instigue-os a determinar as razões em cada caso.
- Na 2ª sequência, o cálculo de raízes quadradas de números grandes pode causar certo desconforto por parte dos alunos. Procure auxiliá-los, mostrando possíveis cálculos de raízes através de fatoração. Não é aconselhável o uso de calculadora.

## Atividade(s) de Avaliação

Nesta seção, apresentaremos atividades que retomam as habilidades verificadas nas seções anteriores, com o intuito de consolidar e avaliar o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo proposto. Uma parte desta seção também enfatizará a reflexão do aluno sobre os conteúdos abordados.

Sugerimos a utilização dos dois últimos tempos de aula, destinados a esta unidade. A seguir, apresentamos sugestões para a retomada dos conteúdos trabalhados e para avaliação das habilidades pretendidas. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir:

**Avaliação**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Registros de aprendizagens | Lápis de cor, canetas coloridas ou hidrocor e Cópias do texto da Seção Aspectos Operacionais | Esta etapa pode estar articulada à seção "Veja ainda" no material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as resoluções dos exercícios de revisão, enfatizando as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. | Individual | 25 minutos |

## Aspectos operacionais

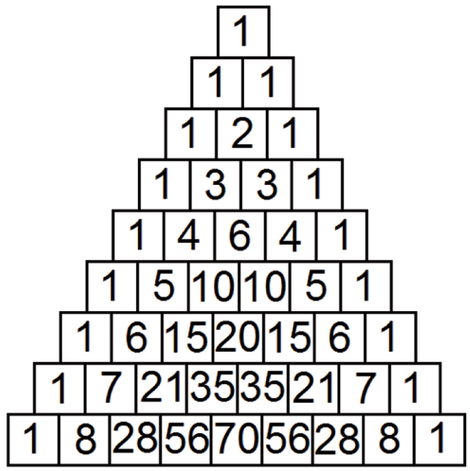
Resolva os exercícios da folha de atividades para o aprimoramento e registro das aprendizagens que obteve durante as últimas aulas.

## Folha de atividades – Sequências Escondidas

Nome da Escola: _____

Nome: _____

A figura abaixo é conhecida como o Triângulo de Pascal.




Nesta atividade, marcaremos no Triângulo de Pascal com canetas coloridas os números que formam as sequências cujas características serão dadas abaixo.

a. Identifique no triângulo de Pascal uma progressão aritmética cuja razão é 0. Pinte-a de vermelho.

b. Identifique no triângulo de Pascal uma progressão aritmética cuja razão é 1. Pinte-a de azul.

c. Encontre uma progressão aritmética, formada por quatro elementos cuja razão é 5. Pinte-a de verde.

d. Encontre uma progressão aritmética, formada por três elementos cuja razão é 14. Pinte-a de amarelo.

e. Você consegue identificar uma progressão geométrica neste triângulo? Para isso, basta identificar 3 termos. Pinte-a de marrom.

f. Some todos os elementos de cada linha do triângulo e forme uma sequência. Que tipo de sequência é formada? É uma progressão aritmética, geométrica ou nenhuma delas? É possível calcular uma razão? Em, caso positivo, qual o valor dessa razão?

g. Quais as diferenças entre progressões aritméticas e progressões geométricas?

## Aspectos pedagógicos

- Durante a execução da tarefa, verifique como os alunos utilizam as informações do enunciado e do Triângulo de Pascal para a resolução dos problemas. É possível que não compreendam o que está sendo solicitado nos itens da atividade.
- Auxilie os alunos que apresentam dificuldades, relembrando as definições e resultados de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.
- No item e, é possível que o aluno não consiga identificar progressões geométricas no triângulo de Pascal. Nesse caso, reforce a ideia de necessidade de apenas 3 termos para a definição de uma PG.
- No item f, procure deixar claro o que significa linha do triângulo para que os alunos não tenham dificuldades na resolução do exercício. Enfatize que no caso da primeira linha a "soma" é o próprio número 1.

## Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Questões de avaliações de larga escala ou concurso | Cópias das questões. | Sugerimos nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno familiarize-se com questões cobradas em avaliações de larga escala, como Enem, vestibulares, concursos etc. | Individual | 20 minutos |

A seguir, oferecemos questões sobre prismas e cilindros.

## Folha de atividades – Questões

Nome da Escola: _____

Nome: _____

## Questão 1 (Unirio 2004)

Há exatamente um ano, José iniciou uma criação de coelhos e, durante este período, o número de coelhos duplicou a cada 3 meses. Hoje, preocupado com a falta de espaço para os coelhos, José vai vender parte dessa criação, de modo que apenas a quantidade inicial fique com ele. Se N0 denota a quantidade inicial de coelhos, então a quantidade a ser vendida é:

a. $15\ N_0$

b. $13\ N_0$

c. $12\ N_0$

d. $8\ N_0$

e. $7\ N_0$

## Questão 2 (Enem 2011

O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento mantém-se para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a. 38.000

b. 40.500

c. 41.000

d. 42.000

e. 48.000

## Aspectos pedagógicos

- Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas.
- Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.
- As questões objetivas de vestibulares ou Enem, em geral, têm em suas alternativas erradas sempre uma justificativa com erro plausível. Obviamente, isso não está evidente na alternativa. Desta forma, procure identificar o erro que gerou cada uma das alternativas e discuta com os alunos.

# Matemática Financeira

*André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenadora) e Luciane de Paiva Moura Coutinho*

## Introdução

Professor, na Unidade 27 do material do aluno foi trabalhado um assunto tão presente no nosso dia a dia, que é a Matemática Financeira. Essa parte da Matemática foi apresentada de forma bem simples e dinâmica, através de exemplos, envolvendo a nossa moeda corrente, o Real, e a diversas operações que a envolve (juros, descontos, faturamento,...).

Preparamos com muito carinho para você um material complementar para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes:

- Rever o conceito de porcentagem;
- Calcular porcentagem em diferentes situações;
- Calcular mentalmente porcentagem;
- Calcular aumentos e descontos;
- Calcular o lucro ou prejuízo em situações específicas;
- Calcular aumentos e descontos sucessivos.

A ideia que norteou a equipe durante o processo de produção deste material foi levar até você uma proposta que pudesse contribuir de forma significativa para a ampliação do seu trabalho pedagógico nas aulas de Matemática.

A nossa sugestão é que a primeira aula desta unidade inicie-se com uma atividade disparadora, e por isso, trazemos duas propostas. Em *Huguinho e Zezinho*, os alunos assistirão a um vídeo em que dois irmãos vão a um banco: um para investir e o outro para fazer um empréstimo. Em seguida, os alunos discutirão outras situações práticas em que a Matemática Financeira é utilizada. Na atividade *Explorando a Matemática Financeira,* os alunos serão estimulados ao uso do cálculo mental para resolução de porcentagens, provenientes de situações que envolvem Matemática Financeira.

Na Seção 1, você pode optar pela atividade *Estimando porcentagens*, onde os alunos deverão, num joguinho online, estimar a porcentagem da barra azul em relação ao todo, representado por uma barra branca. Poderá, ainda, convidar os alunos a resolver exercícios de porcentagem online e conferir suas respostas em Exercícios de porcentagem.

Para trabalharmos a Seção 2, sugerimos duas atividades: *O Sonho Dourado*, onde a ideia principal é promover uma discussão sobre termos da Matemática financeira que fazem parte do nosso cotidiano a partir de uma situação ilustrada num vídeo, e *Aumentos, Descontos e o Custo de Vida*, em que os alunos farão uma pesquisa de expressões cotidianas que estão presente na Matemática Financeira, além da análise e resolução de um exercício proposto. Observe que uma atividade desta seção complementa a outra.

Na Seção 3, temos o *Jogo dos aumentos e descontos sucessivos, onde os* alunos terão a oportunidade de exercitar os conhecimentos que construíram acerca de aumentos e/ou descontos sucessivos a partir desse jogo. Em *Aumentos sucessivos e a inflaç*ão é proposto o estudo dos aumentos sucessivos com base na análise de uma situação com dados reais da inflação anual no período de 1995 a 2006.

Já na Seção 4, uma das atividades é *Meu próprio negócio, onde* os alunos irão vivenciar uma situação em que são levados a montar seus próprios negócios. A outra é *Maquiagem de preços*, que cria condições para que os alunos utilizem os conhecimentos sobre porcentagens, aumentos e descontos sucessivos para interpretar uma situação problema inspirada na vida real.

Por fim, aconselhamos que a última aula seja dividida em dois momentos. O primeiro, dedicado a uma revisão geral do que foi trabalhado na unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o estudo. O segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos.

As sugestões que elaboramos estão descritas nas tabelas seguintes e detalhadas nos textos subsequentes.

# Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

| Disciplina | Volume | Módulo | Unidade | Estimativa de aulas para essa unidade |
|---|---|---|---|---|
| Matemática | 1 | 3 | 3 | 4 aulas de 2 tempos |

| Titulo da unidade | Tema |
|---|---|
| Matemática Financeira | Matemática Financeira |

| Objetivos da unidade |
|---|
| Rever o conceito de porcentagem; |
| Calcular porcentagem em diferentes situações; |
| Calcular mentalmente porcentagem. |
| Calcular aumentos e descontos; |
| Calcular o lucro ou prejuízo em situações específicas; |
| Calcular aumentos e descontos sucessivos. |

| Seções | Páginas no material do aluno |
|---|---|
| Para início de conversa... | 5 a 7 |
| Seção 1 – Revendo porcentagens | 8 a 14 |
| Seção 2 – Aumentos e Descontos | 14 a 15 |
| Seção 3 – Aumentos e Descontos Sucessivos | 16 a 17 |
| Seção 4 – Lucro e Prejuízo | 17 a 21 |
| O que perguntam por aí? | 25 a 27 |

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

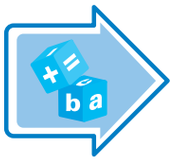
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

# Recursos e ideias para o Professor

## Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



### Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

### Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

### Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

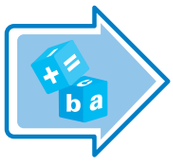
### Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

### Exercícios

Proposições de exercícios complementares

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Huguinho e Zezinho | Computador com acesso à Internet | Os alunos assistirão a um vídeo em que dois irmãos vão ao banco: um para investir e o outro para fazer um empréstimo. Em seguida, os alunos discutirão outras situações práticas em que a Matemática Financeira é utilizada. | O vídeo será assistido por toda turma. Em seguida, a discussão pode ser feita em grupo (sugestão de quatro alunos). | 40 minutos |
|  | Explorando a Matemática Financeira | Jornal, revista, folhetos etc. | Os alunos serão estimulados ao uso do cálculo mental para resolução de porcentagens, provenientes de situações que envolvem Matemática Financeira. | Esta atividade pode ser realizada em grupos de 3 a 4 alunos. | 40 minutos |

## Seção 1 – Revendo porcentagens

*Páginas no material do aluno*
**8 a 14**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Estimando porcentagens | Computadores com acesso à Internet / Data show | Os alunos deverão estimar a porcentagem da barra azul em relação ao todo, representado por uma barra branca. | Esta atividade pode ser realizada individualmente ou em dupla, dependendo da disponibilidade de computadores na escola. | 40 minutos. |

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Exercícios de Porcentagem | Computadores com acesso à Internet, Data show. | Os alunos deverão resolver exercícios de porcentagem online e conferir suas respostas. | Esta atividade pode ser realizada em grupos de 2 a 3 alunos, dependendo da disponibilidade de computadores na escola. | 40 minutos. |

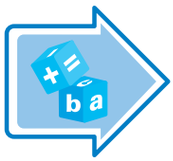
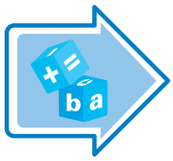
## **Seção 2** – Aumentos e descontos

*Páginas no material do aluno*
**14 a 15**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | O sonho dourado | Computador com acesso à Internet, Data show, dicionário. | A proposta da atividade é promover uma discussão sobre termos da Matemática Financeira que fazem parte do nosso cotidiano a partir de uma situação ilustrada num vídeo. | A atividade pode ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos. | 40 minutos |
| | Aumentos, descontos e o custo de vida | Computador com acesso à Internet, uma calculadora e uma ficha como a que segue no Pen-drive para cada grupo. | Pesquisa de expressões cotidianas que estão presente na Matemática Financeira, além da análise e resolução de um exercício proposto. | A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 3 alunos. | 40 minutos. |

## **Seção 3** – Aumentos e descontos sucessivos

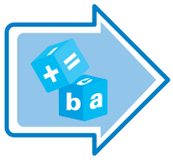
*Páginas no material do aluno*
**16 a 17**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Os aumentos sucessivos e a inflação | Calculadora e uma ficha como a que segue no Pendrive para cada grupo. | Nesta atividade, é proposto o estudo dos aumentos sucessivos com base na análise de uma situação com dados reais da inflação anual no período de 1995 a 2006. | A turma pode ser dividida em duplas. | 40 minutos |
|  | Jogo dos aumentos e descontos sucessivos | Calculadora e 10 folhas de tamanho A4 para cada grupo. | Os alunos terão oportunidade de exercitar os conhecimentos que construíram acerca de aumentos e/ou descontos sucessivos a partir de um jogo. | A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos. | 40 minutos. |

## **Seção 4** – Lucro e Prejuízo

*Páginas no material do aluno*
**17 a 22**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Meu próprio negócio | Computador com acesso à Internet, Calculadora e folhas de tamanho A4 para cada grupo. | A ideia desta atividade é que os alunos vivenciem uma situação em que são levados a montar seus próprios negócios. | A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos. | 40 minutos |

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Maquiagem de preços | Calculadora e ficha de atividades como as que seguem no Pendrive. | A atividade cria condições para que os alunos utilizem os conhecimentos sobre porcentagens, aumentos e descontos sucessivos para interpretar uma situação problema inspirada na vida real. | A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos. | 40 minutos. |

## Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Consolidação e registros de aprendizagem | Folha de atividades | Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática. | Individual | 10 minutos |
| | Questão dissertativa | Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora. | Questão dissertativa que complementa a seção "O que perguntam por aí?". | Individual | 10 minutos |

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Huguinho e Zezinho | Computador com acesso à Internet | Os alunos assistirão a um vídeo em que dois irmãos vão ao banco: um para investir e o outro para fazer um empréstimo. Em seguida, os alunos discutirão outras situações práticas em que a Matemática Financeira é utilizada. | O vídeo será assistido por toda turma. Em seguida, a discussão pode ser feita em grupo (sugestão de quatro alunos). | 40 minutos |

## Aspectos operacionais

Professor, esta atividade será composta de 5 etapas.

1ª etapa: Primeiro, exiba o vídeo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1118. Você também pode encontrá-lo no Pendrive.

**Fonte:** http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1118

2ª etapa: Após a exibição, identifique com a turma o tema central do vídeo. Verifique se a turma entendeu as diferentes situações em que os juros podem ser utilizados

3ª etapa: Peça para que a turma divida-se em grupo e pense em mais três situações práticas em que utilizamos Matemática Financeira. Deixe aproximadamente 20 minutos para esta tarefa.

4ª etapa: Por fim, peça para que cada grupo apresente para a turma as situações que foram pensadas.

5ª etapa: Mostre para a turma a importância do aprendizado desse tópico, devido sua grande aplicabilidade nos situações cotidianas.

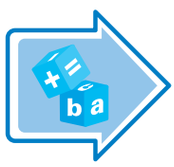
## Aspectos pedagógicos

Professor, o principal objetivo desta atividade é fazer com que os alunos percebam a importância da Matemática Financeira no dia a dia. Além disso, com o vídeo, pretende-se explicar de maneira ilustrativa a aplicação dos juros em diferentes situações.

Caso as duas primeiras etapas estendam-se além do esperado, uma alternativa é mandar para casa a tarefa de pensar uma situação que envolva Matemática financeira. Esta atividade pode ser feita individualmente. Nesse caso, peça apenas uma situação. Na aula seguinte, então, as etapas 4 e 5 deverão ser concretizadas da seguinte maneira: os alunos apresentam as situações pesquisadas e, em seguida, com esses dados, você consegue mostrar a importância do estudo da Matemática Financeira.

Caso os alunos não realizem a etapa 3 (principalmente se ela for mandada para casa ou caso seja feita em aula eles tenham dificuldade de pensar em situações sem pesquisa) você tem pelo menos duas alternativas: ou elenca para eles essas atividades em que utilizamos esse conteúdo: economia do país, compras e vendas de mercadorias e serviços, movimentações financeiras, tais como: empréstimos, aplicações, investimentos etc., ou você leva para sala de aula jornais, revistas ou até mesmo, utiliza a biblioteca ou o laboratório de informática para que os alunos realizem a pesquisa. Veja o que é mais conveniente e o que mais se adéqua à sua turma.

### Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Explorando a Matemática Financeira | Jornal, revista, folhetos etc. | Os alunos serão estimulados ao uso do cálculo mental para resolução de porcentagens, provenientes de situações que envolvem Matemática Financeira. | Esta atividade pode ser realizada em grupos de 3 a 4 alunos. | 40 minutos |

## Aspectos operacionais

Professor, selecione previamente e distribua na turma notícias, propagandas e folhetos que contenham situações relacionadas à Matemática Financeira e que envolvam porcentagem. Peça aos alunos que identifiquem e interpretem o significado dos números acompanhados do sinal %. Reserve aproximadamente 10 minutos para esta atividade.

Em seguida, ponha algumas contas básicas no quadro como os exemplos abaixo e peça para que os alunos resolvam através de cálculos mentais, registrando os resultados no caderno.

- 100% de 20 – Verifique se os alunos perceberam que 100% é o todo; portanto, 100% de 20 é 20;
- 50% de 60 – Verifique se os alunos perceberam que 50% é metade; portanto, 50% de 60 é 30;
- 25% de 60 – Verifique se os alunos perceberam que basta fazer a metade do cálculo feito anteriormente 50% de 60; portanto 25% de 60 é 30:2 que é 15. Ou então que 25% é 1/4 de 60; logo, 60:4 é 15;
- 10% de 70 – Verifique se os alunos perceberam que basta dividir por 10; portanto, 10% de 70 é 7;
- 200% de 8 – Verifique se os alunos perceberam que basta multiplicar por 2 (2 vezes o todo); portanto, 200% de 8 é 16;
- 1% de 500 – Verifique se os alunos perceberam que basta dividir por 100; portanto, 1% de 500 é 5;

Por fim, sugira aos os alunos verificarem seus resultados na máquina de calcular.

## Aspectos pedagógicos

Professor, o objetivo desta atividade é além de mostrar a relação dos problemas de Matemática Financeira com porcentagem, desenvolver nos alunos uma base intuitiva para a sistematização do conteúdo da primeira seção.

Nesta atividade, você também vai estimular o desenvolvimento do cálculo mental na resolução de porcentagens mais corriqueiras e pode implementar o uso da calculadora, o que será de extrema importância para os alunos uma vez que muitos não sabem utilizar esse instrumento para calcular porcentagem. Antes mesmo de iniciar a atividade, você pode começar ensinando o uso da calculadora.

Exemplo:

Utilizando a calculadora para calcular 60% de 80. Seguem duas sugestões:

1ª) Digitar 80 + sinal de multiplicação + 60 + sinal de porcentagem % + sinal de igual

2ª) Como 60% = 60:100 = 0,60, digitar 0,60 ou 0,6 + sinal de multiplicação + 80 + sinal de =

Caso você perceba que os alunos empenharam-se em resolver os cálculos mentais, você pode dificultar um pouco, fazendo com que os resultados não sejam números inteiros, como, por exemplo, 5% de 50 que é 2,5, mas que ainda é fácil de ser calculado, pois é a metade de 10% de 50, ou seja, 5:2 = 2,5 ou até mesmo pedindo porcentagens do tipo 38% de 40 em que o aluno faz 3 x 10% de 40 + 8 x 1% de 40 = 3x4 + 8 x 0,4 = 15,2 ou faz 40% de 40 – 2% de 40 = 4 x 4 - 2 x 0,4 = 15,2.

## **Seção 1** – Revendo porcentagens

*Páginas no material do aluno*
**8 a 14**

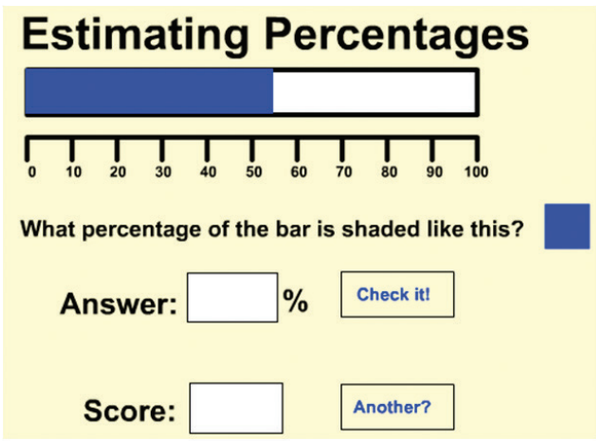
| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Estimando porcentagens | Computadores com acesso à Internet / Data show | Os alunos deverão estimar a porcentagem da barra azul em relação ao todo, representado por uma barra branca. | Esta atividade pode ser realizada individualmente ou em dupla, dependendo da disponibilidade de computadores na escola. | 40 minutos. |

## Aspectos operacionais

Professor, leve seus alunos para o laboratório de informática, caso sua escola o tenha disponível. Senão, você tem a opção de utilizar um notebook com o Data show na sala de aula.

Peça para que os alunos acessem o link http://www.atividadeseducativas.com.br/index.php?id=2303. Veja que se trata de uma atividade em inglês, mas de fácil compreensão. Se você achar necessário, converse com o professor de inglês para te ajudar nesta tarefa, o que é uma excelente oportunidade de interdisciplinaridade entre a Matemática e a língua estrangeira.

Nesta atividade, os alunos terão a possibilidade de estimar a porcentagem representada por um retângulo azul em relação ao todo, representado por um retângulo branco.




**Fonte:** http://www.atividadeseducativas.com.br/index.php?id=2303

Os alunos irão digitar sua resposta no espaço destinado a ANSWER, em seguida, poderão checar sua resposta em CHECK IT!. A pontuação pode ser acompanhada em SCORE. Clicando em ANOTHER?, você passa para a próxima porcentagem.

Depois da checagem, os alunos poderão encontrar três opções de resposta:

- SPOT ON – Acertou em cheio o resultado;
- VERY GOOD – Chegou bem próximo ao resultado;
- SORRY, TRY AGAIN – Tente novamente.

## Aspectos pedagógicos

Professor, essa é uma atividade interessante, pois além de permitir ao aluno uma "visão geométrica" da porcentagem, estimula-o a perceber que a porcentagem é a razão da parte pelo todo, o que torna o aprendizado conceitual efetivo e facilita o aluno a realizar os cálculos com mais segurança e tranquilidade, uma vez que ele entende o que é e o porquê está realizando o algoritmo.

Além disso, desenvolve no aluno o hábito da aproximação dos valores, às vezes, necessário e fundamental para a resolução de um determinado problema.

Outro viés desta atividade é um trabalho interdisciplinar com o professor de língua estrangeira. Uma sugestão é antes mesmo de dar o significado das palavras e das frases, o aluno pode tentar deduzir seus significados, através do contexto em que elas estão, que é um aspecto fundamental para o aprendizado de uma língua estrangeira.

### **Seção 1** – Revendo porcentagens

*Páginas no material do aluno*
**8 a 14**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Exercícios de Porcentagem | Computadores com acesso à Internet, Data show. | Os alunos deverão resolver exercícios de porcentagem online e conferir suas respostas. | Esta atividade pode ser realizada em grupos de 2 a 3 alunos, dependendo da disponibilidade de computadores na escola. | 40 minutos. |

## Aspectos operacionais

Professor, leve seus alunos para o laboratório de informática. Peça que os alunos acessem o link http://www.marciofelix2011.xpg.com.br/matematica/porcentagem/porcentagem.htm

Lá eles irão resolver online, questões propostas, envolvendo o conceito de porcentagem. Ao final, peça para que eles confiram o resultado.

## Aspectos pedagógicos

Professor, esta é uma atividade diferenciada para aplicação de exercícios de fixação, uma vez que eles colocarão as respostas no computador e o resultado será conferido online, diferente do que habitualmente se costuma fazer, utilizando caderno e quadro. É necessário uma introdução teórica e alguns exemplos resolvidos primeiro para que os alunos possam realizá-la com mais segurança. Oriente seus alunos que pode ser mais fácil resolver primeiro as questões no caderno, não é necessário fazer de cabeça e o objetivo da atividade é "chutar" um resultado qualquer.

Peça para que os alunos assinalem no caderno as questões que eles não acertaram, verificada após a conferência dos resultados, para que depois possa haver uma correção coletiva e que seja possível tirar as dúvidas que possivelmente ficaram. Para esta etapa, você pode pedir para que os grupos que acertaram a questão corrijam no quadro.

Caso a escola não tenha laboratório ou computadores suficientes, faça uma gincana, dividindo a turma em 2 ou 4 grandes grupos. Você pode utilizar seu próprio computador e um Data show para projetar as questões ou até mesmo passá-las no quadro. Dê um tempo para que os grupos resolvam. Peça para que os grupos entreguem as respostas para você e cheque-as, projetando para a turma. Para incentivá-los, o grupo vencedor poderá ganhar um brinde.

**Seção 2** – Aumentos e descontos

*Páginas no material do aluno* **14 a 15**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | O sonho dourado | Computador com acesso à Internet, Data show, dicionário. | A proposta da atividade é promover uma discussão sobre termos da Matemática Financeira que fazem parte do nosso cotidiano a partir de uma situação ilustrada num vídeo. | A atividade pode ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos. | 40 minutos |

## Aspectos operacionais

Professor, exiba o vídeo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1178 . Você também pode encontrá-lo no Pendrive.

