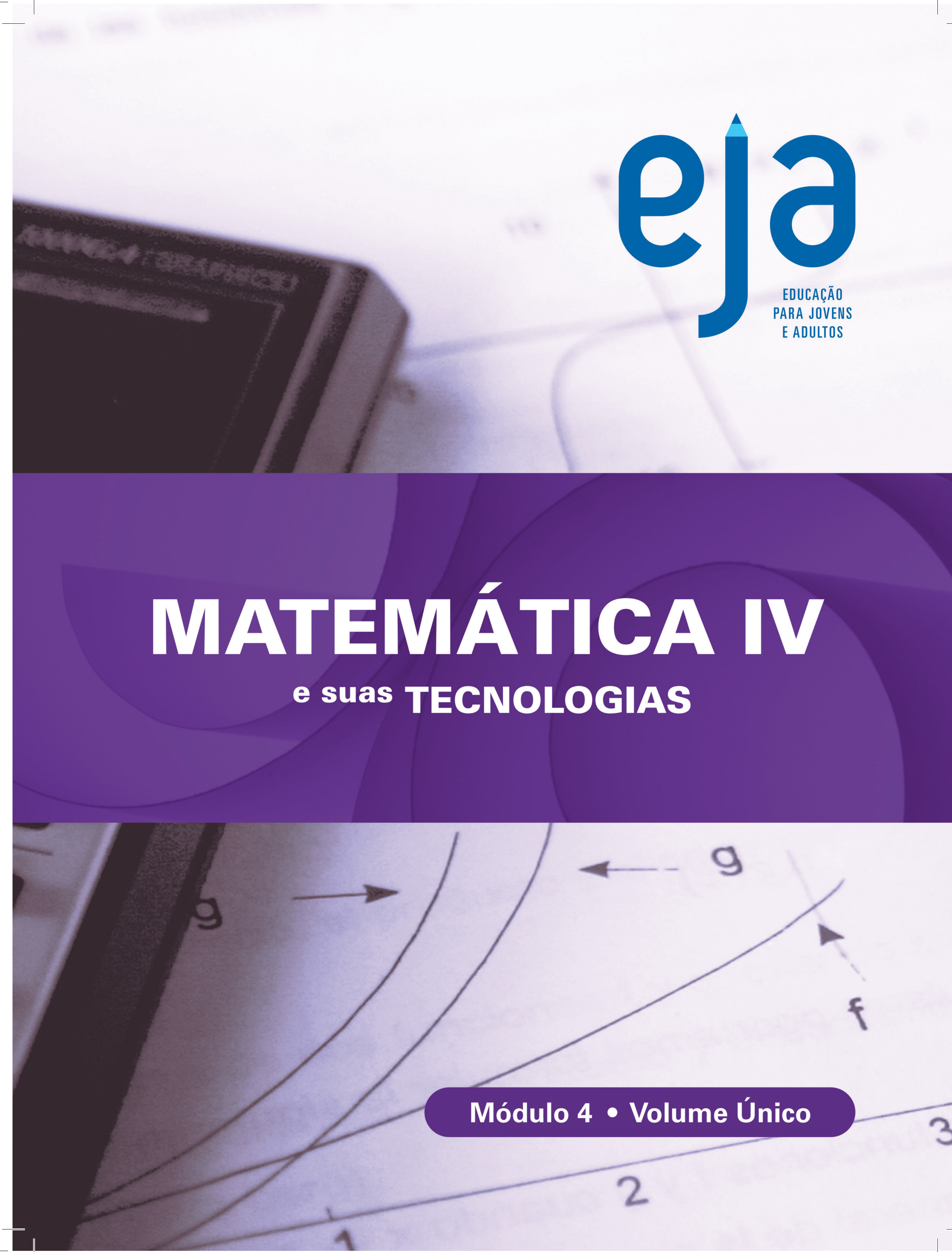


EJA
EDUCAÇÃO PARA JOVENS E ADULTOS

# MATEMÁTICA IV

## e suas TECNOLOGIAS

**Módulo 4 • Volume Único**

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
**Luiz Fernando de Souza Pezão**

Vice-Governador
**Francisco Oswaldo Neves Dornelles**

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Educação
**Antônio José Vieira de Paiva Neto**

Chefe de Gabinete
**Caio Castro Lima**

Subsecretaria Executiva
**Amaury Perlingeiro**

Subsecretaria de Gestão do Ensino
**Patrícia Carvalho Tinoco**

Superintendência pedagógica
**Carla Bertânia Conceição de Souza**

Coordenadora de Educação de Jovens e adulto
**Rosana Mendes**

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
**Gustavo Reis Ferreira**

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
**Carlos Eduardo Bielschowsky**

PRODUÇÃO DO MATERIAL EJA (CECIERJ)

Diretoria Adjunta de Extensão
**Elizabeth Ramalho Soares Bastos**

Coordenadora de Formação Continuada
**Carmen Granja da Silva**

Gerência do Projeto
**Michelle Casal Fernandes**

Diretoria Adjunta de Material Didático
**Cristine Costa Barreto**

Coordenação de Matemática
**Agnaldo da C. Esquincalha**
**Gisela Maria da Fonseca Pinto**

Elaboração
**Agnaldo da C. Esquincalha**
**Cléa Rubinstein**
**Gisela Maria da Fonseca Pinto**
**Heitor B. L. de Oliveira**
**Leonardo Andrade da Silva**
**Luciane de P. M. Coutinho**
**Raphael Alcaires de Carvalho**

Revisão de Conteúdo
**José Roberto Julianelli**
**Luciana Getirana de Santana**
**Telma Alves**
**Daniel Portinha Alves**
**Thiago Maciel de Oliveira**

Revisão de Língua Portuguesa
**Ana Cristina Andrade dos Santos**
**Paulo Cesar Alves**

Coordenação de
Desenvolvimento Instrucional
**Bruno José Peixoto**
**Flávia Busnardo**
**Paulo Vasques de Miranda**

Desenvolvimento Instrucional
**Aroaldo Veneu**

Coordenação de Produção
**Fábio Rapello Alencar**

Assistente de Produção
**Bianca Giacomelli**

Projeto Gráfico e Capa
**Andreia Villar**

Imagem da Capa e Abertura da Unidade
**http://www.sxc.hu/photo/475767**

Diagramação
**André Guimarães de Souza**
**Andréa Fiães**
**Verônica Paranhos**

Ilustração
**Clara Gomes**
**Fernando Romeiro**
**Jefferson Caçador**
**Sami Souza**

Produção Gráfica
**Patrícia Esteves**
**Ulisses Schnaider**

# Sumário

# Prezado Aluno,

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação.

Através da educação a pessoa toma a sua história em suas próprias mãos e consegue mudar o rumo de sua vida. Para isso, acreditamos na capacidade dos alunos de aprender, descobrir, criar soluções, desafiar, enfrentar, propor, escolher e assumir suas escolhas.

O material didático que você está recebendo pretende contribuir para o desenvolvimento destas capacidades, além de ajudar no acompanhamento de seus estudos, apresentando as informações necessárias ao seu aprendizado.

Acreditamos que, com ajuda de seus professores, você conseguirá cumprir todas as disciplinas dos quatro módulos da matriz curricular para Educação de Jovens e Adultos da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

E assim, novas histórias acontecerão em sua vida.

Para ajudá-lo no seu percurso, segue abaixo uma tabela que apresenta a grade de disciplinas que irá cursar:

| MÓDULO | NOME DISCIPLINA | CH SEMANAL | CARGA HORÁRIA TOTAL |
|---|---|---|---|
| MÓDULO I | LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA I | 4 | 80 |
| MÓDULO I | MATEMÁTICA I | 4 | 80 |
| MÓDULO I | HISTÓRIA I | 4 | 80 |
| MÓDULO I | GEOGRAFIA I | 4 | 80 |
| MÓDULO I | FILOSOFIA I | 2 | 40 |
| MÓDULO I | SOCIOLOGIA I | 2 | 40 |
| MÓDULO I | ENSINO RELIGIOSO | 1 | 20 |
| CARGA HORÁRIA TOTAL DO MÓDULO I | | 420 | |
| MÓDULO II | LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA II | 4 | 80 |
| MÓDULO II | MATEMÁTICA II | 4 | 80 |
| MÓDULO II | FÍSICA I | 4 | 80 |
| MÓDULO II | QUÍMICA I | 4 | 80 |
| MÓDULO II | BIOLOGIA I | 4 | 80 |
| MÓDULO II | ENSINO RELIGIOSO | 1 | 20 |
| CARGA HORÁRIA TOTAL DO MÓDULO II | | 420 | |
| MÓDULO III | LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA III | 4 | 80 |
| MÓDULO III | MATEMÁTICA III | 4 | 80 |
| MÓDULO III | HISTÓRIA II | 3 | 60 |
| MÓDULO III | GEOGRAFIA II | 3 | 60 |
| MÓDULO III | FILOSOFIA II | 2 | 40 |
| MÓDULO III | SOCIOLOGIA II | 2 | 40 |
| MÓDULO III | EDUCAÇÃO FÍSICA | 2 | 40 |
| MÓDULO III | LÍNGUA ESTRANGEIRA OPTATIVA | 2 | 40 |
| MÓDULO III | ENSINO RELIGIOSO | 1 | 20 |
| CARGA HORÁRIA TOTAL NO MÓDULO III | | 460 | |
| MÓDULO IV | LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA IV | 4 | 80 |
| MÓDULO IV | MATEMÁTICA IV | 3 | 60 |
| MÓDULO IV | FÍSICA II | 3 | 60 |
| MÓDULO IV | QUÍMICA II | 3 | 60 |
| MÓDULO IV | BIOLOGIA II | 3 | 60 |
| MÓDULO IV | LÍNGUA ESTRANGEIRA | 2 | 40 |
| MÓDULO IV | ARTES | 2 | 40 |
| MÓDULO IV | ENSINO RELIGIOSO | 1 | 20 |
| CARGA HORÁRIA TOTAL NO MÓDULO IV | | 420 | |

Conte conosco.
Equipe da Fundação Cecierj e SEEDUC

“

Nada lhe posso dar que já não exista em você mesmo.

Não posso abrir-lhe outro mundo de imagens, além daquele que há em sua própria alma.

Nada lhe posso dar a não ser a oportunidade, o impulso, a chave.

Eu o ajudarei a tornar visível o seu próprio mundo, e isso é tudo.

*Hermann Hesse*

”

# Análise Combinatória 1

## Para início de conversa...

Uma das maiores alegrias que temos na vida são as nossas amizades. Alguns amigos são até mais próximos que um irmão ou irmã. Como é bom sair com os amigos para distrair, lancharmos juntos e bater um papo.

Você costuma fazer isso? Entrar em uma lanchonete, pedir um lanche bem gostoso e enquanto saboreia, conversa sobre várias coisas.

**Figura 1:** Interior de uma lanchonete.

Vamos imaginar esta cena, você com seus amigos, todos sentados em um grande banco da lanchonete. Olhando o menu, você observa que existem diferentes tipos de sanduiche, diferentes tipos de bebida e diferentes tipos de acompanhamento.

Fica aquela dúvida. O que comer? O que beber? Qual acompanhamento eu escolho? São tantas as possibilidades. A Matemática se preocupa com esta questão também. Você sabia que é possível calcular quantos tipos de lanche podemos formar?


**Figura 2: Menu da lanchonete.**

Para fazer estes cálculos foram criados mecanismos especiais, ou seja, no passado os matemáticos pesquisaram algumas maneiras de resolver estes problemas, reunindo todas as informações em mais um capítulo na História da Matemática. É a Análise Combinatória

E você? Imagine escolher seu lanche na seguinte condição: você pode escolher um sanduiche, um acompanhamento e uma bebida. De quantas formas você pode escolher seu lanche?

## Objetivos de aprendizagem

- Calcular o fatorial de números naturais
- Utilizar o princípio fundamental da contagem
- Calcular permutação simples

# Seção 1
# Fatorial de um número

Como você poderá observar, a multiplicação é uma operação bastante utilizada nos cálculos referentes a análise combinatória.

No decorrer deste assunto, iremos encontrar diversas atividades onde a multiplicação de um número pelos seus antecessores se faz necessário. Para facilitar este tipo de operação, foi criada uma ferramenta de cálculo chamada FATORIAL. O fatorial de um número será de grande utilidade para o desenvolvimento das técnicas de contagem.

Então, a dúvida continua. O que é o fatorial?

Observe de forma prática abaixo.

Vamos considerar o conjunto dos números naturais, sem o zero, e tomar o número 5 como exemplo. Se efetuarmos o produto entre ele e seus antecessores vamos obter: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120.

Podemos representar esta multiplicação como sendo 5!, ou seja, cinco fatorial.Toda vez que colocarmos um ponto de exclamação após o número, estamos requerendo o fatorial desse número, isto é, o produto entre esse número e todos os números naturais que o antecedem, até chegar ao número 1.

Vamos fazer o mesmo cálculo com o número 7, teremos

7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5040, logo 7! = 5040.

Generalizando, podemos escrever o fatorial de um número n qualquer como n!, onde,

n! = n x (n-1) x (n-2) x ...x 2 x 1

Mas como calculamos 1! e 0!, qual é a resposta? Para respondermos a esta pergunta notemos que o fatorial de um número n é igual ao fatorial do número (n+1) dividido pelo número (n+1), por exemplo, o fatorial de 3 é igual ao fatorial de 4 dividido por 4, ou seja, $3! = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Temos também que $2! = \frac{3!}{3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 2 \cdot 1$. Usando este mesmo raciocínio, temos que $1! = \frac{2!}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, e que $0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$. Chegamos a conclusão que 1! = 1 e 0! = 1.


Vejamos um exemplo, no qual queremos escrever a seguinte expressão numérica $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)}$ de forma simplificada. Note que a expressão possui muitos números, e todos eles são sequenciais. Em problemas de análise combinatória é muito comum encontrarmos situações desse tipo. Nesse caso, é possível usarmos uma notação compacta com a ajuda do fatorial. Essa expressão acima, por exemplo, pode ser representada da seguinte maneira: $\frac{7!}{5!\,2!}$, mas o que significa isto? Bem, como vimos, toda vez que colocamos um número seguido de um ponto de exclamação (lemos: fatorial deste número) isto significa que estamos multiplicando este número pelos seus antecessores até chegar ao número 1. Por exemplo, 4! (lemos: quatro fatorial) é igual a 24, pois $4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$ e assim temos, $3! = 3{\cdot}2{\cdot}1 = 6$, $2! = 2{\cdot}1 = 2$.

**Multimídia**

*Neste* endereço *você encontrará uma interessante atividade para aplicação dos conhecimentos em analise combinatória. Vale a apena conferir.*

Clique no link  http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=33140 e divirta-se!

É importante sabermos fazer simplificações com fatorial de números grandes. Por exemplo, como resolver $\frac{15!}{13!}$? O valor de 15! é muito alto e o de 13! também, então precisamos fazer simplificação, para isto devemos perceber que o fatorial de um número é igual a este número multiplicado pelo fatorial do seu antecessor. Vejamos alguns exemplos:

$5! = 5.4.3.2.1 = 5{\cdot}(4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1) = 5{\cdot}4!$

$4! = 4.3.2.1 = 4{\cdot}(3{\cdot}2{\cdot}1) = 4{\cdot}3!$

$3! = 3{\cdot}(2{\cdot}1) = 3{\cdot}2!$

E de maneira geral,

$$\boxed{n! = n{\cdot}\,(n-1)!\text{ , para qualquer número natural n maior que 0.}}$$

Podemos usar este recurso quantas vezes forem necessárias, por exemplo, temos que $5! = 5{\cdot}4!$, mas como $4! = 4{\cdot}3!$ então $5! = 5{\cdot}4{\cdot}3!$, ou ainda podemos dizer que $5! = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2!$

Vamos calcular então $\frac{15!}{13!}$, para isto usaremos que $15! = 15{\cdot}14{\cdot}13!$ e substituindo na expressão anterior temos $\frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!}$, simplificando, o 13! do numerador com o do denominador chegamos a conclusão que $\frac{15!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210$. Vamos resolver mais alguns exercícios.

Exemplo1: Calcule:

a) 7!  b) 6!  c) $\frac{8!}{4!}$  d) $\frac{9!}{6!\ 3!}$

Solução:

a. $7! = 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 5040$

b. $6! = 6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 720$

Poderíamos ter resolvido o item b primeiro e depois no item a fazer o seguinte $7! = 7{\cdot}\ 6! = 7 \cdot 720 = 5040$

c. Primeiro, devemos chamar a atenção que 8! Dividido por 4! Não é igual a 2!, ou seja, $\frac{8!}{4!} \uparrow 2!$ Para resolvermos, façamos o seguinte:

$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$, simplificando o 4! do numerador com o 4! do denominador, temos que $\frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} =$

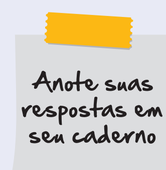
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

d. $\frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}$, neste ponto é importante lembrarmo-nos das simplificações, podemos simplificar o 9 do numerador com o 3 do denominador e o 8 do numerador com o 2 do denominador, chegando ao seguinte resultado $\frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

**Calculando o Fatorial**


Calcule o valor das expressões a seguir:

a) $\frac{7!}{4!}$ b) $\frac{6!}{3!}$ c) $\frac{15!}{13!\,2!}$ d) $\frac{4!}{3!\,1!}$

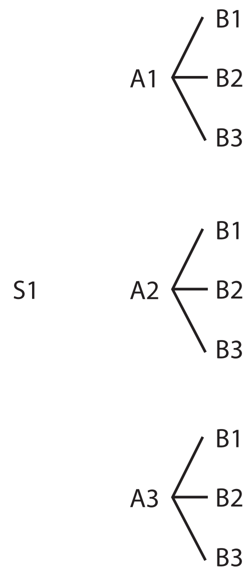



# Seção 2
## Princípio Fundamental da Contagem

A análise combinatória nos permite calcular o número de possibilidades de realização de determinadas tarefas. Como por exemplo a questão proposta na introdução. Já sabe a resposta?

Note que ao escolhermos o sanduiche podemos escolher qualquer acompanhamento. Vamos chamar os sanduiches de S1, S2, S3 e S4. Chamaremos os Acompanhamentos de A1, A2 e A3. Quanto às bebidas, vamos nomea-las por B1,B2 e B3.

Olhe como podemos escolher os lanches, considerando inicialmente o sanduíche S1:




Perceba que para cada um dos 3 acompanhamentos teremos 3 opções de bebidas, ou seja , escolhendo o acompanhamento e a bebida teremos 3 x 3 possibilidades, isto é, 9 ao todo para cada sanduiche. Todavia, são 4 tipos de sanduiche, assim podemos escrever que temos 4 x 9 = 36 possibilidades ao todo.

Como o cálculo é feito com valores considerados pequenos, podemos até conferir todas essas possibilidades:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 – S1, A1, B1 | 2 – S1, A1, B2 | 3 – S1, A1, B3 | 4 – S1, A2, B1 |
| 5 – S1, A2, B2 | 6 – S1, A2, B3 | 7 – S1, A3, B1 | 8 – s1, a3, b2 |
| 9 – s1, a3, b3 | 10 – S1, A1, B1 | 11 – S1, A1, B2 | 12 – S1, A1, B3 |
| 13 – S1, A2, B1 | 14 – S1, A2, B2 | 15 – S1, A2, B3 | 16 – S1, A3, B1 |
| 17 – s1, a3, b2 | 18 – s1, a3, b3 | 19 – S1, A1, B1 | 20 – S1, A1, B2 |
| 21 – S1, A1, B3 | 22 – S1, A2, B1 | 23 – S1, A2, B2 | 24 – S1, A2, B3 |
| 25 – S1, A3, B1 | 26 – s1, a3, b2 | 27 – s1, a3, b3 | 28 – S1, A1, B1 |
| 29 – S1, A1, B2 | 30 – S1, A1, B3 | 31 – S1, A2, B1 | 32 – S1, A2, B2 |
| 33 – S1, A2, B3 | 34 – S1, A3, B1 | 35 – s1, a3, b2 | 36 – s1, a3, b3 |


Chamamos esta disposição de árvore das possibilidades. Ele permite visualizar todas as possibilidades existentes dentro de uma determinada análise. Todavia, não é um recurso indicado para cálculos onde os valores são considerados grandes..

O que acabamos de fazer foi aplicar um principio conhecido na Matemática como Princípio Fundamental da Contagem – PFC. Neste princípio leva-se em conta as diferentes etapas e possibilidades de cada ação, e a partir do produto destas etapas, acha-se o total.

Podemos dizer que o problema anterior tinha 3 etapas: a primeira seria escolher um tipo de sanduíche (tendo 4 possibilidades de escolha), em seguida, para cada sanduíche escolhido, temos que escolher o acompanhamento, onde temos 3 opções, e finalmente, a terceira etapa seria a escolha de bebida, que possui 3 opções de escolha. Assim, teremos:

Total de sanduiches = 4

Total de acompanhamentos = 3

Total de bebidas = 3

4 x 3 x 3 = 36.

Existem infinitas questões a respeito de contagem de possibilidades. A análise combinatória trata exatamente deste assunto, ou seja, é uma parte da matemática que possui métodos para resolver problemas de contagem.

Os problemas de contagem fazem parte de nosso dia a dia. Você já parou para pensar nisso? Observe as placas dos carros. De acordo com as normas de trânsito vigentes, cada veiculo deve ter uma placa que o faça reconhecido. Esta placa deve ter sete dígitos, sendo 3 letras e 4 algarismos. Quantas placas é possível confeccionar?


**Figura 3:** Placa de Automóvel.

Já pensou nas possibilidades? Que tal fazer a árvore delas? Não?

Realmente, fica uma quantidade gigantesca de possibilidades.

Para resolver este problema, vamos dividi-lo em dois blocos. O bloco das letras e o bloco dos números.

___ ___ ___      ___ ___ ___ ___

Letras      Algarismos

Note que para a primeira letra teremos 26 possibilidades (que é o número de letras de nosso alfabeto).

Como as placas permitem repetição de elementos(não foi feita nenhuma restrição!), podemos escrever que a segunda letra também contém 26 possibilidades, igualmente na terceira letra, assim teremos:

$26 \times 26 \times 26 = 26^3$ possibilidades.

Para os algarismos, no primeiro espaço teremos 10 possibilidades (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,), igualmente para os demais espaços. Isto nos dá $10^4$ ou $10 \times 10 \times 10 \times 10$. E então, já fez as contas.

$26^3 = 17576$ grupos de 3 letras

$10^4 = 10000$ grupos de 4 algarismos.

Observe que cada grupo de letras irá formar uma placa com todos os grupos de algarismos, sendo assim, teremos: $17576 \times 10000 = 175.760.000$ possibilidades de placas.

Tente você resolver esta atividade.

**Atividade 2**

Melissa possui uma boneca e adora arrumá-la. Ela tem duas saias, duas blusas, 5 pares de calçado e 3 diferentes tipos de chapéu. De quantas formas Melissa pode arrumar sua boneca?

Anote suas respostas em seu caderno

Um dos primeiros problemas de Análise Combinatória de que se tem registro, pode ser encontrado no livro "Os Elementos" de Euclides, escrito mais ou menos em 300 a.C.

**Figura 4 :** Euclides.

Nele Euclides propõe o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$. Além disso, o matemático hindu Báskara (1114 – 1185) já sabia resolver problemas que envolviam métodos de contagem conhecidos como permutação, arranjo e combinação. Curiosamente, foi pela necessidade de entender os jogos de azar que Matemáticos como Blaise Pascal se aprofundaram no estudo da Análise Combinatória.

Todo problema de contagem pode, pelo menos teoricamente, ser resolvido por um processo de contagem como o que foi mostrado no exemplo da seção 1. Porém, na prática, a resolução de alguns desses problemas pode se tornar muito complicada. Dessa forma, existem técnicas de contagem que simplificam a resolução de muitos problemas como, por exemplo, arranjos, permutações e combinações.

Importante

A necessidade de resolução em problemas de contagem vem aumentando com o tempo e uma grande aplicação está em problemas de armazenamento de informações em bancos. Por exemplo, ao gerar as senhas para acesso a conta.

Observe a atividade a seguir:

Atividade 3

Tiago precisa cadastrar sua senha bancária. Para isto necessita criar um código contendo 4 dígitos. Como ela tem medo de esquecer a senha, associou sua senha a uma mudança de posição nas letras do seu nome. Quantas opções Tiago possui?

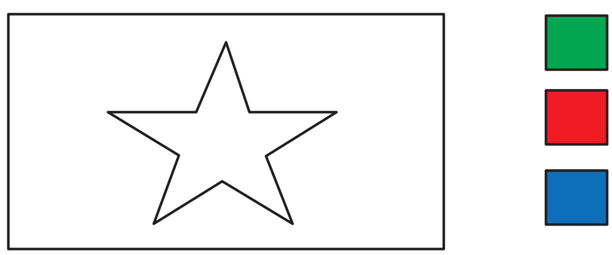
Anote suas respostas em seu caderno

**Multimídia**


Acabe com sua fome de estudar, veja clicando no link http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/21720/index.html?sequence=13 como estudar matemática pode ser simples como pedir um lanche! Mergulhe em uma simulação onde você pode combinar elementos do dia a dia e é desafiado em meio às combinações que realiza.

Outro exemplo:

O aluno Jair está participando de um concurso de desenhos de bandeiras. Ele está em dúvida de como deve pintar sua bandeira, e as cores disponíveis no concurso são verde, vermelha e azul. Veja o que ele fez e as cores disponíveis a seguir.



Sabendo que Jair deve usar uma cor para pintar o interior da estrela e outra cor para pintar a outra parte da bandeira, determine o número de bandeiras possíveis que podem ser feitas com estas cores.

Solução:

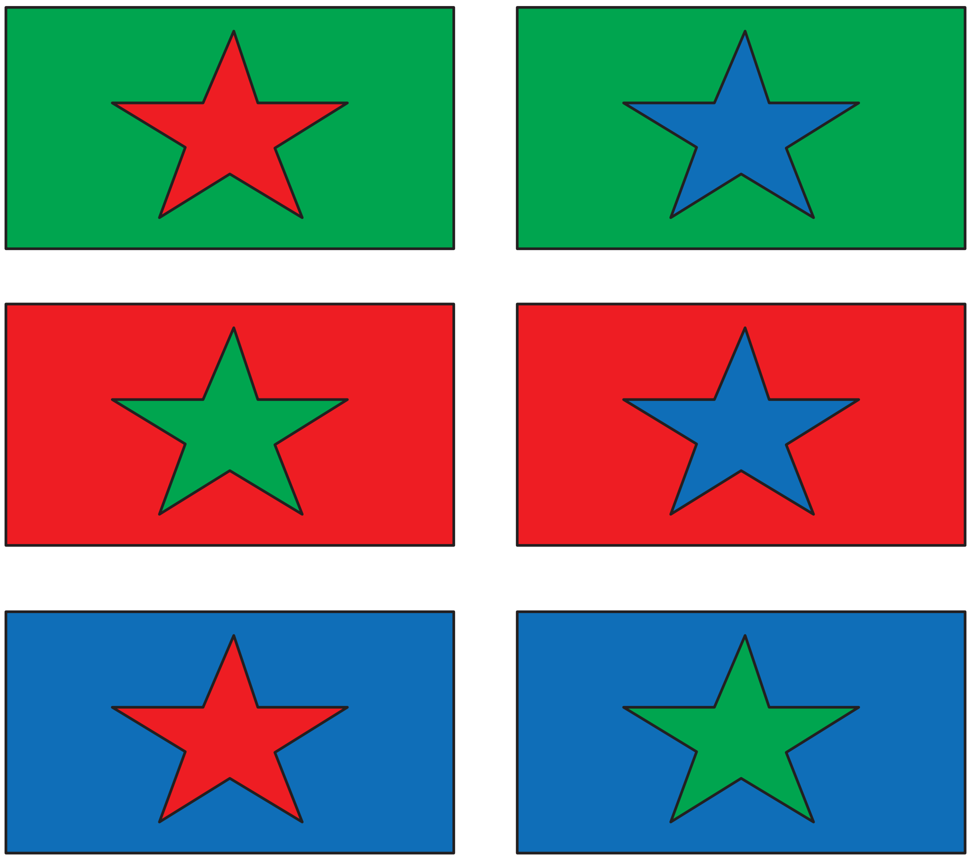
O primeiro passo para resolvermos esta questão é nos colocarmos na posição do Jair, ou seja, quais são as tarefas (etapas) que temos que cumprir para pintar a bandeira.

TAREFA 1: escolher qual cor usar para pintar o interior da estrela. Temos 3 possibilidades: verde, azul ou vermelha.

TAREFA 2: escolher qual cor usar para pintar a parte exterior da estrela. Temos 2 possibilidades, pois 1 cor já foi usada restando apenas 2 cores para escolher.

| TAREFA 1 | TAREFA 2 |
|---|---|
| 3 | 2 |

Pelo princípio multiplicativo temos $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades de montar bandeiras distintas. A seguir mostramos as 6 bandeiras possíveis.



Exemplo 3: Existem 5 cores disponíveis para pintar a bandeira a seguir de modo que faixas adjacentes não possuam a mesma cor. De quantas maneiras distintas podemos pintar esta bandeira?

TAREFA 1: pintar a primeira faixa: 5 possibilidades, pois podemos usar qualquer uma das 5 cores.

TAREFA 2: pintar a segunda faixa: 4 possibilidades, pois não podemos usar a mesma cor usada na primeira faixa.

TAREFA 3: pintar a terceira faixa: 4 possibilidades, pois não podemos usar a mesma cor usada na segunda faixa.

Devemos observar que na terceira faixa a cor usada não precisa necessariamente ser diferente da cor usada na primeira faixa, mas apenas diferente da segunda faixa.

| TAREFA 1 | TAREFA 2 | TAREFA 3 |
|---|---|---|
| 5 | 4 | 4 |

Pelo princípio multiplicativo, temos que o total de possibilidades de pintar a bandeira é igual a $5 . 4 . 4 = 80$.

Agora que você já conhece o Princípio Fundamental da Contagem, exercite resolvendo as atividades a seguir.

## Atividade 4

O mapa abaixo é da América do Sul.


Fonte: http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensfundamental/geografia/america/amsul_politico.gif

Tendo quatro cores para pintar os países da América do Sul, determine de quantas formas distintas podem ser pintados todos estes países, sabendo que países adjacentes não podem ter a mesma cor.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

### Jogando dominó

Em um jogo de dominó cada peça é formada de dois números de 0 a 6. Sabendo que uma peça pode conter dois números repetidos, determine quantas peças tem um dominó. E se cada peça tivesse dois números de 0 a 9, este jogo teria quantas peças?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

### Gabaritando

Quantos são os gabaritos possíveis de uma avaliação que possui 5 questões de múltipla-escolha, contendo 4 alternativas em cada questão?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

### Só se for do seu lado

O casal Amanda e Diego e sua filha Maria Antônia vão para um cinema e devem escolher três lugares de uma única fila desocupada que possui 6 cadeiras. De quantas formas eles podem tomar esta decisão,sabendo que eles devem sentar em cadeiras adjacentes? E se Amanda e Diego quiserem sentar um ao lado do outro?

Anote suas respostas em seu caderno

# Seção 4
# Permutação simples

Dentro da análise combinatória podemos generalizar algumas situações, conforme a distribuição dos elementos em um determinado agrupamento. Uma dessas formas é chamada de Permutação. Este tipo de organização diz respeito aos problemas envolvendo troca (permutação) de posições entre todos os elementos considerados no grupo.

Um exemplo claro é a escolha de uma senha bancária. Nós já vimos o exemplo do Tiago ao escolher a senha para sua conta. Se ele escolhesse TIGO, por exemplo, cada ordenação diferente obtida com essas letras será chamada de permutação com os elementos T, I, G e O, e serão consideradas senhas diferentes

Outro exemplo que podemos tomar para o estudo das permutações é este:

Em uma festa de criança o animador resolve colocar as 6 crianças, que estão participando de uma determinada brincadeira, em fila. Daí surge uma questão, de quantas formas diferentes é possível colocar estas 6 crianças em fila?

Para resolvermos este problema nos coloquemos na posição do animador de festa, ele terá que realizar 6 tarefas:

TAREFA 1: escolher uma criança para ser a primeira da fila: 6 possibilidades, pois pode escolher qualquer uma das crianças.

TAREFA 2: escolher uma criança para ser a segunda da fila: 5 possibilidades, pois pode escolher qualquer uma das crianças que sobrou após a escolha da primeira da fila.

TAREFA 3: escolher uma criança para ser a terceira da fila: 4 possibilidades, pois já escolhemos duas crianças e sobraram quatro.

TAREFA 4: escolher uma criança para ser a quarta da fila: 3 possibilidades, pois já escolhemos três crianças e sobraram três.

TAREFA 5: escolher uma criança para ser a quinta da fila: 2 possibilidades, pois já escolhemos quatro crianças e sobraram duas.

TAREFA 6: escolher uma criança para ser a última da fila: 1 possibilidade, pois já escolhemos cinco crianças e sobrou apenas uma.

Assim, temos:

| TAREFA 1 | TAREFA 2 | TAREFA 3 | TAREFA 4 | TAREFA 5 | TAREFA 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Pelo princípio multiplicativo, temos que o total de possibilidades de colocar as 6 crianças em fila é igual a $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

É importante observarmos que o produto $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é o que já estudamos e se chama fatorial de 6, ou seja, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

Notemos que, se ao invés de 6 crianças, o problema falasse em 5 crianças o resultado seria 5!, se fossem 4 crianças o resultado seria 4! e assim por diante. De forma geral, se fossem $n$ crianças teríamos $n!$

Notemos que outra forma de olharmos para este problema seria pensarmos em trocar a ordem dos alunos na fila, ao fazermos todas as trocas possíveis de posição entre os alunos teríamos o resultado do problema.

De forma geral, trocar os objetos de posição entre si significar permutar estes objetos. Na análise combinatória chamamos estes tipo de resolução de permutação. E a permutação de $n$ objetos é calculado como $P_n = n!$ (lemos: permutação de $n$ objetos é igual a $n$ fatorial).

É muito comum resolvermos problemas envolvendo anagramas. Sabe o que é um anagrama?

**Anagrama**

Anagrama é uma palavra formada pela transposição das letras de outra.

Exemplo 5: Quantos são os anagramas da palavra SEJA?

Solução:

Alguns exemplos de anagramas da palavra SEJA são SAJE, JESA e etc.

Para sabermos o total de anagramas basta trocarmos as posições das letras entre si, ou seja, é um caso de permutação simples. Então temos P4 = 4! = 24 anagramas.

Exemplo 6: Quantos são os anagramas da palavra LIVRO que:

a) começam com L

b) terminam com O

c) começam com L e terminam com O

d) começam com L ou terminam com O

Solução:

a) Temos 2 tarefas.

TAREFA 1: a primeira letra da palavra tem que ser L: 1 possibilidade

TAREFA 2: trocar a posição das outras letras (4 letras): P4 = 4! = 24

| TAREFA 1 | TAREFA 2 |
|---|---|
| 1 | 4! |

Pelo Princípio Multiplicativo temos 1·24 = 24 anagramas.

b) Também temos 2 tarefas

TAREFA 1: a última letra da palavra tem que ser O: 1 possibilidade

TAREFA 2: trocar a posição das outras letras (4 letras): P4 = 4! = 24

| TAREFA 1 | TAREFA 2 |
|---|---|
| 1 | 4! |

Pelo Princípio Multiplicativo temos 1·24 = 24 anagramas.

c) temos 3 tarefas

TAREFA 1: a primeira letra da palavra tem que ser L: 1 possibilidade

TAREFA 2: a última letra da palavra tem que ser O: 1 possibilidade

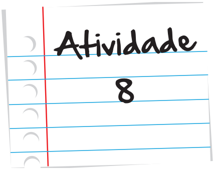
TAREFA 3: trocar a posição das outras letras (3 letras): P3 = 3! = 6

| TAREFA 1 | TAREFA 2 | TAREFA 3 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3! |

Pelo Princípio Multiplicativo temos 1·1·6 = 6 anagramas.

d) Como o anagrama pode começar com L ou terminar com O então podemos contar os anagramas que começam por L somar com os anagramas que terminam com O. No entanto, estaremos contando anagramas repetidos, como por exemplo, LIVRO, LVIRO e etc., ou seja, temos que retirar os anagramas que começam com L e terminam com O. Temos que somar os resultados dos itens A e B e subtrair o item C, isto é, 24 + 24 – 6 = 42 anagramas.

**Flashs**

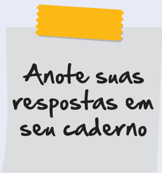



Joana deseja tirar foto dos seus 5 filhos um ao lado do outro, determine de quantas formas eles podem se organizar para a foto, sabendo que:

a. eles podem ficar em qualquer posição

b. o mais novo deve ficar em uma ponta e o mais velho na outra ponta (não há gêmeos)

c. os filhos Sergio e Carlos não tiram fotos juntos




# Resumindo

- Fatorial de um número n é dado por $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$
- Princípio Multiplicativo: se temos p1 possibilidades para a tarefa T1, p2 possibilidades para a tarefa T2 e assim sucessivamente até pn possibilidades para a tarefa Tn então o total de possibilidades é igual a $p1\cdot p2\cdot\ldots\cdot pn$.
- Permutação simples: permutar n objeto entre si é calcular $Pn = n!$

# Veja Ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos os seguintes sites:

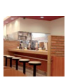
- http://www.rpm.org.br/conheca/57/contagem.pdf (artigo da RPM n° 57 de 2005 que trata da história da Análise combinatória)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/biografia.htm(vida de Pascal)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/pascal.htm(o que é triângulo de Pascal e suas propriedades)
- http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/curios.htm(curiosidades sobre o triângulo de Pascal)

## Referências bibliográfcas

### Livros


- Aaboe, A., *Episódios da História antiga da matemática*, SBM.
- Boyer C. B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher.
- Eves H., *Introdução a história da matemática*, Editora Unicamp.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.2, Ed Saraiva.
- Morgado, A.C., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P, Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, 9ª Ed.2006.


### Imagens

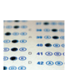
- http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQy_

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Euklid-von-Alexandria_1.jpg

- http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/21720/index.html?sequence=13

- http://n.i.uol.com.br/licaodecasa/ensfundamental/geografia/america/amsul_politico.gif

- http://www.sxc.hu/photo/1368439



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

### Atividade 1

a) 210 b) 120 c) 105 d) 4

### Atividade 2

2 x 2 x 5 x 3 = 60 formas diferentes

### Atividade 3

5 x 4 x 3 x 2 = 120 opções

### Atividade 4

$4 \times 2^8 \times 3^2 = 2^{10} \times 3^2 = 9216$

### Atividade 5

Cada número corresponde com os demais, assim,

0 – 0,1,2,3,4,5,6

1 – 1,2,3,4,5,6

2 – 2,3,4,5,6

3 – 3,4,5,6

4 – 4,5,6

5 – 5,6

6 – 6

Total 28 peças. Se os números forem de 0 a 9, de maneira análoga, teremos 55 peças

### Atividade 6

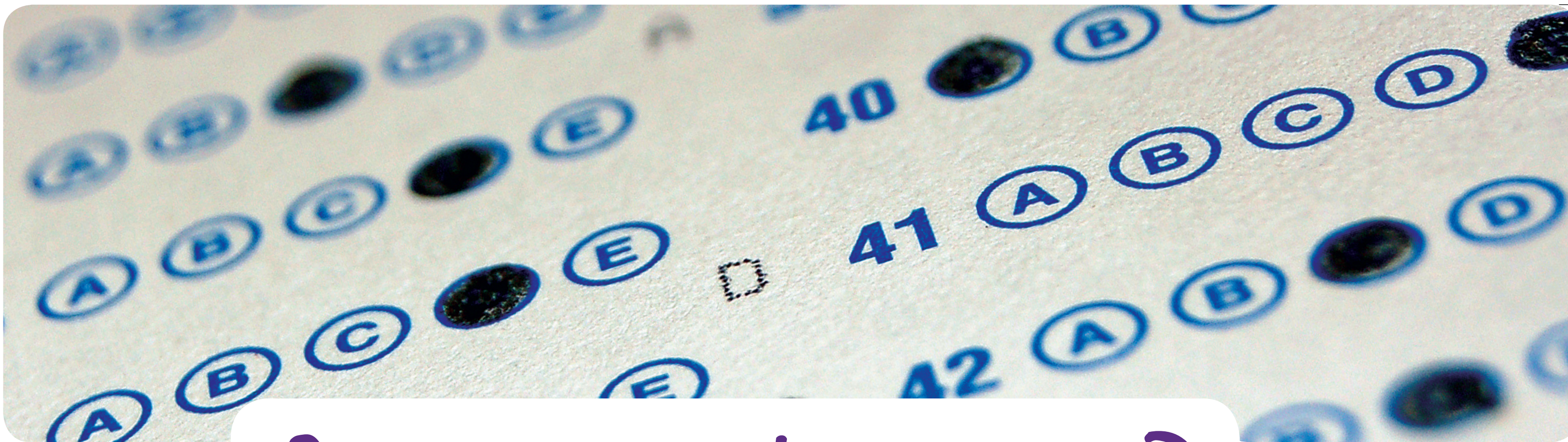
$4^5 = 1024$

### Atividade 7

$4 \cdot 3! = 24$ E $4 \cdot 2! \cdot 2! = 16$

### Atividade 8

a) $5! = 120$ b) $1 \cdot 3! \cdot 1 = 6$ c) $120 - 4! \cdot 2! = 72$




# O que perguntam por aí?

### Questão 1

O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra c lara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe abaixo um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

(A) 14. (B) 12. (C) 8. (D) 6. (E) 4.

**Resposta:** Letra E

**Comentário:** Para a 1ª barra temos duas opções (clara ou escura) e para última 1 opção apenas, pois deve ser igual a primeira. Para a 2ª barra temos 2 opções(clara ou escura) e a penúltima barra apenas uma, pois deve ser igual a segunda. E para a 3ª barra temos 2 opções(clara ou escura).

Pelo princípio multiplicativo, temos 2·2·2·1·1 = 8. No entanto nesta contagem estamos considerando todas as barras escuras e todas claras, então tirando estas duas possibilidades, temos um total de 6 códigos e assim a alternativa correta é a letra E.

## Questão 2

No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.


O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E)10

**Resposta:** Letra B

**Comentário:** Se o fundo for azul, temos 2 possibilidades para a casa e 2 para a palmeira, pelo princípio multiplicativo temos 1·2·2 = 4 possibilidades. E se o fundo for cinza temos 3 possibilidades para a casa e 1 para a palmeira, pelo princípio multiplicativo temos 1·3·1 = 3 possibilidades. O total de possibilidades é igual a 7, ou seja, a alternativa correta é a letra B.

# Probabilidade 1

## Para início de conversa...

Nesta unidade iremos aprender um pouco sobre Probabilidade. Mas, o que é probabilidade? Onde utilizar? Veremos algumas aplicações interessantes nesta aula e esperamos que gostem, pois este conceito pode ajudá-los muito, principalmente a tomar decisão em alguns problemas de sua vida. Então vamos lá?

Falemos um pouco de jogos, ditos de azar. Mas o que são jogos de azar? Segundo o site Wikipédia: "jogos de azar são jogos nos quais a possibilidade de ganhar ou perder não dependem da habilidade do jogador, mas sim exclusivamente da sorte ou do azar do apostador.

A essência do jogo de azar é a tomada de decisão sob condições de risco. Assim, a maioria deles são jogos de apostas cujos prêmios estão determinados pela probabilidade estatística de acerto e a combinação escolhida. Quanto menor é a probabilidade de se obter a combinação correta, maior é o prêmio."


**Figura 1: A las Vegas Boulevard, mais conhecida como “STRIP”. Nesta avenida ficam localizados os maiores cassinos da cidade.**

Aqui no Brasil, os cassinos são proibidos, mas podemos encontrar diversos jogos de azar nas lotéricas de todo o país. No site http://www1.caixa.gov.br/loterias/loterias/ encontramos os jogos disponibilizados: Mega-Sena, Quina, Lotomania, Loto fácil, dentre outros...

Veremos nessa aula quais são suas chances de ganhar o maior prêmio da Mega-Sena fazendo apenas um jogo simples (o mais barato), por exemplo.

**Saiba Mais**

No endereço http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm42/historia.htm é possível ler um pouco mais sobre a história da Matemática a respeito da teoria das probabilidades..

## Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer o Espaço amostral de um evento.
- Calcular probabilidades simples.
- Utilizar a análise combinatória em cálculos do número de elementos de espaços amostrais e evento.
- Fazer a distinção entre evento certo e improvável.

# Seção 1
## Lançando moedas e dados.


Alguns problemas que são muito utilizados para cálculo de probabilidades são os problemas relacionados com lançamentos de moedas e dados. Por exemplo: Ao lançar uma moeda honesta (aquela que possui apenas uma cara e uma coroa, onde cada uma tem a mesma chance de ocorrer) e observar a face obtida, sabemos que pode ocorrer: {cara, coroa}.

A esse conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório (experimento cujo resultado não pode ser previsto com certeza) chamamos de *espaço amostral* e é indicado pela letra grega Ω (lê-se "ômega"). No caso do lançamento de uma moeda, temos que Ω: {cara, coroa}.

Se o nosso experimento fosse o de lançar um dado com 6 faces e observar o número que aparece na face voltada para cima, teríamos Ω={1,2,3,4,5,6}, certo? Sim!

Poderíamos descrever alguns subconjuntos de Ω, por exemplo, A: "o número observado na face do dado voltada para cima é ímpar", teríamos A={1,3,5}. Mas agora, se tivéssemos B: " o número observado na face do dado voltada para cima é um múltiplo de 3", teríamos B={3,6}. A qualquer subconjunto do espaço amostral Ω de um experimento aleatório chamamos de *evento*.

Faça agora as atividades a seguir:

Atividade 1

## Lançando moedas...

Suponhamos que uma moeda seja lançada duas vezes, sucessivamente, e seja observada a sequência de números obtidos nas faces voltadas para cima.

a. Descreva o espaço amostral Ω.

b. Qual é o evento H: "ocorrer uma cara e uma coroa"?

c. Qual é o evento V: "ocorrer duas caras"?

d. Roberto disse que ao lançar duas moedas é mais provável que ocorra uma cara e uma coroa do que duas caras. Você concorda? Justifique sua resposta.

Anote suas respostas em seu caderno

## Lançando dados...

Atividade 2

Suponhamos que um dado de 6 faces seja lançado duas vezes, sucessivamente, e seja observada a sequência de números obtidos nas faces voltadas para cima.

a. Descreva o espaço amostral Ω.

b. Encontre o número de elementos de Ω, utilizando o princípio fundamental da contagem.

c. Qual é o evento W: "a soma dos pontos obtidos é maior que 9"?

d. Descreva o evento M: " ocorrer no primeiro lançamento o número 2".

Anote suas respostas em seu caderno

Saiba Mais

Existem outros dados sem ser o mais comum, o de 6 faces. No site: http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_dos_dados podemos encontrar diversos dados , que são utilizados, por exemplo, para jogar RPG. Abaixo segue alguns: D4, D6, D8, D12, D20 e dois D10.

# Seção 2
## Afinal, quais as minhas chances de vencer?

Voltemos ao problema simples do lançamento de uma moeda duas vezes, que vimos na atividade 1. Chegamos a conclusão que Roberto estava certo (vide respostas das atividades) ao afirmar que é mais provável ocorrer uma cara e uma coroa do que duas caras, visto que as chances de ocorrer uma cara e uma coroa são de 2 para 4, ou seja, a probabilidade é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$ enquanto as chances de ocorrer duas caras são de 1 para 4, ou seja, a probabilidade é $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$.

Podemos observar então que (em um espaço amostral equiprovável – vide Box importante a seguir) a probabilidade de ocorrer um evento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis (número de elementos do evento que nos interessa) e o número de casos possíveis (número total de elementos).

Vimos que a probabilidade pode ser escrita de 3 formas: na forma de fração, na forma de um número decimal ou também em porcentagem.

**Importante**

Dizemos $\Omega$ que um espaço amostral é equiprovável quando os eventos unitários de $\Omega$ têm a mesma chance de ocorrer.

Ao lançar um dado e observar o número em sua face superior, temos que cada um dos eventos: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} tem a mesma probabilidade (uma em seis) de ocorrer, que representamos pela fração $\frac{1}{6}$.

Utilizemos agora como exemplo o experimento aleatório: lançar dois dados simultaneamente e efetuar a soma dos números obtidos nas faces voltadas para cima. A ideia deste jogo é você escolher e acertar qual será a tal soma dos números observados.

Lara, Leon e Miguel vão jogar esse jogo. Lara escolheu o 3, Leon o 7 e Miguel o 6. Quem será que terá mais chances de vencer o jogo, levando em consideração que se a soma não for um dos números escolhidos continuarão lançando até que apareça algum número escolhido?

Talvez você possa ter pensado: Tanto faz! Mas veremos que não é bem assim...

Encontramos na resposta da atividade 2, item a, uma tabela do espaço amostral do lançamento de um dado duas vezes (que é análogo ao lançamento de dois dados):

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Desta tabela podemos construir uma tabela representando a soma dos valores:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Desta tabela, com 36 números, observamos que a soma igual a 3, poderia acontecer apenas de 2 maneiras ( ocorrendo (1,2) ou (1,2) ), enquanto a soma igual 7 teremos 6 maneiras e para a soma igual a 6 teremos 5 maneiras. Calculando as probabilidades, teríamos:

$$\text{P(ocorrer soma 3)} = \frac{3}{36} \cong 8{,}3\%$$

$$\text{P(ocorrer soma 7)} = \frac{6}{36} \cong 16{,}7\%$$

$$\text{P(ocorrer soma 6)} = \frac{5}{36} \cong 13{,}9\%$$

Observem que  apesar de Leon ter mais chances (maior probabilidade) de vencer dentre os 3 que estão jogando, se fosse contra uma banca (contra o cassino), ele estaria com uma enorme desvantagem, visto que como a probabilidade total é de 100% e ele tem 16,7% aproximadamente de vencer, a banca terá mais de 80% de ganhar, ou seja, 4 vezes mais chances de vencer o jogo. Entenderam?

### Multimídia


Um filme muito interessante que podemos ver claramente a utilização de probabilidades em jogos é o filme: Quebrando a banca. Recomendamos a todos que assistam a esse belo filme em que um professor e alguns de seus mais brilhantes alunos se reúnem para ganhar dinheiro em cassinos e encaram uma trama muito interessante:

### Importante

Quando o evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado de *evento certo*.

Quando o evento é o conjunto vazio, ele é chamado de *evento improvável*.

### Saiba Mais

Seja Ω um espaço amostral finito equiprovável, correspondente a um experimento aleatório. Temos que:

1. A probabilidade do evento certo é igual a 1.

Para chegar a tal conclusão basta observarmos que se E (evento) = Ω , temos n(E) (número de elementos do evento E) = n(Ω), daí p(E)=   =1.

2. A probabilidade do evento improvável é igual a 0.

Basta observarmos que se E= Æ, n(E)=0 e portanto, p(E)=0.

3. Se E é um evento de Ω, diferente do evento improvável e também do evento certo, temos que 0<p(E)<1.

Como 0<n(E)<n(Ω), dividindo todos os termos da desigualdade por n(Ω)>0:

$$\frac{0}{n(\Omega)} < \frac{n(E)}{n(\Omega)} < \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

Concluindo que 0<p(E)<1.

**Atividade 3**

## Lançando moedas novamente!!!!

Suponhamos que uma moeda seja lançada três vezes, sucessivamente, e sejam observadas as ocorrências nas faces voltadas para cima.

a. Descreva o espaço amostral $\Omega$.

b. Calcule a probabilidade de ocorrer o evento A: "ocorrer exatamente duas caras".

c. Calcule a probabilidade de ocorrer o evento B: "ocorrer pelo menos duas caras".

Anote suas respostas em seu caderno

**Atividade 4**

## O problema das urnas.

Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada:

a. A bola de número 25?

b. Uma bola com número de 1 a 20?

c. Uma bola com número maior que 15?

Uma bola com número múltiplo de 3?

Anote suas respostas em seu caderno


**As chances da Mega-Sena**


A Mega-Sena é um dos jogos mais conhecidos da loteria, visto seus prêmios milionários. Bem, um volante da Mega-Sena contém 60 números, de 1 a 60. Para concorrer, pode-se apostar em seis números (aposta mínima), sete,..., até quinze números (aposta máxima ). Quanto maior a quantidade de números marcados, mais caro fica a aposta, claro. A cada "rodada", são sorteados seis números dentre os 60. Há prêmios para quem acerta 4, 5 e 6 números.

Mas, fazendo uma aposta mínima (que custa 2 reais), quais as chances de ganhar?

O resultado de um sorteio pode ocorrer C60,6=50063860 modos distintos, pois a ideia é selecionar 6 números aleatoriamente dentre os 60.

Alguém acertará a sena se os seis números apostados coincidirem com os seis números sorteados, ou seja, apenas um caso favorável.

Daí, a probabilidade de alguém acertar a sena fazendo uma aposta mínima será de $\frac{1}{50063860} \cong 0{,}000002\%$ . Quem acerta a sena fazendo apenas uma aposta mínima é um sortudo mesmo, não?

## Concluindo....

Podemos observar que a teoria das probabilidades nos ajuda muito na tomada de uma decisão. Todavia, isto não quer dizer que a maior probabilidade implica na certeza do acontecimento. Por exemplo, ao lançar uma moeda ficou claro que há 50% de chaces de sair cara. Entretanto, é possível que alguém jogue uma moeda 10 vezes e sempre tenhamos a face coroa como resultado.

# Resumo

- Chamamos de ESPAÇO AMOSTRAL ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento;
- Chamamos de EVENTO a qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório;
- espaço amostral é *equiprovável* quando os eventos unitários de um espaço amostral têm a mesma chance de ocorrer;
- A probabilidade do evento certo é igual a 1.
- A probabilidade do evento improvável é igual a 0.
- Se E é um evento de Ω, diferente do evento improvável e também do evento certo, temos que $0<p(E)<1$.
- Como $0 < n(E) < n(\Omega)$, dividindo todos os termos da desigualdade por $n(\Omega) > 0$:

$$\frac{0}{n(\Omega)} < \frac{n(E)}{n(\Omega)} < \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

Concluindo que $0 < p(E) < 1$.

# Veja Ainda

No site http://www.somatematica.com.br/emedio/probabilidade.php podemos encontrar material explicativo, bem como alguns exercícios resolvidos;

No endereço http://www.youtube.com/watch?v=WLr17iKfA-k é possível visualizar uma aula do telecurso sobre Probabilidades. Vale a pena conferir.

## Referências bibliográfcas

### Livros


- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática Ciência e Aplicações. 6ª edição, vol2. São Paulo, 2010. 320 páginas.*
- MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira, ET ali, *Análise Combinatória e Probabilidade*, 2ª edição, Rio de Janeiro, 2001.


### Imagens


- http://www.sxc.hu/photo/1126780, http://www.sxc.hu/photo/944643, http://www.sxc.hu/photo/1024895, http://www.sxc.hu/photo/872885

- https://encrypted- tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQzrs5XSvmd9j6QsGvfX6k-sqpsk6SJtoR6P swVJ58spOCTTP4O9g

- http://www.sxc.hu/photo/1398688

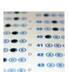
- http://www.sxc.hu/photo/522105

- http://www.sxc.hu/photo/1134318

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_dos_dados

- http://www.sxc.hu/photo/710064

- http://www.sxc.hu/photo/1134743



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

## Atividade 1

a. Ω={(cara,cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}. Poderíamos também introduzir uma notação, por exemplo, C=cara e K= coroa e assim teríamos Ω= {(C,C),(C,K), (K,C), (K,K)}.

b. H={(C,K), (K,C)}

c. V={(C,C)}

d. Sim é verdade, visto que temos 2 chances em 4 de ocorrer cara e coroa enquanto teríamos apenas 1 chance em 4 de ocorrer duas caras.

## Atividade 2

a. Ω={

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

b. Observe que utilizando o princípio fundamental da contagem temos: 6.6= 36 elementos, que estão representados no item a.

b. W={(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}

c. M={(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)}

## Atividade 3

a. Chamando C=cara , K= coroa , temos:

Ω={CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK}

b. A={CCK, CKC, KCC} . Daí, temos: n(A)=3 e p(A) = $\frac{n(A)}{n('\ )} = \frac{3}{8} \cong 37{,}5\%$

c. B={CCC, CCK, CKC, KCC}. Daí, temos: n(B)=4 e p(B) = $\frac{n(B)}{n('\ )} = \frac{4}{8} \cong 50\%$

Respostas das Atividades

### Atividade 4

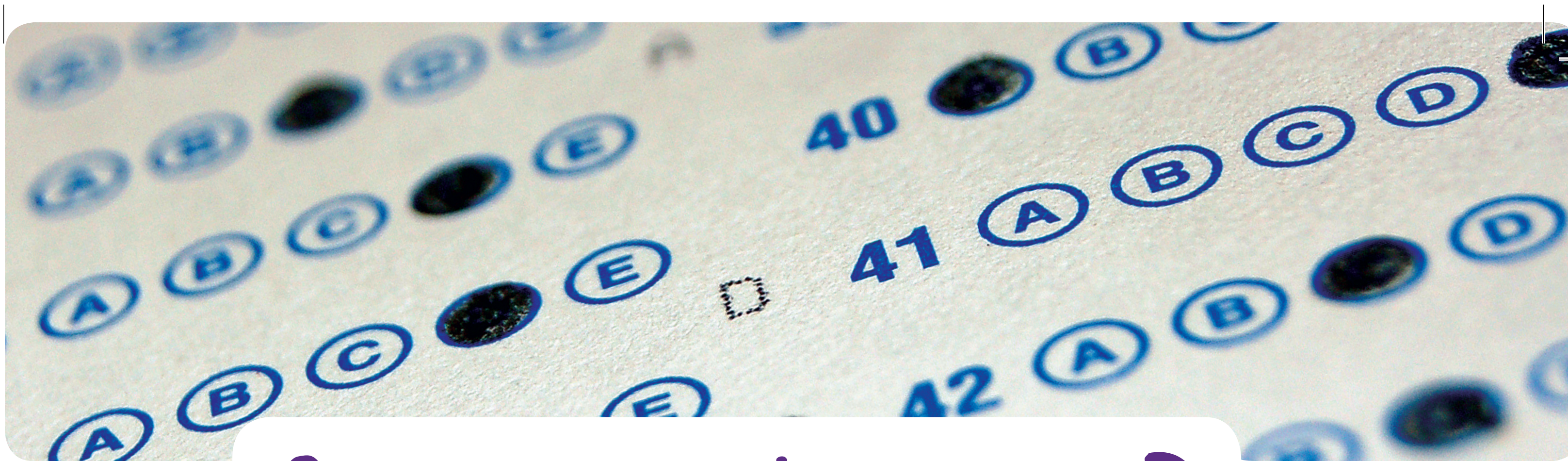
Observe que para calcular a probabilidade necessitamos da quantidade de elementos do espaço amostral e não de quais são seus elementos. Utilizamos muitas técnicas, principalmente os conceitos de análise combinatória: permutação, arranjo, combinação, etc... para deduzir tais valores, mas nesse caso é um pouco mais simples, pois sabemos que de 1 a 20 temos 20 números e portanto 20 é o número de elementos do espaço amostral. Daí:

a. O número de elementos desse evento é 0, visto que não temos o número 25, ou seja o evento é o próprio conjunto vazio. Daí a probabilidade procurada é: $\frac{0}{20}$ =0. Ou seja, esse é um caso de um evento improvável.

b. A probabilidade de ser sorteada uma bola com número de 1 a 20 será 100%, visto que este evento coincide com o espaço amostral, e, como vimos, esta probabilidade é igual a 1.

c. Como queremos calcular a probabilidade de sortear uma bola com número maior que 15, temos como evento o conjunto: {16, 17, 18, 19, 20} e, portanto, este evento possui 5 elementos. Daí a probabilidade de sortearmos uma bola com número maior que 15 será: $\frac{5}{20} = 0,40 = 40\%$ .

Os múltiplos de 3 de um a 20 são {3, 6, 9, 12, 15, 18} e portanto são 6 possibilidades. Daí, a probabilidade procurada será: $\frac{6}{20} = 0,30 = 30\%$ .




# O que perguntam por aí?

### Questão 1 (ENEM 2008)

O jogo-da-velha é um jogo popular, originado na Inglaterra. O nome “velha” surgiu do fato de esse jogo ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras idosas que tinham dificuldades de visão e não conseguiam mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois adversários que, em um tabuleiro 3×3, devem conseguir alinhar verticalmente, horizontalmente ou na diagonal, 3 peças de formato idêntico. Cada jogador, após escolher o formato da peça com a qual irá jogar, coloca uma peça por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.

No tabuleiro representado ao lado, estão registradas as jogadas de dois adversários em um dado momento. Observe que uma das peças tem formato de círculo e a outra tem a forma de um xis. Considere as regras do jogo-da-velha e o fato de que, neste momento, é a vez do jogador que utiliza os círculos. Para garantir a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode posicionar a peça no tabuleiro de:

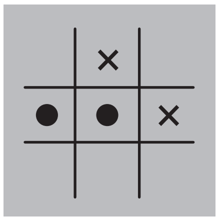
a. uma só maneira.

b. duas maneiras distintas.

c. três maneiras distintas.

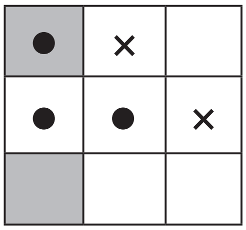
d. quatro maneiras distintas.

e. cinco maneiras distintas



**Resposta:** Letra B

**Comentário:**



1. Posicionando a peça na primeira linha e na primeira coluna, como indicado na figura, o jogador que utiliza os círculos assegurará a vitória na próxima jogada, pois alinhará 3 círculos na vertical ou na diagonal.

2. Posicionado a peça na terceira linha e na primeira coluna, o jogador que utiliza círculos também assegurará, pelos mesmos motivos, vitória na próxima jogada.

3. Nas demais posições, o jogador não poderá assegurar vitória na próxima jogada.

## Questão 2

Ao retirarmos uma bola de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20, qual a **probabilidade** de a bola ser um número múltiplo de 3 ou ser primo?

a. 13/20

b. 26/21

c. 13/10

d. 7/10

e. 16/10

**Resposta:** Letra A

**Comentário:** Opções: 2,3,5,6,7,9,11,12,13,15,17,18,19, ou seja 13 opções.

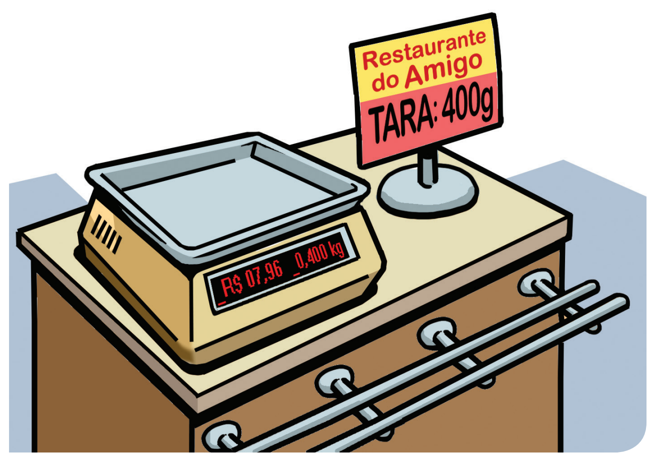
Como são 20 números, teremos que a probabilidade é 13/20, letra A.

# Estatística: tabelas e gráficos

## Para início de conversa...

### "S. Limoeiro, o pão duro encrenqueiro"

S. Limoeiro vai a um restaurante a quilo para almoçar. Lá dentro, há uma fila de pessoas se servindo.




– Será que o prato está correspondendo ao valor da **tara**? – Puxa assunto com o penúltimo da fila.

– Acredito que sim, senhor. – Educadamente responde o jovem cliente da frente.

– Mas, e se não estiver correto? Eu não quero pagar um centavo sequer a mais sem ter necessidade!

Sem dar muita bola, o rapaz desdenha:

– Não se preocupe. E se estiver errado? É tão pouca a diferença...

– Você só pode estar brincando! Eu não posso aceitar isso! Seu dinheiro é capim? Não, o meu não é! Como, nos dias de hoje, podemos desperdiçar dinheiro?! E o nosso futuro, como fica?

O jovem rapaz ouve assustado tão veemente discurso, o que o deixa com uma pulga atrás da orelha. Assim, retruca:

– E o que o senhor sugere que façamos?

– Não me restam dúvidas! Vamos pesar nossos pratos antes de nos servirmos.

Um pouco envergonhado, o rapaz se amedronta:

– Nós?! Vai o senhor primeiro.... er.... quer dizer....

– Frouxo! Eu vou lá!

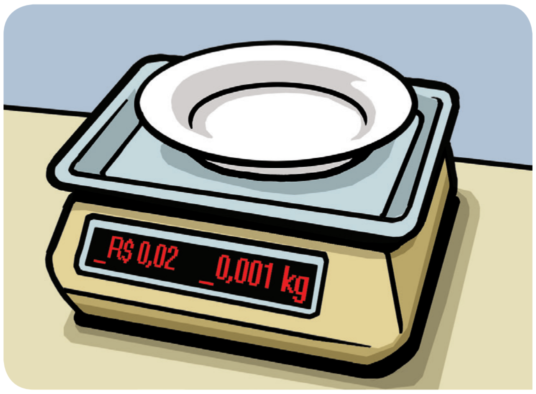
S. Limoeiro foi até o atendente que estava na balança e inquiriu:

– Boa tarde, meu amigo! Eu gostaria de verificar se a tara desta balança está correta. Poderia pesar o meu prato?!

O atendente, já acostumado com essa situação, responde:

– Tenha a bondade, senhor. Pode colocar o seu prato aqui.

Ao colocar o prato, qual não foi a surpresa de S. Limoeiro!




O tempo fechou! S. Limoeiro já preparava aquela confusão. Imagine só, tirando dele 2 centavos! Era o fim do mundo para o nosso amigo encrenqueiro!

O rapaz que havia conversado com ele na fila foi conferir o seu prato também, o que chamou a atenção dos demais clientes que ainda esperavam para se servir. E não deu outra: TODOS vieram conferir também.

O banzé estava armado!

Plácido, o gerente, vendo esta situação de longe, se aproxima e, calmamente, vai conversar com os clientes.

– Boa tarde, pessoal. Meu nome é Plácido. Sou o gerente do restaurante. Percebo que estão preocupados com o valor da tara que informamos neste cartaz. Para não deixar dúvidas, faço questão de que todos coloquem seus pratos na balança para que verifiquem que a tara está correta.

Um por um, os pratos das pessoas que vieram até a balança foram sendo pesados.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 402 g | 401 g | 399 g | 404 g | 400 g |
| 397 g | 400 g | 400 g | 401 g | 396 g |

S. Limoeiro não entendeu mais nada.

– Mas isso é um verdadeiro disparate! Como que algumas pessoas pagam mais pelo prato e outras pagam menos?! Isso é uma loucura!

– Tenha calma, senhor. – o gerente tenta conversar.

– Não! Jamais! Já sei o que eu vou fazer!

“Ai, meu Deus! O que será que esse homem vai fazer? Será que vai chamar a polícia?” Pensa Plácido tentando manter um semblante calmo ao mesmo tempo em que todos os demais clientes, com os olhos esbugalhados, esperavam a decisão de S. Limoeiro.

– E o que o se-senhor va-vai fazer? – Gagueja Plácido.

– Não tem jeito! Vou denunciar! Mas, antes...

– Antes...?

– Vou trocar de prato!

* * * * *

Quanta confusão! Nosso amigo S. Limoeiro causou um grande furdunço no restaurante por causa das diferenças entre a tara e os pesos dos pratos.

E vocês? O que acham deste assunto? Vocês já estiveram num restaurante a quilo? Já passaram por essa situação?

Nesta unidade, vamos discutir um pouco mais sobre essa situação com base em alguns conceitos da Estatística. Vamos buscar ferramentas matemáticas que nos permitam argumentar sobre este caso. Será que o restaurante infringiu a lei? Será que S. Limoeiro exagerou? Devemos usar o bom senso numa situação como essa?

Essas e outras perguntas serão respondidas nesta unidade. E, aí? Estão preparados? Então, vamos lá!

## Objetivos de aprendizagem

- Determinar os termos de uma pesquisa estatística
- Construir representações gráficas como forma de representação de dados estatísticos
- Conhecer e efetuar cálculos envolvendo Frequência absoluta, relativa e acumulada
- Calcular, analisar e interpretar as Medidas de tendência central (médias, medianas e modas)

**Tara**

Abatimento no peso de mercadorias, atendendo-se ao vaso ou envoltório onde estão acondicionados.

## Seção 1
# Amostra, População e variáveis

Nesta seção, iremos tratar de alguns conceitos fundamentais no trabalho com a Estatística como o de Amostra e População, além do conceito estatístico para variáveis. Em ambos os casos, a permanência de dúvidas sobre as definições que serão tratadas nessa unidade pode tornar o processo de aprendizagem muito mais complicado e menos produtivo. Portanto, explore bastante esta seção. Aproveite!

### Amostra x População

Na história apresentada anteriormente, nosso amigo encrenqueiro, S. Limoeiro, faz um grande reboliço no restaurante por causa das diferenças existentes entre os pesos dos pratos. Será que ele tinha a razão em fazer isso? Será que ele estava errado? Indiquem as suas opiniões. Discutam com amigos e familiares sobre esta questão.

Porém, para auxiliá-los nesta discussão, vamos colocar algumas informações para vocês. Afinal, buscamos sempre ter o máximo de conhecimento possível para poder argumentar de forma justa e imparcial, não acham?

Em primeiro lugar, segundo a Portaria 97/2000 do Inmetro, o peso dos pratos com tara superior a 200g (que é o nosso caso) pode ter uma variação de até 5g para mais ou para menos. Esta informação tira totalmente a razão de S. Limoeiro.

Por outro lado, nem todos os pratos foram pesados. Apenas daquelas pessoas que ainda estavam na fila. Portanto, será que havia algum prato com um peso fora do intervalo de tolerância dado pelo Inmetro?

É, meus amigos, vocês já estão munidos de algumas informações que precisam ser levadas em consideração ou mesmo investigadas. Se levarmos em conta a portaria do Inmetro, S. Limoeiro não tem razão em reclamar, pois todos os pratos ficaram dentro da margem de tolerância. Afinal, o mais leve pesou 396g e o mais pesado, 404g.

O segundo argumento, é mais complexo do que imaginamos. S. Limoeiro pesou apenas 10 pratos e tirou suas conclusões a partir deles. Mas, em um restaurante, certamente existem muito mais do que 10 pratos. O que na verdade aconteceu foi que S. Limoeiro verificou apenas uma **AMOSTRA** dos pratos do restaurante. Isto é, uma parte da quantidade total de pratos.

Caso tivesse resolvido pesar TODOS os pratos do restaurante, diríamos que S. Limoeiro verificou a **POPULAÇÃO** de pratos.

Vamos ver se entendemos bem essa diferença entre esses dois conceitos?

Quando S. Limoeiro pesou apenas 10 dos pratos do restaurante, ele selecionou uma amostra. Se tivesse pesado todos os pratos, teria trabalhado com a população dos pratos. Assim, vamos à primeira atividade.

Atividade 1

## Amostra x População

Escreva com suas palavras o que você entende por:

a. Amostra:

b. População:

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal. A diferenciação entre esses conceitos embora pareça bem simples é de extrema importância para o desenvolvimento do raciocínio estatístico. Agora, vamos verificar se vocês conseguem identificar a diferença entre amostra e população nos casos a seguir:

**O que é ? O que é?**

Atividade 2

Classifique como amostra ou população cada caso abaixo:

a. Para avaliar a eficácia de uma campanha de vacinação no Estado de São Paulo, mães de recém-nascidos durante o primeiro semestre de 2005, foram perguntadas a respeito da última vez que vacinaram seus filhos;

b. Para verificar a audiência de um programa de TV no Brasil, moradores da zona sul foram entrevistados com relação ao canal em que estavam sintonizados;

c. A fim de avaliar a intenção de voto para presidente do Brasil, 2.004 pessoas foram entrevistadas em todas as cidades brasileiras.

d. O IBGE entrevistou todos os moradores do meu prédio para saber quantos carros cada família que mora neste prédio possui.

e. As 10 últimas ligações não atendidas registradas no meu celular são de números desconhecidos.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Maravilha, pessoal. Reparem que discernir entre uma amostra e uma população realmente não é uma tarefa tão simples quanto parece. Podemos fazer confusões que podem gerar problemas em futuras resoluções.

Mas, antes de comentar a respeito de cálculos, vamos conversar um pouco mais sobre as amostras e a população. Voltando ao caso do S. Limoeiro, gostaria de levantar uma questão:

**Quem nos garante que a amostra utilizada por S. Limoeiro para a realização das pesagens não era tendenciosa?**

Esta pergunta é muito importante, pois mostra um pouco a fragilidade existente no trabalho com amostras. É preciso garantir que não haja tendências, ou seja, que não seja uma amostra viciada. Mas o que significa tudo isso?

Imaginem só o que aconteceria se S. Limoeiro descobrisse que os pratos que estão sendo lavados, por exemplo, pesam 408g? Ou seja, fora da margem de tolerância.

Daí, surgem as primeiras perguntas:

- Como ter a certeza de que isso não ocorre?
- Como podemos concluir algo nos baseando apenas nas amostras?

- Em muitos casos, é impossível trabalharmos com a população. Como avaliar se nossa amostra é ou não tendenciosa?

Essas e outras dúvidas e questionamentos podem ser levantados no estudo da estatística. A discussão sobre todas essas questões serão feitas na próxima unidade.

## Os tipos de variáveis

Que tipo de pesquisa podemos fazer? Eis algumas sugestões:

- Pesquisa sobre o estado civil das pessoas.
- Pesquisa sobre o número de filhos de cada família.
- Pesquisa sobre a intenção de voto nas eleições.
- Pesquisa sobre o que mais te incomoda no seu bairro.
- Pesquisa sobre o valor do salário das pessoas.
- Entre muitas outras.

Esses vários tipos de pesquisa nos levam a observar que nem sempre as respostas são numéricas. Alguns dados são formados por adjetivos, locais, nomes próprios sem que haja um valor numérico atrelado a eles. A esses tipos de respostas damos o nome de **VARIÁVEL ou DADO**. E essas variáveis podem ser classificadas de duas formas:

Variável Qualitativa – aquela que não pode ser medida. Essas variáveis são muito comuns em pesquisas sobre o sexo das pessoas (masculino ou feminino), o estado civil (solteiro, casado, viúvo, ...). Reparem que nesses casos, as respostas não são formadas por números e não há como medi-las.