**Fonte:** http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1178

Após a exibição do vídeo, divida os temas listados abaixo entre os grupos e solicite que eles pesquisem em um dicionário seus significados:

- Pagamento à vista;
- Pagamento parcelado;
- Juros;
- Juros simples;
- Juros compostos;
- Desconto;
- Acréscimo.

Na pesquisa, o grupo deverá responder a duas perguntas básicas: qual o significado do termo e em quais situações é utilizado. Peça para que os alunos apresentem o resultado das suas pesquisas.

Por fim, faça uma discussão com a turma sobre os prós e contras das compras feitas à vista ou a prazo.

## Aspectos pedagógicos

Professor, esta atividade permite uma discussão inicial de extrema importância, principalmente na atual conjuntura, com o crédito e o crediário tão facilitados.

É importante discutir com os alunos a questão do consumo responsável e das possíveis armadilhas das parcelas, uma vez que inúmeras pequenas parcelas juntas podem representar um grande montante. Além disso, atente aos alunos que parcelar em um longo período necessita de uma certa estabilidade, uma vez que você estará se comprometendo a pagar um determinado valor por um tempo.

É claro que você, professor, pode acrescentar outros temas para serem pesquisados, esses acima citados são apenas sugestões.

Na hora da discussão final, após a apresentação dos grupos, certifique-se que os temas centrais foram falados:

- Pagamento à vista: aquele realizado com dinheiro ou por meio de transferência à vista.
- Pagamento a prazo: aquele a ser pago em condições negociadas e que deve ocorrer em um determinado período de tempo.
- Juros: Podem ser provenientes de rendimento de uma aplicação financeira, do atraso no pagamento de uma prestação ou a quantia paga pelo empréstimo de um capital.
- Juros Simples: É o juro calculado unicamente sobre o capital inicial, ou seja, não incide sobre os juros acumulados. Atualmente, esse cálculo não é muito utilizado pelo sistema financeiro.
- Juros Compostos: Passam a fazer parte do capital, fazendo com que os novos juros devidos apliquem-se também sobre os anteriores. Praticamente, todas as atividades financeiras utilizam esse tipo de cálculo.
- Acréscimo: É a parte que foi aumentada ou acrescida ao todo.
- Desconto: É a diminuição do valor, o abatimento.

Para a discussão sobre as vantagens e desvantagens das compras à vista ou a prazo, você pode sugerir uma segunda tarefa ao grupo:

Peça para que eles escolham um produto (produtos diferentes por grupo ou então mesmo produto em diferentes lojas) em uma determinada loja e verifiquem as condições de pagamento à vista ou a prazo. Os alunos deverão apresentar as condições e a turma discutir sobre os prós e contras das duas situações.

## **Seção 2** – Aumentos e descontos

*Páginas no material do aluno*
**14 a 15**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Aumentos, descontos e o custo de vida | Computador com acesso à Internet, uma calculadora e uma ficha como a que segue no Pen-drive para cada grupo. | Pesquisa de expressões cotidianas que estão presente na Matemática Financeira, além da análise e resolução de um exercício proposto. | A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 3 alunos. | 40 minutos. |

## Aspectos operacionais

A Matemática Financeira ajuda os alunos a compreenderem muitas informações sobre a economia brasileira que são noticiadas diariamente na mídia. Para isto, existe um vocabulário mínimo específico que eles precisam adquirir. As situações do cotidiano, o fato de assistirem a telejornais ou terem acesso a jornais impressos, na maioria das vezes, confere-lhes este vocabulário. Entretanto, nunca é demais fazer uma revisão do significado de expressões como "custo de vida", "poder aquisitivo". "poder de compra", "reajuste salarial", "aumento salarial" e "inflação". Nossa sugestão como primeira etapa desta atividade é que você proponha aos seus alunos (já divididos em grupos) que pesquisem na Internet o significado destas expressões. Em seguida, peça-lhes que exponham os dados da pesquisa e reflitam sobre a importância de acompanharmos as informações sobre a economia brasileira, divulgadas diariamente.

A segunda etapa da atividade corresponde à análise e resolução da situação-problema proposta na ficha. A questão central aí é: houve aumento, reajuste ou redução salarial? Quando os alunos concluírem, peça-lhes que expliquem os raciocínios que empregaram. Procure valorizar as formas de pensamento deles e incentive o uso da calculadora!

## Aspectos pedagógicos

Na pesquisa sobre o significado das expressões, é importante que os alunos percebam que poder aquisitivo e poder de compra são sinônimos e que, contudo, reajuste salarial e aumento salarial não o são. O fato de um salário ser reajustado não significa que ele tenha sido aumentado. O reajuste salarial faz apenas com que a perda do poder aquisitivo em decorrência da inflação seja reparada, enquanto que o aumento salarial eleva de fato o poder de com-

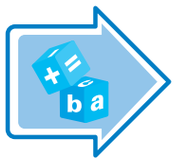
pra do trabalhador. Estas reflexões sobre significados podem acabar lhe conduzindo a uma parceria com o professor de Língua Portuguesa. Não hesite! Esta parceria pode render frutos generosos para as aulas de Matemática.

A situação-problema proposta na ficha é uma tentativa de mostrar em termos práticos a diferença entre reajuste e aumento salarial. Além disso, ela mostra como as porcentagens podem ser um instrumento útil nesta distinção. Perceba que, com o salário de R$540,00, era possível para o trabalhador comprar 180 kg de arroz e, com o novo salário de R$600,00 e o novo preço do arroz, ele só consegue comprar 150 kg. Tomando o arroz como referência, podemos dizer que o poder de compra do trabalhador foi diminuído e que o mesmo aconteceu com seu salário, embora em termos absolutos tenha aumentado. Vale verificar junto aos alunos que o cálculo dos percentuais de aumento do salário e do arroz nos permitiria chegar a esta conclusão mais rapidamente. De R$540,00 para R$600,00, o salário teve um aumento de aproximadamente de 11,1% enquanto que, de R$3,00 para R$4,00, o arroz teve um aumento de aproximadamente de 33,3%. O fato de o percentual de aumento do arroz ser maior que o percentual de aumento do salário já nos assegura a perda salarial.

É evidente que o poder aquisitivo de um salário não é medido, tendo-se por base apenas um alimento. O custo de vida engloba outros alimentos e serviços e é ele que deve ser levado em consideração. Isto deve ser esclarecido para a turma. Porém, nossa experiência com os alunos tem mostrado que a análise deste tipo de situação tem servido como alerta para que não sejam reféns de campanhas salariais enganosas.

## **Seção 3** – Aumentos e descontos sucessivos

*Páginas no material do aluno*
**16 a 17**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Os aumentos sucessivos e a inflação | Calculadora e uma ficha como a que segue no Pendrive para cada grupo. | Nesta atividade, é proposto o estudo dos aumentos sucessivos com base na análise de uma situação com dados reais da inflação anual no período de 1995 a 2006. | A turma pode ser dividida em duplas. | 40 minutos |

## Aspectos operacionais

Nesta atividade, propomos o estudo dos aumentos sucessivos com base na análise de uma situação com dados reais da inflação anual no período de 1995 a 2006. Para iniciá-la, professor, é interessante que você estabeleça um diálogo com a sua turma sobre o que vem a ser a inflação, suas causas, suas consequências, suas implicações diretas em nossas vidas.

Dando continuidade, você pode distribuir as fichas entre as duplas e pedir-lhes que, com o auxílio da calculadora, tentem responder às questões ali presentes. Ao final, peça-lhes que exponham suas soluções e as estratégias que empregaram. Não deixe de aproveitar a oportunidade para questionar: Para sabermos o percentual do reajuste salarial de um ano para outro, que cálculo devemos fazer? E quando o período for maior que um ano? Que quantias devem ser levadas em consideração no cálculo dos reajustes?

Perceba que esta é uma situação que requer o uso de uma calculadora. Se for preciso, peça com antecedência aos seus alunos que as tragam de casa ou permita o uso deste dispositivo no celular.

## Aspectos pedagógicos

Professor, antes mesmo de estarmos ensinando Matemática, numa atividade como esta, estamos contribuindo para que o nosso aluno atue socialmente como cidadão consciente de seus direitos. O diálogo inicial sobre a inflação pode ser aprofundado por meio de pesquisas na Internet sobre o histórico da inflação no país, os governos e suas medidas que provocaram altas e baixas na inflação e as condutas adequadas de um consumidor para forçar a baixa dos preços e, consequentemente, da inflação. O aprofundamento do debate vai permitir ainda a integração da Matemática com outras disciplinas, como a História e a Geografia, e vai lhe permitir mostrar aos alunos a importância dos conhecimentos matemáticos como ferramentas para o exercício da cidadania.

A ideia central que deve ser reforçada na análise da situação mostrada na ficha é a de que a inflação total de 2006 a 2010 não é a soma das inflações de cada ano deste período. Nossos alunos precisam compreender que temos "inflação sobre inflação" e, para isso, os cálculos para se reajustar R$10000,00 podem ser úteis. Vejamos:

Se no início de 2006, a pessoa tem R$10000,00, no final, esta quantia terá de ser reajustada em 3,14%, e ela passa a ter 10000 x 1,0314 = 10314,00.

Se no início de 2007, a pessoa tem R$10314,00, no final, esta quantia terá de ser reajustada em 4,46%, e ela passa a ter 10314 x 1,0446 = 10774,00.

Se no início de 2008, a pessoa tem R$10774,00, no final, esta quantia terá de ser reajustada em 5,90%, e ela passa a ter 10774 x 1,059 = 11409,67.

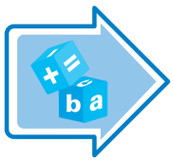
Se no início de 2009, a pessoa tem R$11409,67, no final, esta quantia terá de ser reajustada em 4,31%, e ela passa a ter 11409,67 x 1,0431 = 11901,43.

Se no início de 2010, a pessoa tem R$11901,43, no final, esta quantia terá de ser reajustada em 5,91%, e ela passa a ter 11901,43 x 1,0591 = 12604,80.

Assim, do início de 2006 para o final de 2010, R$10000,00 precisam ser reajustados para R$12604,80, o que corresponde a um reajuste de 26,048% e é maior que a soma 3,14% + 4,46% + 5,09% + 4,31% + 5,91%.

## **Seção 3** – Aumentos e descontos sucessivos

*Páginas no material do aluno*
**16 a 17**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Jogo dos aumentos e descontos sucessivos | Calculadora e 10 folhas de tamanho A4 para cada grupo. | Os alunos terão oportunidade de exercitar os conhecimentos que construíram acerca de aumentos e/ou descontos sucessivos a partir de um jogo. | A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos. | 40 minutos. |

## Aspectos Operacionais

Nesta atividade, professor, seus alunos terão oportunidade de exercitar os conhecimentos que construíram acerca de aumentos e/ou descontos sucessivos. Para começar, você deve organizá-los em grupos com 4 ou 5 componentes. Você pode usar vários critérios nesta organização: ela pode ser aleatória, pode levar em conta as afinidades pessoais entre os alunos ou os níveis de compreensão sobre o assunto em que cada um se encontra. Entretanto, nossa sugestão é que você procure colocar num mesmo grupo alunos que já dominam plenamente o assunto e alunos que ainda apresentam algumas dificuldades. Depois disso, você pode distribuir as 10 folhas de papel A4 para cada grupo e pedir que coloquem suas calculadoras sobre a mesa. Perceba que, se for necessário, você deve solicitar previamente aos alunos que tragam as calculadoras ou permitir o uso deste aplicativo no celular. Finalmente, explique as regras que elencamos a seguir e inicie o jogo.

Regra 1: A professora "canta" em voz alta uma sentença a ser completada pelos grupos;

Regra 2: Os grupos calculam o percentual que completa a sentença, escrevem-no na folha de papel A4 e um representante de cada grupo levanta a folha para que a professora veja;

Regra 3: Ganha a rodada o grupo que tiver escrito o percentual certo e tiver apresentado antes de todos os outros grupos;

Regra 4: Se houver empate, todos os grupos empatados pontuam;

Regra 5: O jogo é composto por 10 rodadas cujas sentenças são:

a. Dois aumentos sucessivos de 20% e 30% correspondem a um único aumento de _____.

b. Dois aumentos sucessivos de 10% e 40% correspondem a um único aumento de _____.

c. Dois aumentos sucessivos de 2% e 4% correspondem a um único aumento de _____.

d. Três aumentos sucessivos de 10% cada um correspondem a um único aumento de _____.

e. Dois descontos sucessivos de 5% cada um correspondem a um único desconto de _____.

f. Dois descontos sucessivos de 15% e 20% correspondem a um único desconto de _____.

g. Três descontos sucessivos de 20% cada um correspondem a um único desconto de _____.

h. Um desconto de 10% seguido de um aumento de 30% corresponde a um único aumento de _____.

i. Um aumento de 10% seguido de um desconto de 30% corresponde a um único desconto de _____.

j. Cinco aumentos sucessivos de 20% cada um correspondem a um único aumento de _____.

Regra 6: Será o vencedor o grupo que tiver acertado o maior número de rodadas.

## Aspectos Pedagógicos

Professor, como você já deve ter observado, estamos propondo um jogo que envolve, entre outras coisas, agilidade na compreensão da situação e na utilização da calculadora. É por isso que sugerimos uma organização dos grupos que leve em consideração os conhecimentos dos alunos, procurando nivelá-los, ou seja, procurando evitar a formação de um grupo "mais forte" em relação aos outros. Uma discrepância muito grande entre os grupos pode causar o desinteresse dos alunos. Além disso, quando estão num mesmo grupo, um aluno que domina plenamente o assunto e um aluno que ainda apresenta dificuldades, um pode ajudar o outro e ambos avançam na construção dos conceitos em questão.

Os resultados de cada item são, na ordem em que estão elencados, 56%, 54%, 6.08%, 33.1%, 9.75%, 32%, 48.8%, 17%, 23% e 148,8%. É importante observar que, para obtê-los, são necessários cálculos que nem sempre podem ser feitos mentalmente e que, feitos da maneira tradicional (armando a conta), podem desencadear processos muito lentos. Neste sentido, a calculadora apresenta-se como um componente fundamental para dinamizar o jogo e saber utilizá-la é um pré-requisito. Assim é aconselhável que, antes de dar início à atividade, você converse com a turma sobre as ferramentas da calculadora e o modo decimal de representar os aumentos e descontos. Na verdade, se você já estiver favorecendo o uso da calculadora desde o início do estudo das porcentagens, basta fazer um resgate destas ferramentas que seus alunos certamente já estarão dominando. Enfatizamos aqui o uso da tecla "=" quando se deseja efetuar sucessivas multiplicações em que os fatores se repetem.

Embora os enunciados das sentenças sejam semelhantes, nossa experiência com alunos do Ensino Médio revela-nos dificuldades distintas. A principal delas ocorre na escrita dos aumentos percentuais sob a forma decimal. Um equívoco frequente ocorre quando o aumento corresponde a um percentual inferior a 10%, pois alguns alunos insistem em escrever o taxa percentual que tem apenas um algarismo na ordem dos décimos, por exemplo, quando pretendem efetuar um aumento de 5%, multiplicam por 1,5 em vez de 1,05. Para a superação desta dificuldade, é aconselhável que se invista também na representação das porcentagens sob a forma de frações.

## **Seção 4** – Lucro e Prejuízo

*Páginas no material do aluno*
**17 a 22**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Meu próprio negócio | Computador com acesso à Internet, Calculadora e folhas de tamanho A4 para cada grupo. | A ideia desta atividade é que os alunos vivenciem uma situação em que são levados a montar seus próprios negócios. | A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos. | 40 minutos |

## Aspectos Operacionais

A ideia desta atividade, professor, é que os alunos vivenciem uma situação em que são levados a montar seus próprios negócios. Os cálculos de aumentos e descontos percentuais se farão presentes quando os grupos tiverem de refletir sobre lucros e prejuízos possíveis nos negócios que montarem.

Para começar, você pode dividir a turma em grupos com 4 ou 5 componentes e, neste caso, é mais aconselhável que o critério para a formação dos grupos seja a afinidade pessoal. Afinal de contas, como é possível montar um negócio com pessoas com quem não temos afinidades?

Depois que os grupos estiverem formados, proponha-lhes a criação de um negócio. Você pode sugerir a produção e venda de bombons ou sorvetes, a confecção e venda de peças de roupa ou de bijuterias ou até mesmo de pipas. Na verdade, a escolha do "ramo" do negócio pode ficar a cargo de cada grupo, que deverá se valer da experiência de seus componentes neste processo. O importante é que, no cálculo dos custos do negócio, apenas os gastos com matéria prima sejam levados em consideração. Isto tornará mais fácil para os grupos responder às questões que se seguem. Não deixe de levantá-las, enquanto eles estiverem tomando suas decisões:

– Que produto o grupo resolveu produzir para vender?

– Quantas unidades irão produzir?

– Qual é o gasto com matéria-prima para esta produção?

– Qual é o preço de custo de cada unidade?

– A fim de ter um lucro de 100% sobre o preço de custo, por quanto o grupo deve vender cada unidade?

– A fim de ter um lucro de 50% sobre o preço de custo, por quanto o grupo deve vender cada unidade?

– A fim de ter um lucro de 38% sobre o preço de custo, por quanto o grupo deve vender cada unidade?

– Se o produto estiver sendo vendido com lucro de 100% sobre o preço de custo e o grupo oferecer um desconto de 5% para pagamentos à vista, qual será o novo percentual de lucro sobre o preço de custo do grupo?

No final da aula, reserve um tempo para que os grupos possam expor os negócios que montaram, suas vantagens e desvantagens,

## Aspectos Pedagógicos

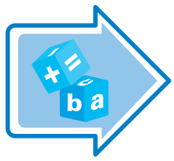
Professor, nesta atividade, os alunos terão oportunidade de mostrar os conhecimentos que adquiriram no dia a dia ou no trabalho sobre comércio, aumentos e descontos percentuais. Certamente, trabalhando com turmas de Educação de Jovens e Adultos, você encontrará alunos que têm ou já tiveram seus negócios. Procure ouvi-los. Crie um espaço para que eles possam expor o que sabem sobre esse assunto para os colegas e peça-lhes que expliquem os procedimentos que empregavam nos cálculos de aumentos e descontos. Você perceberá quantos conhecimentos matemáticos eles construíram nessa lida. Seu desafio é estabelecer elos entre os procedimentos deles para o cálculo dos percentuais e aqueles que você pretende ensinar.

As quatro últimas questões que elencamos anteriormente foram elaboradas para ajudar nessa tarefa. Observe que os preços para os lucros de 100% e 50% podem ser calculados mentalmente, mas quando trabalhamos com 38%, por exemplo, a questão complica-se. É aí que você pode convencer os alunos a estudarem novos procedimentos para o cálculo das porcentagens. Reflita sobre a importância de obtermos inicialmente que quantia corresponde a 1% do preço de custo. Conhecendo esta quantia, podemos calcular a quantia correspondente a qualquer outro percentual, basta multiplicá-la pelo número do percentual desejado. Assim, para calcularmos 38% do preço de custo, dividimos seu valor por 100, o que nos fornece 1% dele, e, em seguida, multiplicamos o resultado por 38. Como dividir uma quantia por 100 e depois multiplicar o resultado por 38 fornece o mesmo número que multiplicá-la por 38 e depois dividir o resultado por 100, para calcularmos 38% de uma quantia, basta multiplicá-la por 0,38. Do mesmo modo, se quisermos obter diretamente o preço de venda, ou seja, o preço de custo acrescido dos 38% de lucro desejados, basta multiplicarmos o preço de custo por 1,38. Como 1,38 = 1 + 0,38, ao multiplicarmos por 1 estamos tomando o preço de custo integralmente e, ao somarmos seu produto por 0,38, já estamos acrescentando os 38% de lucro. Note que, se, em vez de um lucro de 38%, estivéssemos falando de um prejuízo de 38%, para obtermos o preço, teríamos de multiplicar por 1 – 38%, ou seja, 0,62.

A única preocupação passa a ser, então, identificar claramente o valor a que os percentuais se referem. A última questão favorece este tipo de reflexão. Para isso, você deve salientar que o lucro de 100% foi sobre o preço de custo, mas o desconto de 5% será sobre o preço de venda. Assim, precisamos multiplicar o primeiro por 2 (1 + 100%) e o segundo por 0,95 (1 – 5%), o que equivale a multiplicar o primeiro por 1,9 (2 x 0,95) e nos leva a concluir que esta sucessão de aumento e desconto corresponde a um aumento único de 90% sobre o preço de custo. O entendimento dessas ações agiliza, inclusive, o uso da calculadora. Procure incentivar seus alunos a usá-las e não se surpreenda se, ao final da aula, alguns deles planejarem abrir novos negócios!

## **Seção 4** – Lucro e Prejuízo

*Páginas no material do aluno*
**17 a 22**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Maquiagem de preços | Calculadora e ficha de atividades como as que seguem no Pendrive. | A atividade cria condições para que os alunos utilizem os conhecimentos sobre porcentagens, aumentos e descontos sucessivos para interpretar uma situação problema inspirada na vida real. | A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos. | 40 minutos. |

## Aspectos Operacionais

Professor, esta atividade foi criada, tendo-se por base uma reportagem sobre "maquiagem de preço" publicada pelo jornal Estado de Minas, em 15 de maio deste ano. Nela procuramos criar condições para que os alunos utilizem os conhecimentos sobre porcentagens, aumentos e descontos sucessivos para interpretar uma situação problema inspirada na vida real. Todo cidadão crítico e consciente de seus direitos como consumidor precisa atentar para situações deste tipo.

Para iniciá-la, acreditamos ser interessante que você faça comentários e/ou promova um debate sobre o custo de vida, o aumento frequente dos preços dos produtos que consumimos diariamente, os direitos do consumidor e o órgão responsável por verificar, e fazer com que eles sejam respeitados (PROCON).

Depois do debate, você pode distribuir uma ficha como a que segue em anexo para cada dupla de alunos. Peça-lhes que a leiam atentamente e tentem responder a todas as perguntas propostas. Quando eles concluírem, dê oportunidade para que exponham suas soluções e as estratégias que empregaram. Mais uma vez, aconselhamos o uso da calculadora para que o foco mantenha-se na análise da situação e não nos procedimentos de cálculo.

## Aspectos Pedagógicos

Falar em consumo de um modo geral, professor, inquestionavelmente, demanda alguns conhecimentos de economia, que, no Ensino Médio, remete-nos à Geografia. E falar especificamente sobre consumo de refrigerantes remete-nos à discussão sobre a presença das multinacionais fabricantes destes produtos no Brasil e sobre saúde, uma vez que, se este consumo for exagerado, poderá causar danos à saúde da população. Assim, temos, mais uma

vez, uma ótima oportunidade para a realização de um trabalho interdisciplinar e é aconselhável que você convide os professores de Geografia e Biologia a participar da sua aula. Se isso não for possível, você pode também lhes sugerir que reservem ao menos uma pequena parte de suas aulas para abordarem estes temas.

Do ponto de vista matemático, para que seus alunos acompanhem e consigam realizar esta atividade, será necessário que eles calculem percentuais, efetuem divisões e interpretem os resultados que obtiverem. No caso dos percentuais, por exemplo, eles precisam compreender que a redução em 100 ml de uma embalagem que continha inicialmente 600 ml corresponde a uma redução de aproximadamente 16,7%, entretanto, para que uma embalagem de 500 ml volte a ter 600 ml, devemos aumentar o seu conteúdo em 20%. Isto porque os percentuais são calculados, levando-se em consideração a quantidade de refrigerante presente na embalagem no momento do cálculo. Aqui sugerimos que você não só reforce esta ideia como, inclusive, generalize-a em parceria com a turma. Afinal, se descontarmos um percentual de um valor inicial, para voltarmos a este valor, o percentual do aumento que devemos dar é necessariamente maior do que o percentual descontado. É um equívoco muito frequente entre os alunos acreditar que estes percentuais são iguais.

Com relação aos cálculos propostos na atividade, não podemos deixar de comentar os valores que os alunos encontrarão para o preço do mililitro em cada tipo de embalagem. Na embalagem de 500 ml, o mililitro custa R$0,006 e, na de 600 ml, custa R$0,005. Estes valores podem inicialmente causar estranhamento para eles uma vez que se trata de décimos do centavo ou milésimos do real e não dispomos de moedas para representá-los. Uma alternativa para minimizar este possível desconforto é pedir que calculem o preço de 10 ml ou 100 ml em cada embalagem. Estas mudanças poderão tornar a situação mais significativa para toda a turma. Se for necessário, para cada embalagem, desenhe os copos de 100 ml que poderiam encher, peça-lhes que se imaginem com as garrafas nas mãos, enchendo os copos, ou seja, procurem viver a situação. Certamente, concluirão mais facilmente as operações que deverão realizar!

## Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Consolidação e registros de aprendizagem | Folha de atividades | Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática. | Individual | 10 minutos |

## Aspectos operacionais

Nossa sugestão é que você utilize o último tempo de aula desta unidade para a consolidação e avaliação do conteúdo estudado junto à turma. Esta etapa pode estar articulada à seção "Veja ainda", disponível na p. 29 do material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade.

Para complementar as questões que você poderá propor aos alunos, apresentamos, na folha de atividades, algumas questões que têm por objetivo a avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas.

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?

2. O que você entende por juros? As taxas observadas no seu dia a dia, você as julga justas? Por quê?

3. Um produto vendido com o valor de R$ 12,40 está com desconto de 20% sobre seu valor original. Quanto, originalmente, custa este produto?

4. Considere as seguintes situações:

   i. Uma confeitaria oferece descontos de 10% em pedidos acima de 1000 reais.

   ii. Uma construtora oferece desconto de 1% em qualquer dos seus imóveis, cujo valor mínimo é de 150.000 reais.