Variável Quantitativa – aquela que pode ser medida. Essas variáveis são muito comuns em pesquisas sobre o número de filhos que uma família possui, a quantidade de carros que uma pessoa já teve, a nota que tirou na prova passada, entre outras. Reparem que o valor numérico é a característica principal dessas variáveis.

Porém, vale a pena levantar uma questão.

**Qualitativa ou quantitativa?**

Atividade 3

Reflitam e me digam que tipo de variável pode ser encontrada como resposta à pesquisa abaixo:

"Qual o número que você mais gosta?"

Respostas:

Clarisse: 2

Ana Maria: 10

Josué: 8

Bia: 5

E aí, pessoal? Podemos dizer que essas variáveis são qualitativas ou quantitativas? Pensem e discutam com seus colegas, amigos e familiares.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

De uma forma ou de outra, todas as pesquisas ou coleções de dados, sejam qualitativos ou quantitativos, podem ser arrumados ou disponibilizados de forma a auxiliar em possíveis interpretações. Neste momento, vamos nos concentrar em organizar essas informações de diversas formas. Dentre elas, temos as tabelas e gráficos. Vamos lá?!

## Tabulando os dados amostrais

Uma das formas mais comuns de organizarmos os dados de uma pesquisa é colocando-os numa tabela. Vamos ver algumas maneiras de compilar esses dados?

Voltando ao problema do S. Limoeiro, como podemos colocar as medições realizadas em uma tabela? Vejam, em primeiro lugar devemos escolher as colunas. Em seguida, vamos arrumar os dados em cada coluna.

Para o caso do S. Limoeiro, podemos reservar a primeira coluna para a identificação dos clientes. A segunda coluna para a indicação dos pesos dos pratos. Assim:

| Clientes | Pesos |
|---|---|
| S. Limoeiro | 402 g |
| O rapaz da frente | 401 g |
| Cliente 3 | 399 g |
| Cliente 4 | 404 g |
| Cliente 5 | 400 g |
| Cliente 6 | 397 g |
| Cliente 7 | 400 g |
| Cliente 8 | 400 g |
| Cliente 9 | 401 g |
| Cliente 10 | 396 g |

Muito simples, não acham?

Contudo, podemos compilar essas informações de outras formas em busca de permitir possíveis interpretações. Vejamos:

Na primeira coluna, colocaremos o peso encontrado.

Na segunda coluna, colocaremos a quantidade de vezes que aquele peso apareceu nas medições. A isto damos o nome de **FREQUÊNCIA ABSOLUTA**.

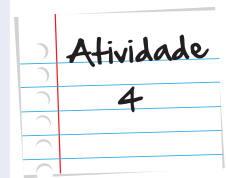
Na terceira coluna, colocaremos a **FREQUÊNCIA RELATIVA**. Isto é, a razão entre a quantidade de vezes que aquela medição aparece e o total de medições. Esse valor pode ser dado na forma de frações ou de porcentagens.

| **Pesos** | **Frequência Absoluta (fa)** | **Frequência Relativa (fr)** |
|---|---|---|
| 396 g | 1 | 1/10 = 10% |
| 397 g | 1 | 1/10 = 10% |
| 399 g | 1 | 1/10 = 10% |
| 400 g | 3 | 3/10 = 30% |
| 401 g | 2 | 2/10 = 20% |
| 402 g | 1 | 1/10 = 10% |
| 404 g | 1 | 1/10 = 10% |
| TOTAL | 10 | 10/10 = 100% |

Podemos perceber que a construção desta tabela necessitou de alguns conceitos que permitem uma interpretação mais clara da situação encontrada. Por exemplo: 400 g foi a medição mais encontrada, com 30% das medições realizadas.

Vamos ver isso na prática?

## O tempo com o estudo

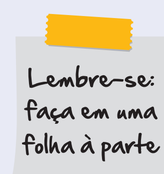



Uma pesquisa mostra a quantidade de horas por semana que alunos de uma escola do Rio de Janeiro estudam.

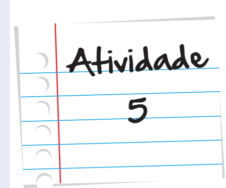
9, 8, 5, 4, 5, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 7, 9, 5, 6, 7, 1, 4, 7, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 9, 5, 1, 4, 8, 2, 9

a. Coloque esses números em ordem crescente.

b. Construa uma tabela com três colunas: a primeira representando a quantidade de horas, a segunda indicando a frequência absoluta e a terceira a frequência relativa..




## Lançando as notas das provas




A tabela a seguir mostra a compilação das notas obtidas por 25 alunos da 3ª série do Ensino Médio na prova de Matemática.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_r$ (%) |
|---|---|---|
| 3,0 | 1 | 1/25 = 4% |
| 4,0 | 3 | 3/25 = 12% |
| 5,0 | 4 | 4/25 = 16% |
| 6,0 | 6 | 6/25 = 24% |
| 7,0 | 5 | 5/25 = 20% |
| 8,0 | 4 | 4/25 = 16% |
| 9,0 | 2 | 2/25 = 8% |

Atividade 5

Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações, justificando quando forem falsas:

a. 20% dos alunos obtiveram nota cima de 7,0

b. 56% dos alunos obtiveram nota inferior a 7,0.

c. 92% dos alunos obtiveram nota inferior a 9,0.

d. 16% dos alunos obtiveram nota 5,0.

e. Nenhum aluno conseguiu acertar ou errar a prova toda.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

É isso aí, pessoal. Estamos aprendendo muito nesta unidade. Mas, não podemos deixar de comentar a respeito de outra forma de representação dos dados: os gráficos.

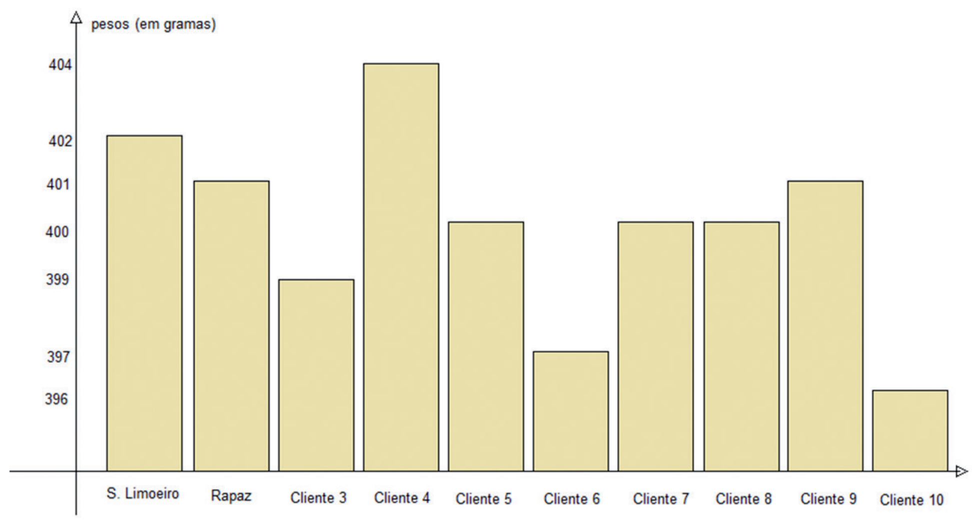
Quais são os tipos de gráficos que você conhece?

Há o gráfico de barras, gráfico de setor (carinhosamente conhecido como gráfico de pizza), gráficos de segmentos, entre outros. Nem sempre podemos usar qualquer gráfico para representar uma situação. As vezes, a utilização de certos gráficos impedem qualquer tipo de interpretação. Vamos dar uma olhada nisso?


Que tal representarmos em um gráfico de barras os dados obtidos com as pesagens realizadas com o S. Limoeiro no início dessa unidade?

Para isso, definimos o eixo vertical como o eixo que representa os valores numéricos nos pesos de cada prato.

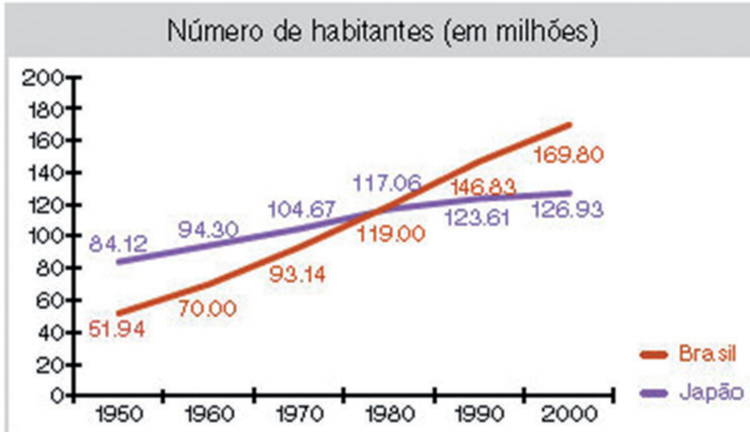
Definimos o eixo horizontal como a representação de cada cliente. Vamos ver como fica?




O gráfico de setor pode representar as frequências de cada pesagem.


Reparem que neste gráfico, a comparação entre cada quantidade e o total (o círculo completo) é o seu grande diferencial. Os ângulos de cada setor circular devem ser proporcionais às frequências relativas. Ou seja, quanto maior a frequência, maior é o ângulo central do setor.

Veja o gráfico de segmentos a seguir:




Disponível em: http://www.klickeducacao.com.br/2006/conteudo/pagina/0,6313,POR-1024-6945,00.html

Este gráfico é muito utilizado quando queremos representar a evolução ou involução de determinados tipos de dados. Por exemplo, no caso apresentado, a comparação entre a evolução da população no Brasil e no Japão.

Segundo este gráfico, apesar de existirem muito mais japoneses que brasileiros em 1950, a população do Brasil cresceu muito rápido, ultrapassando a do Japão em 1980. Podemos ver também que o ritmo de crescimento diminuiu nos dois países, mas que o ritmo de crescimento dos japoneses diminuiu muito mais, principalmente depois de 1980.

Vocês conseguiriam imaginar a representação das medições dos pratos do Restaurante do Amigo feito pelo S. Limoeiro em um gráfico de segmentos? Notem que não há uma evolução ou involução nos dados. As medições são independentes umas das outras.

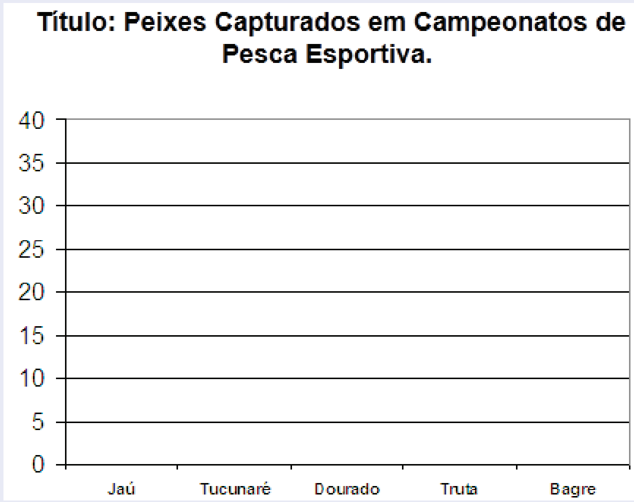
Vamos colocar isso em prática? Fiquem tranquilos. Vai ser bem fácil!

Atividade 6

## Competição de pescaria

Leia a história a seguir e represente os dados em um gráfico de barras.

Numa competição de pesca esportiva, os seguintes peixes foram pescados: 15 Jaús, 20 Tucunarés, 35 Dourados, 20 Trutas, 10 Bagres.




Atividade 6

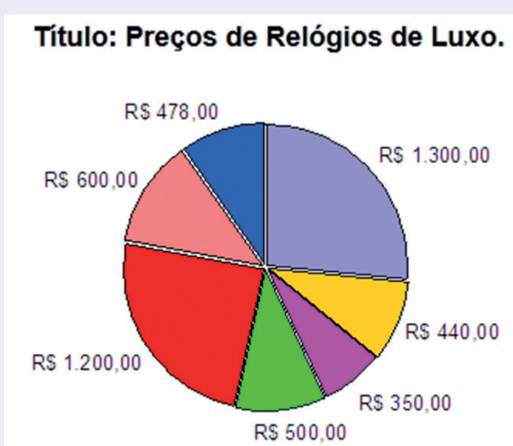
Lembre-se: faça em uma folha à parte

## Os preços dos relógios

Atividade 7

O gráfico abaixo mostra os preços de seis relógios de luxo comercializados em uma famosa joalheria da capital paulistana. Estes relógios possuem variação no preço em virtude das suas funcionalidades e acabamento, sendo que o mais caro possui detalhes em ouro.

Analise atentamente este gráfico circular, também conhecido como gráfico tipo "pizza", e responda as perguntas:




Disponível em: http://www.estudamos.com.br/graficos/grafico_exercicio_on_line_15.php

Atividade 7

a. Qual é o valor do segundo relógio mais caro representado neste gráfico?

b. A área total do gráfico equivale a que percentual?

c. Que cor representa o relógio mais barato no gráfico?

d. Caso alguém queira comprar o relógio mais caro e o relógio mais barato, quanto terá de desembolsar?

e. Qual é a soma de todos os preços dos relógios?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

É isso aí, pessoal. Já podemos ver que a interpretação e a construção de gráficos já virou a maior moleza!

Agora, vamos voltar mais uma vez ao caso do S. Limoeiro. Até o momento, já explicitamos muitos argumentos prós e contras. Porém, ainda faltam alguns que vale a pena serem comentados. É o que veremos na seção a seguir.

## Seção 2
# Medidas de Centralidade – médias, modas e medianas

Conforme dissemos anteriormente, há alguns argumentos que ainda precisam ser colocados para que possamos tomar nossa decisão sobre quem tem a razão na história do S. Limoeiro.

Vejamos:

A seguir, estão as medições realizadas no restaurante. Vale lembrar que a tara marcada pelo estabelecimento era de 400 gramas.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 402 g | 401 g | 399 g | 404 g | 400 g |
| 397 g | 400 g | 400 g | 401 g | 396 g |

Observemos o seguinte:

$$\frac{402+401+399+404+400+397+400+400+401+396}{10}=\frac{4000}{10}=400 \text{ gramas}$$

Em outras palavras, a **MÉDIA ARITMÉTICA** das medições feitas dá exatamente 400 gramas.

Antes de prosseguirmos, vamos analisar bem como encontramos esse resultado.

O cálculo da média aritmética é feito através da soma de todos os valores e, em seguida, dividindo-se o resultado pela quantidade de parcelas.

No exemplo do S. Limoeiro, somamos as 10 parcelas (as 10 medições realizadas), o que gerou o valor de 4000 gramas. Então, esta soma (4000 g) foi dividida por 10 (o número de medições que entraram no cálculo desta média).

Simples, não é?!

Mais um conceito que podemos expor aqui é o que chamamos de MODA. A **MODA** deste conjunto de dados é 400 gramas.

Certamente vocês devem estar se perguntando: "O que é moda?"

A resposta é muito simples e vocês sabem responder. Vejam:

Quando nos referimos, em geral, à palavra MODA, fazemos uma associação às tendências de vestuário. Então, quando uma peça de roupa ou um estilo de roupa está na MODA, significa dizer que é a peça ou o estilo de roupa que deve ser copiado por todos e se tornar, consequentemente, o mais usado.

A MODA na estatística é a mesma coisa. Dissemos que 400 g é a MODA desta amostra, pois é a medida que mais apareceu em todas as medições feitas. Lembre-se da tabela de frequências absolutas. Ela vai te auxiliar na determinação da MODA.

O último conceito que iremos expor para vocês agora é o que chamamos de **MEDIANA**. Se colocarmos todos os valores das medições em ordem crescente, a MEDIANA será o termo central desta arrumação. Quando não houver um termo central (número par de termos), a mediana será igual à média aritmética entre os dois termos centrais. No nosso exemplo, as medições em ordem crescente:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 396 | 397 | 399 | 400 | 400 | 400 | 401 | 401 | 402 | 404 |

Como temos 10 termos, podemos organizar os dados da seguinte forma

396 397 399 400 400 | 400 401 401 402 404

5 termos à esquerda | 5 termos à direita

MEDIANA = 400 g

Como não há um termo central, a mediana será igual à média aritmética entre os dois termos centrais, nesse caso, iguais a 400.

Portanto, este é mais um argumento a favor do restaurante. É, pelo visto, o S. Limoeiro exagerou no escândalo. O que vocês acham?

Por enquanto, vamos fazer mais essa atividade.

**Atividade 8**

Uma empresa de informática possui 10 vendedores e cada um deles trabalha com diferentes cargas horárias. As cargas horárias dos vendedores são dadas abaixo:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 8 | 8 | 8 | 6 | 6 | 8 | 8 | 12 |

Calcule a média, a mediana e a moda das cargas horárias desses vendedores.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Muito bem, pessoal. Estamos chegando ao fim de mais uma unidade. A introdução aos conceitos estatísticos nos permitirá trabalhar de forma mais segura com fórmulas e estratégias que serão abordadas na próxima unidade.

Fiquem ligados, ainda, nas demais seções desta unidade.

# Resumo

- Definimos amostra como uma coleção de dados referente à parte de um total. Este total recebe o nome de população.
- Os dados podem ser compilados em tabelas e gráficos. Cada gráfico possui sua funcionalidade. Nem sem um gráfico pode ser utilizado em qualquer situação.
- Média, Moda e Mediana são medidas de centralidade. Média é o quociente entre a soma de todas as parcelas e o número de parcelas. A Moda é o termo que mais aparece na amostra e Mediana é o termo central da amostra quando colocada em ordem crescente.

# Veja ainda

Se vocês gostaram de interpretar e construir gráficos, este blog indica vários sites que nos auxiliam na construção de gráficos sem o uso do Excel. São diversos tipos de gráficos em várias opções de sites. É muito interessante. Clique no link abaixo e veja a lista de opções.

http://blogueigoo.blogspot.com.br/2009/11/sites-para-fazer-graficos-sem-usar.html

## Referências

### Livros


- MORETTIN, P. A. & BUSSAB, W. O. (2010) *Estatística Básica*. 6a ed. São Paulo: Saraiva.
- CRESPO, A. A. (2009) *Estatística Fácil*. 19a ed. São Paulo: Saraiva.
- MILONE, Giuseppe. (2003) *Estatística Geral e Aplicada*. 1a ed. São Paulo: Cengage Learning.


### Imagens

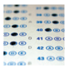
- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/1339588

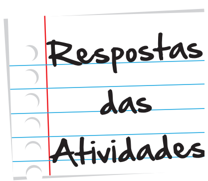
- http://www.sxc.hu/photo/875413

- http://www.sxc.hu/photo/1396218

- http://www.sxc.hu/photo/1212912



- http://www.sxc.hu/photo/517386




## Atividade 1

a. Amostra: parte de um todo

b. População: o total de dados

## Atividade 2

a. Amostra

b. Amostra

c. Amostra

d. População

e. Amostra

## Atividade 3

São variáveis qualitativas, pois não se referem a uma medição e sim a eleição de algo que mais gostam, só que , neste caso, são números.

## Atividade 4

Uma pesquisa mostra a quantidade de horas por semana que alunos de uma escola do Rio de Janeiro estudam.

a. 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9

Respostas das Atividades

b.

| Quantidade de horas | Frequência absoluta | Frequência relativa |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2/32 = 6,25% |
| 2 | 4 | 4/32 = 12,5% |
| 3 | 2 | 2/32 = 6,25% |
| 4 | 6 | 6/32 = 18,75% |
| 5 | 5 | 5/32 = 15, 625% |
| 6 | 3 | 3/32 = 9,375% |
| 7 | 4 | 4/32 = 12,5% |
| 8 | 2 | 2/32 = 6,25% |
| 9 | 4 | 4/32 = 12,5% |

## Atividade 5

a. Falso. 20% dos alunos obtiveram notas iguais a 7,0. Acima de 7,0, foram 24% dos alunos.

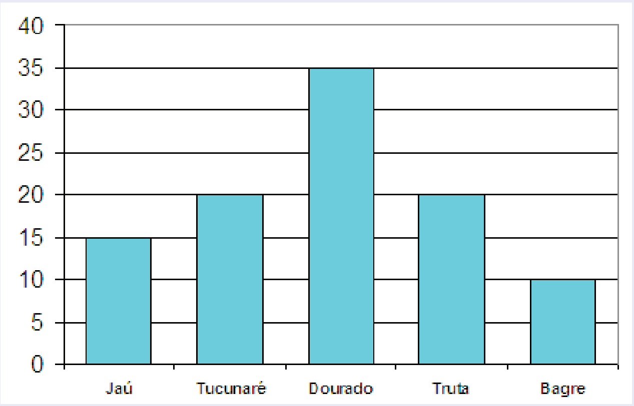
b. Verdadeiro

c. Verdadeiro

d. Verdadeiro

e. Verdadeiro

## Atividade 6



Respostas das Atividades

## Atividade 7

a. R$ 1.200,00

b. 100%

c. Violeta ou roxo

d. 1300 + 350 = 1650 reais

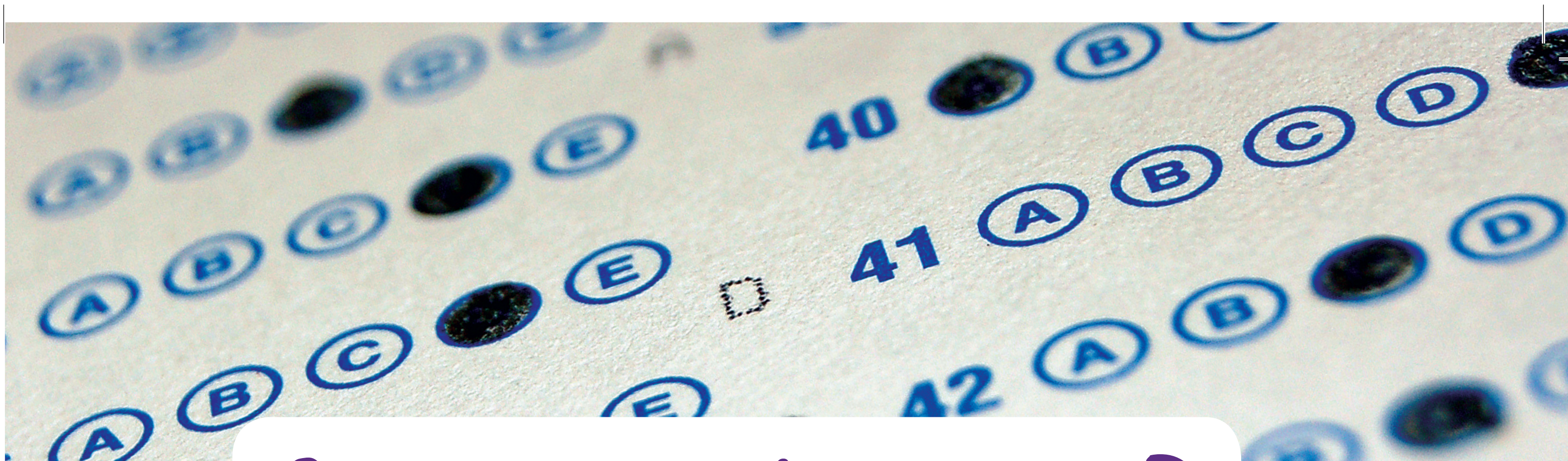
e. 4868 reais

## Atividade 8

Média: 7,3

Moda: 8

Mediana: 8




# O que perguntam por aí?

**Questão 1 (UFPR 2009 – ADAPTADA)**

Uma determinada região apresentou, nos últimos cinco meses, os seguintes valores (fornecidos em mm) para a precipitação pluviométrica média:

| jun | jul | ago | set | out |
|---|---|---|---|---|
| 32 | 34 | 27 | 29 | 28 |

A média e a mediana do conjunto de valores acima são, respectivamente:

a. 30, 27

b. 27, 30

c. 30, 29

d. 29, 30

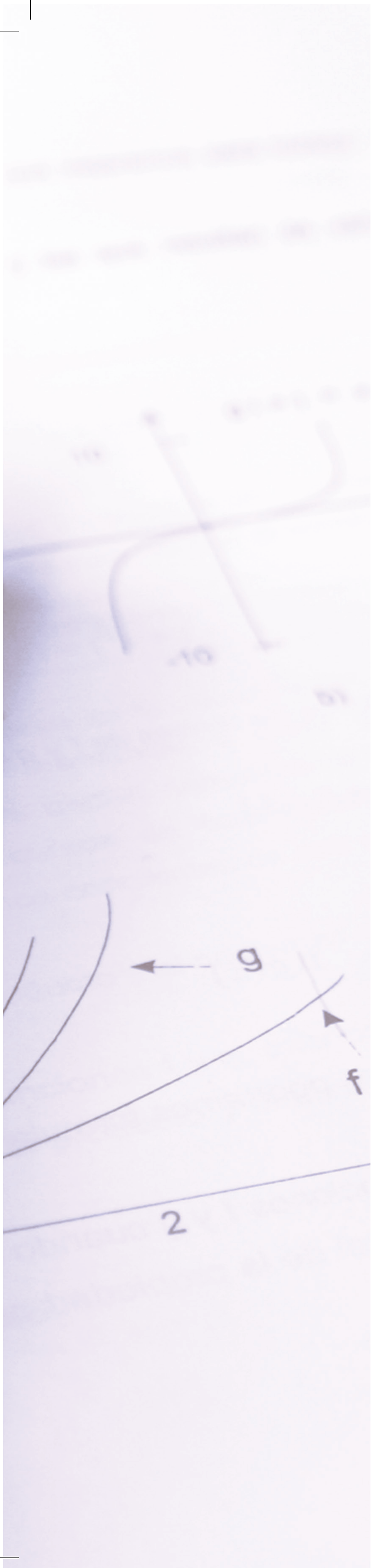
e. 30, 29

**Resposta:** Letra C.

**Comentário:** A média das precipitações é calculada por: $\frac{32+34+27+29+28}{5}=\frac{150}{5}=30$

A mediana é feita colocando-se os valores em ordem crescente:

27, 28, 29, 32, 34. O termo central é o terceiro termo. Ele separa a amostra em dois grupos de igual quantidade. Portanto, o número 29 é a mediana.



# Polinômios e equações algébricas 1

## Para início de conversa...


Você saberia responder essa questão? Se desejar faça uma experiência construindo algumas caixas de tamanhos diferentes e calcule a capacidade de cada uma.

Veja a indicação de um vídeo mostrando essa experiência. http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1382

**Atividade 1**

Anote suas respostas em seu caderno

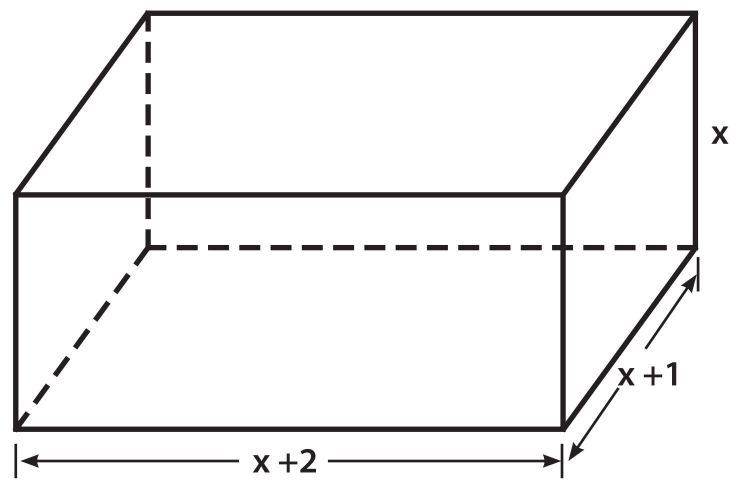



**Figura 1:** Caixa de papelão sem tampa, com lados iguais a x, x+1 e x+2.

Veja o desenho acima, que representa uma caixa de papelão sem tampa, com lados iguais a x, x+1 e x+2. Nós queremos calcular o volume e a área desta caixa. Você saberia escrever uma expressão que nos permitisse calcular a área desta caixa, em função da medida x?

Uma dica: para resolver questões desse tipo estudaremos os polinômios. Este é um tema que já foi estudado antes, quando vimos, por exemplo, as expressões que representam uma função afim do tipo $y = ax + b$ ou as expressões que representam uma função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Essas expressões são chamadas de expressões polinomiais ou simplesmente polinômios.

## Objetivos de Aprendizagem

- Definir polinômios
- Compreender o significado e as aplicações de uma função polinomial,
- Calcular o valor numérico de um polinômio,
- Reconhecer as condições necessárias para que dois polinômios sejam iguais
- Compreender o significado de raiz de um polinômio e saber calculá-la.
- Efetuar as 4 operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com polinômios.

## Seção 1
# O que é um polinômio?

Quando lemos e compreendemos o enunciado de um problema, podemos escrever expressões que nos permitirão analisá-lo e obter sua solução.

Podemos ter polinômios com apenas um termo, como por exemplo: 2x, y, 4z (chamados de monômios). Mas podemos ter polinômios com um número maior de termos. De uma maneira geral podemos escrever um polinômio da seguinte forma:

$$a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde:

- $a_n$, $a_{n-1}$, $a_{n-2}$,.....,$a_2$, $a_1$, $a_0$ são números reais chamados de coeficientes do polinômio.
- n (um número natural diferente de zero) é o grau do polinômio
- x é chamado de variável.

Veja os exemplos de polinômios.

a. O polinômio 5x-1 é de grau 1 e seus coeficientes são 5 e -1.

b. O polinômio $2m^2 + m + 1$ é de grau 2 e seus coeficientes são 2, 1 e 1.

c. O polinômio $y^3 + 4y^2 - 2y + 5$ é de grau 3 e seus coeficientes são 1, 4, -2 e 5.

Veja, agora, exemplos de expressões que não são polinômios:

a. $2\sqrt{x} - x + 5$ ; a variável x não pode estar sob radical, pois isso significa que o expoente é fracionário.

b. $\frac{2}{x^2} + x^3$ ; a variável x não pode estar no denominador, pois isso significa que o expoente é negativo.

c. $m^{-3} + 3m^{-2} - 2m$; o expoente da variável não pode ser negativo.

d. $y^{\frac{1}{2}} + 3y - 1$ ; o expoente da variável não pode ser fracionário.

Assim, para que a expressão seja um polinômio, o expoente das variáveis não pode ser negativo nem fracionário - o que equivale a dizer que a variável não pode estar sob raiz e/ou no denominador.

Atividade 2

Quais das expressões abaixo representam polinômios? Escreva os graus desses polinômios.

a. $5x^4 + 2x^3 + x^2 + x$

b. $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} - 4$

c) $5y^5 - 1$

d) $m^{-1} + 3m$

e. $\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$

f. $t^6 + t^{\frac{1}{3}}$

g. $k + 7$

h. $s^{-2} + 2s^{-1} + 3$

Anote suas respostas em seu caderno

# Seção 2
## Funções polinomiais

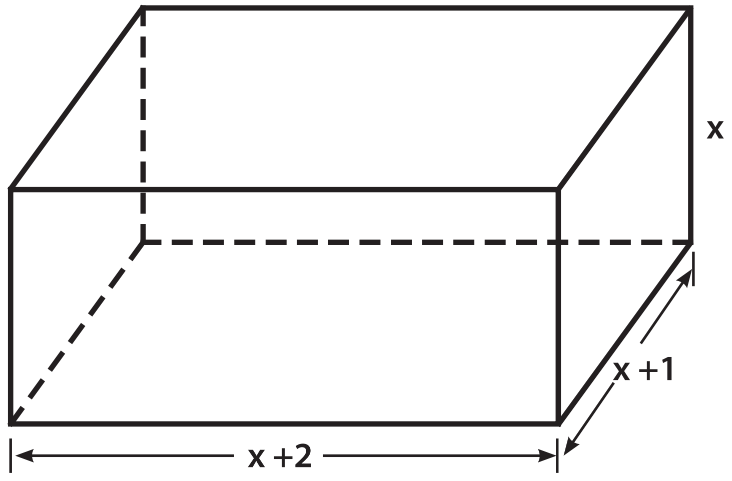



**Figura 2:** Caixa sem tampa, com dimensões x, x+1 e x+2.

Vamos retornar àquela pergunta da seção “Para início de conversa”? Tínhamos uma caixa sem tampa com dimensões x, x+1 e x+2 e estávamos interessados em encontrar uma expressão que nos permitisse calcular sua área e seu volume. Muito bem, para calcular a área total da caixa, devemos somar as áreas das suas faces, a saber: dois retângulos de lados x e x+1, dois retângulos de lado x e x+2 e um retângulo de lados x+1 e x+2. Contamos apenas um retângulo de lados x+1 e x+2 porque a caixa não tem tampa.

Então, vamos às contas:

$A(x) = 2.x.(x+1) + 2.x.(x+2) + (x+1)(x+2)$

$A(x) = 2x^2 + 2x + 2x^2 + 4x + x^2 + 2x + x + 2$

$A(x) = 5x^2 + 9x + 2$

Assim, conseguimos encontrar a expressão que nos permite calcular o valor da área da caixa em função da aresta de medida x. Já para calcular o volume da caixa, devemos multiplicar as suas 3 dimensões.

$V(x) = x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2)$

$V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

Temos então aqui dois exemplos de funções polinomiais, que dão a área e volume da caixa, em função da medida x.

**Saiba Mais**

Apesar de não utilizarem as ferramentas algébricas que conhecemos hoje, vários povos antigos conseguiram encontrar maneiras de relacionar as áreas e volumes dos sólidos às suas dimensões. No papiro de Moscou, escrito pelos egípcios por volta de 1850 a. C. e comprado pelo Museu de Belas Artes de Moscou em 1917, podemos encontrar um problema em que os autores relacionam as medidas dos lados de uma pirâmide truncada com seu volume. Aliás, falamos mais detalhadamente sobre isso na aula 4 do módulo 3, lembra? Querendo refrescar sua memória, dê uma lida novamente neste material.

**Importante**

Lembre-se que quando um termo do polinômio não apresenta variável isso significa que o seu expoente é 0, pois $x^0 = 1$.

**Atividade 3**

Dado o polinômio $P(x) = (a -1)x^3 + ax^2 - 3$, qual ou quais devem ser os valores de a para que o polinômio P(x) seja um polinômio de grau 2?

Anote suas respostas em seu caderno

**Atividade 4**

Para que valores de a e b o polinômio $G(x) = 2bm^2 -+ (a - 2)m + 5$ será de grau 0?

Anote suas respostas em seu caderno

## Conhecendo um pouco mais sobre polinômios

### Valor numérico de um polinômio

Quando calculamos a área e o volume da caixa sem tampa encontramos dois polinômios de variável x.

$A(x) = 5x^2 + 9x + 2$

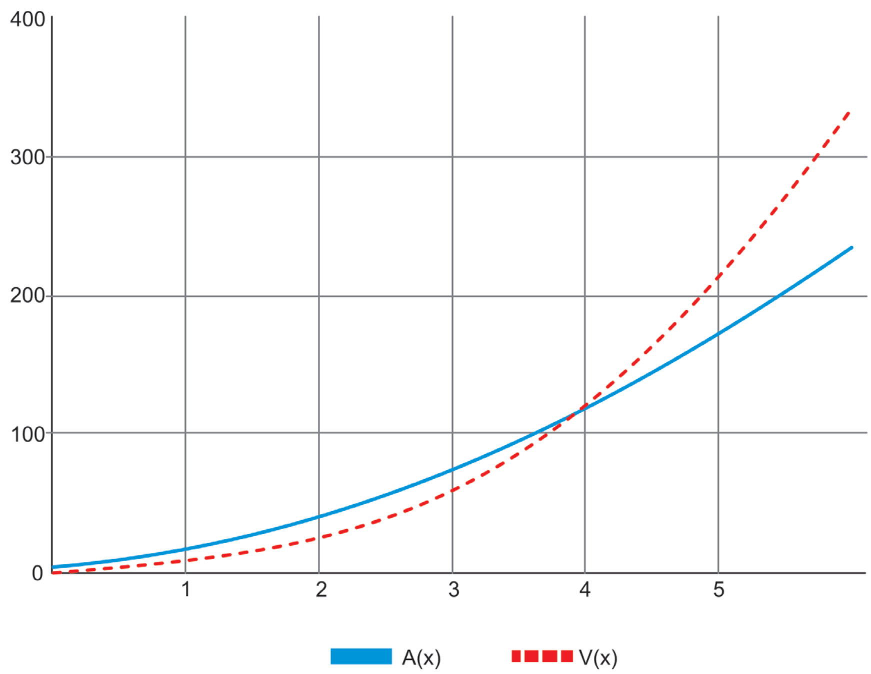
$V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

Agora, vamos substituir a variável x em cada um dos polinômios pelo número 5 - o que, em termos da nossa caixa, equivale a fazer com que o lado menor tenha tamanho 5.

$A(5) = 5.5^2 + 9.5 + 2 = 125 + 45 + 2 = 172$

$V(5) = 5^3 + 3.5^2 + 2.5 = 125 + 75 + 10 = 210$

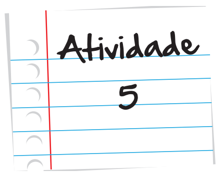
Dizemos então que 172 é o valor numérico do polinômio A(x) quando x = 5, e que 210 é o valor numérico de V(x) quando x = 5. Um pouco mais formalmente – e generalizando - quando substituímos a variável de um polinômio por um número, e efetuamos as operações indicadas, encontramos um resultado numérico que é chamado de valor numérico do polinômio.