Responda aos itens:

   a. Você, rapidamente, percebe que os descontos aplicados nas situações são bastante diferentes. Avalie esta situação, tentando encontrar uma explicação para disparidade entre os descontos.

   b. Imagine que uma empresa tenha contratado o serviço de buffet da confeitaria para realização da festa comemorativa e que o valor da festa tenha sido orçado em 200.000 reais. Discuta a situação, tendo em mente que alguém deseja adquirir um imóvel de 200.000 reais.

5. Apresente uma situação no seu dia a dia em que é fundamental o conhecimento básico sobre Matemática Financeira. Analise a tabela, dizendo se o panorama econômico deste ano é favorável relativamente ao ano passado (2012). Explique.

| Automóveis | Alíquota Normal | Alíquota Reduzida | Benefício para 2013 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Janeiro a Março | Abril a Junho |
| Até 1000 cc | 7% | 0% | 2% | 3,5% |
| De 1000cc até 2000cc | | | | |
| FLEX | 11% | 5,5% | 7% | 9% |
| Gasolina | 13% | 6,5% | 8% | 10% |
| Utilitários | 8% | 1% | 2% | 3% |
| Caminhões | 5% | 0% | 0% | 0% |

## Aspectos pedagógicos

Certifique-se de fazer com que os resultados deste momento de avaliação indiquem os pontos em que os alunos ainda não conseguiram êxito no aprendizado. Parabenize e elogie o quanto for necessário, para que este momento de avaliação torne-se agradável.

No item 1, espera-se que o aluno responda Matemática Financeira.

Para responder o item 2, será necessário que o aluno consulte o material a ele proposto, e de lá, ele retire a definição de juros. Além disso, discuta com o grupo sobre o fato de o Brasil ser um país onde, reconhecidamente, praticam-se taxas de juros entre as maiores do mundo. Isto significa que devemos trabalhar muito mais horas, para obter o mesmo bem, se comparado com uma pessoa trabalhando num país que pratica taxas mais baixas. Portanto, é um péssimo negócio para os consumidores.

No item 3, mostre aos alunos que se considerarmos P como sendo o preço original do produto, temos que 80% P = 0,8 P = 12,40 reais, donde P = 15,5 reais.

Já no item 4, você pode refletir junto com o grupo da seguinte forma: uma encomenda no valor de 200.000 reais gera um desconto de 20.000 reais na contratação do buffet, ou seja, o valor pago é de 180.000 reais, enquanto que um apartamento de 200.000 reais teria um desconto de 1800 reais, ou seja, um valor final de 198.200 reais. Para o mesmo volume em vendas, é melhor negócio para a construtora. A diferença entre os percentuais aplicados advém da frequência de vendas e do valor praticado em cada um dos negócios.

E para fechar esta atividade, no item 5, os alunos podem citar como exemplo o financiamento de automotores, a prática de operações bancária, a correção de aluguéis etc. Faça uma análise junto com eles da tabela, mostrando que ainda prevalecem alíquotas com redução de valor, se comparadas às alíquotas originais, no entanto, houve aumento significativo. Por exemplo, para carros flex, a alíquota vai de 5,5% no ano de 2012 foi elevada para 9% em junho de 2013. Isto, certamente, é motivo para desaceleração do consumo, já que o preço final será maior.

Ao final de seus registros de avaliação, compartilhe as informações com os alunos. É bom alertá-los de que se trata de um contexto bastante interpretativo e amplamente usado na vida de todos nós. Não deixe de compartilhar as informações entre os alunos. Se possível, indique exercícios e atividades para que as dúvidas e erros possam ser devidamente contornados.

## Folha de atividades – Consolidação e registros de aprendizagem

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 7 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder as questões a seguir:

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?

_____

_____

2. O que você entende por juros? As taxas observadas no seu dia a dia, você as julga justas? Por quê?

_____

_____

_____

3. Um produto vendido com o valor de R$ 12,40 está com desconto de 20% sobre seu valor original. Quanto, originalmente, custa este produto?

_____

_____

_____

4. Considere as seguintes situações:

   iii. Uma confeitaria oferece descontos de 10% em pedidos acima de 1000 reais.

   iii. Uma construtora oferece desconto de 1% em qualquer dos seus imóveis, cujo valor mínimo é de 150.000 reais.

Responda aos itens:

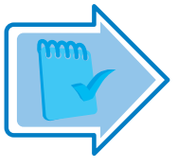
   a. Você, rapidamente, percebe que os descontos aplicados nas situações são bastante diferentes. Avalie esta situação, tentando encontrar uma explicação para disparidade entre os descontos.

   b. Imagine que uma empresa tenha contratado o serviço de buffet da confeitaria para realização da festa comemorativa, e que o valor da festa tenha sido orçado em 200.000 reais. Discuta a situação, tendo em mente que alguém deseja adquirir um imóvel de 200.000 reais.

5. Apresente uma situação no seu dia a dia em que é fundamental o conhecimento básico sobre Matemática Financeira. Analise a tabela, dizendo se o panorama econômico deste ano é favorável relativamente ao ano passado (2012). Explique.

| Automóveis | Alíquota Normal | Alíquota Reduzida | Benefício para 2013 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Janeiro a Março | Abril a Junho |
| Até 1000 cc | 7% | 0% | 2% | 3,5% |
| De 1000cc até 2000cc | | | | |
| FLEX | 11% | 5,5% | 7% | 9% |
| Gasolina | 13% | 6,5% | 8% | 10% |
| Utilitários | 8% | 1% | 2% | 3% |
| Caminhões | 5% | 0% | 0% | 0% |

## Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Questão dissertativa | Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora. | Questão dissertativa que complementa a seção "O que perguntam por aí?". | Individual | 10 minutos |

## Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão dissertativa que complementa o que foi proposto na seção *"O que perguntam por aí?", p. 25 a 27 d*o material do aluno. Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

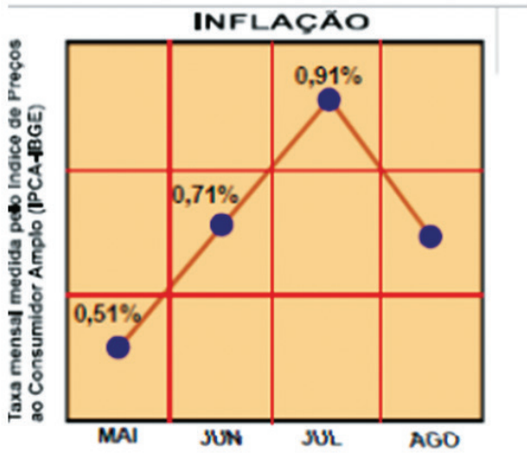
Ao trabalhar tal questão com os alunos, esperamos que haja compreensão de uma situação real, relacionada ao conceito de percentagem e fazer uma análise um pouco mais profunda de fatos pertinentes ao contexto.

### Questão 1

Uma loja resolve remarcar o preço de um produto em 60%. Um mês depois, a loja resolve aplicar um desconto no referido produto. Se a loja não quer ter prejuízo neste item, qual o desconto máximo pode ser dado sobre este produto?

### Questão 2

As taxas mensais de inflação nos meses de maio, junho, julho e agosto de 2004 estão representadas no gráfico a seguir:




a. Indique se a taxa de inflação de agosto foi inferior, igual ou superior à do mês de julho.

b. De julho para agosto, a variação da taxa foi de 24% da taxa de julho. Determine a taxa de inflação de agosto. (Não arredonde a sua resposta.)

## Aspectos pedagógicos

Você deve alertar seus alunos que uma oportunidade de construir conhecimentos é fazê-lo através de problemas que introduzam novos conceitos. E este é o caso!

Na questão 1, primeiro, sugere-se que você diga aos seus alunos que é bom, para fixar ideias, supor que o produto custe, digamos, 100 reais. A partir daí, mande-os aplicar o aumento sugerido e a seguir, diga a eles que apliquem um desconto. Qual desconto? Peça-lhes que experimentem descontos diversos! Desta forma, eles podem intuir em qual intervalo tal descontos deve estar, ou mesmo, em caso de sorte, determinar tal desconto. A partir daí, tente induzir uma abordagem ligeiramente mais algébrica, como apresentada no gabarito que segue.

A questão 2 trata de um problema que não trará grandes complicações. Busque alertá-los de que a informação pedida está contida no gráfico, bastando para isto sua leitura de modo adequado. Os cálculos são diretos e simples. Relembre-lhes, se julgar necessário, de como calcular "percentagem de percentagem".

Ressalte a importância do assunto estudado, mostrando a abrangência e a aplicabilidade.

## Folha de atividades – Questão dissertativa

Nome da Escola: _____

Nome: _____

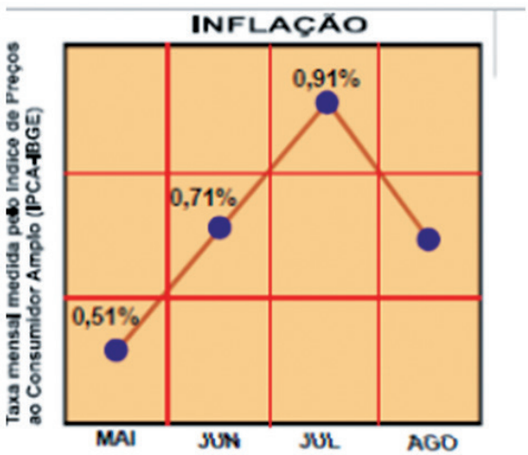
*Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.*

## Questão 1

Uma loja resolve remarcar o preço de um produto em 60%. Um mês depois, a loja resolve aplicar um desconto no referido produto. Se a loja não quer ter prejuízo neste item, qual o desconto máximo pode ser dado sobre este produto?

## Questão 2

As taxas mensais de inflação nos meses de maio, junho, julho e agosto de 2004 estão representadas no gráfico a seguir:



a. Indique se a taxa de inflação de agosto foi inferior, igual ou superior à do mês de julho.

b. De julho para agosto, a variação da taxa foi de 24% da taxa de julho. Determine a taxa de inflação de agosto. (Não arredonde a sua resposta.)

## Gabarito

### Questão dissertativa

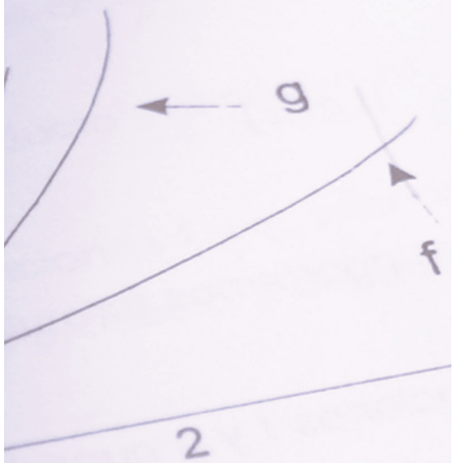
1. Se o produto custa P, após o aumento o produto passará a custar 1,6 P. Desejamos aplicar um desconto D, de tal forma que (1 – D). 1,6 P ≥ P. Desta forma, resolvendo-se a inequação, tem-se D ≤ 37,5%.

   a. A partir do gráfico, note que o ponto correspondente à inflação de agosto situa-se abaixo do ponto correspondente a inflação de julho. Portanto, a inflação de agosto é menor que a de julho.

   b. É o caso de percentagem de percentagem! Como a inflação de agosto é menor e sabe que a taxa de variação é de 24%, tem-se que a inflação de agosto é 0,91% – 24% . 0,91% = 0,6916%.

## Referências


- http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1118
- http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/explorando-porcentagens-porcentagem-percentual-inteiro-parte-proporcao-504353.shtml
- http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1178






# Matemática Financeira II

*Érika Silos de Castro (coordenação), André Luiz Martins Pereira, Luciana Felix da Costa Santos e Renata Cardoso Pires de Abreu.*

## Introdução

Na unidade 38 do material do aluno, são apresentadas várias situações cotidianas em que é possível observar a presença da Matemática Financeira, principalmente às relacionadas a noções de juros simples e compostos. Nesta unidade, o aluno terá a oportunidade de ampliar as discussões realizadas nos módulos anteriores, compreendendo conceitos, como: capital, montante, juros e taxa de juros, envolvidos neste tópico da Matemática.

Para potencializar o material didático do aluno, pesquisamos alguns recursos e atividades para auxiliar a você, professor, a ampliar possibilidades para exploração deste tema em suas aulas.

Sugerimos que a primeira aula desta unidade inicie-se com uma atividade disparadora. Esta é uma atividade proposta para ser realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Neste momento, é esperado que eles desenvolvam algumas noções básicas, relacionadas ao conceito de esfera e seus elementos.

Para dar sequência ao estudo desta unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos: o primeiro dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo e o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Uma descrição destas sugestões está colocada nas tabelas a seguir e seus detalhamentos no texto que segue.

# Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

| Disciplina | Volume | Módulo | Unidade | Estimativa de aulas para essa unidade |
|---|---|---|---|---|
| Matemática | 1 | 3 | 4 | 4 aulas de 2 tempos |

| Titulo da unidade | Tema |
|---|---|
| Matemática Financeira II | Matemática Financeira |
| **Objetivos da unidade** | |
| Resolver situações-problema que envolvem cobranças de juros simples; | |
| Resolver situações-problema que envolvem cobrança de juros compostos; | |
| Avaliar e comparar os dois tipos de situações. | |
| **Seções** | **Páginas no material do aluno** |
| Para início de conversa... | 31 e 32 |
| Seção 1 – Capital, juros e montante | 33 a 41 |
| Seção 2 – Juros e funções | 42 a 44 |
| Resumo | 44 |
| Veja ainda... | 44 |
| O que perguntam por aí? | 49 e 50 |

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

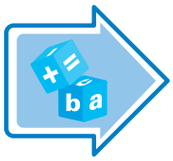
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

# Recursos e ideias para o Professor

## Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



**Atividades em grupo ou individuais**

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

**Ferramentas**

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

**Applets**

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

**Avaliação**

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

**Exercícios**

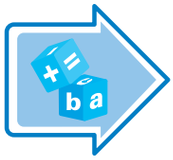
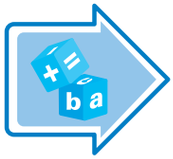
Proposições de exercícios complementares

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Juros Simples x Juros Compostos | Computador, projetor multimídia (data show), pendrive ou DVD do professor, lápis/caneta, folha de atividades e calculadora. | A atividade propõe, a partir de um pequeno texto, as definições dos regimes de capitalização simples e composto. Após a leitura e discussão a respeito dos dois regimes de capitalização, os alunos serão convidados a resolver dois problemas, usando como auxílio a construção de tabelas. | A turma deve ser dividida em grupos de quatro alunos. | 30 min |
| | Trabalhando com juros compostos | Folha de atividades, lápis, caneta, calculadoras, computador, projetor multimídia (data show), vídeo "Huguinho e Zezinho", folha para anotações | A atividade propõe, a partir de um pequeno vídeo, a familiarização com o conceito de juros e com cálculos que envolvem juros compostos. Após o vídeo, os alunos serão convidados a discutir e resolver questões propostas numa folha de atividades. | A turma pode ser dividida em duplas ou trios. | 45 min |

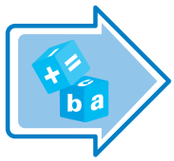
## **Seção 1** – Capital, juros e montante

*Páginas no material do aluno*
**33 a 41**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Trabalhando com juros simples | Folha de atividades, lápis, caneta e calculadora | A atividade a seguir baseia-se na leitura de um texto, com o objetivo de apresentar conceitos básicos de matemática financeira, como o juro simples e propõe, após a leitura, exercícios relacionados a esses conceitos. | Turma dividida em duplas ou trios | 45 min |
|  | Tomando decisões | lápis/caneta, folha de atividades e calculadora | A atividade a seguir baseia-se na ideia relativa do valor do dinheiro no tempo, com o objetivo de apresentar conceitos básicos de matemática financeira, como o de equivalência de capitais. Após uma discussão inicial, os alunos serão convidados a discutir e resolver questões propostas numa folha de atividades. | A turma pode ser dividida em grupos de até quatro alunos. | 80 min |

## **Seção 2** – Juros e funções

*Páginas no material do aluno*
**42 a 44**

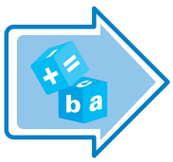
| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Juros e Progressões | lápis/caneta, caderno ou folha para anotações, folha de atividades e lousa | A atividade propõe, a partir da leitura de um pequeno texto, uma discussão acerca dos conceitos envolvidos (juros e progressões). Ao final, os alunos devem ser capazes de resolver um problema simples de pagamento de uma dívida em uma única parcela. | A turma deve ser dividida em grupos de quatro alunos. | 45 min |
| | Poupando para o futuro | Computador, projetor multimídia (data show), pendrive ou DVD do professor, lápis/caneta, folha de atividades e calculadora | A atividade propõe uma problematização a cerca das reflexões que podem nortear a escolha da melhor forma de aplicação do capital de um pequeno investidor. Essa problematização é apresentada a partir de um vídeo e de uma situação-problema que poderá ser estudada a partir de conceitos relacionados aos estudos de juros compostos e progressão geométrica. | A turma deve ser dividida em grupos de quatro alunos. | 45 min |

## **Seção –** O que perguntam por aí?

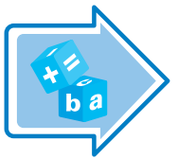
*Páginas no material do aluno*
**42 a 44**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Questões de vestibular | Imagem para projeção disponível neste material e no DVD do professor; material do aluno. | | Turma dividida em duplas | |

## **Seção –** Momento de Reflexão

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Avaliação da Unidade | Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta | Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade. Ele dividido em duas etapas: a primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda consiste em questões objetivas e dissertativas, cuja escolha fica a critério do professor. | Participação individual dos alunos | 40 min |

## ATIVIDADE COMPLEMENTAR

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Exercícios de Fixação Complementares | Folha de Atividades disponível para reprodução no pendrive ou DVD do professor, lápis/ caneta | – | Turma dividida em duplas ou em trios | |

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Juros Simples x Juros Compostos | Computador, projetor multimídia (data show), pendrive ou DVD do professor, lápis/caneta, folha de atividades e calculadora. | A atividade propõe, a partir de um pequeno texto, as definições dos regimes de capitalização simples e composto. Após a leitura e discussão a respeito dos dois regimes de capitalização, os alunos serão convidados a resolver dois problemas, usando como auxílio a construção de tabelas. | A turma deve ser dividida em grupos de quatro alunos. | 30 min |

## Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. Em seguida, solicite que a turma divida-se em grupos de quatro alunos, distribua a folha para os grupos, apresente e leia com eles a definição de Regime de Capitalização, conforme o texto a seguir. Você poderá projetar este texto com auxílio de um computador e um projetor multimídia. Há um arquivo em formato PDF em seu DVD, contendo o texto para sua apresentação.

**Definição: Regime de Capitalização**

É a forma assumida pelo crescimento do capital. O regime pode ser de capitalização simples ou composta. No regime de capitalização simples, *o juro incide exclusivamente sobre o capital inicial. O montante, neste caso, resulta de um processo de crescimento linear do capital. No regime de capitalização composta, o juro incide sobre o capital inicial, bem como sobre os juros acumulados, obtendo-se um montante que resulta de um crescimento exponencial do capita.*

Após a leitura da definição, apresente a tabela "Capitalização Simples versus Composta", cuja imagem também está disponível em arquivo PDF em seu DVD. Para tal apresentação, utilize novamente um computador e um projetor multimídia. Caso esse tipo de material multimídia não esteja disponível para uso em sua unidade escolar, você poderá, simplesmente, escrever tanto o texto da definição quanto a tabela na lousa.

**CAPITALIZAÇÃO SIMPLES VERSUS COMPOSTA**

| Valor da Aplicação | Taxa de Juros (% a. m.) | Prazo de Aplicação (em meses) | Montante pelo Regime de Capitalização Simples | Montante pelo Regime de Capitalização Composta |
|---|---|---|---|---|
| R$ 5.000,00 | 4,50% | 1 | R$ 5.225,00 | R$ 5.225,00 |
| R$ 5.000,00 | 4,50% | 2 | R$ 5.450,00 | R$ 5.460,13 |
| R$ 5.000,00 | 4,50% | 3 | R$ 5.675,00 | R$ 5.705,83 |
| R$ 5.000,00 | 4,50% | 4 | R$ 5.900,00 | R$ 5.962,59 |
| R$ 5.000,00 | 4,50% | 5 | R$ 6.125,00 | R$ 6.230,91 |
| R$ 5.000,00 | 4,50% | 6 | R$ 6.350,00 | R$ 6.511,30 |

Nesta tabela, podemos verificar a diferença de valores obtidos para uma mesmo capital de R$ 5.000,00 aplicado a uma taxa de juros de 4,5 % a. m. ao final dos períodos indicados nos casos de regime de capitalização simples e composta.

Após a apresentação e discussão da tabela, deverá ser entregue a todos os grupos a folha de atividades que contém seguintes questões:

**Questão 1:** Calcular o montante de uma aplicação de R$ 1 000,00 à taxa de 10% ao mês, no regime de capitalização composto, durante 4 meses.

**Questão 2:** Um banco empresta R$ 1 000,00 a juros de 2% ao mês pelo prazo de 10 meses com capitalização composta. Qual o montante a ser recebido após decorrido o período?

Ao final da atividade, promova um debate sobre a atividade, baseado nos resultados obtidos, sempre salientando a diferença entre juros simples e compostos.

## Aspectos pedagógicos

Esta é uma atividade foi adaptada de uma das etapas da proposta desenvolvida pelo Portal do Professor que se encontra disponível no *site:* http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=24132.

Seu objetivo é apresentar aos alunos, num primeiro momento, os regimes de capitalização, envolvendo juros simples e juros compostos. Após isso, serão discutidas as diferenças entre esses regimes de capitalização, isto é, entre juros simples e juros compostos.

É importante que você, professor, apresente e efetue os cálculos que foram necessários à construção da tabela junto com os alunos. Dessa forma, acreditamos que eles terão uma facilidade maior para compreender a diferença entre os juros simples e compostos. Para isso:

- Você pode orientar aos alunos que construam tabelas parecidas com a tabela trabalhada na atividade que possam ajudá-los a responder às questões propostas.
- Frise sempre que o montante na capitalização simples resulta de um crescimento linear, já o montante na capitalização composta tem crescimento exponencial. Neste ponto não será necessário o uso das fórmulas.

## Folha de Atividades – "Juros Simples x Juros Compostos"

Nome da Escola: _____

Nome: _____

**Questão 1:** Calcular o montante de uma aplicação de R$ 1 000,00 à taxa de 10% ao mês, no regime de capitalização composto, durante 4 meses.

**Questão 2:** Um banco empresta R$ 1 000,00 a juros de 2% ao mês pelo prazo de 10 meses com capitalização composta. Qual o montante a ser recebido, após decorrido o período?

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Trabalhando com juros compostos | Folha de atividades, lápis, caneta, calculadoras, computador, projetor multimídia (data show), vídeo "Huguinho e Zezinho", folha para anotações | A atividade propõe, a partir de um pequeno vídeo, a familiarização com o conceito de juros e com cálculos que envolvem juros compostos. Após o vídeo, os alunos serão convidados a discutir e resolver questões propostas numa folha de atividades. | A turma pode ser dividida em duplas ou trios. | 45 min |

## Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é estimular o estudo da Matemática Financeira, enfatizando no conceito de juros compostos, aplicados a situações cotidianas. Ela utiliza um vídeo desenvolvido pela UNICAMP que se encontra disponível no site: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1118, assim como no seu material multimídia.

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. Em seguida, solicite que a turma divida-se em duplas ou trios, distribua a folha para os grupos e apresente o vídeo.

Você poderá projetar este vídeo com auxílio de um computador e um projetor multimídia ou com um aparelho de DVD e televisão.

Após a apresentação do vídeo, solicite aos alunos que resolvam às questões propostas na folha de atividades.

Ao final da atividade, promova um debate sobre a atividade, baseado nos resultados obtidos, estimulando os alunos a darem outros exemplos do cotidiano que utilizam juros compostos, como juros do cartão de crédito, empréstimos, compras parceladas, poupança etc.

## Aspectos pedagógicos

Professor, sugerimos que você inicie a atividade reproduzindo o vídeo "Huguinho e Zezinho". Após a apresentação e discussão do vídeo, oriente os grupos nas questões da folha de atividades. Para isso:

- Você pode iniciar o estudo de juros compostos, dando ênfase a situações-problema, que envolvam esse conceito, propostas na folha de atividades.
- Oriente os alunos na leitura e auxilie-os nos cálculos, quando necessário. Procure valorizar as respostas dadas, destacando cada estratégia ou raciocínio aplicados.
- O uso da calculadora pode ser pensado para evitar que a atividade estenda-se muito em função das dificuldades de cálculo dos alunos.
- Aproveite para mostrar que o montante na capitalização composta apresenta crescimento exponencial, orientando que este tipo de capitalização pode ser positivo quando se trata de um investimento, ou poupança, porém perigoso quando se trata de dívidas.

## Folha de Atividades – "Trabalhando com juros compostos"

Nome da Escola:_____

Nome: _____

**Problema 1:** Imagine que você deseja investir R$ 1.000,00 em uma aplicação financeira durante 6 meses. O banco oferece-lhe duas alternativas: a poupança a uma taxa média de 0,5% ao mês e um investimento de médio risco a uma taxa de 2% ao mês, ambos sob o regime de juros compostos.

A partir desses dados, preencha as tabelas a seguir:

Poupança (juros de 0,5% ao mês)

| Período de aplicação | Capital no início de cada mês | Montante |
|---|---|---|
| 1º mês | | |
| 2º mês | | |
| 3º mês | | |
| 4º mês | | |
| 5º mês | | |
| 6º mês | | |

Investimento médio risco (2% ao mês)

| Período de aplicação | Capital no início de cada mês | Montante |
|---|---|---|
| 1º mês | | |
| 2º mês | | |
| 3º mês | | |
| 4º mês | | |
| 5º mês | | |
| 6º mês | | |

Baseado nas tabelas, responda:

a. quais seriam as previsões de valores a serem recebidos de volta após 6 meses de aplicação?

_____

b. em cada caso, quais seriam os juros efetivos obtidos neste período?

_____

Agora, com o auxílio de uma calculadora e utilizando a fórmula $\mathbf{M = C \cdot (1 + i)^n}$, responda às mesmas questões anteriores. O que você observa?

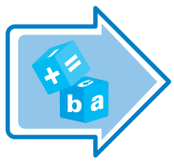
Utilizando a fórmula apresentada na questão anterior e com o auxílio de uma calculadora, resolva os seguintes problemas propostos.

**Problema 2:** Paguei de juros um total R$ 435,00 por um empréstimo de 6 meses a uma taxa de juro composto de 1,4% a.m. Qual foi o capital tomado emprestado? Dica:.

**Problema 3:** Meu irmão deseja comprar um carro. Para isso, planejo emprestar a ele R$ 18.000,00, financiado a juros compostos por um período de 18 meses, ao final do qual pretendo receber de volta um total de R$ 26.866,57. Qual deve ser o percentual da taxa de juro composto para que eu venha a conseguir este montante?

## **Seção 1** – Capital, juros e montante

*Páginas no material do aluno*
**33 a 41**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Trabalhando com juros simples | Folha de atividades, lápis, caneta e calculadora | A atividade a seguir baseia-se na leitura de um texto, com o objetivo de apresentar conceitos básicos de matemática financeira, como o juro simples e propõe, após a leitura, exercícios relacionados a esses conceitos. | Turma dividida em duplas ou trios | 45 min |

## Aspectos operacionais

Esta atividade foi proposta com a intenção de enriquecer a seção 1 no que diz respeito à noção de juros simples, apresentada no material do aluno e convida os alunos a resolverem problemas propostos numa folha de atividades.

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. Em seguida, solicite que a turma divida-se em duplas ou trios, distribua a folha para os grupos, apresente e leia com eles a o texto a seguir:

> ***Entendendo um pouco mais sobre juros***
>
> *Quem nunca ouviu falar do tal dos juros? Ou das taxas de juros fixadas pelo Copom (Banco Central do Brasil), taxas selic e etc?*
>
> *Primeiro, vamos entender o que é juros: Juros é um atributo de uma aplicação financeira, ou seja, referimos a uma quantia em dinheiro que deve ser paga por um devedor (o que pede emprestado), pela utilização de dinheiro de um credor (aquele que empresta).*
>
> *Praticamente, todo mundo já ouviu falar em juros, no entanto, muitas pessoas não sabem como eles funcionam, como são aplicados a um determinado valor (montante). O mais curioso é que existem pessoas que já pagaram ou ainda pagam juros, seja em financiamento, empréstimos etc., mas não tem ideia do que eles são e como agem em suas dívidas.*
>
> *Existem diversas definições para juros. Para um melhor entendimento, vamos definir juros como sendo: lucro ou remuneração obtida através da aplicação de uma taxa de juros sobre um valor inicialmente investido.*
>
> *Por exemplo, quando colocamos um dinheiro na poupança, e após trinta dias o valor disponível é maior, concluímos que o valor sofreu um acréscimo devido à aplicação de uma taxa de juros.*
>
> *Existem dois tipos de juros, os **juros simples** e os **juros compostos**. Apesar de serem semelhantes, pois ambos são aplicados mediante uma taxa de juros, veremos que geram valores completamente diferentes, e que devem ser usados com cautela, para que nem o credor nem o devedor sejam prejudicados.*

Se preferir, você poderá projetar este texto com auxílio de um computador e um projetor multimídia. Há um arquivo em formato PDF em seu DVD, contendo o texto para sua apresentação.

Após a leitura do texto, apresente na lousa exemplos que recorrem à utilização de juros simples, conforme a generalização apresentada no material do aluno:

Podemos então, generalizando. screver a fórmula para o cálculo dos juros:

$$j = cxixt$$

ou

$$j = c.i.t$$

sendo: j: total de juros;

c: capital;

i: taxa de juros;

t: tempo de empréstimo.

Neste exemplo, os juros não são acrescentados ao capital ao final de cada mês , por isso o capital permanece o mesmo a cada mês. Portanto, os juros pagos a cada mês mão todos iguais, calculados sobre o mesmo valor.

Após a apresentação e discussão do texto, e da definição de juros simples, solicite aos alunos que resolvam as questões propostas na folha de atividades:

**Questão 1:** Calcule o juro produzido por R$ 1.500,00, durante 4 anos, a uma taxa de 8% ao ano.

**Questão 2:** Calcule o juro produzido por R$ 6.000,00, durante 3 meses, a uma taxa de 2% ao mês.

**Questão 3:** Mario tomou emprestado R$ 240000,00 durante 3 meses, a taxa de 60% ao ano. Que quantia devolveu após os 3 meses?

Ao final da atividade, ao corrigir as questões propostas, você pode promover uma discussão sobre a atividade baseado nas respostas obtidas pelos alunos, estimulando-os a darem outros exemplos do cotidiano que utilizam juros simples, como os juros parciais do cartão de crédito (antes de completar 1 mês de atraso, os juros calculados sobre o valor da fatura, em dias, utilizam o regime de juros simples).

## Aspectos pedagógicos

Professor, sugerimos que você inicie a atividade com a leitura coletiva do texto. Após a apresentação texto e discussão sobre o conceito de juros simples, oriente os grupos nas questões da folha de atividades. Para isso:

Você pode iniciar o estudo de juros simples, dando ênfase que nesse regime, os juros não são acrescentados ao montante obtido no final de cada mês e sim são calculados sempre sobre o mesmo capital, que permanece o mesmo valor durante todo o período. O material do aluno enfatiza esse conceito na página 35:

Regime de Capitalização Simples é o sistema de capitalização no qual os juros são sempre calculados tendo por base de cálculo o valor do capital original.

No regime de capitalização simples, a evolução dos juros ocorre de forma linear ao longo do tempo.

A aplicação dos juros simples tem utilização limitada nos dias atuais, pois que o mercado financeiro adota por critério os juros compostos (que veremos a seguir), limitando-se a utilização dos juros simples para operações financeiras de curto prazo.

- Utilize situações-problema que envolvam esse conceito para exemplificar, conforme o apresentado na página 35 do material do aluno:

Cléber guardou R$ 16.000,00 por 3 anos e 2 meses, recebendo juros simples à taxa de 9% ao ano (a.a.). Verifique se o montante que Cléber acumulou nesse período dá para comprar um carro de R$ 20.000,00.

Como, nesse caso, a taxa de juros se refere ao período de 1 ano e o tempo é dado em anos e meses, devemos fazer algumas transformações.

3 anos e 2 meses = $3\frac{2}{12}$ do ano = 38 meses.

9% ao ano = $\frac{9}{12}$ % ao mês = 0,75% ao mês = 0,0075% ao mês.

Agora vamos calcular o montante usando a fórmula

$M = c(1 + it)$

$M = 16\,000(1 + 0{,}0075 \cdot 38) = 16\,000(1 + 0{,}285) = 16\,000 \cdot 1{,}285$

$M = 10\,560$

- É importante lembrar aos alunos que a **taxa** e o **tempo** considerados, devem estar sempre em uma mesma unidade, ou seja, se a taxa é anual, deve-se considerar o tempo em anos, se for mensal o tempo em meses etc.
- Oriente os alunos na leitura das questões e auxilie-os nos cálculos, quando necessário. Procure valorizar as respostas dadas, destacando cada estratégia ou raciocínio aplicados.
- O uso da calculadora pode ser pensado para evitar que a atividade estenda-se muito em função das dificuldades de cálculo dos alunos.

# Folha de Atividades – "Trabalhando com juros simples"

NomedaEscola:_____

Nome: _____

Texto:

"

***Entendendo um pouco mais sobre juros***

*Quem nunca ouviu falar do tal dos juros? Ou das taxas de juros fixadas pelo Copom (Banco Central do Brasil), taxas selic e etc?*

Primeiramente, vamos entender o que é juros: Juros é um atributo de uma aplicação financeira, ou seja, referimos a uma quantia em dinheiro que deve ser paga por um devedor (o que pede emprestado), pela utilização de dinheiro de um credor (aquele que empresta).

Praticamente todo mundo já ouviu falar em juros, no entanto, muitas pessoas não sabem como eles funcionam, como são aplicados a um determinado valor (montante). O mais curioso é que existem pessoas que já pagaram ou ainda pagam juros, seja em financiamento, empréstimos etc., mas não tem ideia do que eles são e como agem em suas dívidas.

Existem diversas definições para juros. Para um melhor entendimento, vamos definir juros como sendo: lucro ou remuneração obtida através da aplicação de uma taxa de juros sobre um valor inicialmente investido.

*Por exemplo, quando colocamos um dinheiro na poupança, e após trinta dias o valor disponível é maior, concluímos que o valor sofreu um acréscimo devido à aplicação de uma taxa de juros.*

*Existem dois tipos de juros, os* ***juros simples*** *e os* ***juros compostos****. Apesar de serem semelhantes, pois ambos são aplicados mediante uma taxa de juros, veremos que geram valores completamente diferentes, e que devem ser usados com cautela, para que nem o credor nem o devedor sejam prejudicados.*

"

Nesta atividade, vamos nos deter aos juros simples.

$$j = c \times i \times t$$

ou

$$j = c.i.t$$

sendo: j: total de juros;

c: capital;

i: taxa de juros;

t: tempo de empréstimo.

Lembre-se de que:

Regime de Capitalização Simples é o sistema de capitalização no qual os juros são sempre calculados tendo por base de cálculo o valor do capital original.

No regime de capitalização simples, a evolução dos juros ocorre de forma linear ao longo do tempo.

A aplicação dos juros simples tem utilização limitada nos dias atuais, pois que o mercado financeiro adota por critério os juros compostos (que veremos a seguir), limitando-se a utilização dos juros simples para operações financeiras de curto prazo.

E que você deve sempre relacionar **taxa** e **tempo** em uma mesma unidade.

| | |
|---|---|
| Taxa anual | tempo em anos. |
| Taxa mensal | tempo em meses |
| Taxa diária | tempo em dias. |

**Agora é com você!**

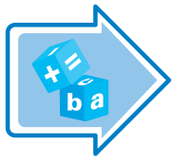
**Questão 1:** Calcule o juro produzido por R$ 1.500,00, durante 4 anos, a uma taxa de 8% ao ano.

**Questão 2:** Calcule o juro produzido por R$ 6.000,00, durante 3 meses, a uma taxa de 2% ao mês.

**Questão 3:** Mario tomou emprestado R$ 240000,00 durante 3 meses, a taxa de 60% ao ano. Que quantia devolveu após os 3 meses?

## **Seção 1** – Capital, juros e montante

*Páginas no material do aluno*
**33 a 41**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Tomando decisões | lápis/caneta, folha de atividades e calculadora | A atividade a seguir baseia-se na ideia relativa do valor do dinheiro no tempo, com o objetivo de apresentar conceitos básicos de matemática financeira, como o de equivalência de capitais. Após uma discussão inicial, os alunos serão convidados a discutir e resolver questões propostas numa folha de atividades. | A turma pode ser dividida em grupos de até quatro alunos. | 80 min |

## Aspectos operacionais

Esta atividade foi adaptada de uma das etapas da proposta desenvolvida pelo Portal do Professor que se encontra disponível no *site*: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html? aula=25767.

Esta atividade tem como objetivo mostrar ao aluno que o valor do dinheiro transforma-se no tempo, mostrando que essa transformação depende do tempo e da taxa a ele associado e pode ser entendida a partir do conceito de equivalência de capitais. Por exemplo, 10 reais hoje podem valer muito mais que 20 reais daqui a um ano. Isso depende da taxa que se consiga para fazer o dinheiro render, seja na poupança, em um investimento em ações etc.

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. Em seguida, solicite que a turma divida-se em grupos de quatro alunos e distribua a folha para os grupos.

Utilize a lousa para reproduzir as seguintes questões para reflexão:

Vocês preferem ganhar agora uma nota de 10 reais ou de 20 reais?

O que eles preferem: uma nota de 10 agora ou a de 20 reais daqui a 1 ano. E se fossem 5 anos?

Após essa discussão inicial, solicite aos alunos que resolvam as questões propostas na folha de atividades.

## Aspectos pedagógicos

Professor, sugerimos que você inicie a atividade com uma simples dinâmica para motivar a discussão, conforme exposta a seguir:

- Tenha em mão duas notas diferentes; uma de 20 reais e outra de 10 reais por exemplo. A partir das questões para reflexão: "Vocês preferem ganhar agora uma nota de 10 reais ou de 20 reais? O que eles preferem: uma nota de 10 agora ou a de 20 reais daqui a 1 ano. E se fossem 5 anos?" leve os alunos a refletirem sobre uma opção mais vantajosa e estimule-os a justificarem as suas respostas.

- À medida que os alunos argumentem, tente sintetizar as falas deles, escrevendo no quadro-negro os conceitos de matemática financeira que aparecem direta ou indiretamente nos discursos dos alunos.

- Você pode acrescentar novas indagações como: ***10 reais daqui a 5 anos, valem menos, mais ou o mesmo que 20 reais?*** O importante é que os alunos observem que o valor das notas não é absoluto. Ele depende, essencialmente, do tempo e da taxa de aplicação aos quais podemos submeter o dinheiro. Assim, 10 reais hoje podem valer muito mais que 20 reais daqui a um ano. Isso depende da taxa que se consiga para fazer o dinheiro render, seja na poupança, em um investimento em ações etc.

- Utilize situações-problema que envolvam esses conceitos para exemplificar, conforme o apresentado a seguir:

**Exemplo:** Imagine que você pegou R$10,00 emprestados com o seu irmão a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês. Qual será o valor da sua dívida daqui a 1 ano?

Para resolver o problema, precisamos deslocar o dinheiro no tempo. Ou seja, 10 reais hoje valem quanto daqui a 1 ano, a essa taxa de 2% ao mês?

Utilizemos a fórmula $C_{12} = C_0.(1+i)^{12}$ para obtermos o valor $C_{12}$.

Daí,

$C_{12} = 10.(1+0,02)^{12}$
$C_{12} = 10.(1,02)^{12}$
$C_{12} \cong 10.(1,268)$
$C_{12} \cong 12,68$

A partir desse exemplo, retome as questões de reflexão e promova um debate, possibilitando que os alunos construam suas próprias conjecturas em relação à decisão mais vantajosa para o irmão.

Estimule-os a observarem que, nesse contexto, fica fácil para o irmão decidir o que é mais vantajoso para ele, se é receber 10 reais agora ou 20 daqui a 1ano? O exemplo mostra-nos que nessas condições 10 reais agora equivale a 12,68 reais daqui a 1 ano. Assim, receber 20 reais daqui a 1 ano seria muito mais vantajoso para ele.

Portanto, podemos dizer que esta atividade mostra-se bastante interessante, pois é possível mostrar que com conhecimentos básicos de juros compostos todos nós podemos decidir racionalmente entre duas ou mais propostas. Dessa forma, acreditamos que os alunos sintam-se motivados a conhecer e compreender esse conteúdo.

Após essa discussão, oriente os alunos na leitura das questões a seguir, propostas na folha de atividades, auxiliando os nos cálculos, quando necessário.

**Questão 1:** Fernando fez um empréstimo de R$ 10.000,00, a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês. Qual a dívida de Fernando daqui a 5 meses, sabendo-se que não efetuou pagamentos nesse período?

**Questão 2:** Fernando pegou uma quantia emprestada em Janeiro, a juros compostos de 5% ao mês, com o compromisso de pagar tudo até JUNHO. Para seu espanto, sua dívida em Abril era de R$ 11.576,25. Sabendo que não efetuou nenhum pagamento da dívida nesse período, responda aos itens abaixo.

a. Qual foi o valor do empréstimo feito por Fernando?

b. Preencha a tabela baixo com os valores da dívida a cada mês.

| JAN | FEV | MAR | ABR | MAI | JUN |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 11.576,25 | | |

- Procure reforçar o fato de que 10.000 reais em janeiro e 11.576,25 reais em abril são valores equivalentes. Ou seja, para quem pegou e para quem emprestou o dinheiro, 10.000 reais em janeiro valem 11.576,25 reais em abril. Isso significa que Fernando pagaria 11.576,25 reais em abril para usufruir do dinheiro que pegou em janeiro. Entrou a quantia de 10.000 reais no seu bolso em janeiro e saíram (se pagasse) os 11.576,25 reais em abril. Faça com que os alunos pensem no dinheiro no bolso de quem emprestou. Os 10.000 reais que tinha em janeiro, viraram 11.576,25 reais em abril. Mostre-os que apesar dos valores não serem iguais eles são equivalentes. Equivalência não é igualdade.

- O que aconteceu no caso de Fernando pode ser comparado a um terreno comprado no ano 2000, por exemplo, por R$ 10.000,00 e que em 2010 vale R$ 50.000,00. Pode ser comparado a um carro comprado por R$ 30.000,00 em 2008, mas que vale R$ 25.000,00 em 2010. Os valores transformam-se no tempo, através de taxas. Se a taxa for constante, a fórmula acima nos fornece como "deslocar" o dinheiro no tempo, ou seja, entender como ele se transforma.

- O uso da calculadora pode ser pensado para evitar que a atividade estenda-se muito em função das dificuldades de cálculo dos alunos.

- A partir das questões propostas, generalize o conceito, mostrando aos alunos que a uma taxa i por período, uma quantia hoje igual a $C_0$, se transformará, após n períodos (meses, anos, etc.), em uma quantia $C_n = C_0.(1+i)^n$. Essa fórmula (que corresponde a aplicação a juros compostos apresentada na **p. 38** do material do aluno) nos indica como podemos "ir e voltar" com o dinheiro no tempo. Ela foi utilizada para avançar com o dinheiro no primeiro problema e para voltar com o dinheiro no segundo.

Em resumo:

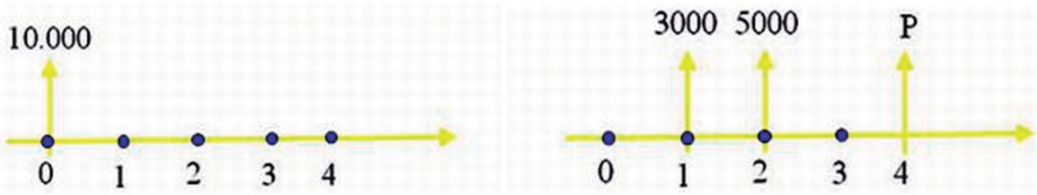
Para obter o valor futuro (após n períodos), basta MULTIPLICAR o atual por (1+i)

Para obter o valor atual (n períodos antes), basta DIVIDIR o VALOR futuro por (1+i)

- Após esta etapa, sugerimos que você, professor, resolva, com os alunos, a questão 3 da folha atividades, uma vez que essa será uma boa oportunidade para apresentar uma estratégia valiosa para a resolução desse tipo de problema.

**Questão 3:** Arthur tomou um empréstimo de R$ 10.000,00 a juros compostos de 6% ao mês. No primeiro mês, pagou R$ 3.000,00; no segundo mês pagou R$ 5.000,00 e no quarto mês quitou a dívida. Qual o valor desse último pagamento?

- Aqui, recomendamos que você utilize a representação de quantias, ao longo do tempo, através de setas. Assim, a situação descrita acima pode ser representada da forma abaixo.




- Uma maneira de resolver é trazer os valores para uma mesma época, pode-se trazer tudo para a época zero (data do empréstimo aqui); levar tudo para época 4 etc.

- Lembrando que as formas de pagamento a seguir são equivalentes, ou seja, 10.000 reais hoje equivalem ao fluxo de pagamentos apresentado e trazendo os valores para a época zero, e igualando temos:

$$10.000 = \frac{3000}{1,06} + \frac{5000}{1,06^2} + \frac{P}{1,06^4}$$

Daí, $P = R\$3.433,72$.

Após tudo isso, estamos finalmente prontos a responder a enigmática pergunta: **O que é melhor comprar a prazo ou a vista?** Essa pergunta será feita aos alunos por meio do seguinte problema:

**Questão 4:** O professor José tem 4 opções de financiamento na compra de um Laptop, cujo preço anunciado é de R$ 3.000,00.

(A) À vista com 5% de desconto;

(B) Em três prestações mensais e iguais de 1.000 reais cada, no sistema (1+2);

(C) Em quatro prestações mensais e iguais de 750 reais cada, no sistema (1+3);

(D) Em seis prestações de 500 reais cada, no sistema (0+6);

Sabendo que o dinheiro vale para ele 3% ao mês, qual é a opção mais vantajosa de pagamento?

- Este problema vai tomar um bom tempo dos alunos, deixe que eles possam discuti-lo com calma. Procure não interferir muito no processo de resolução. Apenas, caso seja necessário, ajude-os a estruturar o raciocínio para que possam escrevê-lo.

- Reforce, durante o processo de resolução, o conceito de capitais equivalentes e, ao final da atividade, promova um debate baseado nos resultados obtidos, sempre salientando a diferença entre juros simples e compostos e valorizando as diversas estratégias de resolução que serão propostas pelos alunos, independente de terem conduzido ou não a respostas corretas.

## Folha de Atividades – "Tomando decisões"

Nome da escola: _____

Nome: _____

**Questão 1:** Fernando fez um empréstimo de R$ 10.000,00, a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês. Qual a dívida de Fernando daqui a 5 meses, sabendo-se que não efetuou pagamentos nesse período?

_____

_____

_____

**Questão 2:** Fernando pegou uma quantia emprestada em Janeiro, a juros compostos de 5% ao mês, com o compromisso de pagar tudo até JUNHO. Para seu espanto, sua dívida em Abril era de R$ 11.576,25. Sabendo que não efetuou nenhum pagamento da dívida nesse período, responda aos itens abaixo.

a. Qual foi o valor do empréstimo feito por Fernando?

_____

_____

_____

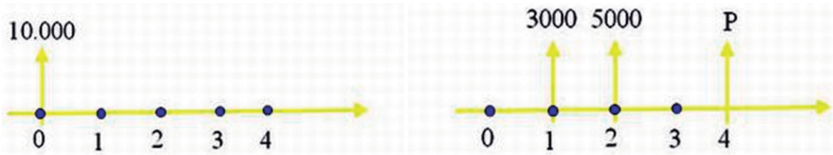
_____

b. Preencha a tabela baixo com os valores da dívida a cada mês.

| JAN | FEV | MAR | ABR | MAI | JUN |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 11.576,25 | | |

**Questão 3:** Arthur tomou um empréstimo de R$ 10.000,00 a juros compostos de 6% ao mês. No primeiro mês, pagou R$ 3.000,00; no segundo mês pagou R$ 5.000,00 e no quarto mês quitou a dívida. Qual o valor desse último pagamento?

Sugestão: Utilize a representação das quantias através de setas.




**Questão 4:** O professor André tem 4 opções de financiamento na compra de um Laptop, cujo preço anunciado é de R$ 3.000,00.

(A) À vista com 5% de desconto;

(B) Em três prestações mensais e iguais de 1000 reais cada, no sistema (1+2);

(C) Em quatro prestações mensais e iguais de 750 reais cada, no sistema (1+3);

(D) Em seis prestações de 500 reais cada, no sistema (0+6);

Sabendo que o dinheiro vale para ele 3% ao mês, qual é a opção mais vantajosa de pagamento?

| Opção (A) |
| --- |
| |

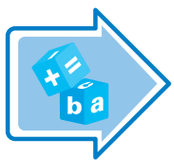
| Opção (B) |
| --- |
| |

Opção (C)

Opção (D)

## **Seção 2** – Juros e funções

*Páginas no material do aluno*
**42 a 44**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Juros e Progressões | lápis/caneta, caderno ou folha para anotações, folha de atividades e lousa | A atividade propõe, a partir da leitura de um pequeno texto, uma discussão acerca dos conceitos envolvidos (juros e progressões). Ao final, os alunos devem ser capazes de resolver um problema simples de pagamento de uma dívida em uma única parcela. | A turma deve ser dividida em grupos de quatro alunos. | 45 min |

## Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

No dia da aplicação da atividade, solicite que a turma divida-se em grupos de quatro alunos. Distribua uma folha de atividades para cada aluno, mas sugira que os integrantes do grupo tentem resolver às questões propostas em grupo.

Uma vez que todos estejam com o material necessário para a execução da atividade, peça que eles realizem a leitura do texto e respondam, num primeiro momento, apenas a primeira questão proposta. Você, professor, pode registrar na lousa alguns dos argumentos apresentados pelos alunos. Esta etapa não deve levar mais que 15 minutos.

Depois que as respostas dos grupos para a primeira questão sejam expostas e discutidas com os demais alunos da classe, peça para que resolvam as três próximas questões propostas.

Assim que os grupos tenham terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as conclusões que eles alcançaram depois de responder às últimas questões comparando-as com as respostas dadas por eles para primeira questão.

## Aspectos pedagógicos

Podemos observar na seção Juros e funções do material do aluno (páginas 42 e 43) a relação existente entre o estudo de funções lineares e exponenciais com o comportamento dos juros de capitalizações simples e compostas, respectivamente. Mas não há uma seção que se dedique a apresentação da relação desses regimes de capitalização e o estudo de progressões (geométrica ou aritmética). O objetivo desta atividade é oportunizar o relacionamento desses dois conteúdos, agregando maiores significados para ambos.