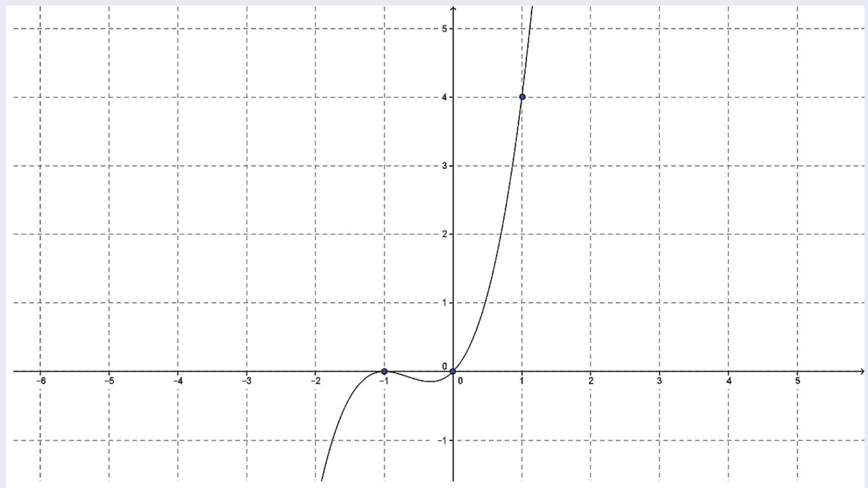



| X | A(x) | V(x) |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 |
| 1 | 16 | 6 |
| 2 | 40 | 24 |
| 3 | 74 | 60 |
| 4 | 118 | 120 |
| 5 | 172 | 210 |
| 6 | 236 | 336 |

**Figura 3:** Gráficos de $A(x) = 5x^2 + 9x + 2$ e $V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

A figura 3 mostra uma representação gráfica das funções A(x) e V(x), feita a partir do que foi gerado pelo site Calculadora Online (http://www.calculadoraonline.com.br/grafica). Perceba que o site ainda fornece o valor numérico dos dois polinômios para valores inteiros de x. Perceba também que, apesar de a área e o volume aumentarem à medida que o valor do lado aumenta, existe um intervalo em que, para um determinado valor do lado, a área é maior que o volume e outro em que o volume é maior do que a área. Isso contraria aquela intuição muito comum de que o volume de uma caixa, por envolver a multiplicação de três números (e ser função de x ao cubo), seria sempre maior do que a área dessa caixa, que envolve a multiplicação destes números dois a dois (e é função de x ao quadrado). Interessante, não acha?



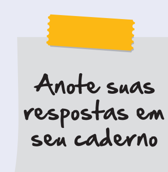



A figura apresenta a representação de uma função $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x$. Três pontos que pertencem a esse gráfico estão destacados na figura: (1,4), (0,0) e (-1,0).

a. Quais são os zeros dessa função polinomial?

b. Baseado nas informações apresentadas no gráfico, determine o valor de a.

c. Represente graficamente a função $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x + 1$, sendo a o valor determinado no item anterior. Quantos zeros reais possui a função g?




## Igualdade entre polinômios

Suponhamos os polinômios $P(x) = -5x^3 + 7x^2 - 3x + 10$ e $M(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$. Dizemos que os dois polinômios são iguais quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são respectivamente iguais.

Assim teremos que P(x) é igual a M(x) se e somente se $m = -5$; $n = 7$; $p = -3$; $q = 10$.

Muito importante aqui é diferenciar igualdade entre polinômios e igualdade entre valores numéricos de polinômios. Um bom exemplo está na figura 3. Perceba que existem dois pontos em que os gráficos dos polinômios A(x) e V(x) se encontram – o primeiro é o ponto x=0 e o segundo é um ponto entre x=3 e x=4. Viram lá? Para estes valores de x, os polinômios, apesar de serem completamente diferentes ($A(x) = 5x^2 + 9x + 2$ e $V(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$) têm o mesmo valor numérico.

**Atividade 6**

a. Dois polinômios de graus diferentes podem ser iguais?

Pense e explique.

b. Considere dois polinômios A(x) e B(x). Determine o valor dos coeficientes desconhecidos para que estes dois polinômios sejam iguais. Os polinômios são: $A(x) = ax^2 - \frac{3}{4}x + b$ e $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + cx - 7$.

Anote suas respostas em seu caderno

**Atividade 7**

Determine os valores de a, b, c, e d para que os polinômios $f(x) = ax^3 + bx^2 - c$ e

$g(x) = x^2 + dx + 2$ sejam iguais.

Anote suas respostas em seu caderno

## Raiz de um polinômio

Verifique o que acontece com o polinômio $P(x) = x^2 - x - 6$, quando calculamos seus valores numéricos para $x = 3$ e $x = -2$

$P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$

$P(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$

Dizemos, neste caso, que 3 e -2 são os zeros (ou raízes) do polinômio P(x).

Um valor da variável para o qual o polinômio assume valor numérico igual a zero é chamado de zero ou raiz do polinômio.

Assim, para verificar se um determinado número, digamos $x = \frac{2}{3}$, é raiz de um polinômio, por exemplo, $Q(x) = x^2 - \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$, basta substituirmos x por 2/3 em Q(x):

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{\frac{2}{3}}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$, donde concluímos que 2/3 é, sim, raiz do polinômio Q(x).

**Figura 4:** **Cidade de Bolonha, na Itália, vista a partir das torres de Asinelli.**

Se, por um lado, verificar se um número é raiz de um dado polinômio é um processo bastante simples, o problema inverso, encontrar as raízes de um polinômio dado, é uma tarefa bem mais complexa. Para que se tenha uma ideia, enquanto os gregos e os babilônios, apesar de não terem recursos formais, já conseguiam para encontrarem raízes de polinômios do segundo grau, as primeiras formas mais sistemáticas de encontrar raízes de polinômios do terceiro grau foram objeto de acirradas competições públicas de matemática feitas pela universidade de Bolonha, na Itália, no século XVI.

Saiba Mais

Niccolo Fontana (Tartaglia)

Girolammo Cardano

Durante a Renascença, no século XVI, a universidade italiana de Bolonha ficou conhecida por promover várias competições públicas na área de Matemática, muitas delas envolvendo técnicas para encontrar as raízes de polinômios de terceiro grau.

Uma destas disputas foi vencida pelo matemático italiano Niccolo Fontana, também conhecido como Tartaglia, que havia desenvolvido um método de resolução para vários tipos de equações do 3º grau – mas insistia em não publicá-lo.

Tartaglia foi convencido por Cardano, outro matemático italiano, a contar-lhe o método, sob o juramento de que não iria divulgá-lo até Tartaglia publicá-lo pessoalmente. No entanto, Cardano publicou o método sem a autorização de Tratraglia em seu livro *Ars Magna - A grande arte*. As fórmulas de Tartaglia terminaram conhecidas como fórmulas de Cardano e a desavença entre os dois seguiu até o final de suas vidas.

# Operações com polinômios

## Adição e subtração de polinômios

O que vamos mostrar nesta seção é, na verdade, uma revisão de conteúdos já vistos. Quando estudamos cálculo algébrico, vimos que podemos efetuar a adição e a subtração de polinômios somando ou subtraindo os **termos semelhantes** dos dois polinômios.

**Termos semelhantes**

São os termos do polinômio que possuem a mesma parte literal e só diferem em seus coeficientes.

Vamos ver alguns exemplos?

a) Qual é a soma dos polinômios $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 9$ e $q(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 5$?

A soma dos dois polinômios será outro polinômio que chamaremos de S(x).

$S(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x +9) + (2x^3 + x^2 - 4x - 5) = 3x^3 - x^2 + x + 4$

Conferiram a soma dos termos semelhantes? $x^3 + 2x^3=3x^3$; $-2x^2+x^2=-x^2$;$5x + (-4x)=x$ e $9 + (-5)=4$.

b) Qual é a soma dos polinômios $h(m) = 6m^4 - 5m^2 - m + 1$ e $g(m) = -2m^4 -m^3 + 2m$?

$h(m) + g(m) = (6m^4 - 5m^2 - m + 1) +(-2m^4 -m^3 + 2m) = 4m^4 - m^3 + m + 1$

c) Qual o resultado da diferença entre $f(x)= 5x^3 + 8x^2 - 3x + 2$ e $h(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 3$?

$f(x) - h(x) = ( 5x^3 + 8x^2 - 3x + 2 ) - ( 2x^3 + 5x^2 - 2x - 3 ) = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$

d) Vamos subtrair os polinômios $g(y) = -3y^3 + 3y + 2$ e $l(y) = y^3 - 2y^2 + y - 5$

$g(y) - l(y) = (-3y^3 + 3y + 2) - (y^3 - 2y^2 + y - 5) = -4y^3 + 2y^2 + 2y + 7$

## Multiplicação de polinômios

Para multiplicar dois polinômios, fazemos a multiplicação de todos os termos do 1º polinômio por todos os termos do 2º polinômio. Em seguida fazemos a redução dos termos semelhantes, ou seja, adicionamos os termos cuja variável tem o mesmo expoente.

Esse modo de efetuar a multiplicação é uma aplicação da **propriedade distributiva** da multiplicação em relação à adição e à subtração.

### Propriedade distributiva

De acordo com propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração, multiplicar um número por uma soma ou diferença é equivalente a multiplicar este número por cada um dos fatores dessa soma ou diferença. Ou seja, $a . (b + c) = a.b + a.c$ e $a . (b - c) = a.b - a.c$

Assim, o produto entre os polinômios $2x$ e $x^2 + 3x - 4$ é:

$2x.(x^2 + 3x - 4) = 2x.x^2 + 2x.3x - 2x.4 = 2x^3 + 6x^2 - 8x$.

Vejamos outros exemplos.

a) Multiplique os polinômios $f(x) = x - 2$ e $g(x) = 2x^2 + x - 3$

$f(x).\ g(x) = (x - 2).(2x^2 + x - 3) = x \cdot 2x^2 + x \cdot x - x \cdot 3 - 2 \cdot 2x^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot (-3)$

$f(x).\ g(x). = 2x^3 + x^2 - 3x - 4x^2 - 2x + 6 = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$

b) Multiplique os polinômios $p(x) = 4x^3 - 2x - 6$ e $q(x) = x - 1$

$p(x).\ q(x) = (4x^3 - 2x^2 - 6) \cdot (x - 1) = 4x^4 - 4x^3 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 6)$

$p(x).\ q(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x + 6$

E para multiplicar um polinômio por um número real, como faríamos?

Isso pode ser feito da mesma forma: usando a distributividade.

$-7.\ (-3x^3 + 2x^2 - x + 10) = 21x^3 - 14x^2 + 7x - 70$

Atividade 8

1- Considere os polinômios:

$P(x) = x^2 - 3x + 5$

$Q(x) = -x + 5$

$R(x) = 3x^3 + 2x - 1$

Calcule:

a. $P(X) + Q(X)$

b. $Q(x) - P(x)$

c. $3.Q(x)$

d. $P(x).Q(x)$

Anote suas respostas em seu caderno

## Divisão de polinômios

Antes de tratarmos da divisão de polinômios, vamos buscar motivação no algoritmo da divisão para números inteiros. Em uma divisão, os seus termos dividendo (D), divisor (d), quociente (q) e resto (r) são tais que D = d.q + r, com $0 \leq r < d$. Por exemplo, ao dividirmos 10 por 6, obtemos quociente 1 e resto 4, já que 10 = 6.1 + 4.

Da mesma forma, ao dividirmos o polinômio P(x) pelo polinômio S(x) obteremos dois polinômios Q(x) e R(x) tais que $P(x) = Q(x) \times S(x) + R(x)$.

O resto da divisão R(x) é um polinômio cujo grau não pode ser igual nem maior que o grau do divisor S(x).

Exemplo 1.

Vamos aplicar o mesmo algoritmo para fazer uma divisão com polinômios**,** dividindo o polinômio $x^3 + 2x^2 + x + 1$ pelo polinômio $x + 2$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 + x + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 & x^2 \\ \cline{1-1}
\quad x^2 &
\end{array}
$$

- Dividimos $x^3$ por x encontrando $x^2$ no quociente.
- Multiplicamos $x^2$ pelo divisor.
- O resultado dessa multiplicação é subtraído do dividendo (é o mesmo que somar trocando o sinal do 2º polinômio).
- Encontramos $x^2$ como resto parcial.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 + x + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2 & x^2 + x \\ \cline{1-1}
x^2 + x + 1 & \\
\quad - x^2 - x & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

- Para continuar a divisão, escrevemos x + 1 ao lado do resto e dividimos $x^2$ por x. Encontramos x no quociente.
- Multiplicamos x pelo divisor.
- O resultado dessa multiplicação é subtraído do dividendo.
- Encontramos 1 como resto, terminando assim a divisão

Podemos escrever:

$x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x + 1).(x^2 + x) + 1$

Observando esta sentença vemos que:

- O grau do quociente (2) é a diferença entre os graus do dividendo (3) e o do divisor (1).
- O grau do resto é menor que o grau do divisor.
- Esta divisão não é exata, portanto o polinômio $x^3 + 2x^2 + x + 1$não é divisível pelo polinômio x + 1.

Exemplo 2.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^4 + x^3 \phantom{- 4x^2 + 5x - 1} & x^3 - 4x + 1 \\
\cline{1-1}
- 4x^2 + 5x - 1 & \\
+ 4x^2 - 4x \phantom{- 1} & \\
\cline{1-1}
x - 1 & \\
-x + 1 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Podemos escrever:

$x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = (x - 1) \cdot (x^3 - 4x + 1)$

Portanto, como o resto é zero, a divisão é exata e o polinômio $x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

é divisível pelos polinômios $x - 1$ e $x^3 - 4x + 1$.

A relação acima nos permite verificar se a divisão foi feita corretamente.

Então, para sabermos se o resultado de uma divisão está correto, basta multiplicá-lo pelo divisor e somar o resultado ao resto, caso seja ele seja diferente de zero. Se encontrarmos o dividendo, significa que a divisão foi efetuada corretamente.

Quando no dividendo falta um termo (seu coeficiente é zero), sugerimos completar o dividendo com esse termo antes de iniciar a divisão.

Ex: $2x^3 + x - 1 = 2x^3 + 0x^2 + x - 1$


Encerramos a seção com duas atividades:

**Atividade 9**

Efetue a divisão dos seguintes polinômios e determine o resto:

a. $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 20x + 8$ por $q(x) = 2x^2 + 4x - 3$

b. $p(x) = 2x^3 + x - 1$ por $q(x) = x - 1$

Anote suas respostas em seu caderno

**Atividade 10**

Efetuando uma divisão entre polinômios encontramos para quociente $x - 1$ e para resto $2x - 1$. Sabendo que o divisor é $x^2 - 3x + 2$, calcule o dividendo.

Anote suas respostas em seu caderno

## Conclusão

É importante perceber que o estudo dos polinômios, apesar de relacionado a questões mais teóricas da Matemática, tem um grande apelo prático, modelando, dentre muitas outras situações, o cálculo de áreas e volumes. Neste contexto, os conceitos de raiz, termo, grau, igualdade de polinômios, etc tem por objetivo principal facilitar a identificação dos elementos que usaremos no trabalho. Como muitos dos cálculos com polinômios já foram estudados em aulas anteriores, aproveitamos a oportunidade para explicitar a analogia entre as operações e cálculos com polinômios e as operações e cálculos com números. Ter essa analogia em mente facilitará muito o trabalho com os polinômios.

## Resumo

- Um polinômio é uma expressão da forma $a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde x é a variável; $a_n$, $a_{n-1}$, $a_{n-2}$,..., $a_2$, $a_1$, $a_0$ são números reais chamados de coeficientes do polinômio e n é um número natural diferente de zero.
- O grau de um termo do polinômio é o valor do expoente da variável naquele termo.
- O grau de um polinômio é o valor do maior expoente dos seus termos.
- Quando substituímos a variável de um polinômio por um número, e efetuamos as operações indicadas, encontramos um resultado numérico que é chamado de valor numérico do polinômio.
- Dois polinômios são iguais quando os coeficientes dos termos de mesmo grau são respectivamente iguais.
- O valor da variável tal que o valor numérico do polinômio é zero é chamado de raiz do polinômio.
- Para efetuar a adição e a subtração de polinômios, somamos ou subtraímos os termos de mesmo grau.
- Para multiplicar polinômios usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma e à subtração, multiplicando cada um dos termos de um polinômio por todos os termos do outro. Em seguida, adicionamos os termos de mesmo grau do polinômio que resultou da multiplicação.
- Para dividir polinômios, usamos o mesmo algoritmo que usamos para dividir números reais.

## Veja ainda

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_2.pdf

Uso de polinômios para surpreender.

Neste site você pode observar outras situações onde são usados polinômios.

## Referências

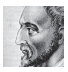

- Dante, Luiz Roberto, Matemática *contexto e aplicações,* 3ª edição, São Paulo, Editora Ática, 2010,736 páginas.
- Bordeaux, Ana Lúcia... (et al.),coordenação de João Bosco Pitombeira, *Matemática Ensino Médio*, 3ª série, Rio de Janeiro, Fundação Roberto Marinho, 2005, 440 páginas

## Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960

- http://www.nndb.com/people/440/000098146/tartaglia-1.jpeg



- http://scienceworld.wolfram.com/biography/pics/Cardano.jpg

- http://www.sxc.hu/photo/517386

## Respostas das Atividades

### Atividade 1

Tem maior volume a caixa 2 que tem a menor altura.

### Atividade 2

São polinômios os itens:

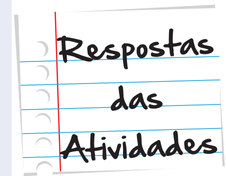
a. de grau 4 c. de grau 5 g. de grau 1

As demais opções não são polinômios porque têm expoente negativo (d, e, h) ou fracionário (b, f)

### Atividade 3

Muito bem, a primeira coisa é lembrar que o polinômio será de grau 2 se o termo de maior grau for aquele que estiver elevado ao quadrado. Como nossa expressão tem um termo elevado ao cubo, seu coeficiente deve ser zero, justamente para anular este termo. Assim, a primeira condição é que o coeficiente de $x^3$ - no caso, a-1 - deve ser zero. Então, teremos que $a-1=0$; $a=1$. Porém, isso não é tudo! Perceba que a também é coeficiente do termo de segundo grau – e, se for igual a zero, irá anular este termo! Assim, precisamos também que $a\neq 0$.

Querem fazer um por conta própria?




### Atividade 4

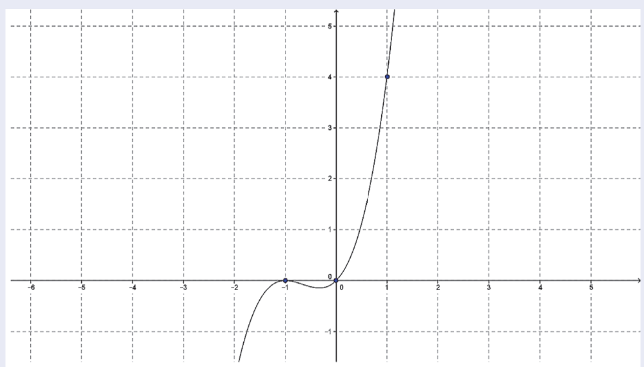
b = 0 , a = 2

### Atividade 5

a. -1 e 0

b. a = 1

c. g possui apenas um zero real.



### Atividade 6

a. Não poderiam ser iguais pelo seguinte motivo: se os polinômios têm graus diferentes, o grau de um é maior do que o grau do outro. No polinômio de grau maior – digamos N - o coeficiente do termo de grau N é diferente de zero. Já no polinômio de menor grau – digamos n, que é menor do que N - o coeficiente do termo de grau N é igual a zero. Como os coeficientes deste termo de mesmo grau são diferentes, os polinômios não podem ser iguais.

b. Basta lembrar que, para que dois polinômios sejam iguais, é necessário que os coeficientes dos termos de mesmo grau sejam respectivamente iguais. Assim, o valor de a, que é o coeficiente de $x^2$ no polinômio A(x), deve ser igual ao coeficiente de $x^2$ no polinômio B(x), que é -1/2. Raciocínio análogo nos leva a concluir que c=-3/4 e b=-7.

## Respostas das Atividades

### Atividade 7

$a = 0$ , $b = 1$, $c = -2$ e $d = 0$

### Atividade 8

a. $x^2 - 4x + 10$

b. $-x^2 + 2x$

c. $-3x + 15$

d. $-x^3 + 8x^2 - 20x + 25$

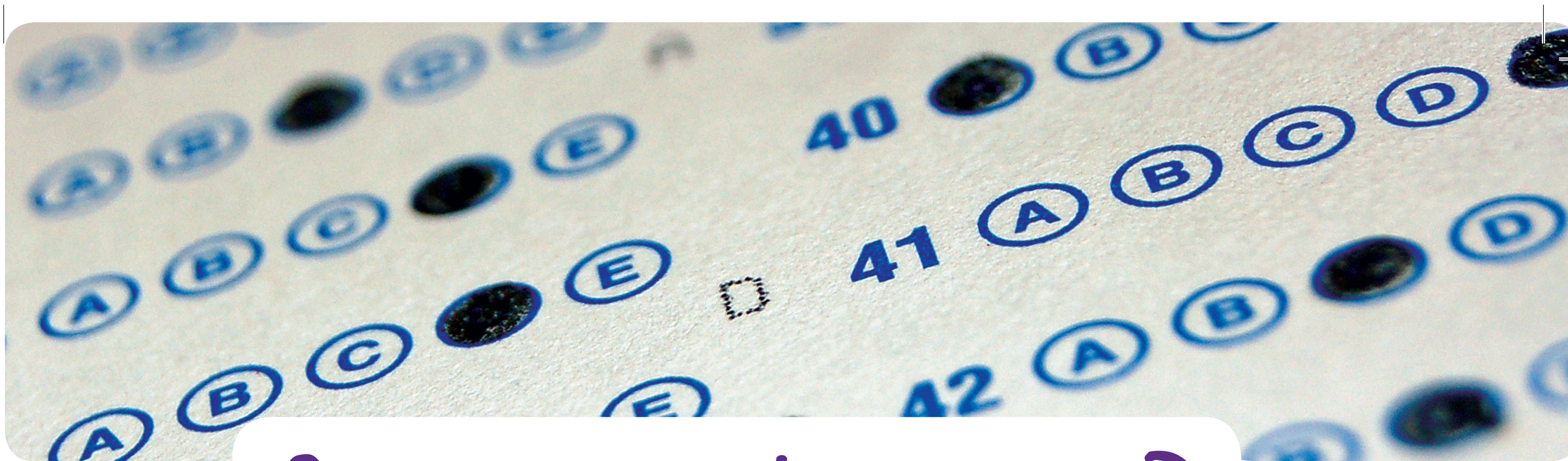
### Atividade 9

c. $x - 5$ e resto $3x - 7$

b. $2x^2 + 2x + 3$ e resto $4$

### Atividade 10

$x^3 - 4x^2 + 7x - 3$



# O que perguntam por aí?

### Questão 1 (Mack – SP)

Determine m para que o polinômio

$p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2.

**Resposta:** Para que o polinômios seja de grau 2 o coeficiente do termo de grau 3 deve ser zero e o coeficiente do termo de grau 2 deve ser diferente de zero, logo:

$m – 4 = 0;\ m = 4$

$m^2 – 16 \neq 0 \qquad m \neq \pm 4$

Não existe valor de m para que o polinômio seja de grau 2, pois , para isso ele teria que ser igual a 4 e diferente de 4 ao mesmo tempo o que é impossível.

### Questão 2 (Faap – SP)

Calcule os valores de a,b,e,c para que o polinômio

$p1(x) = a(x+c)^3 + b\,(x + d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

$P1(x) = a(x^3 + 3cx^2 + 3c2x + c^3) + bx + bd = ax^3 + 3acx^2 + 3ac^2\,x + ac^3 + bx + bd =$

$= ax^3 + 3acx^2 + (3ac^2 + b)x + ac^3 + bd$

Para que este polinômio seja idêntico a $p_2(x)$, temos que ter:

$a = 1$

$3ac = 6 \rightarrow 3.1.c = 6 \rightarrow c = 2$

$3ac^2 + b = 15 \rightarrow 3.1.4. + b = 15 \rightarrow b = 15 - 12 \rightarrow b = 3$

$ac^3 + bd = 14 \rightarrow 1.8 + 3d = 14 \rightarrow 3d = 14 - 8 \rightarrow 3d = 6 \rightarrow d = 2.$

**Resposta:** a = 1; b = 3; c = 2; d = 2

## Questão 3 (FEI – SP)

Sendo $p(x) = ax^4 + bx^3 + c$ e $q(x) = ax^3 - bx - c$, determine os coeficientes a,b,e c,sabendo que p(0) = 0, p(1) = 0 e q(1) = 2.

$P(0) = c = 0$

$P(1) = a + b + c = 0$

$Q(1) = a - b - c = 2$ $\quad$ $2a = 2 \rightarrow a = 1$

$1 + b + 0 = 0 \rightarrow b = -1$

**Resposta:** a = 0 ; b = -1; c = 1

# Geometria Analítica 1

## Para Início de Conversa...

Você sabe o que significa geometria analítica? E plano diretor de uma cidade? E o que essas duas coisas têm em comum?

Vamos à primeira pergunta:

Geometria analítica nada mais é que o estudo da Geometria utilizando a Álgebra. Com essa ferramenta é possível associar equações e outros recursos algébricos às formas geométricas (pontos, retas e outras curvas planas.

Já o plano diretor é um instrumento do planejamento municipal para a implantação da política de desenvolvimento urbano. E por que fizemos essas duas perguntas a você no início dessa unidade? É simples!

Você acaba de ser convidado para ajudar a desenvolver o plano diretor da sua cidade, conhecida como cidade A. Sabemos que uma das especificidades da sua cidade é que a grande maioria de seus habitantes trabalha na cidade C, gastando uma parte significativa do dia num trânsito bastante engarrafado. A mesma coisa vale para os habitantes da cidade vizinha, a cidade B.

**Figura 1:** Engarrafamento.

Recentemente, o governo do estado construiu uma ferrovia ligando a cidade C à malha ferroviária nacional. Como a ferrovia passava perto da sua cidade, a atual gestão pensou em construir uma estação para facilitar o acesso dos moradores ao local de trabalho. O prefeito da cidade vizinha, sabendo disso, se ofereceu para dividir os custos da estação, visto que ela também beneficiaria os habitantes da cidade B. Fechado o acordo nestes termos – 50% dos custos para cada uma das prefeituras - nada mais justo que a distância da estação a cada uma das cidades fosse a mesma!

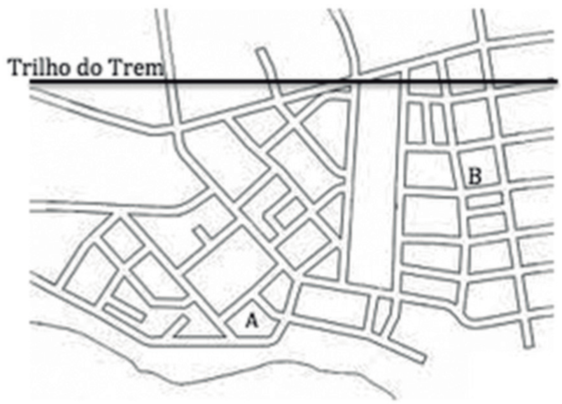



**Figura 2:** Mapa das cidades A e B, com indicação do trilho da ferrovia.

E aí? Como resolver esse problema?

Saiba Mais

Esse problema foi inspirado no problema apresentado em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1015

## Objetivos de aprendizagem

- Identificar e utilizar o Sistema Cartesiano ortogonal
- Calcular Distância entre dois pontos
- Identificar a posição relativa de duas retas no plano
- Conhecer a equação da reta na sua forma reduzida, fundamental e paramétrica.
- Determinar a equação de uma reta que passe por dois pontos ou que passe por um ponto e que possua uma determinada inclinação.

# Seção 1
# Plano Cartesiano

O problema apresentado é bem interessante, não acha?! Vamos resolvê-lo ao longo dessa unidade? Ótimo! Para isso, precisamos estabelecer alguns conceitos. O primeiro deles é o de plano cartesiano.

Existem diversos sistemas de representação que auxiliam na localização de pontos sobre determinadas superfícies. As latitudes e longitudes, por exemplo, permitem a localização na superfície do globo terrestre.

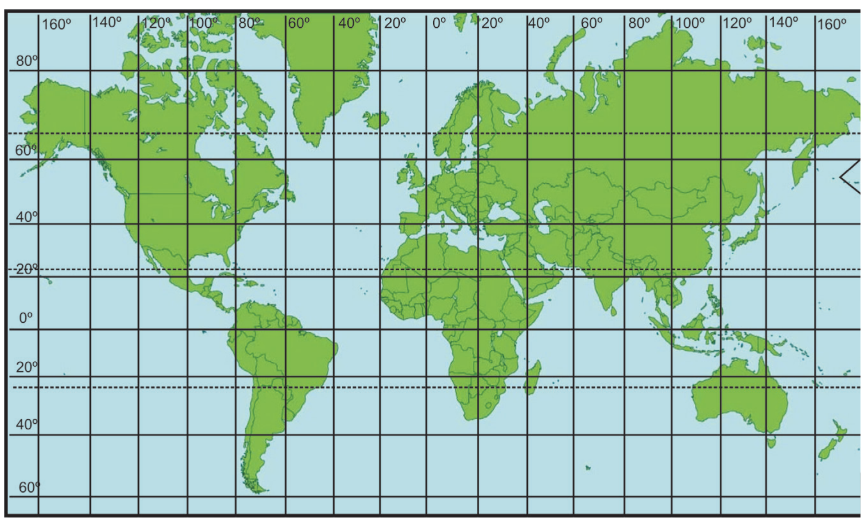



**Figura 3: Mapa mundi planificado.**

O plano cartesiano permite a localização de pontos do plano. São utilizadas duas retas numéricas perpendiculares que se intersectam em suas origens e, aos pontos do plano, associamos dois valores: um no eixo horizontal e outro no eixo vertical, conforme a ilustração a seguir.

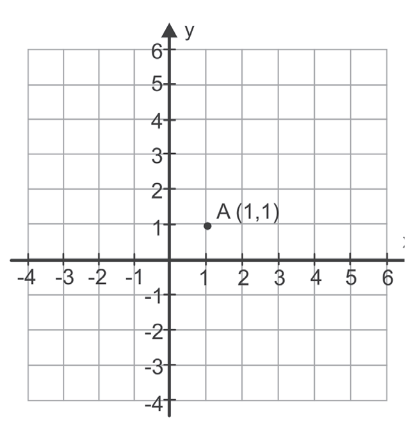
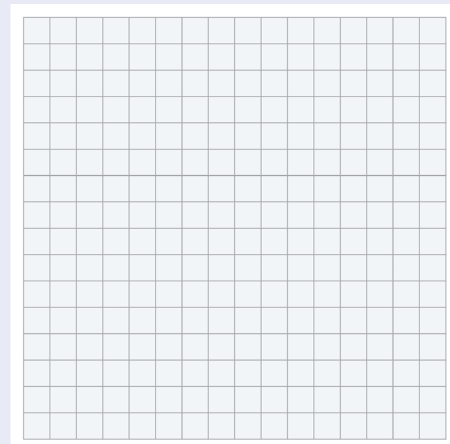


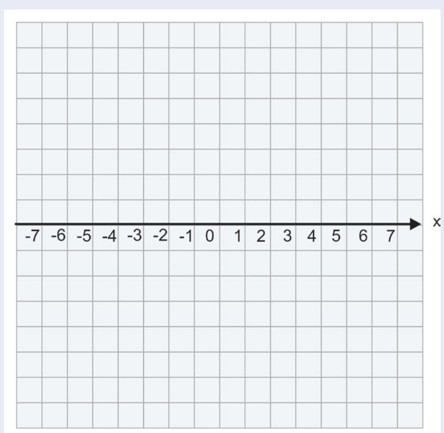

**Figura 4:** **Plano cartesiano com o ponto A(1,1) destacado.**

Apresentamos a seguir um passo a passo. Acompanhe, é bem fácil de entender!

## Passo 1

Obtendo o plano em uma malha quadriculada. A malha é apenas para facilitar, é perfeitamente possível construir o plano sem ela.






## Passo 2

Traçando o eixo das abscissas. Esse é um eixo horizontal numerado representado pela letra x. Na figura, estão marcados alguns números inteiros, mas qualquer número real pode ser localizado nessa reta.

## Passo 3

Traçando o eixo das ordenadas. Esse é um eixo vertical numerado representado pela letra y.

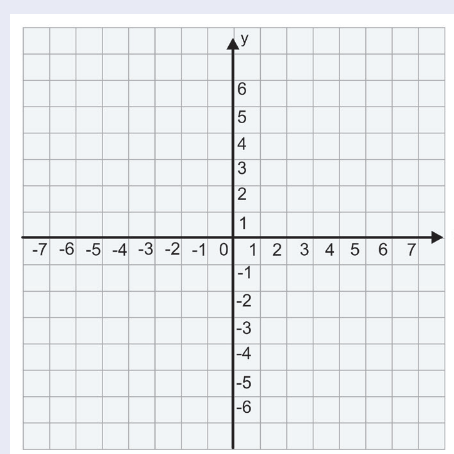



**Figura 5: Passo a passo para a construção do plano cartesiano.**

Muito bem, de posse do plano cartesiano, você pode identificar o ponto A –veja na figura - da seguinte maneira:

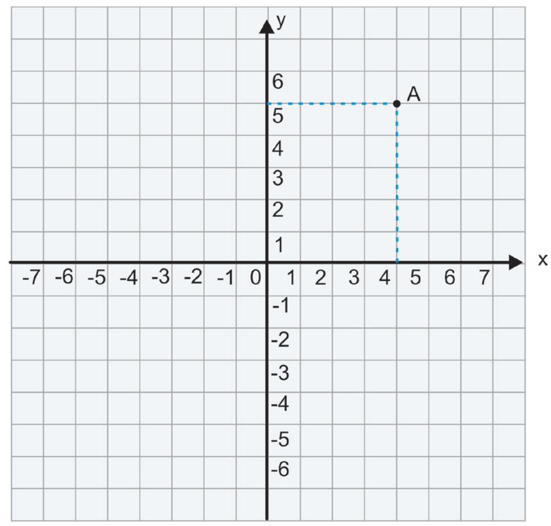



**Figura 6:** Plano cartesiano com o ponto A destacado.

O pé da perpendicular ao eixo x traçada pelo ponto A coincide com o ponto associado ao número 4. De maneira análoga, o pé da perpendicular ao eixo y traçada por A está associado ao número 5. Dessa forma, diremos que o ponto A será representado pelo par ordenado (4,5). Ao identificarmos um ponto, sempre escreveremos primeiro o valor de sua posição no eixo das abscissas(eixo x) e, em seguida, sua posição no eixo das ordenadas(eixo y). Resumindo: o par é dado por (x, y).

Repare que o ponto (5,4) é um ponto diferente de A, porque x = 5 e y = 4. O ponto (5,4) está representado por B. Vejam só:

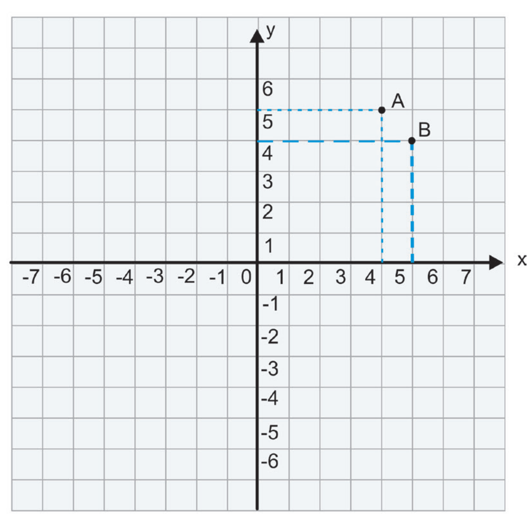
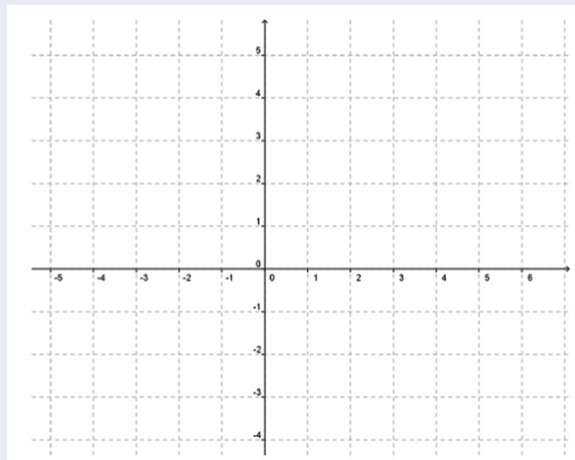



**Figura 7:** Plano cartesiano com os pontos A e B destacados.

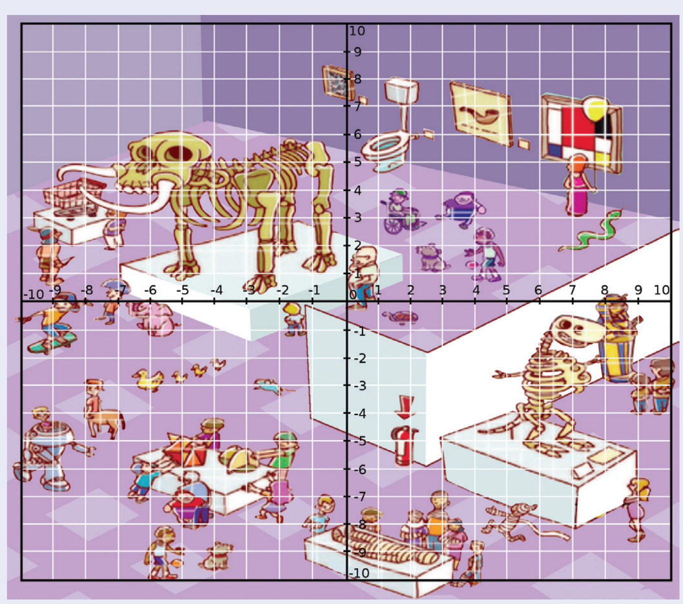
Atividade 1

Vamos representar mais alguns pontos? Represente no plano cartesiano a seguir os pontos C (-1,-3), D(0,4), E(-2,0), F(2, -4), G(3, 3) e H(-2, 1).




Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2



Atividade 2

Diga quais objetos estão nos pontos:

(2,-5)

(-8, 4)

(7, 6)

Anote suas respostas em seu caderno

# Seção 2
## Distância entre dois pontos

Você se lembra do nosso problema inicial da estação de trem? Então, vamos pensar juntos! Imagine que as cidades e o ponto onde ficará a estação sejam os vértices de um triângulo.

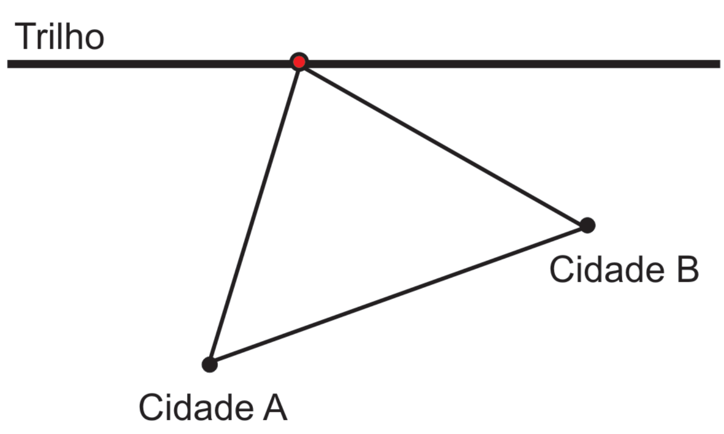



**Figura 9:** Representação das cidades A e B e do trilho de trem.

Vocês lembram da condição do nosso problema? Isso, essa mesmo: a distância entre a estação e cada uma das cidades deve ser a mesma – afinal, os custos de construção serão divididos igualmente entre as prefeituras.

Então, como o valor da distância entre a cidade A e a estação é idêntico ao valor da distância entre a cidade B e a estação podemos dizer o seguinte: o triângulo formado pelos pontos A, B e pela estação é isósceles!

E, resgatando nossa geometria plana, se o triângulo tem dois lados iguais, também tem dois ângulos iguais. Além disso, a bissetriz do ângulo cujo vértice é o ponto procurado coincide com a mediana e com a altura traçada a partir desse vértice. Vejam na figura

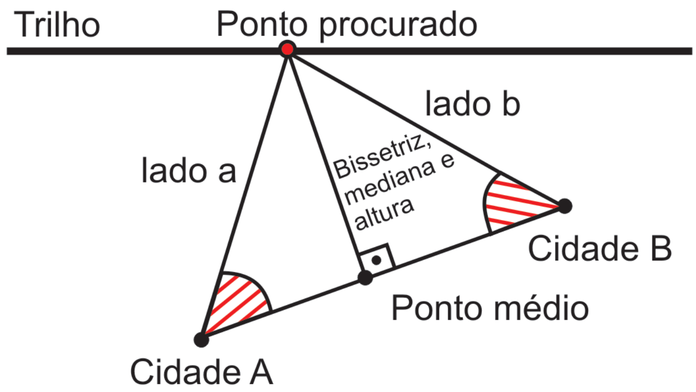



**Figura 10:** **Representação do triângulo formado pela estação e as cidades A e B, com lados, ângulos, medianas e bissetriz destacados.**

Desta maneira, basta encontrar a metade da distância entre as cidades A e B e, do ponto encontrado, traçar uma reta perpendicular ao segmento AB (será a mediana / bissetriz / altura, certo?) até que ela encontre o trilho de trem. Nessa intersecção estará o ponto procurado.

Depois dessas considerações, nosso problema se resumiu a encontrar a metade da distância entre as cidades A e B. Vamos entender como podemos encontrar a distância entre dois pontos? Muito bem, vamos lá!

Sejam os pontos A e B representados no plano cartesiano a seguir:

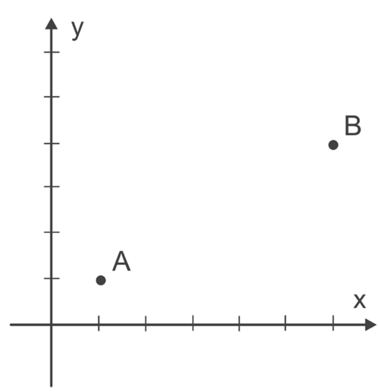



**Figura 11:** **Plano cartesiano com eixos e os pontos A e B destacados.**

Como A e B estão representados no plano cartesiano, vamos considerar os coordenadas de A por $x_A$ e $y_A$ e as coordenadas de B por $x_B$ e $y_{B.}$ Vamos também designar a distância entre esses pontos por $d_{AB}$ . Acompanhem na figura:

Conseguimos assim obter um triângulo retângulo cujos catetos são $x_Ax_B$ cuja medida é $(x_B - x_A)$ e $y_Ay_B$ cuja medida é $(y_B - y_A)$ e cuja hipotenusa é a distância $d_{AB}$ entre os pontos. As medidas dos lados de um triângulo retângulo estão relacionadas pelo Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

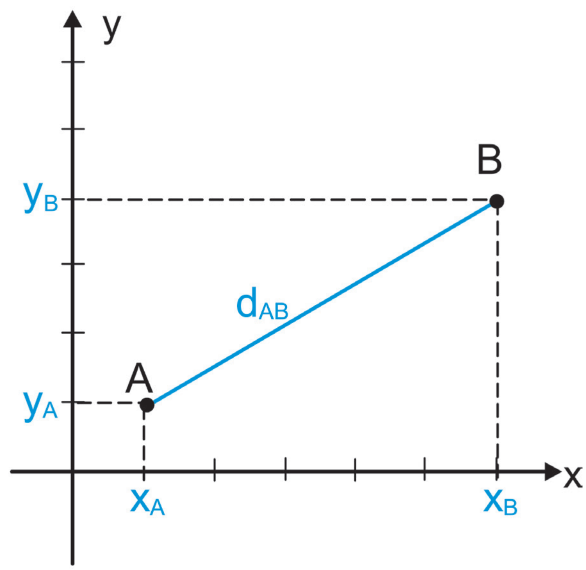



**Figura 12:** **Plano cartesiano com eixos e os pontos A e B destacados.**

Utilizando Teorema de Pitágoras temos:

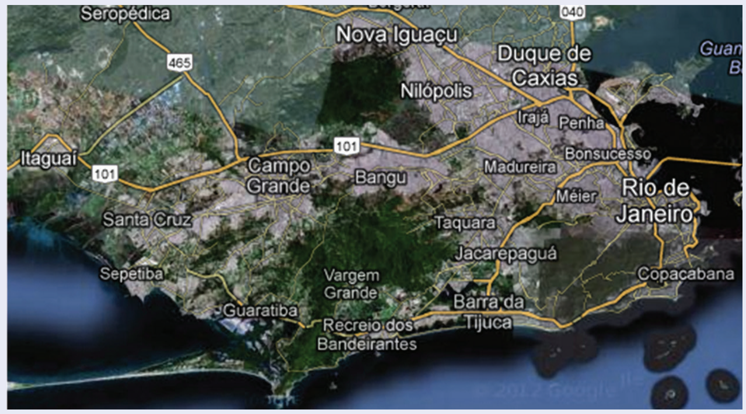
$$d_{AB}{}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

A partir daí, sabendo as coordenadas das cidades A e B fica fácil encontrar a distância entre elas.

E que tal uma atividade?

**Atividade 3**

Carla mora em Campo Grande e arrumou um novo emprego no Méier. Pelo mapa, Carla observou que as coordenadas de Campo Grande e do Méier são (30, 27) e (60,24) respectivamente




Determine a distância (em linha reta) entre Campo Grande e o Méier.

Anote suas respostas em seu caderno

Encerramos esta seção com uma interessante sugestão: o site da Anatel tem um aplicativo que permite calcular a distância entre dois municípios ou entre dois pontos quaisquer, via latitude e longitude. Aliás, será que o site encontrou o mesmo valor que a gente? Dê um pulinho por lá e descubra! Para Campo Grande, latitude e longitude são 22° 52′ 47″ S e 43° 33′ 43″ O. Para o Méier 22° 53′ 56″ S e 43° 16′ 58″ O.

Multimídia

Página do site da Anatel que permite calcular a distância entre dois municípios:

http://sistemas.anatel.gov.br/apoio_sitarweb/Tabelas/Municipio/DistanciaDoisPontos/Tela.asp. Uma dica: para inserir a latitude, atente para a caixa de seleção Norte/Sul. Já no caso da longitude, como todo o território brasileiro está a Oeste de Greenwich, não há caixa de seleção.

# Seção 3
# Retas

## Posições relativas entre duas retas no plano

O arquiteto responsável pelo projeto da estação enviou um email a todos os envolvidos na construção. O email continha algumas das diretrizes a serem seguidas na realização da obra:

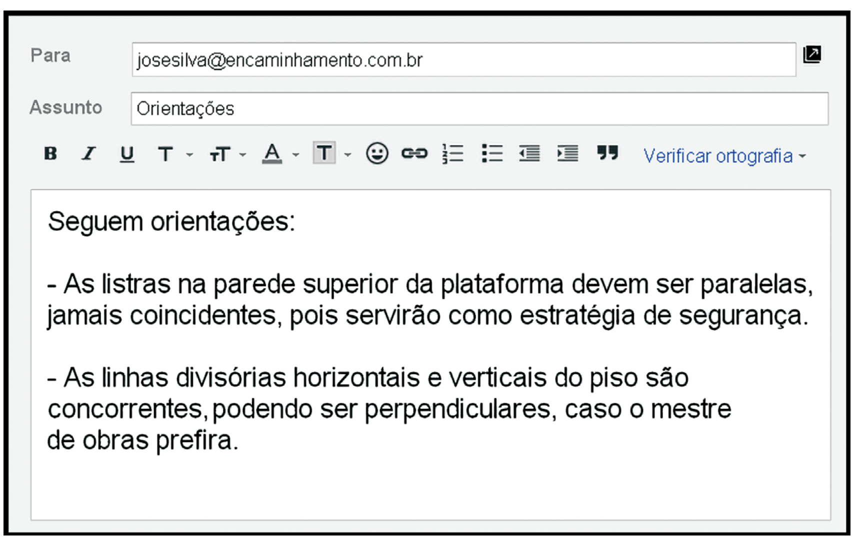



**Figura 13:** Email enviado pelo arquiteto responsável pelo projeto da estação com diretrizes para a obra.

Como algumas pessoas tiveram dificuldades em entender o que o arquiteto deu como instrução, ele enviou um novo email com as seguintes definições:

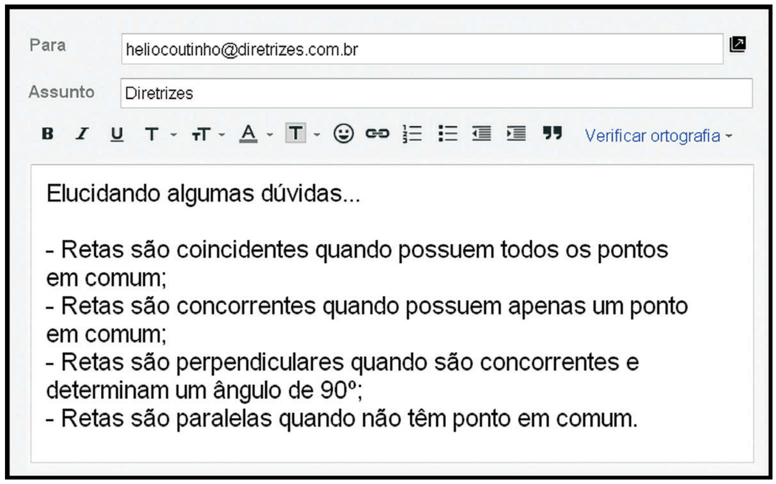



**Figura 14:** **Email enviado pelo arquiteto responsável pelo projeto da estação com esclarecimento acerca das diretrizes.**

**Multimídia**

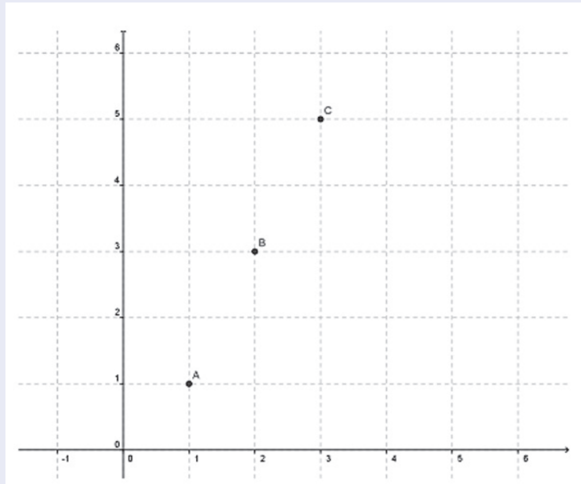
No link abaixo, você encontra uma coleção de atividades desenvolvidas com software Geogebra. Dentre elas, destacamos a atividade 7, referente às posições relativas de duas retas no plano

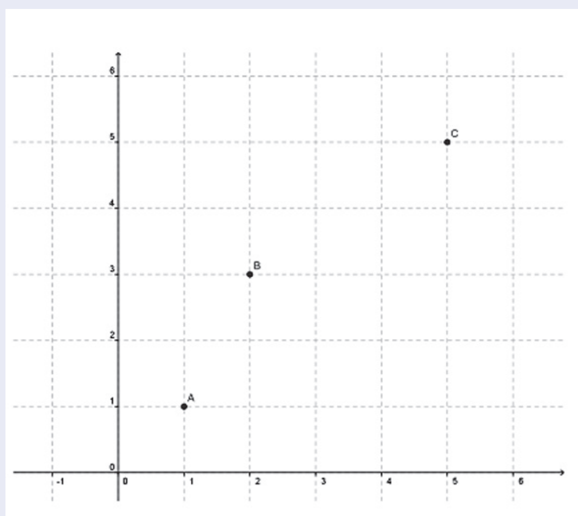
http://mandrake.mat.ufrgs.br/~mat01074/20072/grupos/ditafafran/geogebra/geo.html

# Equações da reta

Já vimos nas seções anteriores como representar pontos no plano cartesiano. Pretende-se agora estudar a reta através dos recursos algébricos fornecidos pela Geometria Analítica. Mostraremos que a equação de uma reta será da forma $y = ax + b$. Em outras palavras, os pontos do plano tais que a segunda coordenada $y$ é dada em função da primeira coordenada $x$ segundo a fórmula anterior é um conjunto de pontos alinhados.

Atividade 4




a. Observe as duas figuras anteriores e diga em qual delas os pontos A, B e C estão alinhados. Sua resposta, a princípio, pode ser dada de forma intuitiva. Tente explicar sua conclusão através de ferramentas matemáticas.

   Dica: uma forma de mostrar que A, B e C estão alinhados é mostrar que a distância de A à C é igual à soma das distâncias de A à B e de B à C.

b. Mostre que no primeiro caso, o três pontos A, B e C satisfazem à equação $y = 2x - 1$, enquanto, no segundo caso, isto não acontece.

Anote suas respostas em seu caderno

## Equação reduzida

Como determinar a equação da reta que passa por dois pontos conhecidos? Digamos, por exemplo, que queiramos obter a equação reduzida (ou, seja, na forma y = ax+b) da reta que passa pelos pontos A(2,1) e B(6,5).

Ora, se A e B pertencem a uma mesma reta, os valores de suas ordenadas e abscissas satisfazem à equação desta reta. Por isso, podemos fazer a substituição dos valores de $x_A$ e $y_A$ (e também dos valores de $x_B$ e $y_B$) na equação y=ax+b. Acompanhem:

No ponto A (2,1)

y=ax+b (x=2, y=1)

1 = 2a + b

No ponto B (6,5)

y=ax+b (x=6, y=5)

5 = 6a + b

Com duas equações e duas incógnitas, a saída é montar um sistema:

$$\begin{cases} 5 = 6a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{array}{rl} & 5 = 6a + b \\ - & \underline{1 = 2a + b} \\ & 4 = 4a \end{array}$$

Então, a = 4/4 = 1

Substituindo o valor de a em uma das equações você obtém:

1 = 2a + b

1 = 2.1 + b

1 = 2 + b

b = 1 - 2

b = -1

Assim, a equação da reta que passa pelos pontos A e B é dada por:

y=ax+b (a=1, b=-1)

$y= 1 . x -1$

$y = x - 1$

Saiba Mais

Há uma outra maneira de encontrar os valores de a e b da equação reduzida da reta: calcular o valor de a diretamente a partir da equação $tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ , e em seguida, substituí-lo, juntamente com os valores de $(x_A, y_A)$ ou $(x_B, y_B)$ na equação y=ax+b. É bem mais simples do que parece, veja só

Temos A(2,1) e B(6,5). Então

$$a = tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{6-2} = 1$$

Para determinar o valor de b, basta tomar as coordenadas de um desses pontos, digamos A, e substituir na equação y = 1.x + b (já que a = 1):

1=1.2+b

1=2+b

b= - 1

Equação reduzida: y=1.x-1=x-1

Atividade 5

Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(1,3) e B(3,4)

Anote suas respostas em seu caderno

## Equação fundamental

O que é muito fácil também é encontrar a equação da reta caso você tenha o ângulo de inclinação e um ponto pertencente a essa reta. Novamente, apresentamos um passo a passo:

1º) Calcular a tangente do ângulo de inclinação da reta:

2º ) Substituir a tangente e o ponto na equação da reta. Para esse problema não utilizaremos mais a equação reduzida (y=ax+b, certo?) e sim a equação fundamental:

$(y - y_o) = m\,(x - x_o)$

onde $(x_o, y_o)$ são as coordenadas do ponto e m a tangente do ângulo de inclinação da reta

Vamos entender melhor com um exemplo!

Encontrar a equação da reta que passa pelo ponto (4,-3) e cujo ângulo de inclinação é 45º .

1º Passo) Encontrar tangente do ângulo de inclinação

$tg45^\circ = 1$

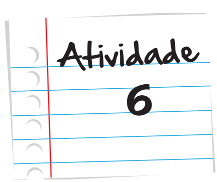
2º Passo) Substituir a tangente e o ponto na equação da reta:

$y - (-3) = 1 \cdot (x - 4)$

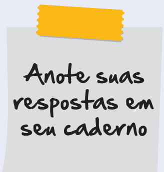
$y + 3 = x - 4$

$y = x - 4 - 3$

$y = x - 7$




Encontre a equação da reta que possui o mesmo ângulo de inclinação da reta y = x - 7 , mas que passa pelo ponto (-3, 4)




## Equação paramétrica

Além de definir a reta pelo par ordenado (x,y), podemos relacionar o par ordenado a uma outra variável que vamos chamar de t conhecida como parâmetro.

Vamos exemplificar:

Sejam os pares ordenados (x,y) definidos pelas equações chamadas paramétricas:

$x = t - 2$

$y = 3t + 4$

Quando t vale, por exemplo, 6 teremos o par ordenado:

$x = 6 - 2 = 4$

$y = 3.6 + 4 = 22$

(4,22)

Podemos também determinar a equação da reta definida pelas equações paramétricas da seguinte maneira:

$x = t - 2$

Então, $t = x + 2$

Substituindo na outra equação paramétrica teremos:

$y = 3.(x + 2) + 4$

$y = 3x + 6 + 4$

$y = 3x + 10$

Atividade 7

Considere a seguinte reta, descrita de forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2.t + 3 \\ y = 1 - 4.t \end{cases}$$

Quais as coordenadas do ponto que tem abcissa igual a 4?

Qual a equação reduzida desta reta?

Anote suas respostas em seu caderno

## Conclusão

Nessa unidade, fizemos uma viagem por uma parte do mundo da geometria analítica cuja invenção foi muito significativa e importante para a Matemática por fazer uma associação eficiente entre geometria e álgebra. Ficamos sabendo um pouco mais sobre coordenadas cartesianas, pontos e retas – além de conhecermos três formas de representar a reta: usando a equação reduzida, a fundamental e a paramétrica.

## Resumo

- No plano cartesiano, cada ponto do plano é identificado por um par de números ordenados obtidos nos eixos x (horizontal) e y(vertical).
- O eixo vertical é chamado eixo das ordenadas e é representado por y.
- O eixo horizontal é chamado eixo das abscissas e é representado por x.
- O par ordenado referente ao ponto P é representado por $(x_P, y_P)$.
- A distância entre dois pontos $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ é dada pela expressão

  $$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Retas são coincidentes quando possuem todos os pontos em comum.
- Retas são concorrentes quando têm um único ponto em comum.
- Retas são perpendiculares quando são concorrentes e determinam um ângulo de 90º.
- Retas são paralelas quando são coplanares e não têm ponto em comum.
- Equação reduzida da reta: $y = ax + b$, onde a é o coeficiente angular (valor da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo dos x) e b é o coeficiente linear (valor da ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos y).
- Equação fundamental da reta: $(y - y_o) = m(x - x_o)$

  onde $(x_o, y_o)$ são as coordenadas do ponto e m a tangente do ângulo de inclinação da reta
- Equação paramétrica da reta

  $x=c.t+d$

  $y=e.t+f$

Onde **c**, **d**, **e** e **f** são números reais.

# Veja ainda

Quer estudar um pouco mais distância entre dois pontos? Então, acesse o site

http://www.matheducation.ca/iMathEducation.php?v=1.0&f=4713&i=242

e assista a esse vídeo que dá exemplos de cálculos de distâncias entre pontos de maneira bem fácil.

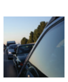
## Referências

### Livros


- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e Problemas.* Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- ______________________. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexto e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.


### Imagens

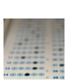

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960


- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=59308



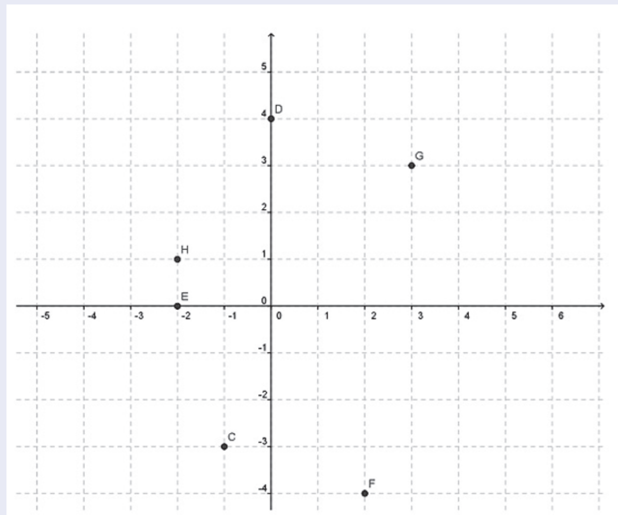
- googlemaps.com


- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

## Atividade 1




## Atividade 2

a. Extintor de incêndio

b. Carrinho de supermercado

c. Quadro

## Atividade 3

As coordenadas dos bairros são dadas por:

Campo Grande (30, 27)

Méier (60,24)

A distância $d_{CGM}$ de Campo Grande ao Méier é dada por:

$d_{CGM}{}^{2} = (60 - 30)^2 + (24 - 27)^2$

$d_{CGM}{}^{2} = 30^2 + (-3)^2$

$$d_{CGM}{}^{2} = 909$$

$$d_{CGM} = \sqrt{909}$$

$$d_{CGM} \cong 30{,}15 \text{ km}$$

## Atividade 5

O objetivo é encontrar a equação reduzida da reta que passa pelos pontos pontos A(1,3) e B(3,4)

$$a = tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-3}{3-1} = \frac{1}{2}$$

Usando o valor de a (1/2) e as coordenadas de B (3, 4) em y=ax+b, temos

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

$$4 = \frac{1}{2}3 + b$$

$$b = 4 - \frac{3}{2}$$

$$b = \frac{5}{2}$$

E a equação da reta fica

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

## Atividade 6

1º Passo) Encontrar tangente do ângulo de inclinação, que é o mesmo da reta y = x - 7

tg45º = 1

2º Passo) Substituir a tangente e o ponto na equação da reta:

y - 4 = 1 . (x – (-3))

y - 4 = x + 3

y = x + 3 + 4

y = x + 7

Respostas das Atividades

## Atividade 7

A descrição paramétrica da reta é

$$\begin{cases} x = 2.t + 3 \\ y = 1 - 4.t \end{cases}$$

Para saber as coordenadas do ponto que tem x=4, vamos na primeira equação, achamos o valor de t e substituímos na segunda equação.

$$4 = 2.t + 3$$
$$4 - 3 = 2.t$$
$$t = \frac{1}{2}$$

Indo para a outra equação, teremos

$$y = 1 - 4.t$$
$$y = 1 - 4.\frac{1}{2} = 1 - 2 = -1$$

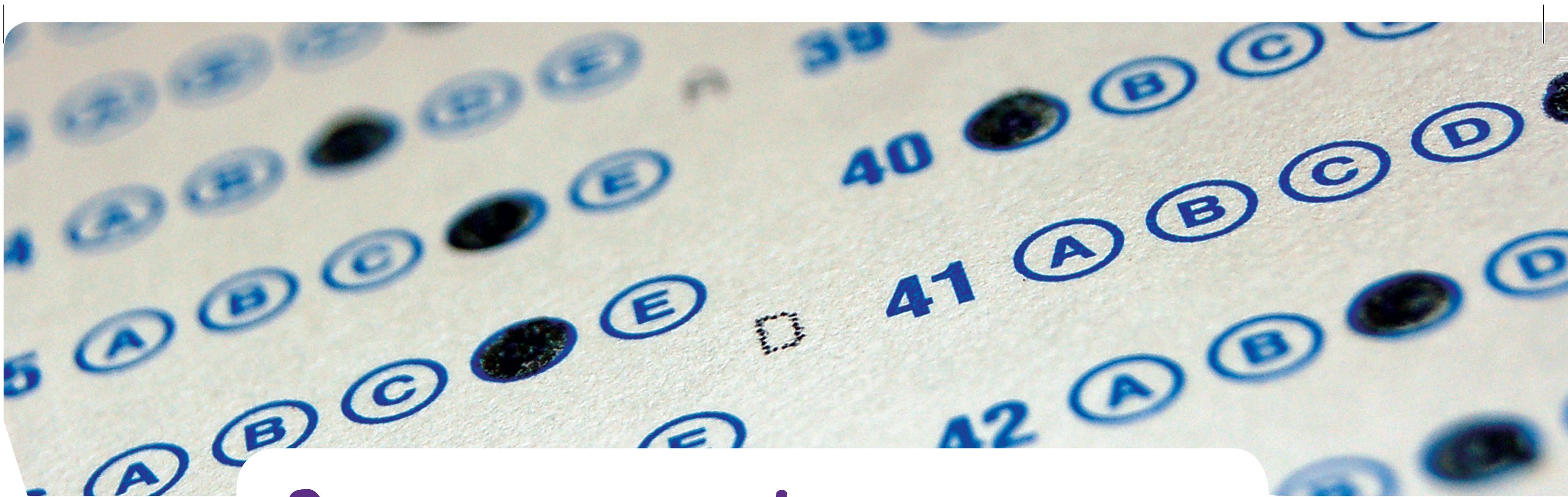
As coordenadas do ponto, então, são (4, -1)

Para achar a equação reduzida da reta, achamos o valor de t em uma equação e inserimos na outra.

$$x = 2.t + 3$$
$$x - 3 = 2.t$$
$$t = \frac{x - 3}{2}$$

Entrando na outra equação, teremos

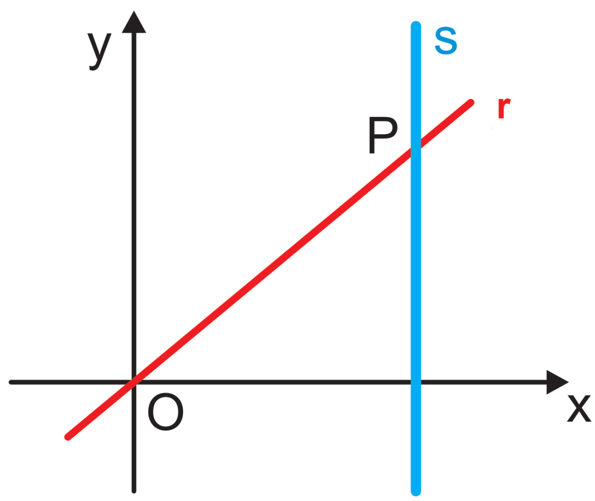
$$y = 1 - 4.t$$
$$y = 1 - 4.\left(\frac{x - 3}{2}\right)$$
$$y = 1 - 2.(x - 3)$$
$$y = 1 - 2x + 6$$
$$y = -2x + 7$$



# O que perguntam por aí

**(UFF – 00)**

Na figura a seguir estão representadas as retas r e s:




Sabendo que a equação da reta s é x = 3 e que OP mede 5 cm a equação de r é:

a. y = 3/4x

b. y = 4/3x

c. y = 5/3x

d. y = 3x

e. y=5x

**Resposta:** Letra B

**Comentário:**

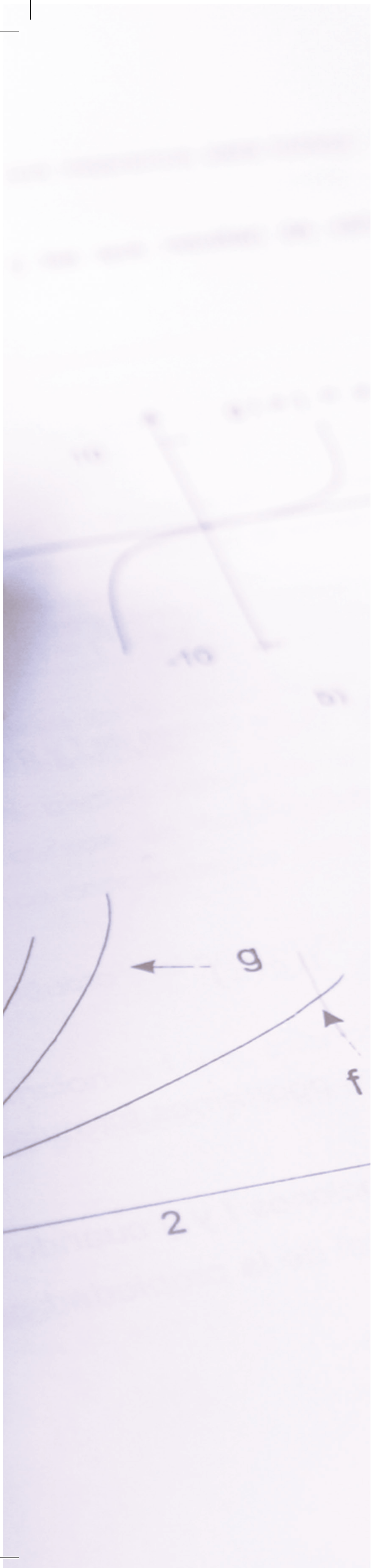
Como o triângulo formado pelas retas r e s é retângulo, podemos utilizar o teorema de Pitágoras.

Um dos catetos mede 3 cm (reta s é $x = 3$) e a hipotenusa mede 5 cm (é dado no enunciado que OP mede 5 cm), temos por Pitágoras que a altura do triângulo, ou seja, o outro cateto mede 4 cm.

Sendo a equação reduzida da reta $y = ax + b$, como r passa pela origem

$b = 0$ e $a$ = coeficiente angular = tangente do ângulo de inclinação da reta = 4/3.

Logo, a equação de r é $y = 4/3x$



# Análise Combinatória 2

## Para início de conversa...

Como todo brasileiro, você deve ter seu time de futebol preferido. Ou se não gosta de futebol, deve torcer para uma equipe de basquete, voley ou outro esporte onde se faz necessário um grupo de atletas. Já parou para pensar na dor de cabeça que o técnico tem todas as vezes que precisar escalar seu time?

Obviamente, o técnico leva em conta as condições físicas, técnicas, em suma, a capacidade de cada atleta. Mas mesmo assim, são várias formações possíveis.

Geralmente uma equipe de futebol de salão consta de 7 atletas, sendo que apenas 5 entram em quadra. Quantas formações possíveis podemos fazer com esses atletas? Este é um problema comum na análise combinatória. Será que temos outros?

Por exemplo, olhe os seus colegas a sua volta na sala de aula. Caso resolvam eleger uma comissão representativa para a turma, sendo esta equipe formada por três alunos. Você consegue visualizar quantas comissões podem ser formadas?

E se essa comissão tiver funções distintas, por exemplo presidente, secretário e tesoureiro? O cálculo é o mesmo?

Obviamente, se montarmos a árvore de possibilidades, poderemos chegar ao resultado. Todavia, será que existe outra maneira de achar este mesmo resultado?

Na próxima seção veremos a partir de exemplos práticos como utilizar alguns métodos de contagem.

## Objetivos de aprendizagem

- Identificar e resolver problemas que envolvam arranjo.
- Identificar e resolver problemas que envolvam combinação.
- Identificar e resolver problemas que envolvam permutação com repetição.
- Conhecer o triângulo de Pascal.

# Seção 1
# Arranjo e Combinação

Em nossa primeira aula de introdução da Análise Combinatória conhecemos o Princípio Fundamental da Contagem. Você lembra o que diz esse Princípio?

___________________________________________________________

___________________________________________________________

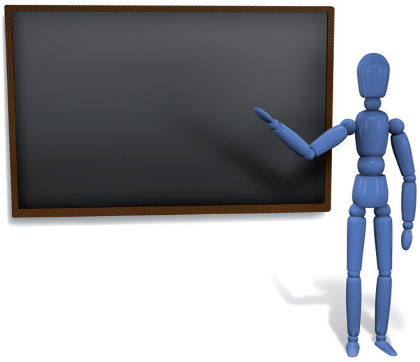
___________________________________________________________

Como você sabe o Princípio Multiplicativo nos diz que sempre devemos multiplicar os números de possibilidades das tarefas a serem realizadas.

Nessa aula voltaremos a discutir sobre o princípio fundamental da contagem e a postura que devemos tomar para resolver exercícios de análise combinatória. Temos sempre que nos colocar no lugar da pessoa que tem que tomar as decisões em cada tarefa.

Vamos mostrar alguns exemplos de como podemos aplicar as técnicas de contagem em exemplos práticos. Além de mostrar possíveis erros. É possível percebemos nestes exemplos que a base para as técnicas utilizadas é o princípio fundamental da contagem.

Exemplo 1: Os alunos de uma determinada turma da escola ABC precisam eleger dois professores de sua turma, um para ser o representante da turma e o outro para ser o suplente. Eles resolvem tomar esta decisão de forma aleatória. Quantas possibilidades são possíveis para escolher estes dois professores, sabendo que esta turma possui 12 docentes?



Resolução:

Para resolvermos esta questão o primeiro passo é nos colocarmos na posição dos alunos que irão escolher estes professores. Os discentes terão duas tarefas a cumprir.

TAREFA 1: decidir qual professor será o representante: 12 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 12 professores)

TAREFA 2: decidir qual professor será o suplente: 11 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 11 restantes, já que 1 professor já foi escolhido para representante)

Temos então

| TAREFA 1 | TAREFA 2 |
|---|---|
| 12 | 11 |

Pelo Princípio Multiplicativo, temos: $12 \cdot 11 = 132$ possibilidades.

Logo são 132 possibilidades de escolhas de 1 representante e 1 suplente.

Observe que a posição ocupada pelo professor altera na resposta final, pois escolher os professores de Matemática e de Física pode trazer duas respostas possíveis:

Representante: Matematica e Suplente: Física

Ou ainda

Representante: Física e Suplente: Matemática.

Nestes casos onde a ordem altera o resultado, chamaremos de Arranjos.

Note que temos 12 elementos tomados 2 a 2.

Isto nos dá

12 . 11, mas se generalizarmos o problema. Se forem 12 professores selecionados em grupos de k elementos?

Teremos:

$$\underbrace{12 \,.\, (12-1) \,.\, (12-2) \,.\, \ldots \, (12-(k-1))}_{\text{Produto de k fatores}}$$

Queremos dizer o seguinte, se forem 3 professores teremos 12 . 11 . 10

Se forem 4 professores teremos 12.11.10.9. preste atenção sempre no último termo do produto para você entender a expressão acima.

E se generalizarmos mais ainda. Vamos fazer n professores separados em grupos de k professores. Teremos $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(n-k)!$ Dividindo toda a expressão por (n-k)! temos um arranjo $A_{n,k}$

$$A_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots(n-(k-1))(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}\text{, logo,}$$

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo 2: O professor Euler precisa escolher 2 alunos de sua turma para pegar os livros que estão na biblioteca da escola. Sabendo que sua turma tem 15 alunos, de quantas maneiras Euler poderá fazer esta escolha?

Resolução:

Novamente temos que nos colocar na posição do professor que irá escolher os alunos. Temos assim 2 tarefas a realizar.