Essa atividade foi adaptada de uma das etapas da proposta desenvolvida pelo Portal do Professor que se encontra disponível no *site*: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=24040.

O texto "O valor do dinheiro" serve como introdução para a discussão sobre o fato do valor do dinheiro estar diretamente relacionado com o tempo transcorrido em uma aplicação financeira e que o objetivo básico da Matemática Financeira é justamente estudar o comportamento desse valor ao longo do tempo.

Logo depois do texto, é proposta uma primeira questão para reflexão: Por qual alternativa você optaria: receber R$ 2.780,00 hoje ou R$1.000,00 hoje e mais duas parcelas mensais de R$1.000,00?

À medida que os alunos argumentem, tente sintetizar as falas deles escrevendo-as na lousa. É preciso destacar aqui que alguns alunos devem defender que é melhor esperar dois meses e acabar recebendo "mais" dinheiro no final das contas, preferindo R$3000,00 no fim de três meses a R$2780,00 hoje. Esse tipo de argumento será posto em xeque depois de concluída a segunda parte da atividade, de modo que os alunos poderão confrontar esse argumento com uma situação problema onde a aplicação dos R$2780,00 renderá mais, no fim de três meses que os R$3000,00.

As questões 2 e 3 levarão os alunos a perceber a relação existente entre o comportamento dos rendimentos por juros simples e compostos e o comportamento de progressões aritmética e geométrica, respectivamente.

É importante certificar-se de que as competências e habilidades relacionadas ao estudo de P.A. e P.G. tenham sido bem internalizadas pelos alunos para que possam compreender a relação e a associação existentes entre os juros simples e a P.A. e dos juros compostos com a P.G.

Propicie debates, possibilitando que os alunos construam suas próprias conjecturas, evitando assim que o processo não acabe se tornando uma simples repetição e comparação de fórmulas.

É muito importante que, depois que os grupos tenham terminado a tarefa, você, professor, promova uma discussão sobre as conclusões dos alunos a respeito da pergunta inicial antes e depois da exploração. Leve-os a perceber a modificação de ponto de vista em relação á questão depois de aplicar os conhecimentos de matemática financeira. Isso pode valorizar ainda mais o conhecimento construído.

# Folha de Atividades – "Juros e Progressões"

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Leia o texto abaixo e, em seguida, faça o que se pede.

"

**O Valor do Dinheiro**

O objetivo básico da Matemática Financeira é estudar o valor do dinheiro ao longo do tempo. Um exemplo ajudará a tornar bem clara esta afirmativa básica.

Se perguntarmos a alguém com conhecimentos básicos de Matemática: "Qual o resultado de R$ 1.000,00 + R$ 1.000,00 + R$ 1000,00?" A resposta imediata seria "R$ 3.000,00".

Se à pergunta original acrescentarmos a informação: "Cada uma destas parcelas será recebida em 30 dias" a resposta já não será tão imediata.

Em outros termos: "Você prefere receber R$ 3.000,00 hoje ou R$ 1.000,00 hoje e o restante em duas parcelas mensais de R$1.000,00?". A resposta quase unânime seria: "Prefiro receber R$3.000,00 hoje". Mas se perguntássemos: "Você prefere receber R$ 2.780,00 hoje ou R$ 1.000,00 mais duas parcelas mensais de R$ 1.000,00?", a resposta dependeria de conceitos de Matemática Financeira.

A consideração da variável tempo introduziu uma complexidade maior numa simples operação de soma de quantidades. Ao se abrir mão da possibilidade de receber uma determinada quantia em dinheiro no tempo presente, quando o preço de bens ou serviços que poderiam ser adquiridos com este dinheiro é conhecido, introduz-se incertezas que requerem conceitos e operações mais sofisticadas para sua quantificação. Isto vale tanto para decisões pessoais quanto para decisões de empresas quando o trato com o dinheiro está envolvido. Este é o campo básico de aplicação da Matemática Financeira.

(Fonte:http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/atividades/portaldoprofessor/pdf/Atividade01JurosSimplesPA.pdf)

"

**Questão 1:** O texto propõe-nos a seguinte reflexão: "Você prefere receber R$ 2.780,00 hoje ou R$ 1.000,00 mais duas parcelas mensais de R$ 1.000,00?". Usando os conhecimentos de matemática financeira, quais os motivos que poderiam levar você a preferir uma ou outra opção? (Discuta com seu grupo e, juntos, apresentem suas conclusões para a turma).

O Regime de Capitalização Simples é o sistema de capitalização no qual os juros são sempre calculados tendo por base de cálculo o valor do capital original oferecendo um incremento constante ao montante a cada período de tempo associado à taxa. Já no Regime de Capitalização Composto calculamos os juros no final de cada período, somamos esse valor ao capital e formamos um montante sobre o qual calculamos os juros do período seguinte. Isto é o que chamamos de "juros sobre juros".

**Questão 2:** De acordo com as definições de regime de capitalização simples e composto, complete as tabelas a seguir considerando uma aplicação financeira, cujo capital inicial seria de R$2.780,00 e a taxa de 10% ao mês, ocorrida a partir de 5 de janeiro até 5 de agosto de 2013.

Capitalização Simples

| Mês | Capital (R$) | Juros (R$) | Montante (R$) |
|---|---|---|---|
| 05/Janeiro | 2.780,00 | - | 2.780,00 |
| 05/Fevereiro | 2.780,00 | 278,00 | 3058,00 |
| 05/Março | 2.780,00 | 278,00 | 3336,00 |
| 05/Abril | 2.780,00 | 278,00 | |
| 05/Maio | | | |
| 05/Junho | | | |
| 05/Julho | | | |
| 05/Agosto | | | |

Capitalização Composta

| Mês | Capital (R$) | Juros (R$) | Montante (R$) |
|---|---|---|---|
| 05/Janeiro | 2.780,00 | - | 2.780,00 |
| 05/Fevereiro | 2.780,00 | 278,00 | 3058,00 |
| 05/Março | 3058,00 | 305,80 | 3363,80 |
| 05/Abril | 3363,80 | | |
| 05/Maio | | | |
| 05/Junho | | | |
| 05/Julho | | | |
| 05/Agosto | | | |

**Questão 3:** Observe as sequências de valores dos montantes das aplicações obtidas na questão anterior.

a. Podemos dizer que a sequência de montantes da aplicação a juros simples se comporta como uma progressão? De que tipo?

b. Podemos dizer que a sequência de montantes da aplicação a juros compostos se comporta como uma progressão? E quanto à sequência dos valores dos juros nessa aplicação, se comporta como uma progressão? De que tipo?

c. Usando os seus conhecimentos sobre sequências e progressões, determine uma expressão algébrica (fórmula) que forneça o valor do montante para cada um dos tipos de capitalização trabalhados na questão anterior depois de passados t meses da aplicação.

**Questão 4:** Agora observe a tabela a seguir construída da mesma forma que a tabela de capitalização composta da questão 1, mas considerando uma aplicação financeira cujo capital inicial seria de R$1000,00 e a taxa de 10% ao mês, ocorrida a partir de janeiro até março de 2013. Porém nesse caso considere que tanto em 6 de fevereiro quanto em 6 de março haja um acréscimo de R$1000,00 ao capital.

Capitalização Composta

| Mês | Capital (R$) | Juros (R$) | Montante (R$) |
|---|---|---|---|
| 05/Janeiro | 1000,00 | - | 1000,00 |
| 05/Fevereiro | 1000,00 | 100,00 | 1100,00 |
| 06/Fevereiro | 2100,00<br>(1100,00 + 1000,00) | - | 2100,00 |
| 05/Março | 2100,00 | 210,00 | 2310,00 |
| 06/Março | 3310,00<br>(2310,00 + 1000,00) | - | 3310,00 |

De acordo com os resultados obtidos até aqui, para alguém que tivesse a possibilidade de fazer esse tipo de aplicação a juros compostos com taxa de 10% ao mês, o que seria mais vantajoso: receber R$ 2.780,00 em janeiro ou R$ 1.000,00 em janeiro mais duas parcelas mensais de R$ 1.000,00, uma em fevereiro e outra em março?

## **Seção 2** – Juros e funções

*Páginas no material do aluno*
**42 a 44**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Poupando para o futuro | Computador, projetor multimídia (data show), pendrive ou DVD do professor, lápis/caneta, folha de atividades e calculadora | A atividade propõe uma problematização a cerca das reflexões que podem nortear a escolha da melhor forma de aplicação do capital de um pequeno investidor. Essa problematização é apresentada a partir de um vídeo e de uma situação-problema que poderá ser estudada a partir de conceitos relacionados aos estudos de juros compostos e progressão geométrica. | A turma deve ser dividida em grupos de quatro alunos. | 45 min |

## Aspectos operacionais

Na aula anterior à da aplicação desta atividade, peça aos seus alunos que pesquisem qual é o valor atualizado da taxa de inflação acumulada no último ano. É importante que você reproduza a folha de atividades, também com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

No dia da aplicação da atividade, solicite que a turma divida-se em grupos de quatro alunos, distribua a folha para os grupos, apresente o vídeo "Previdência Complementar" e a apresentação da situação problema "Os planos para o futuro de João e Célia", descrita a seguir:

> **Os planos para o futuro de João e Célia**
>
> João Pedro e Célia estão namorando sério e agora decidiram que querem se casar. Existe um dito popular que diz que "quem casa quer casa". E não foi diferente com o casal. Mas eles ainda não têm moradia própria. João possui um terreno, mas a tão sonhada casa ainda precisa ser construída.
>
> Para construir a casa, João e Célia decidiram esperar um pouco e adiar o casamento para que possam fazer um "pezinho de meia" com o suficiente para a construção da sua casa.
>
> Os dois pretendem guardar R$300,00 por mês, mas sabem que o melhor lugar para guardar esse dinheiro, certamente não é no colchão. Eles estão em dúvida sobre qual a melhor forma de aplicação para as suas economias. Estão avaliando algumas possibilidades. Uma delas é a poupança, já tão conhecida dos brasileiros. Outra é o plano de previdência privada do tipo do VGBL.
>
> Antes de decidir o que fazer com o dinheiro, o casal quer ter uma ideia do rendimento que esse dinheirinho de que eles podem dispor por mês vai retornar depois de 5 anos.

Você poderá projetar tanto o vídeo quanto à apresentação (ambos os arquivos estão disponíveis em seu DVD) com auxílio de um computador e um projetor multimídia.

Caso esse tipo de material multimídia não esteja disponível para uso em sua unidade escolar, você poderá, simplesmente, reproduzir o texto da descrição da situação-problema ou escrevê-la na lousa.

Após a apresentação do vídeo e da apresentação, você deverá pedir aos alunos que resolvam as questões propostas na folha de atividades.

## Aspectos pedagógicos

Esta atividade tem como objetivo apresentar algumas das reflexões que podem nortear a escolha da melhor forma de aplicação do capital para um pequeno investidor.

A partir da apresentação de uma situação-problema bastante corriqueira e bem próxima do cotidiano dos alunos do ensino de jovens e adultos, podemos levá-los a uma reflexão mais profunda sobre qual o papel e a utilidade dos conhecimentos a cerca da Matemática Financeira para um pequeno investidor.

Na aula anterior à da aplicação desta atividade, peça aos seus alunos que pesquisem qual o valor atualizado da taxa de inflação acumulada no último ano para utilização desse índice durante a atividade. Para isso, eles podem recorrer a um buscador na Internet (Google, por exemplo), a um jornal ou publicação da área econômica, ou à página do Banco Central do Brasil (http://www.bcb.gov.br/).

É importante que você reproduza a folha de atividades com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. Após exibir o vídeo, faça uma apresentação da situação-problema *"**Os planos para o futuro de João e Célia".***

Vamos às condições atuais de cada aplicação:

- Poupança - Rende a uma taxa de juros média de 0,45% ao mês. Não cobra nenhuma taxa de administração.
- VGBL - Rende a uma taxa de juros de 6% ao ano. Cobra uma taxa de administração anual sobre o valor total da aplicação de 3%, pagamento de imposto de renda apenas sobre o valor do rendimento ao final da aplicação e tem isenção da taxa de carregamento caso as condições da simulação sejam iguais às contratadas. O valor a ser resgatado, segundo a simulação que fizeram pelo site de um determinado banco foi igual a R$17.260,41.

Após a apresentação e discussão da situação-problema, os alunos deverão responder às questões propostas na folha de atividades, que estão organizadas de modo progressivo, tentando conduzir o aluno por reflexões a respeito das várias formas de investimento que podem estar disponíveis para um pequeno investidor.

Essas questões trabalham a noção de juros compostos atrelada ao conceito de soma de uma progressão geométrica. Depois de preencherem uma tabela, os alunos chegarão à seguinte expressão do montante acumulado no t-ésimo mês de uma aplicação de um capital $C_0$ mensal constante, a juros compostos, a uma taxa mensal i: $M = C_0 + C_0(1+i) + C_0(1+i)^2 + C_0(1+i)^3 + C_0(1+i)^4 + ... + C_0(1+i)^t$.

Auxilie seus alunos a perceber que cada parcela da soma anterior, corresponde a um termo de uma P.G. de t+1 termos, termo inicial $C_0$ e razão (1 + i). Logo, podemos expressar tal soma da seguinte forma:

$$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow M = \frac{C_0\left(\left(1+i\right)^{t+1} - 1\right)}{\left(1+i\right) - 1} \Rightarrow M = \frac{C_0\left(\left(1+i\right)^{t+1} - 1\right)}{i}$$

Essa fórmula os auxiliará no cálculo do rendimento do capital aplicado pelas personagens propostos na situação-problema e a comparação dos resultados obtidos os levará à reflexão pretendida.

É importante enfatizar alguns aspectos:

- O montante proposto pela simulação da previdência privada é inferior ao valor investido pelo casal, ou seja, diante dessas condições oferecidas pela previdência privada seria mais rentável para eles guardar o dinheiro no colchão.
- Entre a poupança e o "colchão", claramente a poupança é mais rentável, mas, de qualquer forma, esse tipo de investimento não protegeria o capital investido das perdas resultantes da inflação anual acumulada.

# Folha de Atividades – "Poupando para o futuro"

Nome da escola: _____

Nome: _____

**Primeiro Momento:** Exibição do vídeo "Previdência Complementar"

**Segundo Momento:** Exibição da apresentação "Os planos para o futuro de João e Célia".

**Terceiro Momento:** De acordo com a situação problema apresentada no momento anterior, responda:

**Questão 1:** Se João e Célia simplesmente colocassem os seus R$300,00 por mês "debaixo do colchão", quanto teriam juntado em 5 anos?

_____

_____

**Questão 2:** Para fazer uma comparação entre as taxas de rendimento da poupança e da previdência privada, é necessário que estas se refiram a um mesmo período de tempo. Qual seria, então, a taxa de aplicação da poupança para um rendimento anual? (Lembrando que a aplicação da poupança é feita a juros compostos)**.**

_____

_____

_____

**Já sabemos como calcular o montante de uma aplicação a juros compostos, mas para um capital inicial dado e único. No caso do João e da Célia, todos os meses, eles terão um capital de R$300,00 para adicionar ao montante acumulado até então. Para ajudar a modelar esse tipo de situação, responda às questões de 3 a 5.**

**Questão 3:** Complete a tabela a seguir com o montante acumulado, mês a mês, para aplicação de uma quantia constante mensal $C_0$ a uma taxa mensal igual a i.

| Mês | Montante |
|---|---|
| Inicio da Aplicação | $M = C_0$ |
| 1º | $M = C_0 (1+ i)$ |
| 2º | $M = (C_0 + C_0 (1+ i)) (1+ i) = C_0 (1+ i) + C_0 (1+ i)^2$ |
| 3º | M = |
| 4º | M = |
| 5º | M = |
| ... | ... |
| tº | M = |

**Questão 4:** Observe cada uma das parcelas que compõem a expressão para o exime mês. Podemos dizer que estas são elementos de uma Progressão Geométrica? Qual o seu primeiro termo? Qual a sua razão?

**Questão 5:** Note que M expressa, no t-ésimo mês, a soma dos termos dessa P.G.. Usando a fórmula da soma da P.G., escreva uma expressão para M no t-ésimo mês.

**Questão 6:** Usando a fórmula deduzida no item anterior, indique qual será o montante a ser resgatado por João é Célia no fim de 5 anos, aplicando R$300,00 por mês na poupança. (Atenção: Se você for usar a taxa anual da poupança calculada na questão 2, não esqueça que o capital de aplicação a ser considerado corresponde ao total obtido em 12 meses por João e Célia).

**Questão 7:** Faça uma comparação crítica dos montantes a serem obtidos por João e Célia nas aplicações no "colchão", na poupança e na simulação da previdência privada. Escreva, de maneira breve, suas conclusões.

**Questão 8:** Verifique qual seria o valor obtido por João e Célia ao fim de 5 anos se sua aplicação fosse corrigida pela inflação. (Atenção: Utilize o valor atual da inflação anual pesquisado pelo seu grupo).

**Questão 9:** Podemos dizer que aplicação na poupança protegerá o investimento de João e Célia da ação da inflação? Justifique.

## **Seção –** O que perguntam por aí?

*Páginas no material do aluno*
**42 a 44**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Questões de vestibular | Imagem para projeção disponível neste material e no DVD do professor; material do aluno. | | Turma dividida em duplas | |

## Aspectos operacionais

Nas páginas 49 e 50, seção *O que perguntam por aí?*, do material do aluno, são apresentadas duas questões de vestibulares que envolvem conceitos de Matemática Financeira trabalhados nesta unidade. Essas questões já se encontram resolvidas no material do aluno, mas você poderá trabalhá-las a partir da projeção das imagens disponíveis no seu DVD e neste material, conforme a seguir:

1. (FGV-SP) A rede Corcovado de hipermercados promove a venda de uma máquina fotográfica digital pela seguinte oferta. "Leve agora e pague daqui a 3 meses". Caso o pagamento seja feito à vista, Corcovado oferece ao consumidor um desconto de 20%. Caso um consumidor prefira aproveitar a oferta, pagando no final do 3º mês após a compra, a taxa anual de juros simples que estará sendo aplicada no financiamento é:

a. 20%

b. 50%

c. 100%

d. 80%

e. 120%

## Resposta Comentada

Daqui a 3 meses o cliente pagará x reais.

O pagamento à vista é de 0,8x reais.

$0{,}2x = 0{,}8x \cdot i \cdot 3 \qquad 0{,}2x = 2{,}4i\,x \qquad i = \frac{1}{12}$. ao mês

A taxa anual será $\frac{1}{12} \cdot 12 = 1$. Ou seja, 100%.

Resposta: C

2. (Unicamp-SP) Um capital de R$ 12.000,00 é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas aplicações ou retiradas, encontre:

a. O capital acumulado após 2 anos.

b. O número inteiro mínimo de anos para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial (se necessário, use log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477).

## Resposta Comentada

Retificando um erro de digitação no item (a) na p. 49 do material do aluno, apresentamos a seguinte solução:

a. $M = 12.000(1 + 0{,}08)^2 = 13.996{,}80$.

O capital acumulado foi de R$ 13.996,80.

b) $M > 12.000 \times 2$

$12.000(1 + 0{,}08)^t > 12.000 \times 2$

$1{,}08^t > 2 \longrightarrow t \log 1{,}08 > \log 2 \longrightarrow t \log \frac{108}{100} > \log 2$

$t(\log 108 - \log 100) > \log 2 \longrightarrow t\{\log(2^2 \cdot 3^3) - 2\log 10\} > \log 2$

$t\{2\log 2 + 3\log 3 - 2\} > \log 2$

$t \cdot 0{,}033 > 0{,}301 \qquad t > 9{,}1212$

Resposta: O número inteiro mínimo de anos é 9.

## Aspectos pedagógicos

Após a resolução destas questões em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos. Selecionamos a primeira questão para orientá-lo nesta análise.

**Analisando as alternativas da questão 1 (FGV-SP)**

Vimos na resolução comentada que a alternativa correta é a **letra c.**

- Para facilitar a compreensão da questão, como a taxa independe do valor do produto, você pode considerar x = 100,. Assim, daqui a 3 meses o cliente pagará 100 reais e o pagamento à vista sai por 80 reais.
- A interpretação do resultado pode ser feita da seguinte maneira: o desconto de 20% pode ser entendido como um aumento de 25% ao trimestre, logo como 1 ano = 4 x (3 meses), temos que a taxa anual é dada por 4 x 25% = 100%.
- As escolhas pelas demais alternativas podem ter sido motivadas por diversos erros comuns que tentamos identificar a seguir:

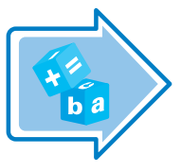
  a. O aluno pode ter se confundido ao considerar o desconto de 20% como um aumento de 20% e ainda desconsiderado o período anual solicitado pela questão.

  b. O aluno pode ter considerado que o desconto de 20% pode ser entendido como um aumento de 25% ao trimestre, mas se confundido ao considerar o período, fazendo indevidamente 2 x 25% =50%.

  c. O aluno pode ter se confundido ao considerar o desconto de 20% como um aumento de 20% e considerando o período anual solicitado pela questão, fez 4 x 20% = 80%.

  d. Não foi encontrado nenhum indício que tenha levado o aluno a marcar esta opção. Ele pode ter escolhido esta alternativa de forma aleatória.

## **Seção –** Momento de Reflexão

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Avaliação da Unidade | Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta | Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade. Ele dividido em duas etapas: a primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda consiste em questões objetivas e dissertativas, cuja escolha fica a critério do professor. | Participação individual dos alunos | 40 min |

## Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à unidade 8. A seguir apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

**Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)**

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, disponível para reprodução neste material, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar às suas no que tange à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- Cálculo de Juros Compostos
- Diferença entre Juros Simples e Compostos

Sugerimos também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho, para se for o caso, repensá-los de acordo com as características apresentadas.

**Etapa 2: Questões objetivas e discursivas**

Sugerimos nesta etapa, a escolha de pelo menos uma questão objetiva que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade, para compor o instrumento avaliativo.

## Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

**Questão 1: (Enem 2012)**

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- **Opção 1:** Pagar à vista, por R$ 55.000,00.
- **Opção 2:** Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00, e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.
- **Opção 3:** Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- **Opção 4:** Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39.000,00.
- **Opção 5:** pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores, à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso, financeiramente, escolher a opção:

a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

e. 5

**Questão 2: (Enem 2011)**

Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

| | Rendimento mensal (%) | IR (imposto de renda) |
|---|---|---|
| POUPANÇA | 0,560 | ISENTO |
| CDB | 0,876 | 4% (sobre o ganho) |

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

A a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
B a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
C o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
D o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
E o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

**Questão 3: (Enem 2011)**

Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês
Investimento B: 36% ao ano
Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

| $n$ | $1{,}03^n$ |
|---|---|
| 3 | 1,093 |
| 6 | 1,194 |
| 9 | 1,305 |
| 12 | 1,426 |

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

- **A** escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
- **B** escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
- **C** escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
- **D** escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
- **E** escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

**Questão 4: (FGV)**

Fábio recebeu um empréstimo bancário de R$10.000,00 para ser pago em duas parcelas anuais, a serem pagas respectivamente no final do primeiro ano e do segundo ano, sendo cobrados juros compostos à taxa de 20% ao ano. Sabendo que o valor da primeira parcela foi R$4.000,00, podemos concluir que o valor da segunda foi de:

a. R$ 8 800,00

b. R$ 9 000,00

c. R$ 9 200,00

d. R$ 9 400,00

e. R$ 9 600,00

## Respostas comentadas das questões objetivas sugeridas

1. Letra (D). Para responder esta questão, basta analisar cada uma das opções dadas para o pagamento a partir da taxa e período de investimento. Daí, observando que os investimentos são aplicados a juros compostos, supondo que Arthur possua exatamente R$55.000,00 hoje e comparando os valores numa mesma data focal, após 1 ano, obtemos:

Opção 1: R$ 55.000,00 (não sobra nada após o pagamento para investir)

Opção 2: Ele paga a entrada de R$30.000,00 e investe os R$25.000,00 restantes num período de 6 meses. Daí, ao final deste período ele terá M=25000 x (1,10)=27500. Assim, pagando R$26.000,00 ainda sobra R$1.500,00 após o pagamento, que se investido por mais 6 meses se transformará em R$1650,00 após 1 ano.

Opção 3: Ele paga a entrada de R$20.000,00 e investe os R$35.000,00 restantes num período de 6 meses, obtendo nesse período M=35000 x (1,10)=38500, daí paga os R$20.000,00 no 1º semestre, continuando a investir R$18.500,00 por mais 6 meses, obtendo M=18500 x (1,10)=20350. Assim, ao final deste 1 ano ele paga R$18.000,00 e ainda sobra para ele R$2.350,00 após o pagamento.

Opção 4: Ele paga a entrada de R$15.000,00 e investe os R$40.000,00 restantes num período de 6 meses. Daí, ao final deste período ele terá $M = 40000 \times (1,10)^2 = 48400$. Assim, pagando R$39.000,00 ainda sobra R$9.400,00 após o pagamento.

Opção 5: Ele investe os R$55.000,00 num período de 1 ano. Daí, ao final deste período ele terá $M = 55000 \times (1,10)^2 = 66550$. Assim, pagando R$60.000,00 ainda sobra R$6.550,00 após o pagamento.

Portanto, a opção mais vantajosa é a opção 4.

2. Letra (D). Para responder esta questão, basta analisar cada uma das opções dadas para o pagamento a partir da taxa e período de investimento e comparar os montantes, daí obtemos:

Poupança: M= 500. 1,0056 = 502,80;

CDB: M=500 . 1,008 76 = 504,38; considerando o desconto de 4,38 . 0,04 = 0,1752, daí M=504,38 - 0,17 = 504,21.

3. Letra (C). Nesta questão, basta observar que os investimentos são aplicados a juros compostos, daí analisando as três opções para o mesmo período de 1 ano, obtemos:

Investimento A: $(1,03)^{12} - 1 = 0,426$. Isto é 42,6% ao ano;

Investimento B: 36% ao ano;

Investimento C: $(1,18)^2 - 1 = 0,3924$. Isto é 39,24% ao ano;

4. Letra (E). Nesta questão, basta recorrer à equivalência de capitais numa mesma data. Considerando a data focal o ano 2, obtemos a equação: $10.000\ (1,2)^2 = 4.000\ (1,2) + P_2$, daí $P_2 = 9.600$ observar a informação de que a cada 6 horas o organismo usa ou elimina 50% da droga. Isto implica que a meia-vida deste medicamento é de 6 horas, o que sugere que quantidade de droga no corpo em cada um desses intervalos apresenta um comportamento de uma exponencial decrescente. Fato observado somente na opção (E).

## Sugestões de questões discursivas para a avaliação

**Questão 1:**

Aplicando-se R$ 15.000,00 a uma taxa de juro composto de 1,7% a.m., quanto receberei de volta após um ano de aplicação? Qual o juro obtido neste período?

**Questão 2:**

Planejo emprestar R$ 18.000,00 por um período de 18 meses ao final do qual pretendo receber de volta um total de R$ 26.866,57. Qual deve ser o percentual da taxa de juro composto para que eu venha a conseguir este montante?

**Questão 3:**

Preciso aplicar R$ 100.000,00 por um período de quantos meses, a uma taxa de juro composto de 1,7% a.m., para que ao final da aplicação eu obtenha o dobro deste capital?

**Questão 4:**

R$ 10.000,00 aplicados por 6 meses a uma taxa de juros simples de 3% a.m., para produzir o mesmo montante na modalidade de juros composto em uma aplicação com a mesma duração, precisará ser aplicada a qual taxa mensal?

**Questão 5:**

Paguei de juros um total R$ 2.447,22 por um empréstimo de 8 meses a uma taxa de juro composto de 1,4% a.m. Qual foi o capital tomado emprestado?

## Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:

**Questão 1:**

Primeiro, vamos identificar cada uma das variáveis fornecidas pelo enunciado do problema:

$$\begin{cases} C\text{: } R\$\ 15.000{,}00 \\ i\text{: } 1{,}7\%\ a.m. \Rightarrow \frac{1{,}7}{100}\ a.m. \Rightarrow 0{,}017\ a.m. \\ n\text{: } 1\ ano \Rightarrow 12\ meses \end{cases}$$

Como a taxa de juros está em meses, também iremos trabalhar com o período de tempo em meses e não em anos como está no enunciado do problema.

Pelo enunciado, identificamos que foram solicitados o montante e o juro, utilizaremos, portanto a fórmula abaixo que nos dá o montante:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Ao substituirmos cada uma das variáveis pelo seu respectivo valor teremos:

$$M = 15000 \cdot (1 + 0{,}017)^{12}$$

Podemos então realizar os cálculos para encontramos o valor do montante:

$$M = 15000 \cdot (1 + 0{,}017)^{12} \Rightarrow$$

$$M = 15000 \cdot 1{,}017^{12} \Rightarrow$$

$$M = 15000 \cdot 1{,}224197 \Rightarrow$$

$$M = 18362{,}96$$

Logo o montante a receber será de R$ 18.362,96. Sabemos que a diferença entre o montante e o capital aplicado nos dará os juros do período. Temos então:

$$j = M - C \Rightarrow$$

$$j = 18362{,}96 - 15000 \Rightarrow$$

$$j = 3362{,}96$$

Portanto:

Após um ano de aplicação receberei de volta um total de R$ 18.362,96, dos quais R$ 3.362,96 serão recebidos a título de juros.

**Questão 2:**

Do enunciado, identificamos as seguintes variáveis:

$$\begin{cases} C\text{: } R\$\ 18.000,00 \\ n\text{: } 18\ meses \\ M\text{: } R\$\ 26.866,57 \end{cases}$$

A partir da fórmula básica para o cálculo do juro composto, iremos isolar a variável **i**, que se refere à taxa de juros que estamos em busca:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Como já vimos na parte teórica, esta variável pode ser isolada com os seguintes passos:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow$$

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = \sqrt[n]{(1 + i)^n} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = 1 + i \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$$

Por fim, substituiremos as variáveis da fórmula pelos valores obtidos do enunciado:

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[18]{\frac{26866,57}{18000}} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[18]{\frac{26866,57}{18000}} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[18]{1,492587} - 1 \Rightarrow$$

$$i = 1,0225 - 1 \Rightarrow$$

$$i = 0,0225$$

O valor decimal **0,0225** corresponde ao valor percentual de **2,25%**.

Logo, para que eu venha obter o montante desejado, é preciso que a taxa de juro composto seja de 2,25% a.m.

**Questão 3:**

Do enunciado, identificamos as seguintes variáveis:

$$\begin{cases} C\text{: } R\$\ 100.000,00 \\ i\text{: } 1,7\%\ a.m. \Rightarrow \frac{1,7}{100}\ a.m. \Rightarrow 0,017\ a.m. \\ M\text{: } R\$\ 200.000,00 \end{cases}$$

Tendo por base a fórmula básica para o cálculo do juro composto, isolemos a variável **n**, que se refere ao período de tempo que estamos a procura:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow$$

$$(1 + i)^n = \frac{M}{C} \Rightarrow$$

$$\log(1 + i)^n = \log\left(\frac{M}{C}\right) \Rightarrow$$

$$n \cdot \log(1 + i) = \log\left(\frac{M}{C}\right) \Rightarrow$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + i)}$$

Substituindo o valor das variáveis na fórmula:

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1 + i)} \Rightarrow$$

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1{,}017)} \Rightarrow$$

$$n = \frac{0{,}301030}{0{,}007321} \Rightarrow$$

$$n = 41{,}12$$

Assim sendo:

Para que eu consiga dobrar o valor do meu capital, precisarei de 42 meses de aplicação.

**Questão 4:**

Do enunciado, obtemos os seguintes valores:

$$\begin{cases} C\text{: } R\$\ 10.000{,}00 \\ i\text{: } 3\%\ a.m. \Rightarrow \frac{3}{100}\ a.m. \Rightarrow 0{,}03\ a.m. \\ n\text{: } 6\ meses \end{cases}$$

Para sabermos qual o montante produzido na modalidade simples, utilizaremos a fórmula abaixo:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

Ao substituirmos as variáveis e realizarmos os cálculos, iremos obter o resultado:

$$M = 100000 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 6) \Rightarrow$$

$$M = 100000 \cdot (1 + 0{,}18) \Rightarrow$$

$$M = 100000 \cdot 1{,}18 \Rightarrow$$

$$M = 118000$$

Agora que sabemos que o montante produzido na modalidade simples é R$ 11.800,00, utilizaremos a fórmula abaixo para calcularmos a taxa de juros na modalidade capitalizada:

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$$

Substituindo as variáveis e calculando:

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[6]{\frac{11800}{10000}} - 1 \Rightarrow$$

$$i = \sqrt[6]{1,18} - 1 \Rightarrow$$

$$i = 1,0279698 - 1 \Rightarrow$$

$$i = 0,0279698$$

Como sabemos ao multiplicarmos **0,0279698** por cem iremos obter o valor percentual da taxa a qual estamos procurando.

Portanto, os R$ 10.000,00 precisam ser aplicados à taxa capitalizada de 2,79698% a.m. para que se apure o montante de R$ 11.800,00, o mesmo montante produzido na aplicação a juros simples pelo mesmo período de tempo.

**Questão 5:**

Em primeiro lugar, vamos identificar as variáveis fornecidas pelo enunciado:

$$\begin{cases} j\text{: } R\$\ 2.447,22 \\ n\text{: } 8\ meses \\ i\text{: } 1,4\%\ a.m. \Rightarrow \frac{1,4}{100}\ a.m. \Rightarrow 0,014\ a.m. \end{cases}$$

Como sabemos, a fórmula básica para o cálculo do juro composto é

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Mas como estamos interessados em calcular o **capital**, é melhor que isolemos a variável **C** como a seguir:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow$$

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

Note que a variável **M** não consta no enunciado, mas ao invés disto, temos a variável **j**, no entanto sabemos que o valor do montante é igual à soma do valor principal com o juro do período, então temos:

$$M = C + j$$

Podemos então substituir **M** por **C + j** na expressão anterior:

$$C = \frac{C + j}{(1 + i)^n}$$

Vamos então novamente isolar a variável **C**:

$$C = \frac{C + j}{(1 + i)^n} \Rightarrow$$

$$C \cdot (1 + i)^n = C + j \Rightarrow$$

$$C \cdot (1 + i)^n - C = j \Rightarrow$$

$$C \cdot \left((1 + i)^n - 1\right) = j \Rightarrow$$

$$C = \frac{j}{(1 + i)^n - 1}$$

Finalmente, podemos substituir as variáveis da fórmula pelos valores obtidos do enunciado:

$$C = \frac{j}{(1 + i)^n - 1} \Rightarrow$$

$$C = \frac{2447{,}22}{(1 + 0{,}014)^8 - 1} \Rightarrow$$

$$C = \frac{2447{,}22}{1{,}014^8 - 1} \Rightarrow$$

$$C = \frac{2447{,}22}{1{,}117644 - 1} \Rightarrow$$

$$C = \frac{2447{,}22}{0{,}117644} \Rightarrow$$

$$C = 20801{,}91$$

Logo, o capital tomado emprestado foi de R$ 20.801,96.

## Folha de Atividades – Avaliação

Nome da Escola: _____

Nome: _____

## Momento de Reflexão

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na unidade 28 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder as questões a seguir:

**Questão 1:** Qual foi o conteúdo matemático estudado nesta unidade? Cite alguns conceitos relacionados a este tema que formam estudados nesta unidade.

---

**Questão 2:**

Cite alguma situação do cotidiano que envolve os conhecimentos aqui estudados.

---

**Questão 3:**

Que tipo de crescimento é expresso pela fórmula do montante, utilizando juros simples?

---

Que tipo de crescimento é expresso pela fórmula do montante, utilizando juros compostos?

---

**Questão 4:**

a. Suponhamos que um capital de R$ 500,00 fosse aplicado a uma taxa de 2% ao mês durante 4 meses. Determine os montantes obtidos ao final de cada mês nos regimes de juros simples e compostos.

| | Regime de juros simples | Regime de juros compostos |
|---|---|---|
| **1º mês** | | |
| 2º mês | | |
| 3º mês | | |
| 4º mês | | |

b. Represente no verso desta folha os gráficos correspondentes aos regimes simples e compostos 4 primeiros meses.

## Respostas da Folha de Atividades - Avaliação

**Questão 1**

Matemática Financeira

Espera-se que os alunos citem conceitos como juros simples e compostos, poupança, investimentos, valor do dinheiro no tempo, equivalência de capitais etc.

**Questão 2:**

Espera-se que os alunos citem conceitos como poupança, investimentos, empréstimos, compras parcelas com ou sem juros etc.

**Questão 3:**

a. Crescimento linear

b. Crescimento exponencial

**Questão 4:**

***a. Juros simples***

$M = C + J$ onde $J = C . i . t$

| 1° Mês | 2° Mês | 3° Mês | 4° Mês |
|---|---|---|---|
| J = 500 * 0,02 * 1 | J = 500 * 0,02 * 1 | J = 500 * 0,02 * 1 | J = 500 * 0,02 * 1 |
| J = 10 | J = 10 | J = 10 | J = 10 |
| M = 500 + 10 = 510 | M = 510 + 10 = 520 | M = 520 + 10 = 530 | M = 530 + 10 = 540 |

Montante ao final do quarto mês será igual a R$ 540,00.

***Juros compostos***

$M = C . (1 + i)^t$

| 1° Mês | 2° Mês | 3° Mês | 4° Mês |
|---|---|---|---|
| $M = 500*(1+0,02)^1$ | $M = 500*(1,02)^2$ | $M = 500*(1,02)^3$ | M = 500*(1,02)4 |
| M = 510 | M = 500 * 1,0404 | M = 500*1,061208 | M = 500*1,08243216 |
| | M = 520,20 | M = 530,60 | M = 541,22 |

Montante ao final do quarto mês será igual a R$ 541,22

b. Gráfico do Montante, atrelado a Juros Simples

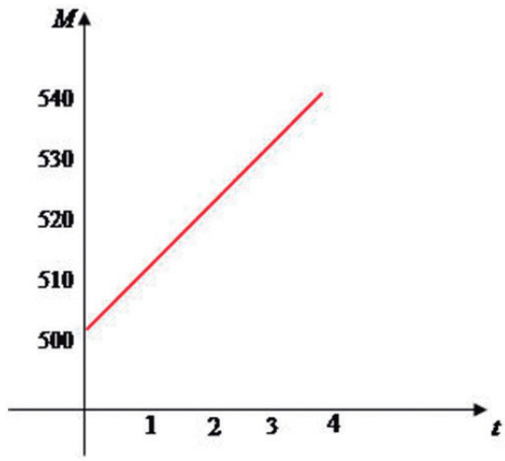
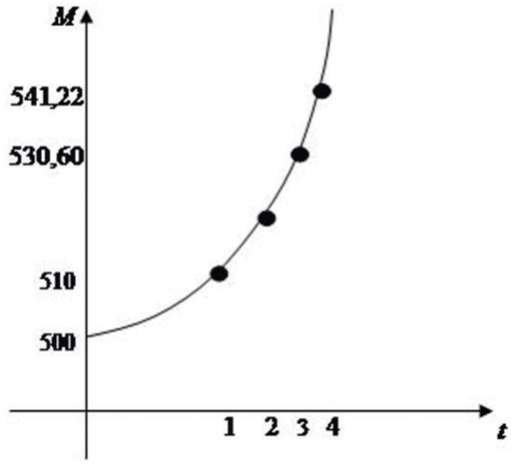
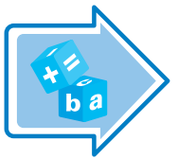



Gráfico do Montante, atrelado a Juros Compostos



## ATIVIDADE COMPLEMENTAR

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Exercícios de Fixação Complementares | Folha de Atividades disponível para reprodução no pendrive ou DVD do professor, lápis/caneta | – | Turma dividida em duplas ou em trios | |

## Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das principais noções ligadas aos conceitos de juros simples e juros compostos, trabalhadas ao longo desta unidade, tanto no material do aluno quanto nas atividades sugeridas neste material a partir da resolução de situações-problema.

Estes exercícios foram distribuídos em uma "Folha de atividades" – que se encontra disponível para reprodução no material multimídia do professor – e poderão ser aplicados ao término de cada seção do material do aluno ou todos juntos no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados. Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo pdf de seu DVD.

Peça que os alunos organizem-se em duplas ou em trios e distribua a folha de atividades.

Depois que os alunos tiverem concluído o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, discuta e as soluções apresentadas por eles.

## Aspectos pedagógicos

Procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno para que todos possam ficar com uma cópia do material, tornando-o mais uma fonte de consulta.

Escolha previamente quais os exercícios adéquam-se mais à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos na Unidade 28.

É recomendado que essa atividade seja trabalhada pelos alunos com o auxílio de uma calculadora, para que as possíveis dificuldades de cálculo não interfiram no desenvolvimento das habilidades e competências que aqui estarão sendo construídas no que diz respeito às noções elementares de matemática financeira.

Ao discutir as soluções apresentadas pelos alunos, procure valorizar cada estratégia de resolução proposta mesmo que algumas delas não tenham o conduzido a uma resposta verdadeira.

Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção, enquanto professor. Esses exercícios podem favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito há habilidade de resolver problemas.

## Folha de Atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

Nome da Escola: _____

Nome: _____

1. **(UFRJ)** Uma loja oferece duas formas de pagamentos para seus clientes: à vista ou em duas parcelas iguais. A loja anuncia, na sua vitrine, um vestido por um preço total de R$200,00 para pagamento em duas vezes, sendo R$100,00 no ato da compra e R$100,00 trinta dias após essa data. Para pagamento à vista, a loja oferece um desconto de 10% sobre o preço total de R$200,00, anunciado na vitrine. Considerando o preço à vista como o preço real do vestido, determine a taxa de juros cobrada pela loja no pagamento em duas vezes.

2. **(UNICAMP)** Um vendedor propõe a um comprador de um determinado produto as seguintes alternativas de pagamento:

pagamento à vista com 65% de desconto sobre o preço de tabela;

pagamento em 30 dias com desconto de 55% sobre o preço de tabela.

Qual das duas alternativas é mais vantajosa para o comprador, considerando-se que ele consegue, com uma aplicação de 30 dias, um rendimento de 25%?

3. O capital de R$ 360,00 foi aplicado a juros simples durante 3 anos e 2 meses, sob taxa de 0,5 % ao mês. Qual o montante final?

   a. R$ 68,40

   b. R$ 428,40

   c. R$ 542,60

   d. R$ 654,00

   e. R$ 420,00

4. Se uma pessoa deseja obter um rendimento de R$2700,00, dispondo de R$9000,00 de capital, a que taxa de juros simples quinzenal o dinheiro deverá ser aplicado no prazo de 5 meses?

   a. 10%

   b. 5%

   c. 3%

d. 8%

e. 5,5%

5. Um investidor aplicou R$600 000,00 a juros compostos mensais, durante 2 anos e recebeu um montante de R$3 804 708,60. Qual foi a taxa da operação? (Dica: $\sqrt[24]{6,341181} \cong 1,08$ )

   a. 8% a.m

   b. 9% a.m

   c. 10% a.m

   d. 5% a.m

   e. 6% a.m

6. Ao final de quanto tempo, aproximadamente, os juros compostos produzidos por certo capital são iguais à metade deste, se usarmos a taxa de 8%, com capitalização anual?

   a. 5 anos

   b. 6 anos

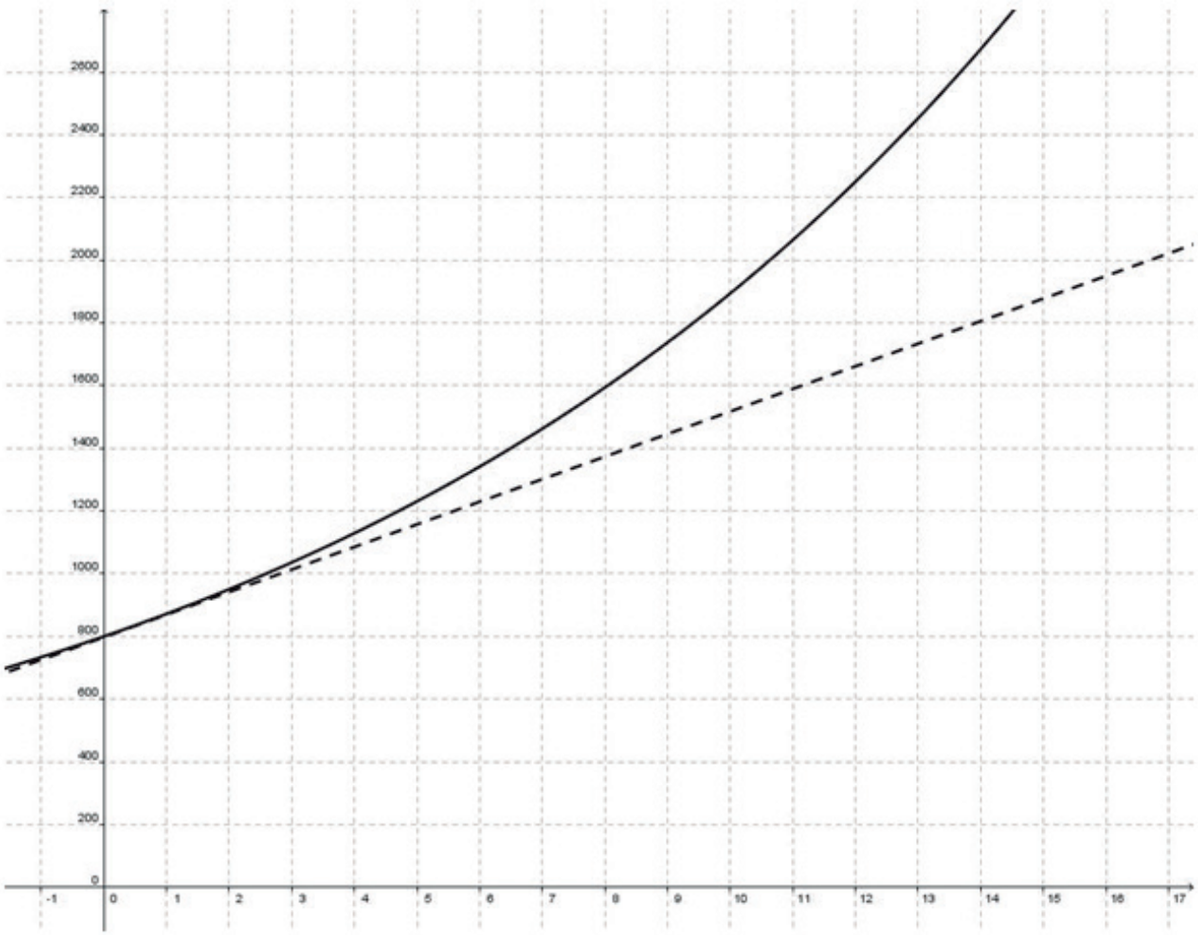
   c. 7anos

   d. 8 anos

   e. 9 anos

7. Qual o montante gerado pelo capital de R$ 1.500,00, aplicados a juros compostos durante 6 meses, a uma taxa de 2% ao mês?

8. Um investidor dispõe de um capital de R$800,00 com o qual fará uma aplicação a uma taxa de 9% ao ano. Abaixo estão dados dois esboços de gráficos, um correspondente à função que representa essa aplicação se realizada a juros compostos e outro que correspondente à função que representa essa aplicação se realizada a juros simples.




Observe e analise o gráfico e responda:

a. Qual dos dois gráficos corresponde à aplicação a juros compostos: o de linha contínua ou o de linha pontilhada? Justifique.

b. Utilizando os gráficos, faça uma estimativa de em quanto o tempo o investidor poderá dobrar seu investimento, através de uma aplicação a juros compostos?

c. Utilizando os gráficos, faça uma estimativa de em quanto o tempo o investidor poderá dobrar seu investimento, através de uma aplicação a juros simples?

d. Utilizando os gráficos, faça uma estimativa da diferença entre os montantes obtidos em cada uma das duas modalidades de aplicação, após 12 anos?

## Respostas da Folha de Atividades – Exercícios Complementares

1. Para o cálculo do preço à vista do vestido, devemos determinar o valor do desconto em reais. Assim, queremos determinar quanto é 10% de 200. Como 10% de 200 = 0,10 . 200 = 20, temos que o valor à vista do vestido será 200 – 20 = 180 reais. Como 100 reais serão pagos no ato da compra, a apenas há incidência de

juros sobre os 80 reais restantes do preço real do vestido. Após passados 30 dias, será cobrado o valor de 100 reais e não mais os 80. Então podemos dizer que uma certa taxa i de juros, ao incidir sobre os 80 reais, resulta em 100 reais. Assim 80 . i = 100. Logo i = ¼ ou i = 0,25. O que corresponde a uma taxa de 25%.

2. Suponhamos que o preço de tabela do produto corresponda a um valor P. Optando pela alternativa *a*, o comprador teria um desconto de 65% e, portanto, pagaria 35% (100% - 65%) do preço de tabela, o que podemos representar por 0,35P. Optando pela alternativa *b*, o comprador pagaria teria um desconto de 55% e, portanto, pagaria 45% (100% - 55%) do preço de tabela – 0,45P –, mas apenas 30 dias após compra. Se, ao invés de pagar os 35% do valor de tabela no ato da compra, conforme a alternativa *a* de pagamento, o comprador aplicasse esse capital a uma taxa de 25% ao mês, 30 dias depois ele teria um montante de 0,35P + 0,25 . 0,35P = 0,35P + 0,0875P = 0,4375P. Esse montante é menor que o necessário para a compra do produto pela alternativa *b*. Logo a alternativa a é a mais vantajosa para o comprador.

3. Numa aplicação a juros simples o montante M pode ser calculado da seguinte forma: M = C + C . i . t, onde C corresponde ao capital inicial, i à taxa e t ao tempo de aplicação. Logo, o montante resultante da aplicação de 360 reais a uma taxa de 0,5% (0,005) ao mês por 3 anos e 2 meses (38 meses), será: M = 360 + 360 . 0,005 . 38 = 360 + 68,40 = 428,40. Assim a alternativa correta é a letra B.

4. Numa aplicação a juros simples o montante M pode ser calculado da seguinte forma: M = C + C . i . t, onde C corresponde ao capital inicial, i à taxa e t ao tempo de aplicação. Logo, se o rendimento resultante da aplicação de 9000 reais é igual a 2700 ao final de 5 meses (10 quinzenas), a taxa de aplicação quinzenal pode ser obtida da seguinte forma: 9000 + 2700 = 9000 + 9000 . i . 10, ou seja, 90000 i = 2700. Logo i = 0,03 ou 3%. Assim a alternativa correta é a letra C.

5. Numa aplicação a juros compostos o montante M pode ser calculado da seguinte forma: $M = C (1 + i)^t$, onde C corresponde ao capital inicial, i à taxa e t ao tempo de aplicação. Logo, se o montante resultante da aplicação de 600000 reais é igual a 3804708,60 ao final de 2 anos (24 meses), a taxa de aplicação mensal pode ser obtida da seguinte forma: $3804708,60 = 600000 (1 + i)^t$, ou seja, $(1 + i)^{24} = 6,341181$. Usando a dica informada no enunciado do exercício, temos 1 + i = 1,08. Logo i = 0,08 ou 8%. Assim a alternativa correta é a letra A.