TAREFA 1: escolher o primeiro aluno que vai à biblioteca pegar os livros: 15 possibilidades (pode escolher qualquer um dos alunos)

TAREFA 2: escolher o segundo aluno que vai à biblioteca pegar os livros: 14 possibilidades (pode escolher qualquer um dos 14 alunos que ainda não foram escolhidos)

Pelo Princípio Multiplicativo temos $15 \cdot 14 = 210$ possibilidades.

*No entanto esta resposta está errada! Você sabe responder por que? Onde está o erro?*

Uma dica: Em problemas de contagem este erro é comum, pois a forma como resolvemos acima foi bastante intuitiva e não parece ter falha alguma.

O erro está em pensarmos que temos duas tarefas a realizar, pois quando pensamos desta forma estamos dizendo que tem uma ordem em que 1° tem que ser escolhido um aluno e depois tem que ser escolhido outro, quando na verdade isto não ocorre.

Para listar algumas possibilidades de escolha denominando os alunos pela letra A seguida do seu número de chamada, ou seja, A1, A2, A3,... até o A15:

1. A1 e A2
2. A1 e A3
3. A2 e A1
4. A3 e A1

Analisando a lista vemos que no primeiro caso escolhemos primeiro o aluno A1 e depois o aluno A2 e no terceiro caso escolhemos primeiro o aluno A2 e depois o aluno A1. Nesse caso, temos que a escolha 1) e a escolha 3) são as mesmas, pois os mesmos alunos foram escolhidos (os alunos A1 e A2). Assim, resolvendo da forma que fizemos, estamos contando cada possibilidade duas vezes. E este erro vem exatamente do fato de ter colocado uma ordem na escolha dos alunos, o que neste caso não é necessário. A mesma análise poderia ser feita com as escolhas 2) e 4).

Então como devemos resolver este problema? Uma forma de resolvermos é imaginarmos como se tivéssemos que escolher um e depois escolher outro como fizemos acima e depois "fazer um ajuste". Assim, pelo resultado que obtemos acima temos 210 possibilidades, no entanto, como já vimos acima, cada uma destas possibilidades foi contada duas vezes, ou seja, este resultado é o dobro da quantidade que queremos, assim devemos dividir este resultado por dois. Logo, temos $\frac{210}{2} = 105$ , ou seja, a resposta final é que existem 105 possibilidades.

Entendeu? Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 3: O professor Euler precisa escolher 3 alunos de sua turma para pegar os livros que estão na biblioteca da escola. Sabendo que sua turma tem 15 alunos, de quantas maneiras Euler poderá fazer esta escolha?

Resolução:

Podemos resolver como fizemos no exemplo anterior. Supondo inicialmente que temos 3 tarefas e que iremos escolher primeiro 1 aluno depois mais 1 aluno e por fim o último aluno. Temos assim, pelo Princípio Multiplicativo $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ possibilidades, mas sabemos que esta não é a resposta correta. Vejamos alguns casos:

1. A1, A2 e A3
2. A1, A3 e A2
3. A2, A1 e A3
4. A2, A3 e A1
5. A3, A2 e A1
6. A3, A1 e A2

Devemos notar que estes 6 casos na verdade se resumem a apenas uma possibilidade, que é a dos alunos A1, A2 e A3, pois a ordem de escolha de cada um dos alunos não gera uma nova possibilidade.

O mesmo acontece se forem escolhidos os alunos A4, A5 e A6, por exemplo. Teremos 6 casos também:

1. A4, A5 e A6
2. A4, A6 e A5
3. A5, A4 e A6

4. A5, A6 e A4

5. A6, A5 e A4

6. A6, A4 e A5

Por que se repetem sempre de 6 em 6? Isto ocorre, pois estamos apenas mudando a ordem dos três alunos escolhidos e isto como vimos na aula passada é um caso de permutação simples, como são três elementos então temos $P_3 = 3! = 6$.

Portanto, devemos dividir o resultado anterior por 6, isto é, $\frac{2730}{6} = 455$ .Temos então 455 possibilidades de escolha.

E se fossem 4 alunos, o que teríamos que fazer? Teríamos:

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!}$$

Podemos continuar aumentando, com 5 alunos, com 6 e assim por diante.

Observe que no caso da escolha dos professores, a ordem de escolha influencia na resposta, pois estamos escolhendo com funções diferentes. Enquanto no caso da escolha dos alunos, independe de quem é o primeiro e quem é o segundo.

Neste caso onde a posição dentro do agrupamento não importa, temos as combinações que representaremos da seguinte forma:

$C_{n,k}$, isto é, combinação de n elementos tomados k a k.

Para determinarmos o número de combinações vamos lembrar que com k elementos distintos n1, n2, n3, nk podemos obter k! permutações. Lembra?

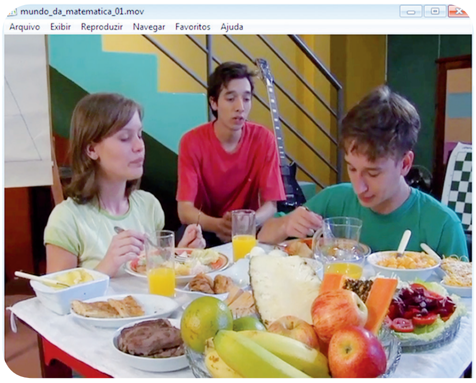
Basta trocar de posição cada elemento.

Isto significa que partindo de uma combinação obteremos k! arranjos dos n elementos separados k a k.

Qual será então o número de combinações? Bem, basta dividir o número de arranjos por k!. Assim:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**Multimídia**




Clique no link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=30962 e conheça o áudio visual "Quatro mil possibilidades!",Nele você conhecerá Rafael e Julia que conversam sobre a composição de um "prato" considerado saudável, e que utilizam conceitos relacionados à análise combinatória. Com esse áudio visual você poderá determinar o número de possibilidades da ocorrência de um determinado acontecimento (evento), além de analisar uma situação do cotidiano por meio da análise combinatória.

Devemos tomar cuidado ao escolher as tarefas que temos que realizar, pois podemos errar a questão com uma escolha equivocada das tarefas. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4: De quantas maneiras podemos formar um casal (homem e mulher) dispondo de 4 homens e 4 mulheres?

Solução:

Podemos pensar em duas tarefas.

TAREFA 1: escolher 1 pessoa qualquer: 8 possibilidades.

TAREFA 2: escolher 1 pessoa do sexo diferente da escolhida na tarefa 1: 4 possibilidades.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $8 \cdot 4 = 32$. Logo, temos 32 possibilidades de formar um casal, certo? Errado! Você sabe onde está o erro?

O erro está na escolha das tarefas, pois na 1ª tarefa escolhemos qualquer uma das 8 pessoas. Vamos chamar de H1, H2, H3 e H4 os homens e as mulheres de M1, M2, M3 e M4. Vamos listar alguns casos possíveis:

1. H1 e M1
2. H1 e M2
3. M1 e H1
4. M2 e H1

Notemos que os casos 1) e 3) são iguais, pois formam o mesmo casal (o homem H1 e a mulher M1) e o mesmo ocorre nos casos 2) e 4). Assim, cada escolha está sendo contada duas vezes, temos que dividir o resultado por dois, ou seja, $32 \div 2 = 16$.

Logo temos 16 possibilidades de escolha de casal.

Mas poderíamos ter resolvido da seguinte forma, temos duas tarefas.

TAREFA 1: escolher 1 homem dentre os quatro homens: 4 possibilidades (H1, H2, H3 e H4)

TAREFA 2: escolher 1 mulher dentre as quatro mulheres: 4 possibilidades (M1, M2, M3 e M4)

Pelo Princípio Multiplicativo, temos 4·4 = 16. Logo temos 16 possibilidades de escolha de casal.

Exemplo 5: Em uma festa, cada pessoa cumprimentou todas as outras. Sabendo que nesta festa tinha 20 pessoas, foram dados quantos apertos de mão?

Solução: Neste exemplo a dificuldade está em determinar as tarefas a serem executadas pela pessoa que precisa contar o número de apertos de mão. Uma boa estratégia é utilizarmos letras para representar as pessoas, usemos as seguintes: P1, P2, ..., P20. Como temos que contar o número de apertos de mão então é necessário que entendamos como usar as letras (estou usando a palavra "letra" para representar P1, P2,.., P20 como sendo "letras" diferentes) para representar 1 aperto de mão, depois para representar 2 apertos de mão e assim sucessivamente. Um aperto de mão fica definido quando usamos duas letras, representando duas pessoas. Por exemplo, P1P20 significa que a pessoa P1 apertou a mão da pessoa P20, P1P10 significa que a pessoa P1 apertou a mão da pessoa P10. Então fazendo esta análise podemos perceber que cada aperto de mão pode ser contado ao escolhermos duas letras. Então nossa tarefa é determinar de quantas maneiras podemos escolher 2 letras, dispondo de 20 letras. Escolher 2 objetos de 20 caracteriza arranjo ou combinação, temos que verificar se quando alteramos a ordem das duas letras geramos um novo aperto de mão ou se continuamos contando o mesmo aperto de mão. Como P1P20 é o mesmo aperto de mão de P20P1 então este é um caso de combinação simples.

TAREFA: Escolher 2 pessoas dentre 20, em que a ordem nesta escolha não importa, ou seja, não gera uma nova contagem.

$$\frac{\text{TAREFA}}{C(20,2)}$$

Usando a fórmula de combinação, temos $C(20,2)=\dfrac{20!}{2!\,18!}=\dfrac{20\cdot 19\cdot 18!}{2\cdot 18!}=190$

Logo, nesta festa teve 190 apertos de mão.

Exemplo 6: Em uma determinada Instituição de ensino trabalham 10 professores de Matemática, destes 4 trabalham no Ensino Superior e o restante no Ensino Médio. De quantas maneiras podemos formar uma comissão de 3 pessoas de modo que:

a. quaisquer uns dos 10 possam ser escolhidos

b. nenhum membro seja do Ensino Superior

c. haja exatamente 1 professor do Ensino Superior na comissão

d. pelo menos um seja do Ensino Superior

e. no máximo dois sejam do Ensino Médio

Solução:

a) Temos uma única tarefa para formar a comissão.

TAREFA: escolher 3 dentre 10 professores para formar uma comissão.

Novamente este exemplo caracteriza um problema de arranjo ou de combinação, temos então que verificar se a ordem é ou não importante, ou seja, se escolhermos os professores João, Clayton e Alessandra é uma comissão diferente da comissão formada por Alessandra, Clayton e João? A resposta é não. É a mesma comissão, isto significa que a ordem não importa, assim temos um caso de combinação. Usaremos assim a fórmula de combinação.

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!\ 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{6 \cdot 7!} = 120$$

Logo, temos 120 comissões possíveis.

b) Nossa tarefa continua sendo escolher 3 professores, no entanto não podemos escolher professores do Ensino Superior, assim temos 6 professores para escolher.

TAREFA: escolher 3 dentre os 6 professores do Ensino Médio.

Da mesma forma do item a, temos um caso de combinação:

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{6 \cdot 3!} = 20$$

Logo, temos 20 comissões possíveis.

c) Neste item temos que dar atenção à palavra "exatamente", pois alguns alunos acabam errando a questão por não prestarem atenção nesta palavra. Como temos que escolher exatamente 1 professor do Ensino Superior então esta comissão será formada por **1 professor do Ensino Superior** e **2 professores do Ensino Médio**. Neste caso temos duas tarefas a realizar.

TAREFA 1: escolher 1 professor do Ensino Superior dentre os 4 que trabalham no Ensino Superior.

TAREFA 2: escolher 2 professores do Ensino Médio dentre os 6 que trabalham no Ensino Médio.

Para resolvermos cada uma das tarefas temos que usar a fórmula da combinação pelo mesmo motivo dos itens *a* e *b*.

$$\frac{\text{TAREFA 1}}{C(4,1)} \quad \frac{\text{TAREFA 2}}{C(6,2)}$$

Cabe aqui uma observação: para resolvermos a tarefa 1não precisamos necessariamente usar combinação, pois temos que escolher 1 pessoa dentre 4 possíveis e isto pode ser feito de 4 maneiras já que qualquer um dos quatro professores podem ser escolhidos.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $C(4,1) \cdot C(6,2) = 4 \cdot 15 = 60$, pois

$$C(4,1) = \frac{4!}{1!\ 3!} = \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = 4 \text{ e } C(6,2) = \frac{6!}{2!\ 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 15$$

Logo temos 60 comissões possíveis.

d) Para que tenhamos pelo menos (devemos ter cuidado com a palavra pelo menos) 1 professor do Ensino superior as possibilidades são:

I) 1 professor Ensino Superior e 2 do Ensino Médio

II) 2 professores de Ensino Superior e 1 do Ensino Médio

III) 3 professores de Ensino Superior

Para todos os dois primeiros casos temos 2 tarefas: escolher professor(es) do Ensino Superior e escolher professor(es) do Ensino Médio. Já no caso III) temos uma única tarefa que é escolher três professores do Ensino Superior.

Usaremos o Princípio Multiplicativo nos dois primeiros casos:

I) $C(4,1) \cdot C(6,2) = 4 \cdot 15 = 60$

II) $C(4,2) \cdot C(6,1) = 6 \cdot 6 = 36$

III) $C(4,3) = 4$

Como podemos ter qualquer um dos três casos então devemos somar todas as possibilidades, ou seja, $60 + 36 + 4 = 100$ possibilidades.

Logo, são possíveis 100 comissões.

Podemos resolver este item de outra maneira: como tem que ter pelo menos 1 professor do Ensino Superior então a única escolha que não pode ocorrer é formar comissão com nenhum professor do Ensino Superior, então podemos tomar todas as comissões possíveis e retirar as que não apresentam nenhum professor do Ensino Superior (3 professores do Ensino Médio).

O número total de comissões possíveis foi calculado no item a) em que obtemos 120 comissões. E o número de comissões com 3 professores do Ensino Médio é $C(6,3) = 20$, calculado no item b). Logo o total de comissões é $120 - 20 = 100$.

e) Para termos no máximo dois professores do Ensino Médio analisemos os seguintes casos:

I) 2 do Ensino Médio e 1 professor Ensino Superior

II) 1 do Ensino Médio e 2 professores de Ensino Superior

III) 3 professores de Ensino Superior

Mas estes casos são os mesmos do item anterior. Logo temos 100 comissões possíveis.

Exemplo 7: Um estudante deseja organizar melhor seus livros na estante de sua casa. Para isto vai separar os livros de matemática, física e química, ou seja, não colocará nenhum livro de uma disciplina junto com livro de outra disciplina. Sabendo que ele possui 6 livros de Física, 7 de Química e 8 de Matemática, determine de quantos modos ele pode arrumar dentre os 21, 10 livros na estante, sendo 3 livros de Física, 3 de Química e 4 de Matemática.

Solução: este é um exemplo que envolve várias técnicas que já estudamos até agora. Primeiro passo é se colocar na posição do estudante que irá arrumar os livros na estante. As tarefas que ele terá que realizar são:

TAREFA 1: escolher a ordem das disciplinas na estante, ou seja, se primeiro colocará os livros de matemática ou de física ou de química e depois ver qual será a próxima disciplina até a última escolha.

Tarefa 2: escolher qual livro será colocado na estante para cada disciplina.

Na tarefa 1 temos que trocar a ordem das disciplinas, ou seja, permutar, isto caracteriza permutação e como são três disciplinas temos P3 = 3! = 6.

Na tarefa 2 temos três subtarefas:

SUBTAREFA 1: colocar 3 livros de Física na estante, dentre 6.

SUBTAREFA 2: colocar 3 livros de Química na estante, dentre 7.

SUBTAREFA 3: colocar 4 livros de Matemática na estante, dentre 8.

Todas as três subtarefas caracterizam ou arranjo ou combinação. Para decidirmos qual técnica de contagem usar devemos verificar se mudando a ordem na escolha dos livros estamos mudando a arrumação dos livros na estante, ou seja, colocar os livros de Física F1 F2 F3 nesta ordem na estante é o mesmo que colocar os livros F3 F2 F1 nesta ordem? A resposta é não, pois ao mudarmos a ordem dos livros obtemos uma nova arrumação na estante e assim temos um caso de arranjo. Temos assim:

$$\underset{6\cdot 5\cdot 4}{\underline{\text{SUBTAREFA 1}}}\quad \underset{7\cdot 6\cdot 5}{\underline{\text{SUBTAREFA 2}}}\quad \underset{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{\underline{\text{SUBTAREFA 3}}}$$

Temos assim:

| TAREFA 1 | TAREFA 2 |
|---|---|
| 6 | $120 \cdot 210 \cdot 1680$ |

Pelo Princípio Multiplicativo o total de arrumações possíveis na estante é igual a 254.016.000 !!! É isso mesmo, o número de possibilidades é mais de 250 milhões!

Outra solução possível é realizarmos as seguintes tarefas:

TAREFA 1: escolher a ordem das disciplinas na estante, ou seja, se primeiro colocará os livros de matemática ou de física ou de química e depois ver qual será a próxima disciplina até a última escolha.

TAREFA 2: escolher os livros de cada disciplina que irão para a estante. Neste caso o objetivo é somente escolher os livros sem se preocupar com a ordem.

TAREFA 3: escolher a ordem que cada livro ocupará dentro de cada disciplina. Por exemplo dos 4 livros de Matemática escolhido em que ordem devo colocá-lo na estante? Para isto precisamos permutar estes livros.

Assim, teremos:

| TAREFA 1 | TAREFA 2 | TAREFA 3 |
|---|---|---|
| 6 | $C(6,3) \cdot C(7,3) \cdot C(8,4)$ | $3! \cdot 3! \cdot 4!$ |

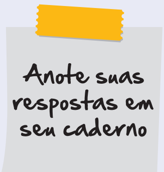
Ou seja,

| TAREFA 1 | TAREFA 2 | TAREFA 3 |
|---|---|---|
| 6 | $20 \cdot 35 \cdot 70$ | $6 \cdot 6 \cdot 24$ |

Pelo Princípio Multiplicativo o total de arrumações possíveis na estante é igual a 254.016.000, o mesmo valor encontrado anteriormente.

Será que ficaram bem entendidas as técnicas de contagem e seus usos? Tente agora resolver estas próximas atividades sempre vendo qual(is) é(são) as tarefas a serem realizadas para só depois tentar aplicar as técnicas aprendidas.


Numa semifinal de um campeonato de basquete, 4 seleções estão disputando as medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas formas diferentes pode ser definido o pódio?



Atividade 2

Pedro decidiu reunir os colegas para comemorar seu aniversário. Ele tem que escolher 2 sabores de tortas para servir em sua festa. A confeitaria oferece 10 sabores diferentes. De quantas maneiras Pedro pode fazer esta escolha?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Em uma reunião cada pessoa cumprimentou as outras com um aperto de mão. Sabendo que no total foram dados 105 apertos de mão, quantas pessoas estavam nesta reunião?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Dona Gertrudes esqueceu a sua senha bancária de 4 dígitos ao realizar um saque. No entanto ela sabe que os algarismos são distintos, que o 1° algarismo não era número par e o último é nove. Para que dona Gertrudes realize o saque, determine o número máximo de tentativas que o banco deve permitir para a realização desta transação bancária.

Anote suas respostas em seu caderno

## Atividade 5

Uma turma de 40 formandos de uma Universidade contratou um profissional para que no dia da formatura, fotografasse somente um par de alunos com o paraninfo.

Sem considerar a ordem dos três na foto, determine:

a. o número mínimo de fotos que o fotógrafo pode tirar.

b. o número máximo de fotos que o fotógrafo pode tirar.

Anote suas respostas em seu caderno

## Atividade 6

Em uma determinada lanchonete os clientes podem montar um sanduíche escolhendo:

I) um dentre os dois tamanhos: 15 cm ou 30 cm

II) um dentre os cinco tipos de pão: italiano branco; integral; parmesão e orégano; três queijos; integral aveia e mel.

III) um dentre os 6 recheios: presunto; peito de peru; rosbife; frango; atum; almôndegas.

IV) um dentre os três tipos de queijo: suíço, prato; cheddar.

V) escolher três dentre os cinco tipos de vegetais: alface; tomate; cebola; pimentão; pepino

VI) dois dentre os quatro molhos: mostarda e mel; barbecue; mostarda; maionese.

Determine:

a. a) o número de sanduíches distintos que podem ser montados

b. b) o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar sabendo que ele não gosta de pão de três queijos; não gosta de atum; e não gosta de maionese.

Anote suas respostas em seu caderno

# Seção 2
# Permutação com repetição

Vimos na aula anterior que todo problema de contagem que envolve troca de posição de objetos distintos entre si caracteriza uma permutação simples. No entanto, tem problemas que envolvem troca de posição de objetos sendo algum destes repetidos. Qual técnica de contagem utilizar? Para responder a esta pergunta vamos a um exemplo.

Exemplo 8: Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Solução: Se não tivéssemos letras repetidas resolveríamos utilizando permutação simples, no entanto as letras M e T se repetem duas vezes e a letra A se repete três vezes. Vejamos alguns exemplos de palavras obtidas ao se trocar a posição das letras. Para isto usemos $M_1A_1T_1EM_2A_2T_2ICA_3$

I) $A_1T_1EM_2A_2T_2ICA_3\ M_1$

II) $A_1T_1EM_1A_2T_2ICA_3\ M_2$

III) $A_1T_2EM_2A_2T_1ICA_3\ M_1$

IV) $A_1T_2EM_1A_2T_1ICA_3\ M_2$

Devemos notar que todos os 4 casos acima representam o mesmo anagrama que é ATEMATICAM, isto ocorreu porque trocar a posição de um "T" com a posição de outro "T" não gera um novo anagrama. Assim, se usarmos a permutação simples estaremos contando um mesmo anagrama várias vezes. Como podemos determinar o número de vezes que estaremos contando um mesmo anagrama? Para isto devemos tomar o exemplo dado acima e verificar quantas vezes podemos alterar a posição das letras repetidas. As letras M e T aparecem duas vezes temos portanto 2! = 2 maneiras de trocarmos estas letras entre si e a letra A se repete três vezes então temos 3! = 6 maneiras de trocar a posição do A entre si. Isto nos dá um total de 2·2·6 = 24 maneiras de formar um mesmo anagrama de ATEMATICAM, o mesmo ocorrerá com outros anagramas formados. Portanto ao usarmos a permutação simples estaremos encontrando um número 24 vezes maior do que o correto. Assim devemos dividir este resultado por 24. Temos então que o total de anagramas é $\frac{P10}{2!\ 2!\ 3!} = \frac{10!}{24} = 151200$.

De maneira geral se temos permutação de n elementos com um elemento se repetindo k vezes, outro se repetindo w vezes e assim por diante até o último que se repete z vezes, então

$$P_n^{k,w,\ldots,z} = \frac{n!}{k!\cdot w!\cdot \ldots \cdot z!}$$

Esta fórmula se estende para quantidades maiores de elementos repetidos.

Exemplo 9: Uma pequena empresa resolveu desenvolver uma dinâmica de grupo com seus 10 funcionários, sendo 6 mulheres e 4 homens. Para isto pediu que eles ficassem em fila, sendo que as mulheres deveriam ficar em ordem crescente de altura entre si e os homens também. Sabendo que nenhum homem e nenhuma mulher tem a mesma altura, determine de quantas maneiras distintas esta fila pode ser formada.

Solução:

Para resolvermos esta questão, primeiro vamos resolver para o caso em que houvesse apenas dois homens e duas mulheres. Vamos chamar de M1 a mulher mais baixa e M2 a mais alta, H1 o homem mais baixo e H2 o homem mais alto. Assim teríamos seis possibilidades:

I) M1M2H1H2

II) M1H1M2H2

III) M1H1H2M2

IV) H1H2M1M2

V) H1M1H2M2

VI) H1M1M2H2

Veja os casos acima até se convencer que realmente só existem estas possibilidades, pois o M2 nunca pode vir antes do M1 e o H2 nunca pode vir antes do H1.

Poderíamos ter resolvido este problema percebendo que, por exemplo no caso I) não podemos trocar a posição de M1 com a do M2, ou seja, o caso M2M1H1H2 não é possível, ou poderia também imaginar M2M1H1H2 como sendo "o mesmo caso" de M1M2H1H2, assim estaríamos contando apenas uma única vez, isto é a mesma coisa que pensarmos em permutação com repetição. Pensando desta forma teríamos os seguintes casos:

I) MMHH

II) MHMH

III) MHHM

IV) HHMM

V) HMHM

VI) HMMH

Desta forma não haveria necessidade de listar todas estas possibilidades, pois poderíamos usar a fórmula para permutação com repetição que neste exemplo fica $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$.

Agora já temos condições de resolver o nosso exemplo, como temos 6 mulheres e 4 homens então temos $P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!\ 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$.

Logo, a fila pode ser formada de 210 maneiras diferentes.

Exemplo 10: Uma avaliação é composta de 20 questões, em que cada uma deve ser respondida com V caso seja verdadeira e F caso seja falsa a questão. Com base nestas informações responda:

Quantas sequências de respostas são possíveis?

b) Quantas sequências apresentam doze respostas V e oito respostas F?

Solução:

a) As sequências de respostas são formadas pelas letras V e F, as tarefas que teremos que realizar são: primeiro, se a primeira questão será V ou F, segundo se a segunda questão será V ou F e assim por diante até a questão 20, portanto temos 20 tarefas e cada tarefa tem 2 possibilidades de resposta, ou seja,

| TAREFA 1 | TAREFA 2 | | TAREFA 20 |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | ... | 2 |

Pelo Princípio Multiplicativo temos: $2^{20} = 1.048.576$

Logo temos 1.048.576 possibilidades de sequências!

Imagine você chutar todas as 20 questões e gabaritar esta prova! Você verá quando estudar probabilidade que isto é quase impossível acontecer.

b) Para sabermos quantas sequências tem 12V's e 8F's teremos que permutar a sequência VVVVVVVVVVVVFFFFFFFF, ou seja é um caso de permutação com repetição, usando a fórmula, temos:

$$P_{20}^{12,8} = \frac{20!}{12!\,8!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 125.970$$

Logo temos 125.970 sequências possíveis.

Atividade 7

**Quantos são os anagramas da palavra COMBINATÓRIA:**

a. sem restrição
b. que começam com a letra C
c. que terminam com a letra A
d. que começam com a letra C e terminam com a letra A
e. que começam com a letra C ou terminam com a letra A

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 1

Uma funcionária de um loja de CDs foi encarregada de arrumar os CDs nas prateleiras. Na primeira prateleira ela deve arrumar 4 Cds (todos iguais) do Milton Nascimento, 5 CDs (todos iguais) do Gonzaguinha e 6 (todos iguais) do Chico Buarque. De quantas formas diferentes a funcionária pode arrumar estes CDs na primeira prateleira:

a. sem restrição

b. sabendo que os CDs de cada cantor devem permanecer juntos.

Anote suas respostas em seu caderno

# Seção 3

## Triângulo de Pascal – LEITURA OPCIONAL

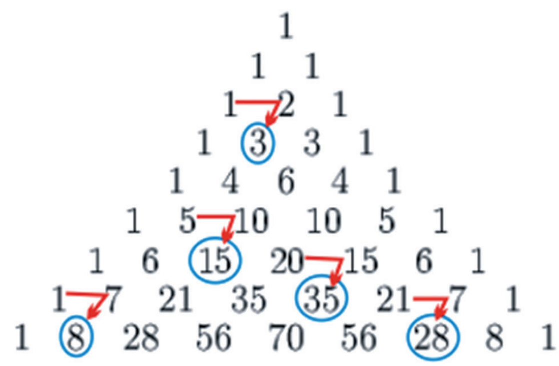
Blaise Pascal foi um matemático francês nascido no ano de 1623. Destacou-se no estudo das probabilidades e uma de suas maiores descobertas é chamada até hoje de triângulo de pascal. Neste triângulo aritmético são representados números cujo valor é a soma dos dois diretamente acima dele. O triângulo demonstra muitas propriedades matemáticas, além de mostrar os coeficientes binomiais, **que nada mais são que os resultados de combinações**

Podemos dispor números de linha em linha formando um triângulo com a seguinte propriedade em cada linha começamos com 1 e terminamos com 1 (com exceção da linha 0 que terá só o número 1) e da linha 2 em diante começamos com 1 somamos os elementos da linha anterior e terminamos com 1, e continuamos com esta regra para as linhas seguintes. Veja o triângulo:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Linha 0 | 1 | | | | | | | | | | |
| Linha 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| Linha 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| Linha 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| Linha 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| Linha 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| Linha 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| Linha 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| Linha 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| Linha 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| Linha 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Fonte: http://www.mundoeducacao.com.br/upload/conteudo/Untitled-4(40).jpg

Por exemplo, a linha 4 foi formada assim 1 (1+3) (3+3) (3+1) 1. Veja alguns exemplos no triângulo abaixo.




Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Pascal3.png

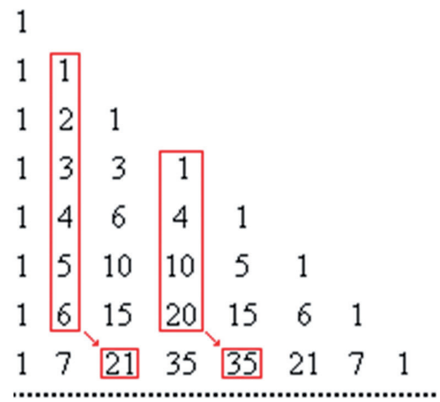
Este "triângulo" é conhecido como triângulo de Pascal. Veremos duas propriedades importantes deste triângulo.

Propriedade das linhas: A soma dos elementos de uma linha é igual ao número 2 elevado ao número da linha correspondente. Por exemplo, tomemos a linha 3, que é formada pelos números 1 3 3 1 (lembremos que a primeira linha é a linha zero), temos nesta linha a soma $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$. De forma geral, a soma dos elementos da linha $n$ é igual a $2^n$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | $2^0 = 1$ |
| 1 | 1 | | | | | | $2^1 = 2$ |
| 1 | 2 | 1 | | | | | $2^2 = 4$ |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | $2^3 = 8$ |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | $2^4 = 16$ |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | $2^5 = 32$ |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | $2^6 = 64$ |

Fonte: http://upload.wikimedia.org/math/6/4/d/64d37a3311d35a03f675ce04a63d7291.png

Propriedade das colunas: Se somarmos os elementos de uma determinada coluna começando do primeiro elemento desta coluna e indo até um elemento de uma determinada linha então a soma será igual ao número que se encontra na linha seguinte da próxima coluna. Veja a figura a seguir.




Fonte: http://www.somatematica.com.br/emedio/binomio/binomio36.gif

Nos exemplos da figura acima temos que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. E que 1 + 4 + 10 + 20 = 35.

Faça o desenho do Triângulo de Pascal até a linha 10 e verifique as propriedades da linha e da coluna.

Veja no boxe saiba mais que o *triângulo de Pascal* já era conhecido por pelo menos três séculos antes da existência de Pascal.

**Saiba Mais**

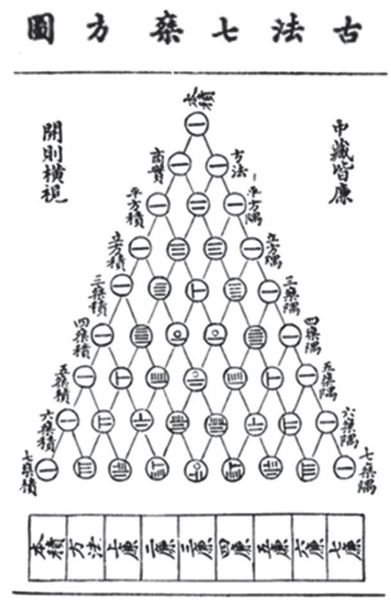
Durante a dinastia Tang reuniu-se uma coleção dos mais importante livros de matemática disponíveis, para uso oficial nos exames imperiais. A imprensa se inaugurou no século VIII, mas o primeiro livro de matemática impresso de que se tem notícia só apareceu em 1804.

O período que vai da última parte da dinastia Sung até a parte inicial da dinastia Yüan marca o pináculo da matemática chinesa antiga. Muitos matemáticos importantes despontaram e muitos livros de matemática valiosos apareceram. Dentre os matemáticos estavam Ch'in Kiu-shao (cujo livro é de 1724), Li Yeh (com livros datados de 1248 e 1259), Yang Hui (com livros datados de 1261 e 1275) e, o maior de todos, Chu Shï-kié (cujos livros datam de 1299 e 1303).

Yang Hui, cujos livros são uma espécie de extensão dos *Nove Capítulos* sobre a *Arte da Matemática*, trabalhou habilmente com frações decimais; em essência seu método era o mesmo que se usa hoje. Devemos a ele também a mais antiga apresentação preservada do chamado *Triângulo aritmético de Pascal*. Há uma outra manifestação do triângulo num livro posterior escrito por Chu Shï-kié em 1303; é interessante que Chu fala do triângulo como algo já antigo em seu tempo. É possível então que o teorema do binômio já fosse conhecido na China de longa data.

Fonte: Introdução a História da Matemática, Howard Eves. Pp.245 e 246.

Saiba Mais




Triângulo de Pascal, da maneira como foi desenhado em 1303 por Chu Shï-kié

Mais adiante no mesmo livro Eves descreve o mesmo triângulo em que aparece no trabalho de outro matemático, o francês Blaise Pascal, devemos notar que Pascal é do século XVII, portanto 3 séculos depois de Chu Shï-kié.

O *Traité Du Triangle Arithmétique* de Pascal foi escrito em 1653 mas só foi publicado em 1665.

TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE,
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.

A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, ruë saint Iacques,
à Saint Prosper.
M. DC. LXV.

Página da monografia de Blaise Pascal.

## Saiba Mais

Pascal construía seu "triângulo aritmético" conforme mostra a figura abaixo. Obtém-se qualquer elemento (da segunda linha em diante) como soma de todos os elementos da linha precedente situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado. Assim, na quarta linha,

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1.$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | ... |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | ... |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | ... |

Fonte: http://www.matematica.br/historia/imagens/triang_pascal.gif

A determinação dos coeficientes binomiais era uma das aplicações que Pascal fazia do seu triângulo. Ele também o usava, particularmente em suas discussões sobre probabilidade, para determinar o número de combinações de *n* objetos tomados *r* de cada vez. Há muitas relações envolvendo os números do triângulo aritmético, várias delas desenvolvidas por Pascal. Ele não foi o primeiro a mostrar o triângulo como vimos anteriormente, mas como Pascal foi por longo tempo (até 1935) o primeiro descobridor conhecido do triângulo no mundo ocidental e devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas propriedades do triângulo, este tornou-se conhecido como *triângulo de Pascal*.

# Resumindo

- Arranjo e combinação são caracterizados pela escolha de p elementos distintos dentre n elementos distintos (n > p). O primeiro quando a ordem é importante e o segundo quando não é.
- Fórmula da combinação é $C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- Fórmula da permutação com elementos repetidos é $P_n^{k,w,\ldots,z} = \dfrac{n!}{k! \cdot w! \cdot \ldots \cdot z!}$

# Veja Ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos o seguinte site:

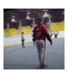
- http://www.youtube.com/watch?v=h_bXJcQgkPM (vídeo que fala sobre o problema dos pontos)

# Referências

## Livros


- Boyer C. B., *História da Matemátic*a, Ed. Edgard Blücher.
- Eves H., *Introdução a história da matemática*, Editora Unicamp.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.2, Ed Saraiva.
- Morgado, A.C., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P, Fernandez, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, 9ª Ed.2006.


## Imagens



- http://www.freeimages.com/photo/1314


- http://www.freeimages.com/photo/1193228


- http://www.sxc.hu/photo/1094969


- http://www.sxc.hu/photo/1171500


- http://www.sxc.hu/photo/1408766


- http://www.sxc.hu/photo/1078182


- http://www.sxc.hu/photo/1191195


- http://www.sxc.hu/photo/1192915


- http://www.sxc.hu/photo/1182264


- http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=30962


- http://www.sxc.hu/photo/1396243

- http://www.sxc.hu/photo/1027447

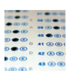
- http://www.sxc.hu/photo/774415

- http://www.freeimages.com/photo/1335487

- http://www.freeimages.com/photo/1356218

- http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ea/Yanghui_triangle.gif/300px-Yanghui_triangle.gif

- http://lh4.ggpht.com/_j5kbeGgXcbo/S3YNeLUhOiI/AAAAAAAAB_Y/xvRiWPDTzGU/%5BUNSET%5D.gif



- http://www.sxc.hu/photo/517386

## Respostas das Atividades

### Atividade 1

24

### Atividade 2

45

### Atividade 3

15

### Atividade 4

224

### Atividade 5

a. 20

b. 780

Respostas das Atividades

## Atividade 6

a. 10800

b. 3600

## Atividade 7

a. 59875200

b. 4989600

c. 9979200

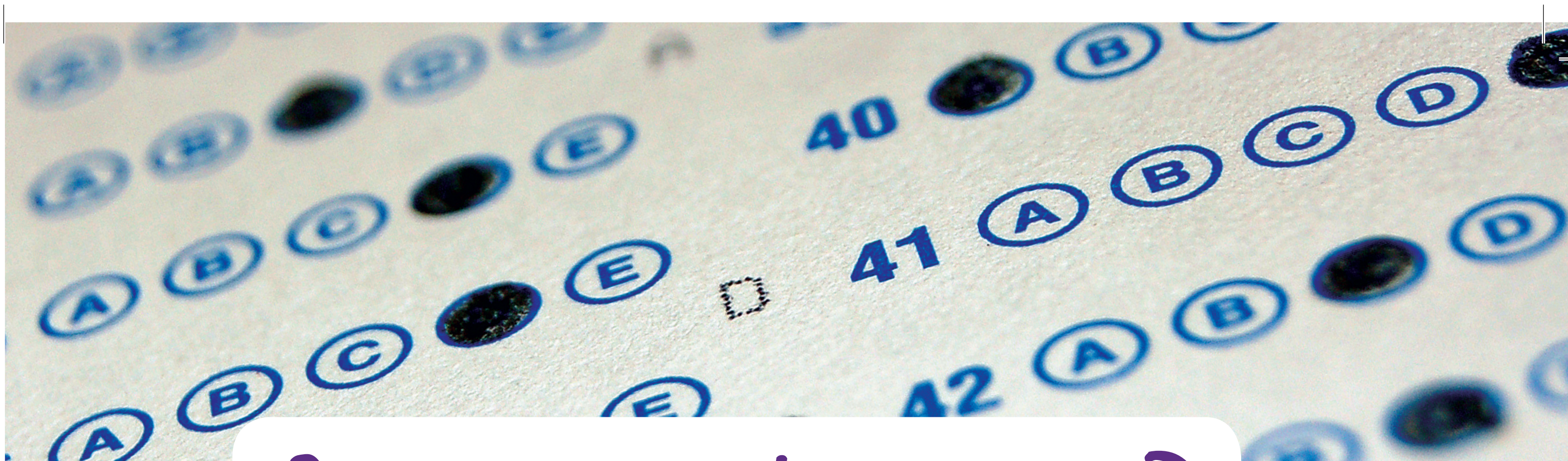
d. 907200

e. 14061600

## Atividade 8

a. 630630

b. 6



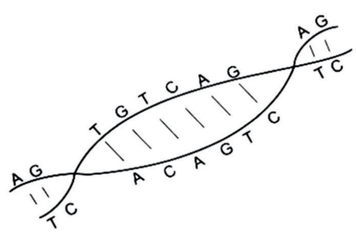

# O que perguntam por aí?

### Questão 1 (UFF – 2001)

O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A – T, T – A, C – G e G – C.