6. Numa aplicação a juros compostos o montante M pode ser calculado da seguinte forma: $M = C (1 + i)^t$, onde C corresponde ao capital inicial, i à taxa e t ao tempo de aplicação. Logo, se M = C + C/2 e i = 0,08, temos: $C + 0,5 C = C (1 + 0,08)^t$. Assim, $1,5 C = C (1 + 0,08)^t$. Logo, $1,5 = (1,08)^t$. Essa equação exponencial pode ser resolvida a partir de logaritmo, mas, por se tratar de uma questão objetiva, também pode ser resolvida por "tentativa e erro" utilizando os valores indicados nas alternativas. $1,08^5 = 1,469328077$; $1,08^6 = 1,586874323$; $1,08^7 = 1,713824269$; $1,08^8 = 1,85093021$ e $1,08^9 = 1,999004627$. Dos valores obtidos, 1,586874323 é o mais aproximado de 1,5. Logo a alternativa correta é a letra B.

7. Numa aplicação a juros compostos o montante M pode ser calculado da seguinte forma: $M = C (1 + i)^t$, onde C corresponde ao capital inicial, i à taxa e t ao tempo de aplicação. Logo, se o capital é de 1500, durante 6 meses a uma taxa i de 2% ou 0,02, temos: $M = 1500 (1 + 0,02)^6$. Assim, $M = 1500 (1,02)^6$. Logo, M = 1500 . 1,126162419 = 1689,243629. Logo, o montante será de aproximadamente R$1689,24.

8.

   a. O gráfico de linha contínua é o correspondente à função que representa a aplicação a juros compostos uma vez que este e representado por uma curva exponencial e não por uma reta, como é o caso do gráfico de linha pontilhada.

b. Ao dobrar seu investimento, o investidor terá um montante de 1600 reais. Esse valor é atingido, na aplicação a juros compostos, depois de decorridos 8 anos.

c. Ao dobrar seu investimento, o investidor terá um montante de 1600 reais. Esse valor é atingido, na aplicação a juros simples, depois de decorridos 11 anos.

d. A diferença entre os montantes obtidos em cada uma das duas modalidades de aplicação após 12 anos é de, aproximadamente, 600 reais.

# Matrizes e Determinantes

*Cleber Dias da Costa Neto, Heitor Barbosa Lima de Oliveira, Patrícia Nunes da Silva e Telma Alves. Juliana Bezerra.*

## Introdução

Na Unidade 29 do módulo 3 do material do aluno são apresentadas diversas situações e atividades sobre Matrizes e Determinantes.

Para auxiliá-lo, pesquisamos e elaboramos algumas atividades e recursos que podem complementar a exposição deste tema em suas aulas. O detalhamento dessas atividades está presente no texto que segue.

Sugerimos que a primeira aula dessa Unidade se inicie com uma atividade disparadora. É uma atividade cujo intuito, além de iniciar a exposição do tema, é promover uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, espera-se que os alunos consigam identificar e representar matrizes, e que efetuem cálculos envolvendo operações com matrizes.

Para dar sequência ao estudo dessa Unidade, abordando Matrizes e Determinantes, disponibilizamos alguns recursos complementares vinculados ao conteúdo do material didático. Tais recursos apresentam-se associados às atividades descritas detalhadamente neste material, estimulando à resolução de problemas que abordam operações e linguagem matriciais, além de aplicações que se utilizam do cálculo de determinantes. Sugerimos realização dessas atividades nas aulas subsequentes à aula inicial de acordo com a realidade da sua turma. Recomendamos que sejam feitas as alterações e adaptações sempre que achar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta Unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro, dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta Unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo. E o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da mera reprodução de exercícios feitos anteriormente. Também disponibilizaremos algumas questões de avaliações de larga escala, como ENEM, Vestibulares, Concursos Públicos, entre outros.

# Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

| Disciplina | Volume | Módulo | Unidade | Estimativa de aulas para essa unidade |
|---|---|---|---|---|
| Matemática | 1 | 3 | 5 | 6 aulas de 2 tempos |

| Titulo da unidade | Tema |
|---|---|
| Conhecendo um pouco de Matrizes e Determinantes | Matrizes e Determinantes |
| **Objetivos da unidade** | |
| Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes; | |
| Efetuar cálculos, envolvendo as operações com matrizes; | |
| Resolver problemas, utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial; | |
| Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 . | |
| **Seções** | **Páginas no material do aluno** |
| Para início de conversa... | 51 e 52 |
| Seção 1 – Conhecendo e construindo matrizes | 53 a 57 |
| Seção 2 – Vamos operar com matrizes? | 57 a 67 |
| Resumo | 67 |
| Veja ainda | 67 |
| O que perguntam por aí? | 69 e 70 |
| Caiu na rede | 71 |
| Respostas das atividades | 72 a 74 |
| Recursos Complementares | 75 |

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspon-

dência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

# Recursos e ideias para o Professor

## Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

**Atividades em grupo ou individuais**

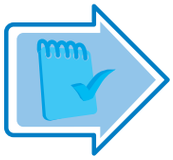
São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

**Ferramentas**

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

**Applets**

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



**Avaliação**

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

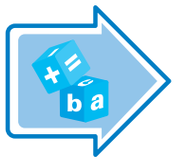
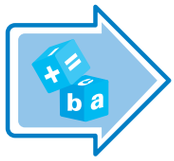
**Exercícios**

Proposições de exercícios complementares

## Atividade(s) inicial(is)

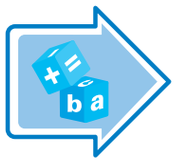
Descrevemos a seguir situações motivadoras nas quais queremos que os alunos iniciem uma discussão coletiva e se familiarizem com o conteúdo matemático a ser trabalhado de forma empírica e com atividades de fácil compreensão antes da formalização. Sugerimos que você escolha a que seja mais adequada à sua realidade ou, se preferir, utilize uma atividade própria.

### Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Somas | Tesouras e cópias da folha de atividades — Somas (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão se familiarizar com a construção de matrizes e a notação matricial através da resolução de quebra-cabeças que envolvem somas. | Turma disposta em duplas. | 20 minutos |
|  | Figuras Secretas | Réguas e cópias da folha de atividades — Figuras secretas (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nessa atividade, os alunos irão se familiarizar com a notação para os elementos de uma matriz. | Turma disposta em duplas. | 25 minutos |

## **Seção 1** – Conhecendo e construindo matrizes

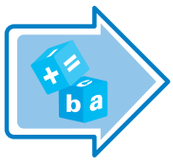
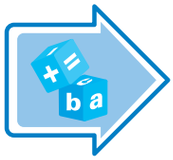
*Páginas no material do aluno*
**53 a 57**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Liga de Vôlei | Folha de atividades | Nesta atividade, os alunos trabalharão com a identificação e interpretação dos elementos de uma matriz para responderem às questões que seguem. | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |
| | Cooperativa de leite | Vídeo "Cooperativa de leite" disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076 e cópias da Folha de Atividades – Cooperativa de leite (disponível na Seção Aspectos operacionais). | No vídeo utilizado nessa atividade, os membros de uma cooperativa de leite recorrem a matrizes para determinar a melhor localização de um tanque de refrigeração comunitário.<br>Obs.: Essa atividade está disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076 | Turma dividida em duplas. | 40 minutos. |

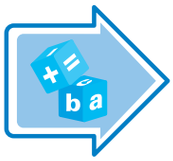
## **Seção 2** – Vamos operar com matrizes?

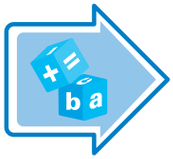
*Páginas no material do aluno*
**53 a 57**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Bombons a Granel | Vídeo Bombons a Granel disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055, calculadoras e cópias da Folha de atividades – Bombons a Granel (disponível na Seção Aspectos operacionais). | No vídeo utilizado nessa atividade, com o auxílio de multiplicação de matrizes, uma vendedora de bombons aprende a determinar o preço de venda de seus produtos.<br>Obs.: Esta atividade está disponível em fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055 | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |
| | Desenho Matrix | Datashow, computador, material disponível em http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html, folha de atividades. | Esta atividade propõe uma reflexão sobre o que é uma matriz transposta através de sucessivas atividades envolvendo a alteração de imagens.<br>Obs.: Essa atividade foi adaptada de http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html, acesso em 07/07/2013 | Turma dividida em grupos de 4 alunos. | 25 minutos. |

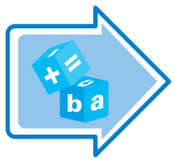
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Determinantes e áreas | Calculadoras e cópias da Folha de atividades – Determinantes e áreas (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos utilizarão o valor do determinante de uma matriz para calcular a área de um triângulo.<br>Obs: Propriedades dos determinantes e o cálculo da área de triângulos: exemplos significativos disponível em http://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/77/determinantes.pdf | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |
|  | Campeonato de Determinantes | Cartões com números. | Esta atividade trabalha o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2. | Turma dividida em grupos de 4 alunos. | 25 minutos. |

## Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Registros de aprendizagens | Cópias da folha de atividades | Esta etapa pode estar articulada à seção **"Veja ainda"** no material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as resoluções dos exercícios de revisão, enfatizando as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade. | Individual | 25 minutos |

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Questões de avaliações de larga escala ou concurso | Cópias das questões. | Sugerimos, nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta Unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como o ENEM, vestibulares, concursos, etc. | Individual | 20 minutos |

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Somas | Tesouras e cópias da folha de atividades — Somas (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos irão se familiarizar com a construção de matrizes e a notação matricial através da resolução de quebra-cabeças que envolvem somas. | Turma disposta em duplas. | 20 minutos |

## Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades. Oriente-os a recortarem as peças e a montarem os quadrados mágicos.

- Ao final da atividade, represente cada um dos quebra-cabeças matricialmente. Por exemplo, esquematize no quadro:

| | | |
|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |

- Reforce o significado dos índices: o primeiro representa a linha, e o segundo, a coluna.
- Discuta coletivamente a resolução de cada um dos quebra-cabeças. Peça aos alunos que informem qual número foi colocado em cada uma das posições.

## Folha de atividades – Somas

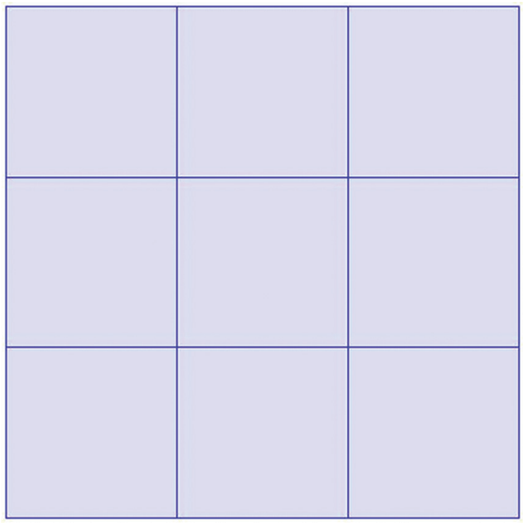
Nome da Escola: _____

Nome: _____

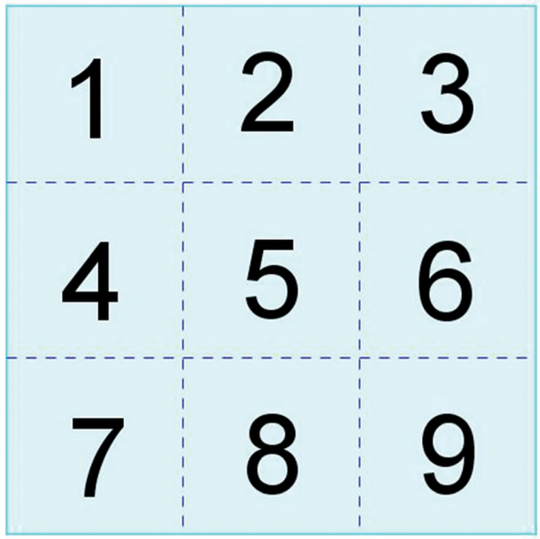
**Soma 15**

Recorte as peças numeradas de 1 a 9 que estão na próxima folha.

Organize as peças numeradas de 1 a 9 no tabuleiro de modo que, ao efetuar a adição das 3 peças na horizontal, na vertical e também nas diagonais, a soma seja sempre igual a 15.



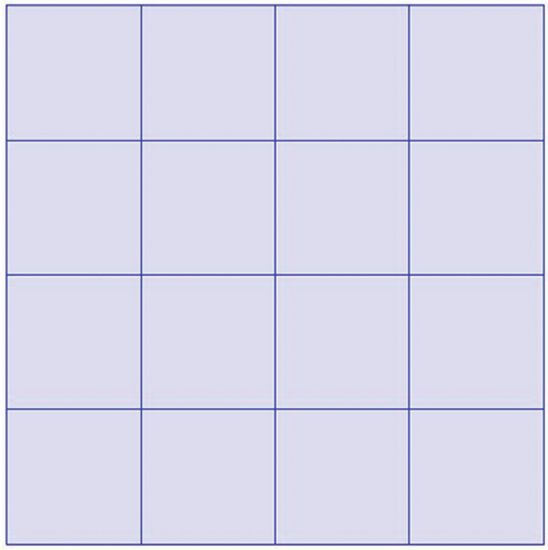
**Peças para recortar**




**Soma 28**

Recorte as peças numeradas que estão na próxima folha.

Organize as peças numeradas no tabuleiro de modo que, ao efetuar a adição das 4 peças na horizontal, na vertical e também nas diagonais, a soma seja sempre igual a 28.



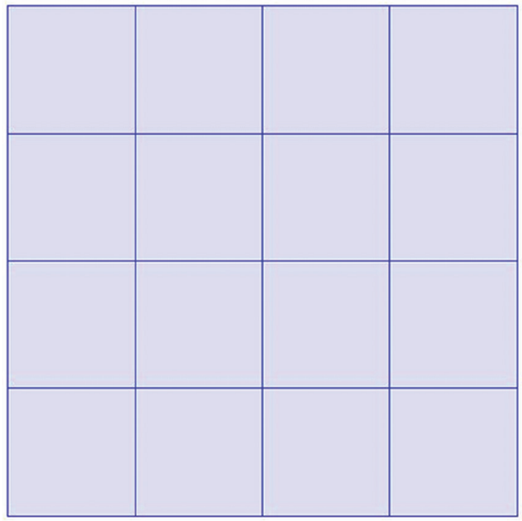
**Peças para recortar**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 9 | 9 | 9 |
| 9 | 9 | 8 | 8 |
| 8 | 6 | 6 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | 2 |

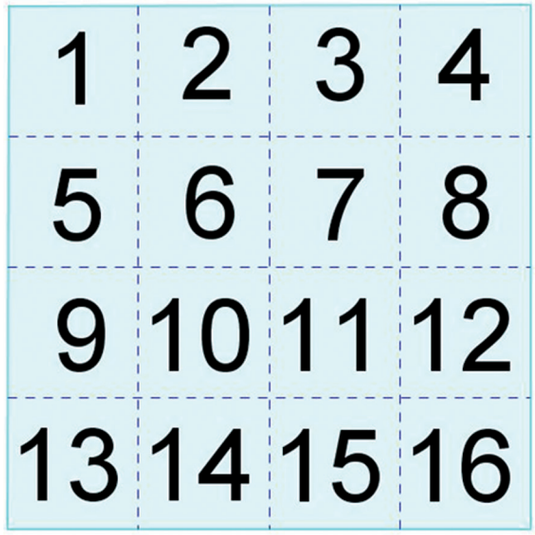
**Soma 34**

Recorte as peças numeradas de 1 a 16 que estão na próxima folha.

Organize as peças numeradas de 1 a 16 no tabuleiro de modo que, ao efetuar a adição das 4 peças na horizontal, na vertical e também nas diagonais, a soma seja sempre igual a 34.



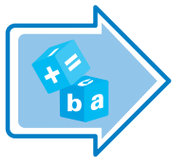
**Peças para recortar**




## Aspectos pedagógicos

- Certifique-se de que todos os alunos compreenderam as regras de montagem de cada um dos quebra-cabeças. Certifique-se que eles não misturaram as peças dos diferentes quebra-cabeças.
- No momento de discussão das soluções, lembre-se de que eles admitem mais de uma solução. Considere as múltiplas possibilidades obtidas pelas duplas.
- Registre que cada solução encontrada é uma matriz de mesma ordem, porém com elementos diferentes; peça para que eles identifiquem esses elementos usando a notação de índices;
- Para explorar a atividade no sentido da linguagem matricial, aproveite para dar um nome diferente a cada matriz solução; pergunte, através da linguagem própria, elementos aleatórios das matrizes soluções, por exemplo: qual o elemento a23 da matriz A? Qual o elemento b32 da matriz B ? Qual o elemento c14 da matriz C?

## Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Figuras Secretas | Réguas e cópias da folha de atividades — Figuras secretas (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nessa atividade, os alunos irão se familiarizar com a notação para os elementos de uma matriz. | Turma disposta em duplas. | 25 minutos |

## Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua as réguas e as folhas de atividades;
- Peça aos alunos que leiam a parte inicial do texto. Discuta com eles o exemplo apresentado no texto;
- Peça que resolvam os problemas propostos;
- Ao final, discuta coletivamente as soluções propostas pelas duplas.

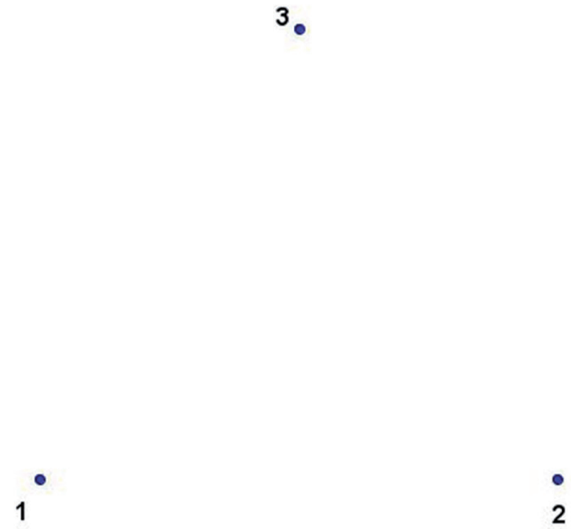
## Folha de atividades – Figuras secretas

Nome da Escola: _____

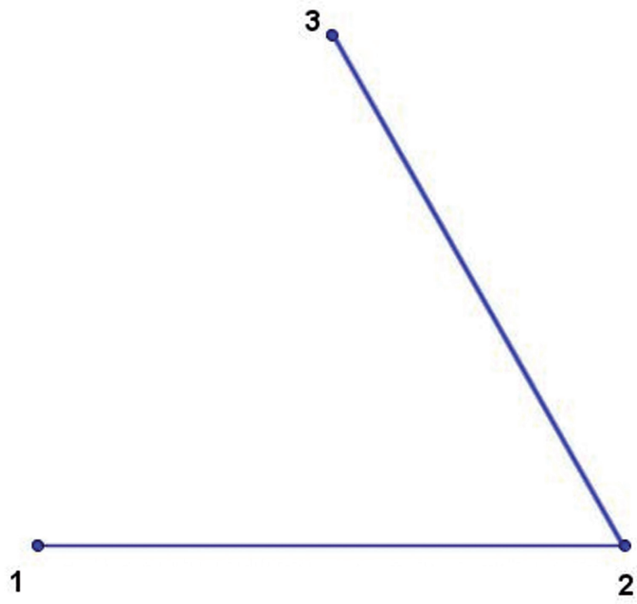
Nome: _____

Nessa atividade, a matriz A vai nos ajudar a construir uma figura secreta. Para construir a figura secreta, vamos ligar os pontos numerados com segmentos de reta. Para saber quais pontos unir, vamos consultar a matriz A. Se o elemento a_ij da matriz A é igual a 1, devemos ligar os ponto i e o ponto j. Se o elemento a_ij da matriz A é igual a 0, não devemos ligar os ponto i e o ponto j. Por exemplo, considere a matriz A e os pontos numerados de 1 a 3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



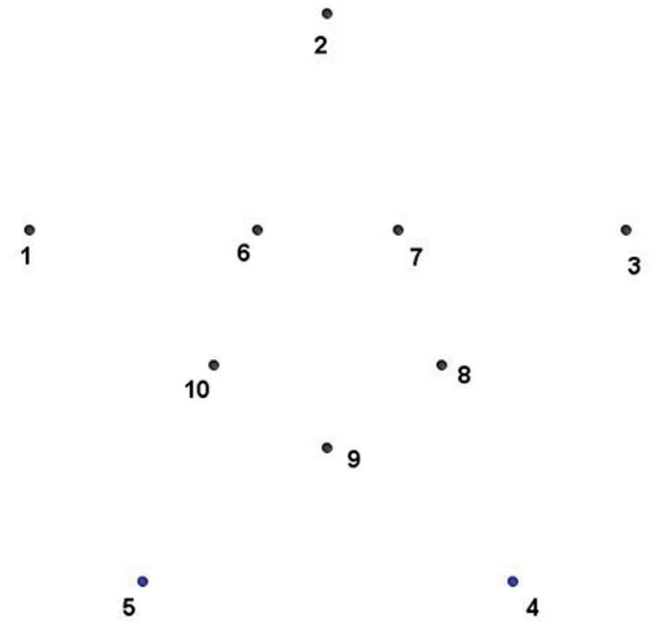

Vamos considerar apenas os elementos não nulos de $A: a_{12}, a_{21}, a_{23}$ e $a_{32}$. Portanto, vamos ligar o ponto 1 ao ponto 2 e o ponto 2 ao ponto 3:



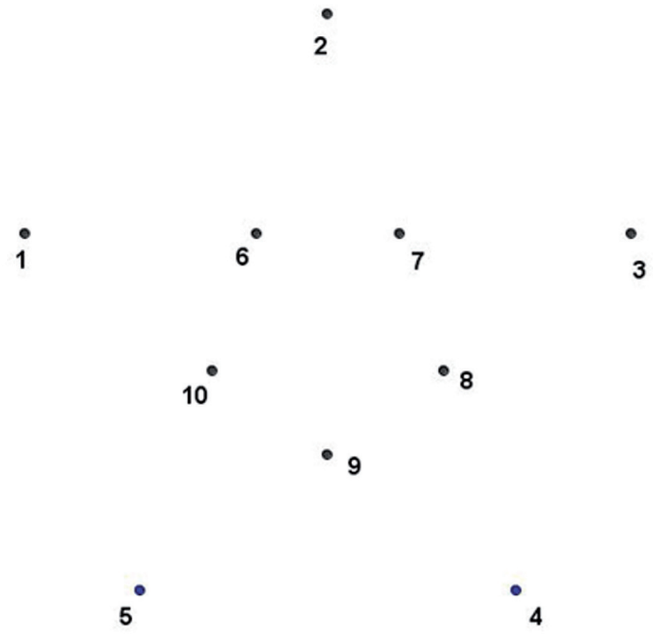

Problemas propostos

Considere a matriz *A* e os pontos numerados e construa a figura secreta. Lembre-se de que se $a_{ij} = 1$, então os pontos *i* e *j* devem ser ligados por um segmento.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$




2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

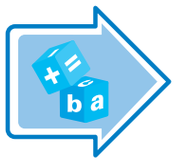



## Aspectos pedagógicos

- Discuta cuidadosamente com os alunos a convenção feita sobre os elementos da matriz *A*;
- Se necessário, apresente mais um exemplo simples para que fique claro o processo de construção da figura a partir dos elementos de *A*;
- Oriente os alunos a identificarem quais são os elementos não nulos da matriz. Em que linha ele está? Em que coluna? Essas informações vão dizer quais pontos devem ser ligados;
- Sugira aos alunos numerarem as linhas e as colunas para facilitar a identificação dos índices dos elementos da matriz *A*;
- Talvez seja necessário representar no quadro os elementos das matrizes sob a notação de índices;
- Se possível, mostre que as matrizes em questão têm como eixo de simetria a diagonal principal da matriz. Explique o que isso significa nos problemas propostos, pois tem relação direta com a ligação entre os pontos;
- A dificuldade dos alunos pode surgir da confusão pela falta de prática com a linguagem.

## **Seção 1** – Conhecendo e construindo matrizes

*Páginas no material do aluno*
**53 a 57**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Liga de Vôlei | Folha de atividades | Nesta atividade, os alunos trabalharão com a identificação e interpretação dos elementos de uma matriz para responderem às questões que seguem. | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua a folha de atividades;
- Relembre com os alunos como podemos identificar cada elemento em uma matriz, levando-se em consideração a linha e a coluna em que se encontram.

## Folha de atividades – Liga de Vôlei

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Quatro seleções (Rússia, Itália, Brasil e EUA) disputam a etapa final de um torneio internacional de vôlei no sistema "todos jogam contra todos" uma única vez. A campeã do torneio será a equipe que obtiver mais vitórias; em caso de empate no número de vitórias, a campeã é decidida pelo resultado obtido direto entre as equipes empatadas. Na matriz seguinte, o elemento $a_{ij}$ indica o número de sets que a seleção i venceu no jogo contra a seleção j. Lembre que o jogo de vôlei termina quando uma equipe completa 3 sets.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Representando os termos i e j por:

1 = Rússia

2 = Itália

3 = Brasil

4 = EUA

Determine:

a. O número de vitórias da equipe norte-americana;

b. O placar do jogo Brasil x Itália;

c. O número de sets marcados contra a Rússia;

d. O campeão do torneio.

## Aspectos pedagógicos

- Os alunos podem demonstrar dificuldades em identificar os elementos da matriz. Caso isto ocorra, exponha alguns comentários de revisão ou explicação do tema para os alunos.
- Os alunos também podem confundir o número de sets vencidos com o número que representa um país. Procure deixar claro o que significa cada um.
- Explore com os alunos o motivo da diagonal principal ser formada apenas por zero caracterizando que nenhuma seleção vence a si própria. Procure, porém, deixar que os próprios alunos tentem chegar a essa conclusão.

## **Seção 1** – Conhecendo e construindo matrizes

*Páginas no material do aluno*
**53 a 57**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Cooperativa de leite | Vídeo "Cooperativa de leite" disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076 e cópias da Folha de Atividades – Cooperativa de leite (disponível na Seção Aspectos operacionais). | No vídeo utilizado nessa atividade, os membros de uma cooperativa de leite recorrem a matrizes para determinar a melhor localização de um tanque de refrigeração comunitário.<br>Obs.: Essa atividade está disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076 | Turma dividida em duplas. | 40 minutos. |

## Aspectos operacionais

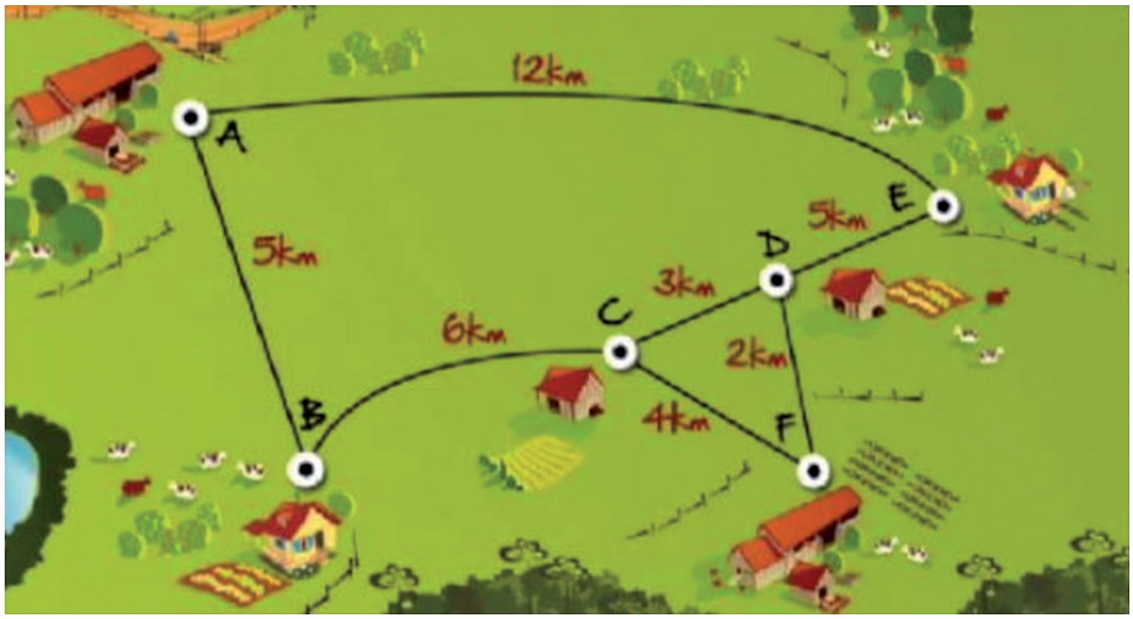
- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

## Folha de atividades – Cooperativa de leite

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Os membros da cooperativa vão dividir os custos de transporte do leite. Desse modo, a fazenda em que o tanque de leite será instalado deve ser escolhida de modo que a soma das distâncias que serão percorridas por todos os fazendeiros seja a menor possível.




**Problema**

- Preencha a matriz com os menores trajetos entre as fazendas. Na matriz, por exemplo, o cruzamento da linha indicada por C e da coluna indicada por E deve indicar qual é o menor entre as fazendas C e E.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | |
| B | | | | | | |
| C | | | | | | |
| D | | | | | | |
| E | | | | | | |
| F | | | | | | |

- Para preencher a tabela abaixo, considere que o tanque foi instalado na fazenda indicada em cada linha e determine a soma das distâncias que seriam percorridas por todos os fazendeiros.

| | SOMA |
|---|---|
| A | |
| B | |
| C | |
| D | |
| E | |
| F | |

- Determine em qual fazenda o tanque deve ser instalado para que a soma das distâncias que serão percorridas por todos os fazendeiros seja a menor possível.

## Aspectos pedagógicos

- Os alunos podem encontrar dificuldade em compreender o preenchimento da tabela de distâncias. Discuta com eles as distâncias entre algumas fazendas e ilustre o preenchimento de algumas posições da tabela.
- É interessante fazer uma simulação com apenas três pontos para que os alunos compreendam o que é pedido e realmente tentem fazer a atividade; muitas vezes, o aluno deixa de fazer porque acha a tarefa muito complicada.
- Explore a simetria da matriz das distâncias: o menor trajeto entre as fazendas C e E também é o menor trajeto entre as fazendas E e C.

### **Seção 2** – Vamos operar com matrizes?

*Páginas no material do aluno*
**53 a 57**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Bombons a Granel | Vídeo Bombons a Granel disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055, calculadoras e cópias da Folha de atividades – Bombons a Granel (disponível na Seção Aspectos operacionais). | No vídeo utilizado nessa atividade, com o auxílio de multiplicação de matrizes, uma vendedora de bombons aprende a determinar o preço de venda de seus produtos.<br>Obs.: Esta atividade está disponível em fonte: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055 | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

## Aspectos operacionais

- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas e distribua as calculadoras e as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

## Folha de atividades – Bombons a Granel

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Considere a tabela

| | AO LEITE | MEIO AMARGO | DIET |
|---|---|---|---|
| KIT 1 | 20 | 15 | 5 |
| KIT 2 | 15 | 20 | 5 |
| KIT 3 | 5 | 5 | 30 |
| KIT 4 | 24 | 24 | 2 |

Em cada linha da tabela acima, vemos a composição de cada kit vendido. Quantos bombons ao leite, meio amargo e diet compõem cada um dos kits.

Já na tabela abaixo, vemos o preço, as calorias e as gorduras totais presentes em cada um dos bombons produzidos.

| | PREÇO | CALORIAS | GORDURAS TOTAIS (g) |
|---|---|---|---|
| AO LEITE | R$ 1,00 | 85 | 7,0 |
| MEIO AMARGO | R$ 1,50 | 80 | 6,5 |
| DIET | R$ 2,00 | 70 | 2,0 |

**Problema**

1. Quantos bombons há no Kit 2?
2. Para cada um dos kits, determine o preço de venda, o total de calorias e de gorduras totais presentes.

## Aspectos pedagógicos

- É possível que os alunos encontrem dificuldade em interpretar os elementos das matrizes construídas. Considere um elemento de cada matriz e interprete seu significado no contexto do problema para facilitar a compreensão de cada uma das matrizes consideradas.

- O aluno deve interiorizar que cada elemento da matriz guarda uma informação que relaciona dois atributos, por exemplo: são 20 bombons ao leite no kit 1; o bombom meio amargo contém 80 calorias.
- É possível que os alunos encontrem dificuldade em efetuar a multiplicação das matrizes. Considere um dos kits vendidos e discuta com os alunos como o seu preço deveria ser calculado. Mostre que o procedimento de cálculo coincide com a "multiplicação" da linha do kit pela coluna dos preços dos bombons.
- É possível que os alunos não optem por efetuar a multiplicação de matrizes para resolução do segundo problema. Estimule-os a relacionar os cálculos exigidos para resolver o problema com os envolvidos na multiplicação das matrizes de composição dos kits pela que informa preços, calorias e gorduras totais de cada tipo de bombom.

## **Seção 2** – Vamos operar com matrizes?

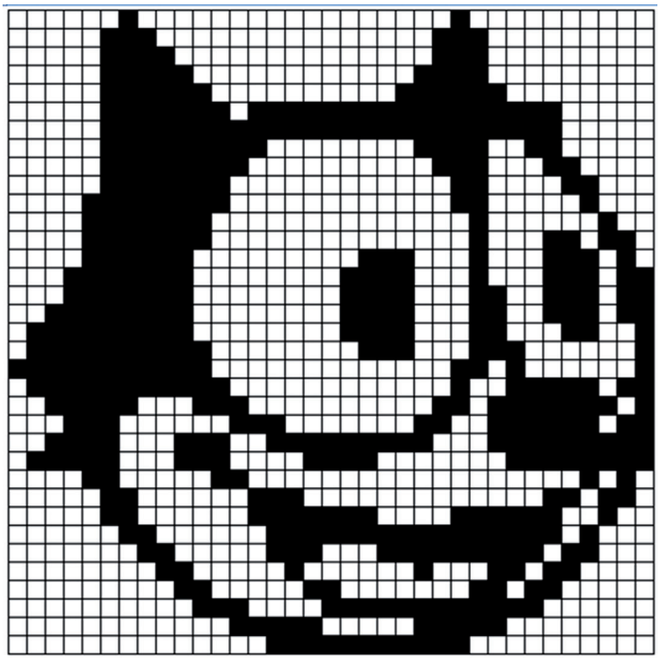
*Páginas no material do aluno*
**53 a 57**

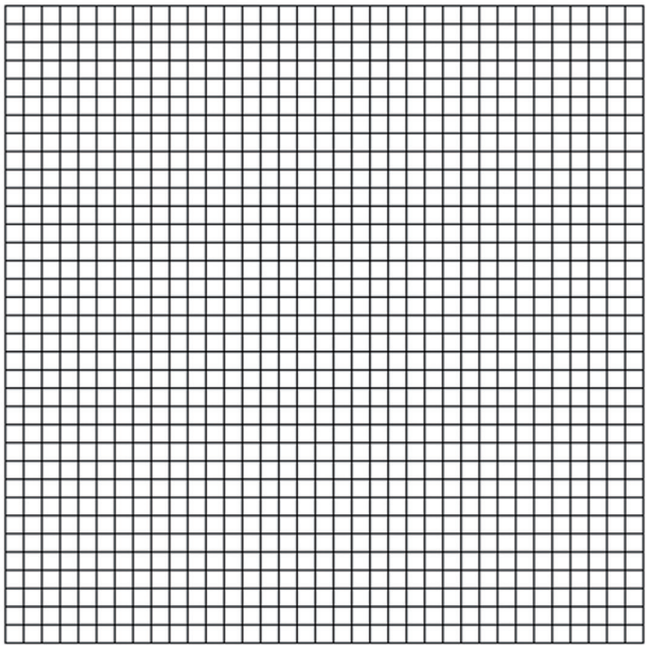
| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
| | Desenho Matrix | Datashow, computador, material disponível em http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html, folha de atividades. | Esta atividade propõe uma reflexão sobre o que é uma matriz transposta através de sucessivas atividades envolvendo a alteração de imagens.<br>Obs.: Essa atividade foi adaptada de http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html, acesso em 07/07/2013 | Turma dividida em grupos de 4 alunos. | 25 minutos. |

## Folha de atividades – Desenho Matrix

Nome da Escola: _____

Nome: _____



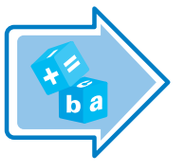


## Aspectos pedagógicos

- Apresente os conceitos de matriz transposta para os alunos antes mesmo de iniciar a atividade. Se preferir, utilize o primeiro desafio contido nesta atividade para mostrar aos alunos o que são matrizes transpostas.
- Talvez seja interessante explicar a transformação matricial antes mesmo da exibição das opções para os alunos. Mas isso fica a critério do professor.
- Sugira aos alunos que façam suas análises, explorem as transformações e esbocem a figura (ou, pelo menos, parte) na folha de atividades para que possam ter maior clareza na determinação da opção correta.
- Para cada um dos desafios contidos nesta atividade, é muito importante que seja discutida a transformação pedida. A sugestão é que o professor utilize as dicas que o próprio material produz, principalmente a DICA 2, que aparece mediante sucessivas marcações incorretas. Nessa dica, os alunos podem visualizar melhor a transformação sendo feita. Sugerimos que o professor prepare com antecedência esta explicação da DICA 2, evitando que a atividade se torne um jogo de tentativa e erro, o famoso "chute", tornando a atividade desinteressante para o aluno.

### **Seção 2** – Vamos operar com matrizes?

*Páginas no material do aluno*
**53 a 57**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Determinantes e áreas | Calculadoras e cópias da Folha de atividades – Determinantes e áreas (disponível na Seção Aspectos operacionais). | Nesta atividade, os alunos utilizarão o valor do determinante de uma matriz para calcular a área de um triângulo.<br>Obs: Propriedades dos determinantes e o cálculo da área de triângulos: exemplos significativos disponível em http://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/77/determinantes.pdf | Turma dividida em duplas. | 25 minutos. |

- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

## Folha de atividades – Determinantes e Áreas

Nome da Escola: _____

Nome: _____

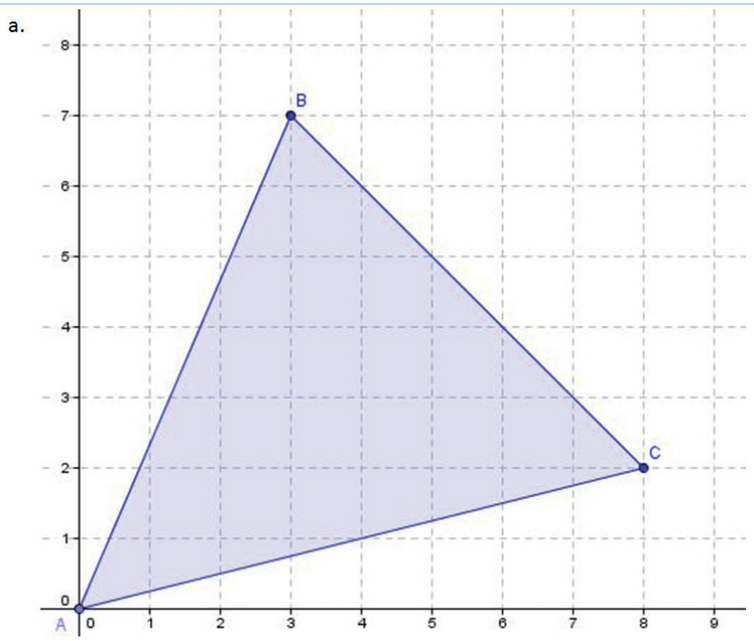
Hoje vamos utilizar o determinante para calcular a área de um triângulo. Se os vértices de um triângulo *ABC* são os pontos $A=(x_A,y_A)$,$B=(x_B,y_B)$ e $C=(x_C,y_C)$, a área do triângulo *ABC* pode ser calculada por:

$$Área = \frac{1}{2}\left|\det S\right|, com\, S = \begin{bmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{bmatrix}$$

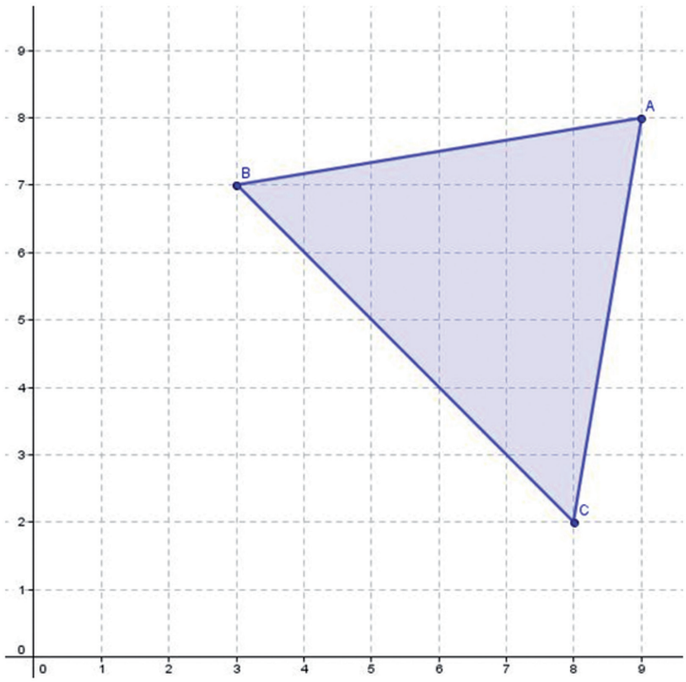
**Problemas**

1. Calcule as áreas do triângulo cujos vértices são os pontos *A, B* e *C*:

a.



b.

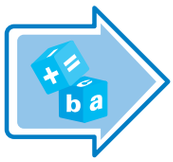



## Aspectos pedagógicos

- Como a fórmula da área envolve o uso da função módulo e a identificação das coordenadas cartesianas dos vértices dos triângulos, é interessante fazer uma revisão desses conceitos.
- Além disso, os alunos podem querer saber o porquê da utilização da fórmula. Mostre que tem relação com a distância entre pontos.
- Enfatize que outras aplicações, principalmente na área de tecnologia, são realizadas com o uso e cálculo de matrizes e determinantes.

## **Seção 2** – Vamos operar com matrizes?

*Páginas no material do aluno*
**53 a 57**

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Campeonato de Determinantes | Cartões com números. | Esta atividade trabalha o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2. | Turma dividida em grupos de 4 alunos. | 25 minutos. |

# Aspectos operacionais

Inicialmente, todos os cartões deverão estar cortados e colocados sobre a mesa do professor. Produza a quantidade de cartões compatível com o número de alunos da turma. Escolha os números que achar conveniente, de forma que, inicialmente, seus alunos tenham maior facilidade nos cálculos.

Cada aluno deverá pegar um cartão aleatoriamente, sem poder ver e nem mostrar o número contido neste cartão (se quiser, coloque os cartões em envelopes, para garantir o sigilo).

Em seguida, os alunos deverão sentar-se nos grupos previamente estabelecidos com as carteiras no formato de uma matriz 2 x 2.

No verso de cada cartão, ainda sem ser exibido, o grupo deverá escrever a lápis as seguintes indicações de posição na matriz: $a_{11,}a_{12}$ , $a_{21,}a_{22}$ , e, então, ocuparem os respectivos lugares nas composições das matrizes.

Após determinarem as "linhas" e "colunas" da matriz 2 x 2, os números contidos nos cartões podem ser exibidos. Então, dará início a etapa de cálculo dos determinantes das matrizes formadas por cada grupo através da seguinte operação: $a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$ .

É muito importante que os grupos não exponham os resultados para os demais grupos.

Pode acontecer que a quantidade de alunos presentes na sala de aula no dia desta aplicação não seja um número múltiplo de 4. Assim, os alunos que "sobrarem" também terão o direito de escolher os seus cartões e ocuparão uma posição de coringa na atividade, uma vez que não determinaram uma posição $a_{ij}$ . O coringa será utilizado neste instante do desenvolvimento da atividade, sempre mantendo seu cartão sob sigilo.

Quando os determinantes já tiverem sido calculados, cada grupo terá a oportunidade de efetuar uma troca de um dos seus componentes. Para isso, preferencialmente, deverá substituir um dos alunos presentes naquele grupo por um dos alunos "coringas", devendo ocupar a mesma posição na matriz que o aluno substituído. (Neste momento, o aluno que estiver entrando no grupo deverá anotar no verso do seu cartão a posição que passou a ocupar na matriz).

O aluno substituído ocupará a posição de "coringa", porém respeitando a marcação de posição na matriz $a_{11}$ ou $a_{21}$ ou $a_{12}$ ou $a_{22}$ presente no verso do seu cartão. Caso haja algum grupo interessado em trocar seu componente por algum coringa oriundo de outro grupo (isto é, que possui a marcação de posição na matriz), a troca deverá ser feita por um aluno que ocupa a mesma posição na matriz, garantindo sempre a constituição correta de todos os termos da mesma. Somente após seu posicionamento no grupo, seu cartão poderá ser exibido e, assim, o determinante recalculado.

Vence o jogo o grupo que, após as trocas realizadas, conseguir o maior determinante.

## Aspectos pedagógicos

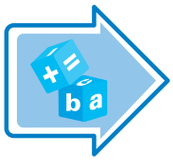
- Oriente os alunos para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 2.
- A presença de números negativos pode ser um elemento dificultador para o cálculo dos determinantes, assim como o número zero. Observe de perto cada cálculo, para que o grupo sempre trabalhe com valores corretos para uma melhor tomada de decisão acerca das trocas a serem realizadas.
- A atividade foi pensada tendo os cartões sob sigilo. O professor pode experimentar realizar novamente a atividade excluindo a necessidade de manutenção de sigilo dos cartões. Assim, os alunos poderão traçar estratégias de cálculo mais sofisticadas que podem enriquecer os conceitos trabalhados.

## Atividades de Avaliação

Nesta seção, apresentaremos atividades que retomam as habilidades verificadas nas seções anteriores, com o intuito de consolidar e avaliar o processo de ensino/aprendizagem do conteúdo proposto. Uma parte dessa seção também enfatizará a reflexão do aluno sobre os conteúdos abordados.

Sugerimos a utilização dos dois últimos tempos de aula destinados a esta Unidade. A seguir, apresentamos sugestões para a retomada dos conteúdos trabalhados e para a avaliação das habilidades pretendidas. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir:

## Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Registros de aprendizagens | Cópias da folha de atividades | Esta etapa pode estar articulada à seção **"Veja ainda"** no material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as resoluções dos exercícios de revisão, enfatizando as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade. | Individual | 25 minutos |

## Aspectos operacionais

Peça que os alunos resolvam os exercícios da folha de atividades para o aprimoramento e registro das aprendizagens que obtiveram durante as últimas aulas.

## Folha de atividades – Matrizes

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Um grupo de alunos dos cursos 1, 2 e 3 solicita transferência para outro curso, escolhido entre os mesmos 1, 2 e 3. A matriz abaixo representa o resultado obtido após as transferências:

Se $i \neq j$, o elemento representa o número de estudantes do curso i que se transferiram para o curso j:

Se $i = j$, o elemento representa o número de estudantes do curso i que permaneceram no curso i.

$$\begin{bmatrix} 132 & 7 & 8 \\ 12 & 115 & 13 \\ 14 & 15 & 119 \end{bmatrix}$$

Admitindo que cada aluno pode matricular-se em apenas um curso, responda às perguntas:

a. Quantos alunos permaneceram nos cursos 1, 2 e 3?

b. Qual é o total de alunos transferidos?

c. Quantos alunos se transferiram do curso 1?

d. Antes das transferências, quantos alunos existiam no curso 1?

e. Após as transferências, quantos alunos existem no curso 2?

f. Quantos alunos foram transferidos para o curso 3?

g. Qual o total de alunos nos cursos 1, 2 e 3?

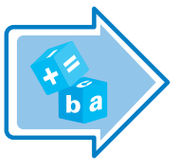
h. Considera essa forma de representação das informações, em uma matriz, eficaz? Por quê?

## Aspectos pedagógicos

Os alunos ainda podem cometer erros simples, porém graves, como a troca na identificação de i como linha e j como coluna. Essa troca leva a um erro de interpretação da matriz.

Se os alunos demonstrarem dificuldades maiores na resolução desta atividade, oriente-os, por exemplo, realizando a letra A, para que, assim, possam entender como é possível realizar a interpretação dos dados proposta na atividade.

## Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---|---|---|---|---|
|  | Questões de avaliações de larga escala ou concurso | Cópias das questões. | Sugerimos, nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta Unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como o ENEM, vestibulares, concursos, etc. | Individual | 20 minutos |

## Aspectos operacionais

A seguir, oferecemos questões matrizes: representação, linguagem e multiplicação.

### Questão 1

Prova: UNICENTRO - 2012 - UNICENTRO - Vestibular - ADAPTADA

Três amigos, P, Q e W, resolveram dar aulas de Química, Física e Matemática. P resolveu fazer uma tabela das aulas do grupo e construiu duas matrizes, M e N. Sabe-se que os elementos de cada linha de M correspondem às quantidades dos três tipos de aulas ministradas por P (1a linha), Q (2a linha) e W (3a linha), e que os elementos da coluna correspondem às quantidades de um mesmo tipo de aula. Os elementos de N correspondem aos preços unitários, em reais, de cada tipo de aula.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Nessas condições, é correto afirmar que,

a. P recebeu 134 reais e Q recebeu 40 reais;

b. Q recebeu 115 reais e W recebeu 48 reais;

c. W recebeu 68 reais e P recebeu 134 reais;

d. P recebeu 149 reais e Q recebeu 115 reais.

## Questão 2

Prova: COMPERVE - 2008 - UFRN - Vestibular

Uma companhia de aviação pretende fazer manutenção em três de seus aviões e, para isso, definiu o período de 4 dias, a contar da aprovação das propostas, para a conclusão do serviço. Os orçamentos (em milhares de reais) das três empresas que apresentaram propostas estão indicados na matriz $A_{3x3}$ abaixo, onde cada $a_{ij}$ corresponde ao orçamento da empresa i para a manutenção do avião j,

$$\begin{pmatrix} 23 & 66 & 17 \\ 19 & 62 & 12 \\ 28 & 57 & 08 \end{pmatrix}$$

Como cada uma dessas empresas só terá condições de efetuar, no prazo estabelecido, a manutenção de um avião, a companhia terá que escolher, para cada avião, uma empresa distinta.

A escolha que a companhia de aviação deverá fazer para que sua despesa seja a **menor** possível será:

a. empresa 1: avião 1; empresa 2: avião 3 e empresa 3: avião 2.

b. empresa 1: avião 1; empresa 2: avião 2 e empresa 3: avião 3.

c. empresa 1: avião 3; empresa 2: avião 2 e empresa 3: avião 1.

d. empresa 1: avião 2; empresa 2: avião 3 e empresa 3: avião 1.

## Aspectos pedagógicos

- Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas.
- Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.
- As questões objetivas de vestibulares ou ENEM, em geral, têm em suas alternativas erradas sempre uma justificativa com erro plausível. Obviamente, isso não está evidente na alternativa. Dessa forma, procure identificar o erro que gerou cada uma das alternativas e discuta com os alunos.