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par *A – T* não seja seguido por um par *T – A* e vice-versa;
- um par *C – G* não seja seguido por um par *G – C* e vice-versa.




Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem.

Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

a. $2^{11}$

b. $2^{20}$

c. $2 \times 10$

d. $2^{10}$

e. $2^{2} \times 10$

**Resposta:** Letra A

**Comentário:** Tarefa 1 podemos escolher qualquer um dos quatro pares possíveis para as outras 9 tarefas temos 2 possibilidades para cada uma delas. Pelo Princípio Multiplicativo temos $4 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 4 \cdot 29 = 22 \cdot 29 = 211$.

## Questão 2 (Unifesp – SP – 2002)

Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

a) 64 b) 126 c) 252 d) 640 e) 1260

**Resposta:** Letra E

**Comentário:**

A primeira tarefa é escolher um dos dez para ser o síndico e a segunda tarefa é escolher quatro dentre os nove restantes para serem membros do conselho fiscal. Na primeira tarefa temos 10 possibilidades e na segunda $C(9, 4) = 126$. Pelo Princípio Multiplicativo temos $10 \cdot 126 = 1260$ possibilidades. Logo a alternativa correta é a letra e).

# Probabilidade 2

## Para início de conversa...

Na unidade anterior observamos uma introdução ao estudo das probabilidades. Como exemplos, utilizamos o lançamento de moedas e de dados dentro de um espaço amostral, que é uma situação comum em nosso cotidiano.

Uma atividade bastante também muito corriqueira em nosso dias é o jogo de cartas.

**Figura 1:** Cartas de um baralho.

Observe que nos exemplos e atividades resolvidos na unidade anterior não havia dependência entre as escolhas, isto é, foram feitas escolhas sobre a moeda lançada, sobre o dado lançado e assim por diante. São escolhas simples, onde uma decisão não depende da outra. Por exemplo, podemos verificar a probabilidade de escolher uma carta de naipe vermelho em um baralho.

**Figura 2:** Naipes de um baralho.

Como são 52 cartas e metade delas tem o naipe vermelho, teremos uma probabilidade de cinquenta por cento.

Todavia, existem algumas situações onde os acontecimentos ficam dependentes uns dos outros. Nesta unidade iremos estudar estes casos, ou seja, quando existe mais de uma condição a ser avaliada ao determinarmos a probabilidade de um evento acontecer.

## Objetivos de aprendizagem

- Resolver problemas que envolvem probabilidade da união de eventos.
- Probabilidade de eventos complementares.
- Descrever o conceito de probabilidade Condicional.

# Seção 1
# Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes?

Vimos na aula passada como é interessante pensar sobre probabilidades utilizando moedas e dados, não é verdade? Então, vamos continuar utilizando estes objetos como referência para o nosso aprendizado, além de cartas e outros problemas que não envolvam jogos também.

## Probabilidade da união de dois eventos

Vamos resolver um problema que consiste em descobrir a probabilidade de, no lançamento de dois dados, ocorrer a soma dos números obtidos nas faces superiores ser igual a 6 **ou** ocorrer um múltiplo de 3 em cada uma das faces superiores.

Inicialmente poderíamos pensar que bastaria calcularmos a probabilidade de ocorrer a soma igual 6, que, como já vimos na aula anterior seria de $\frac{5}{36}$ e somar com a probabilidade de ocorrer um múltiplo de 3 em cada face superior, que seria de $\frac{4}{36}$ (visto que este evento: "ocorrer um múltiplo de 3 em cada face superior" têm 4 elementos: {(3,3), (3,6). (6,3). (6,6)} e o número de elementos do espaço amostral, como vimos na aula anterior é 36), encontrando $\frac{5}{36}+\frac{4}{36}=\frac{9}{36}$ .

Mas, quando refletimos melhor sobre essa resposta, podemos observar que não é a solução correta, visto que utilizamos o “elemento” (3,3) em ambos os eventos, pois a soma dos números é igual a 6 e também cada um dos números é um múltiplo de 3. Portanto, a resposta correta seria $\frac{8}{36}$.

Na seção 2, veremos de uma forma um pouco mais formal, o porquê desta retirada.

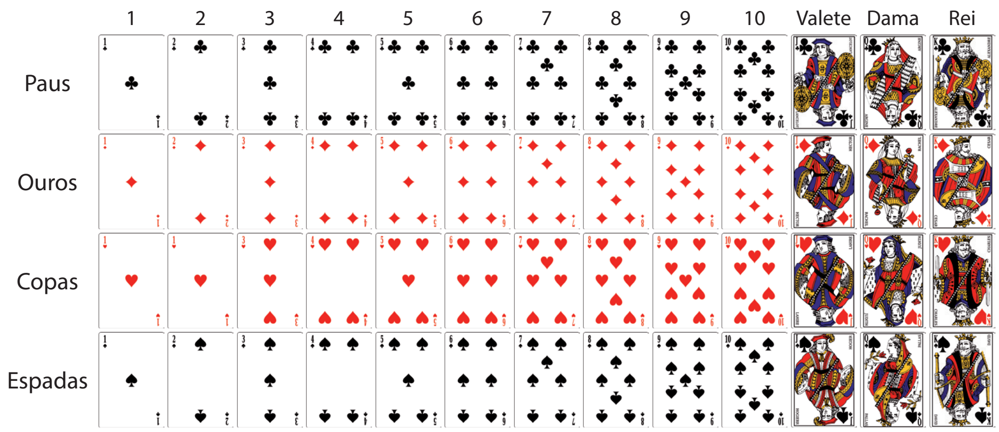
Saiba Mais

## CONHECENDO UM BARALHO

**Baralho francês de 52 cartas**

O principal baralho de 52 cartas em uso atualmente inclui 13 cartas de cada um dos quatro naipes franceses, paus (♣), ouros (♦), copas (♥) e espadas (♠), com cartas de figuras. Cada naipe inclui um ás, que descreve um único símbolo de seu naipe (muito grande, muitas vezes apenas o ás de espadas) um rei (representado pela letra K), uma rainha (representada pela letra Q), e um valete (representado pela letra J), cada um representado com um símbolo de seu naipe, com valores de dois a dez, com cada cartão mostrando o número de símbolos de seu naipe. Para além destas 52 cartas, baralhos comerciais geralmente incluem dois coringas. Em muitos jogos, os coringas não são usados. Os coringas são geralmente distinguidos pela cor.

**Baralho francês de 52 cartas**



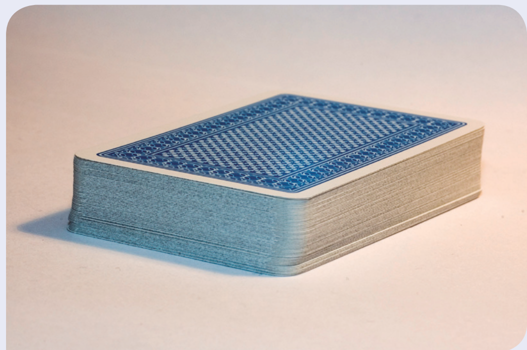

Este baralho é muito utilizado em problemas de probabilidades, assim como em diversos jogos, que podem utilizar probabilidade, como é o caso do poker.

Fonte: (retirado do site: http://pt.wikipedia.org/wiki/Baralho)

.

**Probabilidade e baralho.**

Atividade 1



De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de sair:

a. Um valete de paus?

b. Um quatro?

c. Uma carta de copas?

d. Um rei ou uma carta de espadas?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

## Probabilidade de eventos complementares

Já estudamos anteriormente que um evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral $\Omega$. Por exemplo, se em uma urna há 10 fichas numeradas de 1 a 10, o experimento "retirar um número menor que 5" é dado por $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Chamamos de evento complementar de E àquele que ocorrerá somente quando E não ocorrer, neste caso, "o número retirado ser maior ou igual a 5". Representaremos por $E^c = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Observemos ainda que $E \cup E^c = \Omega$ e que $E \cap E^c = \phi$

Uma propriedade interessante de um espaço amostral finito e equiprovável $\Omega$ é que: Se E é um evento de $\Omega$, e $E^c$ é o evento complementar de E, então $P(E^c) = 1 - P(E)$.

Podemos verificar a veracidade desta afirmação de maneira simples! Como $E \cup E^c = \Omega$ e $E \cap E^c = \phi$, podemos escrever:

$$n(E) + n(E^c) = n(\Omega)$$

Dividindo os dois membros dessa igualdade por $n(\Omega) \neq 0$, temos:

$$\frac{n(E)}{n(\Omega)} + \frac{n(E^c)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(E) + P(E^c) = 1\,.$$

Daí, chegamos na afirmação desejada.

Exemplo: De um baralho com 52 cartas, retiramos ao acaso, uma carta. Qual é a probabilidade de não sair um valete?

Como há 4 valetes no baralho, sabemos que a probabilidade de retirarmos um valete, ao acaso, é de 4/52. Portanto, a probabilidade de não ocorrer um valete (evento complementar) é 1 – 4/52 = 48/52, simplificando temos 12/13.

Atividade 2

### Retirando uma bola de uma urna

Uma urna contém 100 bolas numeradas de 1 a 100. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número menor ou igual a 99?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

## Probabilidade condicional

**Condicional**

1. Dependente de condição.
2. Que envolve condição, ou exprime circunstância de condição.
3. Gram Dizia-se do modo de verbo que enuncia o fato sob a dependência de uma condição; na N.G.B. desapareceu o modo condicional, que passou a denominar-se futuro do pretérito (simples e composto), enquadrado no modo indicativo.
4. Gram Qualificativo da conjunção subordinativa que liga exprimindo condição. sm 1 Condição. 2 Gram O modo condicional (V a acepção 3 do adj). sf Gram Conjunção subordinativa que introduz oração exprimindo uma hipótese ou condição necessária para que se realize ou não o que se expressa na principal: Se queres paz, defende-te. Eu não seria nada, caso você não existisse."

Fonte: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=condicional)

Do verbete acima, podemos concluir que a probabilidade condicional é aquela que envolve algum tipo de condição. Geralmente pretendemos encontrar a probabilidade de um evento ocorrer "*sabendo que*" ou "*dado que*" já ocorreu algo. Por exemplo:

1. Um dado é lançado e sabe-se que a face superior tem um número ímpar. Qual é a probabilidade de que o número obtido seja primo?

**Solução:**

Lembrando que um número é primo quando possui apenas dois divisores distintos, (1 e o próprio número) temos que, se chamarmos de G o evento: "obter um nº primo", teremos que G = {3,5}, visto que o 1 não é primo por possuir um só divisor.

Observe que, neste caso, o espaço amostral quer iremos utilizar não é Ω = {1,2,3,4,5,6}, pois já sabemos que na face superior tem um número ímpar, o que faz aumentar a nossa probabilidade, ou seja, utilizamos Ω'={1,3,5} como o "novo" espaço amostral e, com isso, temos como resultado: $P(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{2}{3}$ .

2. Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 meninas, já que a primeira criança que nasceu é menina?

Considerando H como menino e M como menina, podemos considerar o espaço amostral relativo as possibilidades de nascimento como Ω = {HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM}. Mas como já sabemos que a primeira criança que nasceu é menina, o espaço amostral considerado deve ficar restrito às possibilidades onde o primeiro nascimento é menina, ou seja, Ω': {MHH, MHM, MMH, MMM}.

Como queremos encontrar a probabilidade de que a família tenha 3 meninas, o evento K: " nascer três meninas" : {MMM}.

Daí, P(K) = ¼.

Novamente, ressalto aqui, que na próxima seção aprenderemos uma fórmula para calcular a probabilidade condicional, mas fique a vontade para utilizá-la quando desejar ou então resolva os problemas sem ela como fizemos nestes dois exemplos.

Atividade 3

**Lançando dados, novamente!**

Jogam-se dois dados. Qual é a probabilidade de se obter 3 no primeiro dado, se a soma dos resultados é 6?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

# Seção 2
## Vamos rever alguns problemas de uma maneira diferente?

Nesta seção veremos de uma forma um pouco diferente o que estudamos até agora nesta aula. Vamos lá!

### Sobre a probabilidade da união de dois eventos:

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral $\Omega$ finito, não vazio e equiprovável (se esqueceu o que é, volta na aula anterior, encontre e releia! Isso é sempre uma boa atividade). Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento $A \cup B$. (observem que o operador ***ou*** está relacionado a união $\cup$, assim como o operador ***e*** está relacionado com a intersecção $\cap$.)

Vimos na teoria dos conjuntos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Lembrando que como é um evento equiprovável, teremos $n(\Omega) \neq \phi$, assim podemos dividir toda a expressão acima por $n(\Omega)$, o que nos permite achar a equação

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

Sabemos que a probabilidade de um evento é determinada pela razão entre o número de possibilidades do evento e o espaço amostral. Assim teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Caso esta interseção $(A \cap B)$ seja vazia, teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Bem, definida esta equação, voltemos ao problema que já resolvemos na seção 1.1: descobrir a probabilidade de no lançamento de dois dados ocorrer a soma dos números obtidos nas faces superiores ser igual a 6 ou ocorrer um múltiplo de 3 em cada uma das faces superiores.

Seja A o evento "ocorrer a soma 6" e o evento B: "ocorrer um múltiplo de 3 em cada uma das faces". Queremos descobrir $P(A \cup B)$.

Temos que A:{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2) e (5,1)} >>> n(A)=5

B:{(3,3), (3,6), (6,3),(6,6)} >>>>>>>>>>n(B)=4

$A \cap B$: {(3,3)} >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>n($A \cap B$)=1

Como estamos trabalhando com o lançamento de dois dados, sabemos que o total de possibilidades é $n(\Omega)=36$.

Como, acabamos de ver que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, calculando as probabilidades temos que:

$P(A) = n(A)/ n(\Omega) = 5/36$

$P(B) = n(B)/ n(\Omega) = 4/36$

$P(A \cap B)= n(A \cap B)/ n(\Omega) = 1/36$

Daí, $P(A \cup B) = 5/36 + 4/36 - 1/36 = 8/36$, que é a resposta que encontramos anteriormente.

## Sobre a probabilidade condicional:

Definição: Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω, finito e não vazio. A probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, é indicada por P(A|B) e é dada por:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Ou seja, a probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B é igual ao número de elementos da interseção de A com B dividido pelo número de elementos de B.

Podemos chegar numa expressão equivalente a esta dividindo o numerador e o denominador do 2º membro por n(Ω):

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Voltemos ao problema "1) Um dado é lançado e sabe-se que a face superior tem um número ímpar. Qual é a probabilidade de que o número obtido seja primo?" e resolvamos com a fórmula obtida.

Chamando de evento A: "o número obtido deve ser primo" e o evento B: "o número da face superior é impar". Queremos encontrar P(A|B), visto que queremos encontrar a probabilidade do número ser primo sabendo que o nº da face superior é impar, correto? Sim! Então vamos continuar...

Ω={1,2,3,4,5,6} >>>> n(Ω)=6

A={2,3,5}

B={1,3,5} >>>>>>>>>n(B)=3

$A \cap B$={3,5}>>>>>>>>n($A \cap B$)=2

Daí, temos que:

$P(A \cap B) = n(A \cap B) / n(\Omega) = 2/6$

$P(B) = n(B) / n(\Omega) = 3/6$

Portanto, $P(A|B) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{6}.\frac{6}{3} = \frac{2}{3}$

Que foi a mesma resposta que encontramos fazendo sem a fórmula.

**Sobre o sexo dos filhos...**

Atividade 4

Refaça a atividade: "Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 meninas, já que a primeira criança que nasceu é menina?", utilizando a fórmula.

Anote suas respostas em seu caderno

## Conclusão

Como observamos, algumas probabilidades são encontradas de forma simples, enquanto em outras há a presença da condicionalidade. Nestes casos é preciso verificar cada situação a parte.

Podemos utilizar as fórmulas definidas nesta unidade, todavia a resolução pode ser feita de maneira analítica, sem a preocupação em decorar estas equações pré determinadas.

## Resumo

- A soma das probabilidades de um evento com seu complementar é igual a um. $P(E) + P(E^c) = 1$
- Na probabilidade da união de dois eventos temos:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Caso a interseção de A e B seja vazia, teremos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Na probabilidade condicional temos $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$.

# Veja ainda

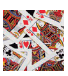
No site http://www.youtube.com/watch?v=YP9ogKGvk4w é possível acompanhar uma aula de probabilidade condicional com a resolução de exercícios.

## Referências

### Livros


- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática Ciência e Aplicações.* 6ª edição, vol2. São Paulo, 2010. 320 páginas.
- MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira. *Análise Combinatória e Probabilidade*, 2ª edição, Rio de Janeiro, 2001.


### Imagens

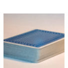



- http://t1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSqxRAUe0SL5PCvqGPBp_8w2bA1oGH0TzKytxT2j9SKOYommPFn

- http://t1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSkURlN_uKjmBJZqc89g9hsEdmJ8xHh-CJC8Sv0LqsNGGdA549g

- http://www.sxc.hu/photo/1256359

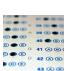
- http://pt.wikipedia.org/wiki/Baralho



- http://www.sxc.hu/photo/739150

- http://www.sxc.hu/photo/799819

- http://www.sxc.hu/photo/1394373



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

## Atividade 1

Observem que n(Ω) = 52, visto que é o nº total de cartas de um baralho. Daí:

a. Sendo A o evento: "sair um valete de paus", teríamos n(A)=1, visto que só há um valete de paus e, portanto, P(A) = $\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{52} \cong 1{,}9\%$

b. Sendo B o evento: "sair um quatro", teríamos n(B)=4, visto que temos 4 naipes e um quatro de cada naipe. Portanto $\frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{52} \cong 7{,}6\%$ .

c. Sendo C o evento: "sair uma carta de copas", teríamos n(C)=13, visto que temos 13 cartas de cada um dos 4 naipes e, portanto, $\frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{13}{52} = 25\%$ .

Sabemos que a probabilidade de sair um rei é a mesma de ocorrer um quatro, ou seja, 4/52, e a probabilidade de sair uma carta de espadas é a mesma de sair uma carta de copas, ou seja, é de, 13/52. Somando essas duas probabilidades temos, 17/52, mas temos que retirar a probabilidade de sair um rei de espadas, pois o contamos duas vezes, ou seja, temos que retirar 1/52, encontrando como resposta 16/52.

## Atividade 2

Se considerarmos o evento L: "sortear uma bola com número menor ou igual a 99", vemos claramente que é mais simples encontrar o seu evento complementar $L^c$: "sortear uma bola com número maior que 99", visto que n($L^c$)=1, pois só temos o 100 maior que 99 na urna. Como n(Ω)=100. Temos que P(L) = 1 – P($L^c$), ou seja P(L) = 1 – 1/100 = 99/100 .

## Atividade 3

Jogam-se dois dados. Qual é a probabilidade de se obter 3 no primeiro dado, se a soma dos resultados é 6?

Sabemos que a soma dos resultados é igual a 6. Portanto nosso Ω'={(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)} . Bem, nosso evento F: "obter 3 no primeiro resultado": {(3,3)} e portanto a probabilidade procurada é P(F)= n(F)/n(Ω) = 1/5.

Respostas das Atividades

## Atividade 4

Temos que $\Omega$={HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM} , $n(\Omega) = 8$

Chamando de A: " família ter 3 meninas" e B: " a primeira criança que nasceu é menina", temos:

A={MMM}

B={MHH, MHM, MMH, MMM}>>>>>n(B)=4

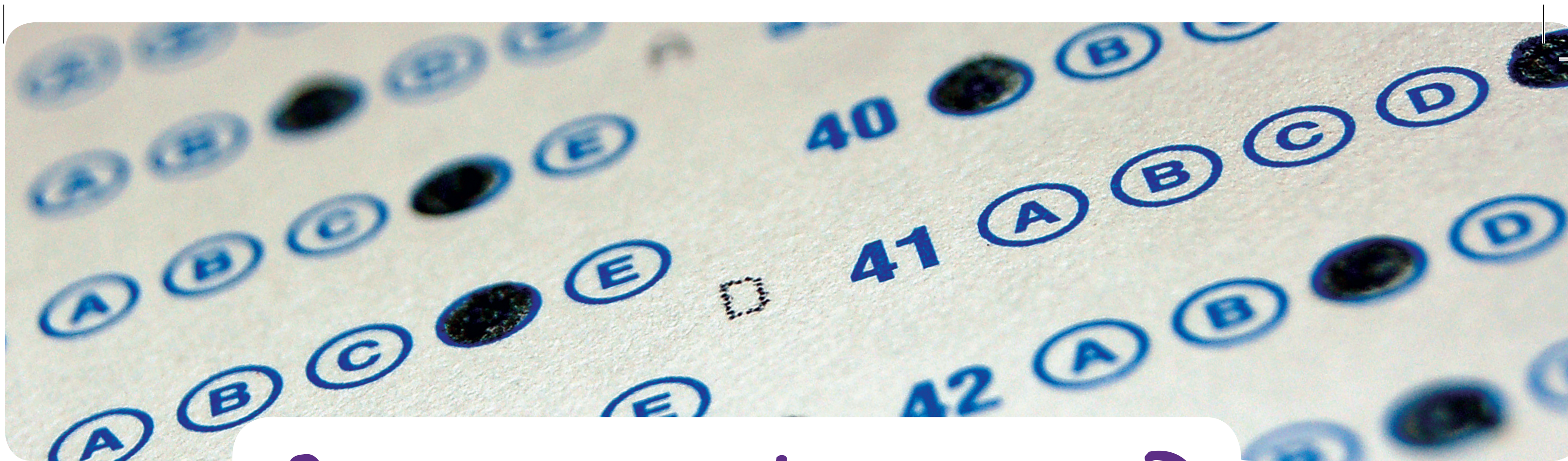
$A \cap B$={MMM}>>>>>>>>>>>>>>>>>>n($A \cap B$)=1

Daí, temos que:

$P(A \cap B) = n(A \cap B) \,/\, n(\Omega) = 1/8$

$P(B) = n(B) \,/\, n(\Omega) = 4/8$

Portanto, $P(A|B) = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{8}.\frac{8}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$




# O que perguntam por aí?

**(ENEM -2012)**

José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a. Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b. José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c. José e Antônio, há que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d. José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades parar formar a soma de Paulo.

e. Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

**Resposta:** Letra D.

**Comentário:**

Vimos na aula passada, o quadro do lançamento de dois dados:

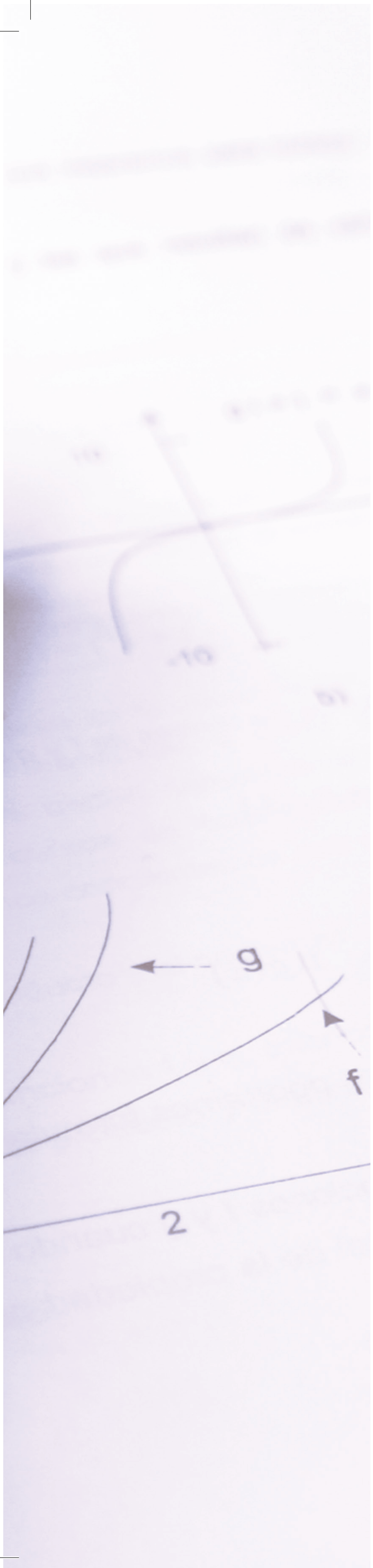
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Que fazendo a soma dos números que aparecem na face superior, gerou o quadro:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Onde podemos observar, facilmente, que a soma 7 aparece 6 vezes, a soma 4 aparece apenas 3 vezes e a soma 8 aparece 5 vezes. Portanto quem tem a maior possibilidade de acertar é José, pois a soma 7 é a que aparece maior número de vezes no nosso quadro da soma.



# Estatística: medidas de centralidade e de dispersão

## Para início de conversa...

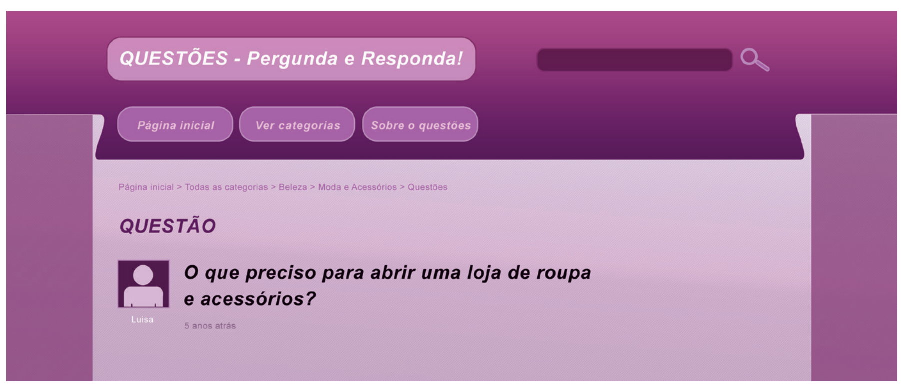



**Figura 1:** Site de perguntas e respostas.

Você já viu esses sites de perguntas e respostas? Em geral, as pessoas colocam suas dúvidas e aguardam as respostas de outras pessoas. Abaixo, podemos ver uma resposta dada à pergunta da Luísa.

**Zeca:** "Pesquisar o ponto comercial. Investigue todos os concorrentes da região. Investigue também os negócios que funcionaram neste mesmo ponto comercial antes de você se instalar, para ter uma visão mais ampla das suas possiblidades.

EX: Eu tenho uma loja alugada, o primeiro inquilino era um restaurante que "quebrou" porque o ponto não é para esse tipo de negócio. O segundo inquilino, instalou adivinha o que? Um restaurante... Não deu outra, "quebrou" igual o primeiro. Se tivesse pesquisado, provavelmente não teria quebrado.Enfim, isso é só uma das dicas que posso te dar."

A resposta dada por Zeca, apesar de simples, mostra uma preocupação muito importante que Luísa precisa ter: fazer o que chamamos de *Pesquisa de Mercado*. É claro que Luísa precisa ainda de muitas outras coisas como toda a parte de documentação, ***capital de giro***, entre outros...

**Capital de Giro**

Capital de giro é o capital necessário para financiar a continuidade das operações da empresa, como recursos para financiamento aos clientes (nas vendas a prazo), manter estoques e pagamento aos fornecedores, pagamento de impostos, salários e demais custos e despesas operacionais.

Diante desta opinião, Luísa preparou e realizou uma pesquisa com 200 pessoas, sendo 100 homens e 100 mulheres. Que tal observarmos e analisarmos os resultados obtidos? É o que faremos nesta unidade. Vamos aprender a analisar os dados de uma pesquisa através do cálculo de médias, medianas, modas, entre outros. A partir dos resultados dessa análise, poderemos ajudar Luísa a tomar as decisões mais acertadas em relação à loja. Vocês vão curtir, podem ter certeza! Vamos lá!

## Objetivos de aprendizagem

- Aprofundar o conhecimento sobre as medidas de tendência central (média, mediana e moda).
- Resolver problemas envolvendo medidas de tendência central
- Conhecer os conceitos de desvio padrão e de coeficiente de variação
- Resolver problemas envolvendo cálculo de desvio-padrão e coeficiente de variação

# Seção 1
# Analisando os dados de uma pesquisa: Medidas de tendência central

Na unidade anterior, vimos como podemos efetuar os cálculos para determinarmos o valor da média, moda e mediana. Nesta unidade, vamos aprender a interpretar esses resultados, verificando como eles podem nos auxiliar nas tomadas de decisão.

## Tomando decisões – média, moda e mediana.

Abrir uma empresa não é uma tarefa simples. Mesmo no caso de uma empresa pequena, como o restaurante de Luísa, é preciso pesquisar muito. É necessário, por exemplo, verificar se o ponto é bom, ou seja, se na vizinhança há muita concorrência com outras lojas do mesmo ramo, se há um número adequado de pessoas circulando no local, etc. E essa é a primeira de muitas pesquisas! Contar o mínimo possível com a sorte é muito importante para o sucesso do seu negócio.

Pensando nisso e diante da resposta dada por Zeca, Luísa resolveu iniciar suas pesquisas, entrevistando 100 homens e 100 mulheres que circulavam nas proximidades do local onde planejava abrir a loja. A primeira pergunta de sua pesquisa foi sobre o que as pessoas geralmente procuram comprar em uma loja de roupas. As respostas foram registradas na tabela seguinte. Observem:

**Tabela 1: Divisão dos entrevistados por gênero e por peça de roupa que costumam procurar em uma loja.**

| Que tipo de roupa costuma procurar em uma loja? | | |
|---|---|---|
| | Homens | Mulheres |
| Peças íntimas | 9 | 16 |
| Blusas e camisetas | 16 | 35 |
| Bermudas | 34 | 6 |
| Calças | 26 | 28 |
| Vestidos | 1 | 15 |
| Ternos | 14 | 0 |

**Atividade 1**

Vamos relembrar uma definição da unidade anterior: moda é a resposta que mais apareceu na pesquisa. Levando em consideração as respostas dadas à primeira pergunta de Luísa, determine a moda:

a. Entre os homens e entre as mulheres, separadamente.

b. Com relação ao total de respostas (independente do sexo do entrevistado).

c. Explique porque, nesse caso, não podemos calcular as outras medidas de tendência central estudadas na unidade anterior (média e mediana).

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Muito bem, pessoal. A primeira informação que pudemos tirar da pesquisa feita por Luísa é que os homens têm, em geral, uma preferência maior por bermudas enquanto as mulheres preferem blusas e camisetas. Contudo, ter um departamento exclusivo para calças é muito importante, pois no âmbito geral das pesquisas, a moda indicou que as mesmas são o item de maior preferência entre as pessoas que circulam no entorno do local escolhido para a loja.

A segunda pergunta feita por Luísa era sobre o valor que as pessoas, geralmente, se dispunham a pagar por uma peça de roupa. Vejam as respostas na tabela a seguir:

**Tabela 2: Divisão dos entrevistados por gênero e por valor que estão dispostos a pagar por uma peça de roupa.**

| Quanto pagariam por uma peça de roupas? | | |
|---|---|---|
| | Homens | Mulheres |
| R$ 10,00 | 8 | 7 |
| R$ 30,00 | 25 | 13 |
| R$ 50,00 | 30 | 9 |
| R$ 100,00 | 29 | 10 |
| R$ 150,00 | 7 | 29 |
| R$ 200,00 | 1 | 31 |
| R$ 3.000,00 | 0 | 1 |

Nessa tabela, vemos que, entre os homens entrevistados, 8 pagariam R$ 10,00 por uma peça de roupa enquanto apenas 1 pagaria R$ 200,00 pela mesma peça. Já entre as mulheres, 13 delas pagariam R$ 30,00 por uma peça de roupa e 31 pagariam R$ 200,00 pela mesma peça. Como essas informações ajudam Luísa a determinar o preço médio de uma peça de roupa?

É comum calcularmos simplesmente a média aritmética entre os valores apresentados na primeira coluna: (10+30+50+100+150+200+3000)/7. Contudo, a quantidade de homens que pagariam R$50,00 por uma peça de roupa é maior que a quantidade de homens que pagariam R$10,00 pela mesma peça. Notamos que, entre homens e mulheres, os pesos atribuídos a cada preço são diferentes.

De acordo com a tabela, levando-se em consideração apenas os homens, 8 disseram que pagam 10 reais por uma peça de roupa, 25 disseram que pagam 30 reais, 30 disseram que pagam 50 reais, 29 disseram que pagam 100 reais, 7 disseram que pagam 150 reais, 1 homem disse que paga 200 reais e ninguém disse que paga 3000 reais. Dessa forma, teremos:

8 homens disseram que pagam 10 reais. Logo, fazemos: 8 x 10 = 80

25 homens disseram que pagam 30 reais. Logo, fazemos: 25 x 30 = 750

30 homens disseram que pagam 50 reais. Logo, fazemos: 30 x 50 = 1500

29 homens disseram que pagam 100 reais. Logo, fazemos: 29 x 100 = 2900

7 homens disseram que pagam 150 reais. Logo, fazemos: 7 x 150 = 1050

1 homem disse que paga 200 reais. Logo, fazemos: 1 x 200 = 200

0 homem disse que paga 3000 reais. Logo, fazemos: 0 x 3000 = 0

Somamos todas as parcelas e dividimos pelo total de participantes homens da pesquisa.

$$\frac{80 + 750 + 1500 + 2900 + 1050 + 200 + 0}{100} = \frac{6480}{100} = 64,80$$

Com isso, vemos que, em média, os homens aceitariam gastar R$ 64,80. Esse valor coincide com a média aritmética dos valores envolvidos na pesquisa? Como foram atribuídos pesos diferentes aos valores da primeira coluna da tabela 2, calculamos a **média ponderada** desses valores.

### Média ponderada

Chamamos de média ponderada ao cálculo da média de valores onde cada um possui determinado "peso". Veja exemplos em: http://www.colegioweb.com.br/matematica/media-aritmetica-ponderada.html

Atividade 2

## Amostra x População

Calcule o valor médio pago pelas mulheres que responderam a esta pesquisa. Lembre-se que se trata de uma média ponderada.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Para refletir um pouco: com base nesses resultados poderíamos afirmar que as mulheres gastam muito mais dinheiro com roupas do que os homens? Será que um resultado obtido em um grupo de 100 mulheres reflete a realidade desta situação?

A pesquisa mostrou que O que podemos afirmar é que as mulheres que participaram da pesquisa gastam, em média, mais que os homens que participaram da pesquisa. Isso deixa claro que é perfeitamente possível encontrar vários homens que se disponham a gastar mais dinheiro do que várias mulheres.

Existe ainda uma coisa nesta amostra que merece comentários. Veja o que Luísa nos falou: *"Eu até agora não sei se a pessoa que respondeu que gastaria até 3.000 reais estava brincando ou não."*

Brincando ou não, essa única pessoa influenciou bastante no resultado da média, pois os 3000 aumentaram o valor da média. Calculem a média ponderada do valor pago pelas 99 mulheres que pagariam até R$200,00 por uma peça de roupa e comparem o resultado com aquele obtido na Atividade 1.

Atividade 3

A mediana é uma medida de tendência central que separa um conjunto de dados ordenados em dois conjuntos com o mesmo número de elementos.

Em um conjunto com 7 dados ordenados, por exemplo, a mediana é o 4º termo, pois este determina dois conjuntos com o mesmo número de elementos: três maiores e três menores.

Agora, se o conjunto possui 10 dados ordenados, a mediada é a média aritmética entre o 5º e o 6º elementos.

**Atividade 3**

As informações obtidas na pesquisa foram colocadas em ordem crescente, como podemos ver abaixo.

| Homens | | | | | | | | | | | Mulheres | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | | | | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | | | |
| | | | | | | | | | | | 30 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 200 | 200 |
| | | | | | | | | | | | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| | | | | | | | | | | | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| | | | | | | | | | 200 | | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | |

a. Determine a mediana das amostras referente aos homens e referente às mulheres.

b. Determine a mediana referente a todas as amostras obtidas na pesquisa. (Colocamos aqui a tabela com os valores em ordem crescente devido ao grande número de variáveis presentes nesta pesquisa.)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | |

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Excelente, pessoal! Pelo que estamos percebendo, os valores médios que os homens em geral – com destaque para a expressão "em geral" – se propõem a pagar por uma peça de roupas fica entre 50 reais (mediana) e 64,80 (média). Isto é, se Luísa quiser vender roupas masculinas, deve possuir peças cujos preços fiquem por essa margem. Em relação às mulheres, os valores médios giram em torno de 124,60 (média) a 150 reais (mediana).

Resumindo as análises feitas com os dados obtidos por Luísa, vemos que as mulheres procuram bastante por blusas e camisetas e que chegam a pagar mais de 120 reais por uma peça de roupa. Já os homens gostam mais das bermudas, mas só chegam a pagar entre 50 reais e 65 reais por uma peça de roupa. Entretanto, em sua loja também deve vender calças, pois homens e mulheres procuram bastante, conforme a pesquisa.

**Figura 4:** Calça jeans com etiqueta de preço.

Luísa já sabe com que valor preencher as etiquetas de preço, como as da **Figura 4**. Também conseguimos perceber o quanto esse tipo de pesquisa e as análises desses dados são importantes para uma tomada de decisão.

Mas de que forma Luísa fez essa pesquisa? Com quem ela falou? Será que abordou pessoas aleatoriamente ou fez algum tipo de seleção?

Essas e outras perguntas surgem quando queremos verificar se a amostra que utilizamos em nossa pesquisa é confiável ou não. Esta confiabilidade está associada ao grau de certeza sobre nossas análises.

Certamente, vocês já devem ter visto algumas pesquisas que mostram uma margem de erro – aquelas sobre intenção de votos nas eleições, por exemplo. Vejam na Figura 5. O primeiro candidato, por exemplo, conta, em 04/10, com 47% das intenções de voto dos pesquisados, com uma margem de erro de 4% para mais ou para menos. Isso quer dizer que ele conta com um valor entre 43% e 51% das intenções de voto do eleitorado total.

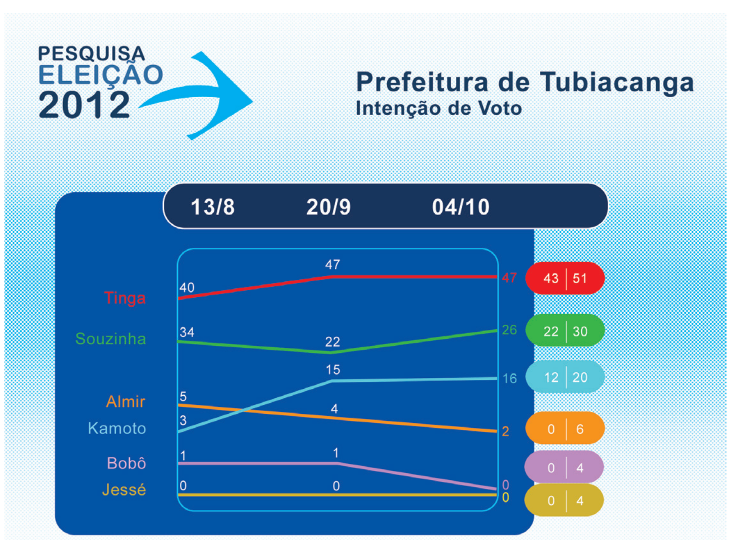



**Figura 5:** Pesquisa de intenção de voto, com margem de erro explicitada.

Então, essa margem de erro é calculada e dá um pouco mais de segurança sobre os dados apresentados, pois não temos como garantir com absoluta certeza de que as pessoas entrevistadas refletem a realidade de toda a população.

## Analisando os dados de uma pesquisa: Desvio-padrão

Até agora, calculamos a média dos valores que as pessoas se propõem a pagar por uma peça de roupa. Mas, se duas pessoas forem comer uma macarronada e apenas uma delas comer todo o macarrão, diremos que, em média, cada uma comeu a metade da macarronada. Outro exemplo interessante é o de um grupo de 30 pessoas cuja média de idade é de 20 anos. Apenas com essa informação, tanto poderemos ter um grupo com 30 pessoas de 20 anos – uma turma do EJA, por exemplo – ou um grupo com 15 pessoas de 5 anos e 15 pessoas de 35 anos – pais ou mães com seus filhos numa reunião da escola, por exemplo. Veja uma situação semelhante na **Figura 6**.

**Figura 6:** À esquerda, gêmeos; à direita, pai e filho.

Assim, percebemos que, em algumas situações, a média aritmética não nos permite tirar conclusões muito confiáveis, não é mesmo? Para conhecermos melhor o grupo(ou as variáveis) sobre o qual estamos trabalhando, a fim de fazer uma investigação mais detalhada acerca dos valores obtidos numa pesquisa, podemos utilizar o que chamamos de "grau de dispersão" dessas variáveis. Vamos chamar isso de desvio-padrão.

O desvio-padrão é utilizado para determinar o grau de dispersão das variáveis em relação à média (ou o termo central). É dado pela expressão: $D_p = \sqrt{\dfrac{(x_1 - Média)^2 + (x_2 - Média)^2 + ... + (x_n - Média)^2}{n}}$, em que $x_i$ é o valor de cada elemento e a diferença ($x_i$ – Média) é o valor do desvio em relação à média.

Por exemplo, para calcular o desvio-padrão das idades em um grupo de 5 pessoas cujas idades são 5, 7, 12, 15 e 6 procedemos do seguinte modo:

1. Calculamos a Média Aritmética das idades: $(5 + 7 + 12 + 15 + 6) : 5 \Rightarrow 45 : 5 = 9$

2. Calculamos os Desvios em relação à média:

   $5 - 9 = -4$

   $7 - 9 = -2$

   $12 - 9 = 3$

   $15 - 9 = 6$

   $6 - 9 = -3$

   Observe uma propriedade interessante: a soma desses desvios é sempre igual a zero.

   De fato, $(-4) + (-2) + 3 + 6 + (-3) = 0$

3. Calculamos a média entre os quadrados desses desvios: $(16 + 4 + 9 + 36 + 9) : 5 = 14{,}8$

4. Agora é só calcular a raiz quadrada desse valor, obtendo aproximadamente 3,85.

Devemos observar que, quanto menor for o valor do desvio-padrão, mais homogênea é a distribuição dos dados considerados,

Faça como exemplo o desvio-padrão entre as idades de um grupo com cinco pessoas, cujas idades são 8, 9, 8, 10 e 9 anos.

# Seção 2
# Revendo conceitos trabalhados

## Medidas de tendência central

Ao longo desta unidade, discutimos sobre o caso de Luísa, que precisou realizar e interpretar as informações contidas em uma pesquisa. Para isso, efetuamos os cálculos da média, moda, mediana, desvio-padrão e coeficiente de variação.

Vimos também, por intermédio destes cálculos, que o valor médio que os homens, por exemplo, se propõem a pagar por uma peça de roupa fica entre 50 e 65 reais, aproximadamente. Vamos ver como podemos usar esses cálculos em situações diferentes da apresentada anteriormente?

**Importante**

Relembrando: o cálculo de uma média aritmética é dado pela expressão abaixo:

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Já uma média ponderada leva em consideração a quantidade de vezes que uma variável aparece no cálculo. Ou, em outras palavras, o peso dado a cada uma das variáveis.

$$M_p = \frac{a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + ... + n \cdot x_n}{a + b + c + ... + n}$$

Vamos começar resolvendo uma juntos. Prontos? Lá vai!

Uma seleção para um emprego em uma grande empresa é constituído de 3 etapas e mais uma entrevista. Cada candidato é avaliado nas três etapas iniciais. Caso consiga nota geral maior ou igual a 7, o candidato é classificado para a etapa final, a entrevista. Vale lembrar ainda que todas as etapas geram uma nota de 0 a 10 e que a 1ª etapa tem peso 1, a 2ª tem peso 2 e a 3ª etapa tem peso 3. Celso obteve 8,0 na primeira etapa, 5,0 na segunda etapa e 7,5 na terceira etapa. A pergunta é: ele foi classificado para a entrevista?

Bom, do enunciado, está claro que o cálculo que gera a nota de Celso é o de uma média ponderada, justamente porque cada etapa tem um peso diferente. Isto posto, vamos às contas:

$$\frac{1 \times 8,0 + 2 \times 5,0 + 3 \times 7,5}{1 + 2 + 3} = \frac{40,5}{6} = 6,75$$

Infelizmente, Celso não foi aprovado para a segunda etapa da seleção.

Que tal fazerem uma agora por conta própria?

**Atividade 4**

A produção diária de parafusos da Indústria Catatau Ltda. é de 20 lotes, contendo cada um 100.000 unidades. Ao escolher uma amostra de oito lotes, o controle de qualidade verificou o número seguinte de parafusos com defeitos em cada lote:

| Amostra | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Defeitos | 300 | 550 | 480 | 980 | 1050 | 350 | 450 | 870 |

Atividade 4

Pede-se projetar o número médio de parafusos com defeitos em um dia de trabalho.

(Dica: calcule o número médio de parafusos com defeito em cada lote e expanda o resultado para os 20 lotes diários)

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Atividade 5

Uma pesquisa realizada por um famoso Instituto Estatístico sobre o número de portadores de deficiência no Brasil revela os seguintes dados, exibidos na tabela abaixo:

| Tipos de deficiência | Número de portadores |
|---|---|
| Cegueira | 145852 |
| Surdez | 173582 |
| Hemiplegia | 208565 |
| Paraplegia | 201617 |
| Tetraplegia | 46989 |
| Falta de membro (s) ou parte dele (s) | 145181 |
| Mental | 658915 |

Determine a moda desta distribuição apresentada.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

É isso aí, pessoal! Estamos conseguindo constatar que o uso dessas medidas de tendência central são muito importantes em diversas situações.

# Resumo

- Utilizamos a moda com variáveis qualitativas a fim de determinarmos a mais comum.
- Definimos média como a razão entre o somatório e o número total de variáveis existentes em uma amostra.
- O cálculo de uma média aritmética é dado pela expressão $M_a = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$
- O cálculo de uma média ponderada leva em consideração a quantidade de vezes que uma variável aparece no cálculo (os pesos de cada uma) e é dado pela expressão: $M_p = \dfrac{a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + ... + n \cdot x_n}{a + b + c + ... + n}$.
- Como foi citado, o desvio-padrão é utilizado para determinar o grau de dispersão das variáveis em relação à média (ou o termo central). É dado pela expressão: $D_p = \sqrt{\dfrac{(x_1 - Média)^2 + (x_2 - Média)^2 + ... + (x_n - Média)^2}{n}}$, em que $x_i$ é o valor de cada elemento e a diferença ($x_i$ – Média) é o valor do desvio em relação à média.

# Veja ainda

Se você quiser saber mais sobre os conceitos de média e desvio-padrão associados ao futebol, acesse o link abaixo do vídeo "Atleticano x Rio-Grandense". Neste vídeo, podemos verificar como podemos introduzir os elementos da análise estatística, além de trabalhar com os gráficos para analisar as tendências das amostras. Vale a pena conferir!

- http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1052

## Referências

### Livros

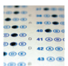

- Morettin,L.G. (2000), *Estatística Básica*, Volume 2 (Inferência), Makron Books, São Paulo.
- Bussab,W., Morettin,P. (2005), *Estatística Básica*, Editora Saraiva, São Paulo.


### Imagens

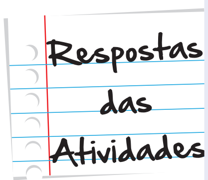

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1210461

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=328371



- http://www.sxc.hu/photo/517386




## Atividade 1

Dentre as respostas dadas à primeira pergunta de Luísa, determine a moda:a) Entre os homens: bermudas: 34% dos votos.

a. Entre as mulheres: blusas e camisetas: 35% dos votos
b. No total dos entrevistados, o item calças foi o mais escolhido com 54 dos 200 votos, ou seja, 27% dos entrevistados.
c. Como não se tratam de variáveis quantitativas, não é possível ordenar os valores associados a elas e obter a mediana e, também, não é possível obter a média desses valores.

## Atividade 2

De acordo com a tabela:

*7 mulheres disseram que pagam até 10 reais. Logo, fazemos: 7 x 10 = 70*

*13 mulheres disseram que pagam até 30 reais. Logo, fazemos: 13 x 30 = 390*

*9 mulheres disseram que pagam até 50 reais. Logo, fazemos: 9 x 50 = 450*

*10 mulheres disseram que pagam até 100 reais. Logo, fazemos: 10 x 100 = 1000*

*29 mulheres disseram que pagam até 150 reais. Logo, fazemos: 29 x 150 = 4350*

*31 mulheres disseram que pagam até 200 reais. Logo, fazemos: 31 x 200 = 6200*

*1 mulher disse que paga até 1000 reais. Logo, fazemos: 1 x 3000 = 3000*

Assim, somamos todas as parcelas e dividimos pelo total de participantes mulheres da pesquisa.

$$\frac{70+390+450+1000+4350+6200+3000}{100}=\frac{15460}{100}=154,60$$

Respostas das Atividades

## Atividade 3

| Homens | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 200 |

| Mulheres | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | | | |
| 30 | 30 | 30 | | | | | | | |
| 50 | 50 | | | | | | | | |
| 100 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 200 | 200 |
| 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | |

a. A mediana referente à pesquisa com os mulheres é 50 reais. Afinal, a mediana é o valor que ocupa a posição central em uma amostra numérica disposta em ordem crescente. Assim, $100 \div 2 = 50$. Ou seja, a mediana ocupa a posição 50 na tabela acima que é representada pelo valor 50 reais. A mediana referente à pesquisa com as mulheres é 150 reais. Afinal, a mediana é o valor que ocupa a posição central em uma amostra numérica disposta em ordem crescente. Assim, $100 \div 2 = 50$. Ou seja, a mediana ocupa a posição 50 na tabela acima que é representada pelo valor 150 reais.

b. Considerando os 200 valores pertencentes à pesquisa, independentemente do sexo do participante, a mediana ocupa a posição de número $200 \div 2 = 100$. Coincidentemente, o valor que ocupa a 100ª posição é 100 reais. Logo, existe uma tendência em gastar 100 reais numa loja de roupas.

## Atividade 4

| Amostra | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Defeitos | 300 | 550 | 480 | 980 | 1050 | 350 | 450 | 870 |

A média de parafusos com defeito por lote é de:

$$M = \frac{300 + 550 + 480 + 980 + 1050 + 350 + 450 + 870}{8} = 628{,}75$$

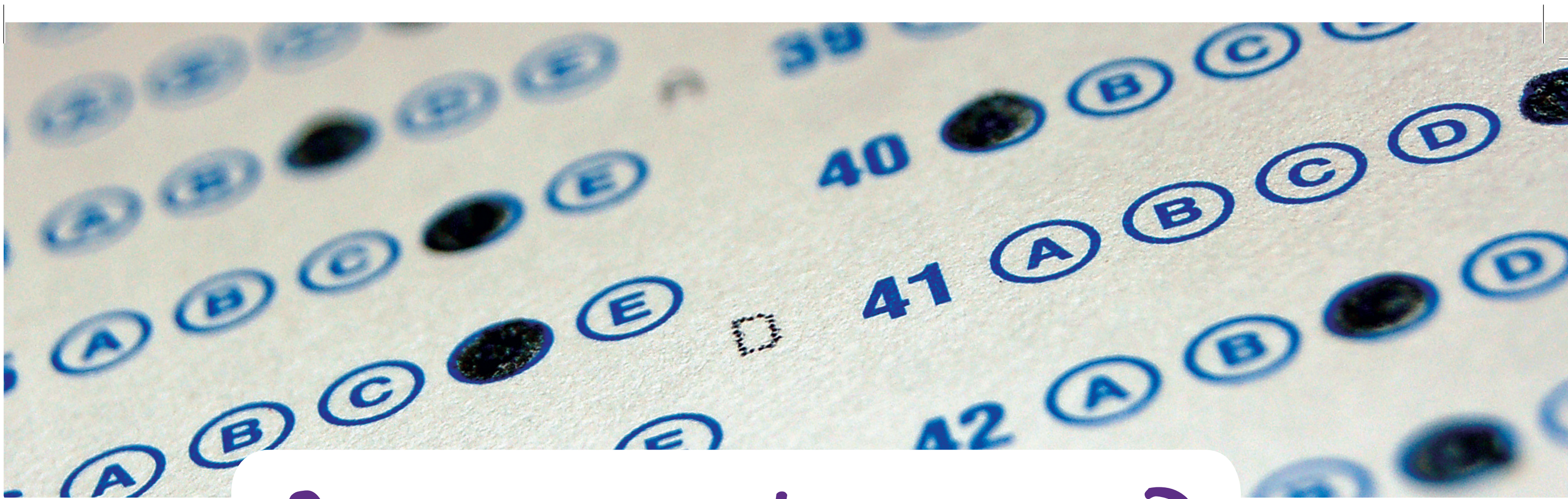
Para os 20 lotes de produção diária, temos:

$628{,}75 \times 20 = 12.575$ parafusos diariamente.

Respostas das Atividades

### Atividade 5

A moda é a variável que mais aparece na pesquisa. Neste caso, a moda é Deficiência Mental com 658.915 portadores no Brasil.



# O que perguntam por aí?

**(ENEM 2009)**

Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

| Mês | Cotação (R$) | Ano |
|---|---|---|
| Outubro | 83,00 | 2007 |
| Novembro | 73,10 | 2007 |
| Dezembro | 81,60 | 2007 |
| Janeiro | 82,00 | 2008 |
| Fevereiro | 85,30 | 2008 |
| Março | 84,00 | 2008 |
| Abril | 84,60 | 2008 |

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a:

a. R$ 73,10.

b. R$ 81,50.

c. R$ 82,00.

d. R$ 83,00.

e. R$ 85,30.

Então, os valores são 83,00; 73,10; 81,60; 82,00; 85,30; 84,00 e 84,60. Colocados em ordem crescente, teremos

(73,10; 81,60; 82,00; 83,00; 84,00; 84,60; 85,30). Como temos um número ímpar de valores, o valor intermediário – é justamente o quarto valor: 83,00. Assim, nossa mediana é R$ 83,00, letra D.

## (ENEM 2010)

Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso:

| | Matemática | Português | Conhecimento Gerais | Média | Mediana | Desvio Padrão |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Marco | 14 | 15 | 16 | 15 | 15 | 0,32 |
| Paulo | 8 | 19 | 18 | 15 | 18 | 4,97 |

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é:

a. Marco, pois a média e a mediana são iguais.
b. Marco, pois obteve menor desvio padrão.
c. Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
d. Paulo, pois obteve maior mediana.
e. Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

Vocês lembram que o desvio padrão mede a distância entre os valores e a média? Muito bem! Então, podemos dizer que, quanto maior o desvio padrão, maior a distância entre os dados e a média. E – eis a parte central da questão! – quanto maior o afastamento da média, maior a irregularidade. Veja que as notas de Marco estão bem juntas e variam muito pouco: 14, 15 e 16. Já as de Paulo oscilam muito: a menor é 9, a maior é 19 e ainda tem um 18 ali por perto. Logo, o desvio padrão das notas de Paulo deve ser (e veja que o cálculo confirma isso) bem maior que o desvio padrão das notas de Marco. Como o critério de desempate é a regularidade, o mais bem classificado no concurso é Marco, justamente porque seu conjunto de notas têm o menor desvio padrão. Letra B, portanto.

# Polinômios e equações algébricas 2

## Para início de conversa...

Conforme vimos na unidade Geometria Espacial: pirâmides e cones, que tratava das pirâmides, os papiros encontrados por arqueólogos no início do século XX revelaram que há aproximadamente 4.000 anos os egípcios conheciam e tinham vários métodos para a solução de diversos problemas que, hoje, são modelados por equações algébricas.

**Figura 1:** Cyperius papyrus, planta a partir da qual se faz e cujo nome deu origem ao termo papiro.

Resolver uma equação algébrica é determinar valores para a sua incógnita de modo que se obtenha uma sentença matemática verdadeira. Exemplificando, 3 é solução da equação $2x - 6 = 0$ pois $2.3 - 6 = 0$ é uma sentença matemática verdadeira, mas 5 não é solução da mesma equação pois $2.5 - 6 = 0$ é uma sentença falsa.

Se tivermos uma equação P(x) = ax + b e um determinado valor - digamos, $x_1$ - for o zero ou a solução da equação, podemos escrever que $P(x_1) = a\,x_1 + b = 0$.

Ao procurar os zeros de um polinômio do tipo

$p(x) = a_n\,x^n + a_{(n-1)}\,x^{(n-1)} + ... + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ encontra-se uma equação do tipo

$a_n\,x^n + a_{(n-1)}\,x^{(n-1)} + ... + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = 0$, que é chamada de equação algébrica ou equação polinomial.

Na busca de um tratamento mais sistemático para o problema, os matemáticos se fizeram duas perguntas:

1º) Essas equações têm sempre solução?

2º) Como calcular as soluções caso existam?

**Figura 2:** **Carl Friedrich Gauss.**

Foi apenas em 1799 que o astrônomo, matemático e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) respondeu à primeira das perguntas. Em sua tese de doutorado, apresentou o famoso Teorema Fundamental da Álgebra, onde demonstra que toda equação polinomial tem ao menos uma solução no campo dos números complexos.

Outros matemáticos antes de Gauss apresentaram demonstrações desse teorema, mas todas continham falhas. Entre esses matemáticos podemos citar: Jean Le Rond d'Alembert, Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange.

A demonstração feita por Gauss era perfeita e, no decorrer de sua vida, apresentou mais três demonstrações do mesmo teorema.

Resta responder à 2ª pergunta. Como achar essas raízes?

Por volta de 1550, já se conheciam fórmulas gerais para resolver equações do 1º, 2º, 3º e 4º graus, mas nenhuma fórmula havia sido obtida para resolver equações de grau maior que 4.

Em 1824, um jovem matemático norueguês, Niels Hendrich Abel (1802-1829), demonstrou que não existem fórmulas gerais para resolver equações de grau maior que 4. Isso também foi demonstrado pelo matemático francês Évariste Galois (1811-1832) e pelo italiano Ruffini.

Portanto, podemos resumir assim as conclusões:

- Toda equação algébrica de grau maior que zero tem solução.
- Existem processos algébricos para determinar as soluções de equações dos 1º, 2º, 3º e 4º graus.
- Não é possível encontrar soluções para equações de graus maior que 4 por processos algébricos, a não ser em casos específicos.

**Multimídia**

Sugerimos ver, no endereço a seguir, mais informações históricas sobre o desenvolvimento e as descobertas sobre polinômios. É um artigo que, além de apresentar os fatos históricos, também desenvolve o conteúdo relativo ao tema que estamos estudando.

http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/02d-Estudo-analitico-polinomios.pdf

## Objetivos de Aprendizagem

- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.
- Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios.
- Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra.
- Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.

# Seção 1
# Divisão de um polinômio e cálculo do resto.

Estudaremos agora o resultado de uma divisão de um polinômio por um binômio do tipo $(x - a)$, revendo a divisão de polinômios já feita na aula anterior. Vamos dividir $p(x) = 2x^3 - 3x \; + x - 4$ por $d(x) = x \;\; 2$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 3x + x - 4 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 4x^2 \quad\quad & 2x^2 + x + 3 \\ \cline{1-1}
x^2 + x \quad & \\
-x^2 + 2x \quad & \\ \cline{1-1}
3x - 4 & \\
-3x + 6 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

Encontramos o quociente da divisão que é o polinômio de grau 2, $q(x) = 2x^2 + x + 3$ e o resto que podemos chamar de $r(x) = 2$.


Observe que o grau do quociente (no caso, 2) é a diferença entre os graus do dividendo (no caso, 3) e o do divisor (no caso, 1).

Veja que o resto da divisão é um polinômio de grau zero, menor que o grau do binômio $d(x)$ que tem grau 1. Você já sabe que a divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio $(x - a)$ determina os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ de tal forma que $p(x) = (x - a).q(x) + r(x)$. Lembre-se da analogia que fizemos na unidade anterior com os números. Da mesma forma que dividendo = divisor.quociente + resto, $p(x) = d(x).q(x) + r(x)$. No caso, nosso $d(x)$ é justamente o $x$-$a$.

Como o grau polinômio divisor $d(x)$ é 1 (porque estamos estudando a divisão por $x$-$a$), o grau de $r(x)$ será sempre zero. Noutras palavras, o polinômio $r(x)$, resto da divisão, será sempre um número. Fazendo $x = a$ na expressão $p(x) = (x - a).q(x) + r(x)$, teremos:

$p(a) = (a - a).\ q(a) + r$

$p(a) = 0.\ q(a) + r = 0 + r$

$p(a) = r$

Assim, dado um polinômio qualquer p(x), seu valor numérico para x=a é justamente igual ao resto da divisão desse polinômio por (x – a). O valor numérico de um polinômio para x=2, por exemplo, é justamente o resto da divisão desse polinômio por x-2. Já o valor desse mesmo polinômio para x= - 10 é o resto da divisão dele por x + 10, e assim por diante.

O valor numérico do polinômio p(x) para x = a – ou seja, p(a) – é igual ao resto da divisão desse polinômio por (x – a).

**Importante**

Podemos pensar agora em uma importante consequência desse resultado. O que acontece se o valor numérico de p(a) for igual a zero? O que podemos concluir em relação aos polinômios p(x) e x – a? Ora, se p(a) for igual a zero, temos que o resto da divisão de p(x) por x – a é zero e, consequentemente, p(x) é divisível por x – a.

Se p(a) = 0, podemos concluir, pela definição de raiz, que o valor a, além de ser raiz do polinômio x – a, também é raiz do polinômio p(x). Vejamos algumas aplicações desse resultado.

Vamos determinar o valor de m de modo que o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 2$ seja divisível por $d(x) = x + 2$.

Ora, se p(x) é divisível por d(x), o resto da divisão de um pelo outro é igual a zero. Esse resto também é igual ao valor de p(a). Falta descobrir o valor de a, o que faremos comparando x+2 com x-a . Chegaremos à conclusão de que $2 = -a;\ a = -2$.

Logo, $p(-2) = r = 0$

$p(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + m(-2) - 2 = -8 - 8 - 2m - 2 = -18 - 2m$

$-18 - 2m = 0$

$-2m = 18$

$m = -9$

Logo, o valor de m que torna o polinômio p(x) divisível por d(x) é –9.

Outra maneira é pensar que se p(x) é divisível por d(x), a raiz de d(x) também é raiz de p(x). A raiz de d(x) é o valor de x que faz com que d(x) seja zero, no caso, –2. Como esse valor também é raiz de p(x), teremos que p(–2) = 0 – e caímos na mesma equação anterior.

**Atividade 1**

Qual o resto da divisão de $p(x) = x3 - 3x^2 + 4$ por $d(x) = x + 3$?

Anote suas respostas em seu caderno

**Atividade 2**

Se $p(x) = 3x^3 - cx^2 + 4x + 2c$ divisível por $x + 1$, quanto vale c? Explique sua resposta.

Anote suas respostas em seu caderno

## Dispositivo prático para dividir um polinômio

Você já conhece o algoritmo para a divisão de polinômios, que é análogo ao algoritmo usado para se dividir números. No entanto, existe um dispositivo para se efetuar uma divisão de um polinômio por um binômio do tipo x - a, de maneira mais simples e rápida. Este dispositivo é conhecido como dispositivo de Briot – Ruffini, em referência aos matemáticos Charles Briot (1817-1882), francês e Paolo Ruffini (1765-1822), italiano.

Vamos iniciar apresentando a seguinte disposição gráfica.

| | Coeficientes de x do dividendo p(x) | Termo constante do dividendo p(x) |
|---|---|---|
| Raiz de d(x) | Coeficientes do quociente q(x) | Resto da divisão r(x) |

Para dar um exemplo do uso deste dispositivo, repetiremos a primeira divisão de polinômios que fizemos nesta aula, logo no início da seção "Divisão de polinômios e cálculo de resto". Os polinômios são $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$, dividendo, e $d(x) = x - 2$, divisor. Neles, é possível identificar que:

- a raiz de d(x) é x – 2 = 0; x = 2.
- os coeficientes da variável de p(x) são: 2, –3 e 1
- o coeficiente do termo independente da variável de p(x) é – 4.

De posse dos elementos, é hora de coloca-los no dispositivo.

1ª etapa: Coloca-se a raiz na 1ª coluna com 2ª linha, os coeficientes de x na 1ª linha, separando o coeficiente do termo independente de x.

| | | |
|---|---|---|
| | 2 –3 1 | –4 |
| 2 | | |

2ª etapa: "baixar" o primeiro coeficiente de p(x)

| | | |
|---|---|---|
| | 2 –3 1 | –4 |
| 2 | 2 | |

3ª etapa: Multiplica-se o primeiro coeficiente (2) pela raiz do divisor e soma-se o produto obtido com o coeficiente seguinte, ou seja, 2 x 2 + (–3) = 1. Este resultado é colocado abaixo do 2º coeficiente de p(x). Acompanhe o movimento das setas!

+

| | | |
|---|---|---|
| | 2 = –3 1 | –4 |
| 2 | 2 1 | 1 |

X

4ª etapa: Repetem-se as mesmas operações para se obter o resultado final.

1 x 2 + 1 = 3 (seta cheia) e 3 x 2 – 4 = 2 (seta tracejada).

| | | |
|---|---|---|
| | 2  −3  = 1 | = −4 |
| 2 | 2  1  3 | 1 |

coeficientes do quociente q(x)

resto

Como dividimos um polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 1, o polinômio que resultará dessa divisão terá grau 2. Os coeficientes deste polinômio serão exatamente aqueles que encontramos na parte inferior central do dispositivo, ordenados da maior para a menor potência. Assim, o resultado da divisão de $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ por $d(x) = x - 2$ é $q(x) = 2x^2 + x + 3$ com resto $r(x) = 2$.


Compare esse processo de divisão com aquele que fizemos no início da aula e responda: foi mais fácil fazer assim? Foi mais difícil? Qualquer que seja a sua resposta, o que precisa ficar muito claro para você é que ela está 100% correta! Ambas as formas de fazer a divisão são válidas e a sensação de facilidade de cada uma varia de pessoa para pessoa. Assim, no que diz respeito a estas duas maneiras, não existe forma melhor ou pior e sim mais fácil ou mais trabalhosa para cada um de nós.

Vamos aplicar o dispositivo de Briot- Ruffini para efetuar a divisão de $p(x) = x^3 + x^2 -10x + 8$ por $d(x) = x - 2$e, em seguida, verificar se é possível escrever p(x) como um produto de dois fatores.

Aplicando o dispositivo, teremos:

| | | |
|---|---|---|
| | 1  1  −10 | 8 |
| 2 | 1  3  −4 | 0 |

Note que o resto da divisão é 0. Dessa forma, p(x) é divisível por $x - 2$, o que também implica dizer que 2 é raiz de p(x). É possível escrever p(x) como um produto de dois fatores pois se $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$ e r(x) é zero, $p(x) = d(x) \cdot q(x)$. No caso dos polinômios em questão, isso quer dizer $x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 2)(x^2 + 3x - 4)$.

Atividade 3

Fatore o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$, sabendo-se que $h(x) = x - 4$ é um dos fatores de $p(x)$.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Verifique se o polinômio $p(x) = x^2 - x - 5$ é divisível por $d(x) = x - 5$.

Justifique sua resposta.

Anote suas respostas em seu caderno

# Seção 2
# Raízes de polinômios

Na aula anterior, foi feita uma revisão do conceito de raiz de um polinômio e recordamos que o valor da variável tal que o polinômio assume o valor zero é chamado de raiz do polinômio.

Para descobrir as raízes de um polinômio, podemos proceder de duas maneiras. A primeira delas é fazer uma verificação, onde inserimos um determinado valor, que achamos ser a raiz, e vemos se ele de fato faz com que a expressão dê zero. A outra maneira é calcular a raiz diretamente. Vamos ver isso em quatro exemplos.

Primeiro exemplo: queremos saber se $x = 4$ é raiz do polinômio $2x - 8$.

a. podemos fazer isso via verificação, substituindo a variável x da equação por 4, e teremos:

$2 . 4 - 8 = 0;$

Como o valor x = 4 é tal que o polinômio 2x – 8 assume valor zero, concluímos que 4 é sua raiz.

b. Uma outra forma de determinar a raiz de um polinômio é resolver a equação p(x) = 0. No caso de p(x) = 2x – 8, temos:

$2x - 8 = 0$

$2x = 8$

$x = 4$

Segundo exemplo: queremos saber se x = 1 é raiz do polinômio $x^2 + 2x - 3$.

a. vamos determinar o valor numérico desse polinômio para x = 1.

$1^2 + 2 . 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0.$

Logo, x = 1 é raiz do polinômio.

b. Podemos também verificar se x = 1 é raiz do polinômio resolvendo-se a equação p(x) = 0. No caso do polinômio $x^2 + 2x - 3$, temos que resolver a equação do 2º grau $x^2 + 2x - 3 = 0$. Uma forma de resolvê-la é utilizar a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1(-3)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Vimos, então que o polinômio, além da raiz x = 1, tem também como raiz x = –3.

**Multimídia**

Bhaskara Acharya (1114-1185) foi um importante matemático da Índia medieval. Dentre seus livros, destacam-se o Siddhanta-siromani, dedicado à Astronomia e o Bijaganita, sobre Álgebra, em que trata da resolução de vários tipos de equações. No entanto, a fórmula para cálculo das raízes da equação do segundo grau -e que, apenas no Brasil, leva seu nome - não é de sua autoria. Quer saber mais? Veja "Esse tal de Bhaskara", interessante vídeo da coleção matemática multimídia, da Unicamp. Eis o link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1097

Terceiro exemplo: Queremos encontrar as raízes do polinômio $x^3 – 2x^2 –x + 2$. Apesar de existir uma fórmula para a determinação de raízes de polinômios do 3º grau, vamos indicar outro caminho. É possível ter um palpite sobre uma raiz? Verifique que 2 é uma raiz desse polinômio. De fato, $2^3 – 2 . 2^2 – 2 + 2 = 0$. Pelo que estudamos nas seções anteriores, o polinômio $x^3 – 2x^2 – x + 2$ pode ser escrito como o produto $(x – 2) . p(x)$, sendo $p(x)$ um polinômio de grau 2. É possível determinar $p(x)$ aplicando-se o dispositivo de Briot-Ruffini. Tente determinar $p(x)$ e as outras raízes desse polinômio.

Aqui, recordamos o que já vimos anteriormente: um polinômio $P(x)$ pode ser escrito como $P(x) = d(x) . q(x) + r(x)$ – onde $d(x)$ é o divisor, $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto. E, se a é raiz do polinômio, o resto da divisão por $x – a$ é zero. Nestes casos, como $r(x) = 0$, o polinômio pode ser escrito como escrito produto de dois fatores: $d(x)$ (o divisor, $x – a$) e $q(x)$ (o quociente, resultado da divisão por $x – a$).


Vamos dividir o polinômio $x^3 – 2x^2 – x + 2$ por $x – 2$ usando o dispositivo prático, para encontrar outros fatores.

| | | |
|---|---|---|
| | 1    –2    –1 | 2 |
| 2 | 1    0    –1 | 0 |

$x^3 – 2x^2 –x + 2$ pode ser escrito como $(x – 2) (x^2 – 1)$. Vemos então que as outras raízes do polinômio do 3º grau (além de $x = 2$) são as raízes do polinômio $x^2 – 1$.Resolvendo-se a equação $x^2 – 1= 0$, temos que $x = 1$ ou $x = –1$.

Assim, calculamos as raízes do polinômio $x^3 – 2x^2 – x + 2$ que são: 2,1 e –1.

**Figura 4:** Calculando as raízes de um polinômio e construindo seu gráfico.

Retomando o terceiro exemplo da seção anterior, poderemos escrever que $(x^2 - 1)$ como o produto $(x+1) \cdot (x - 1)$ uma vez que $(a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a - b)$. Nosso polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ poderá ser escrito, então, da seguinte maneira:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2).(x^2 - 1) = (x - 2) \cdot (x + 1)(x - 1)$$

E aí, a gente pode pensar assim: a equação algébrica do primeiro grau tem uma raiz; a do segundo tem duas - e o polinômio pode ser escrito como o produto de dois polinômios do primeiro grau; já a equação do terceiro grau tem 3 raízes – e o polinômio pode ser escrito como o produto de três polinômios do primeiro grau. Será que toda equação algébrica do n-ésimo grau tem n raízes? Afinal, qual a relação entre o grau de uma equação algébrica e a quantidade de raízes que ela tem?

Como já vimos na seção "Para início de conversa", a resposta a este problema foi perseguida por muitos anos, até ser finalmente encontrada por Gauss, em 1799. A resposta é justamente o teorema fundamental da álgebra, que afirma o seguinte: Toda equação algébrica $p(x) = 0$, de grau n maior ou igual a 1, possui n raízes não necessariamente distintas.

**Saiba Mais**

A demonstração do teorema Fundamental da Álgebra, devido a sua complexidade, está evidentemente fora do escopo do nosso curso. Assim, para efeitos da nossa presente conversa, aceitaremos sem demonstração o que foi provado por Gauss. No entanto, conhecer um pouco mais sobre a relação entre polinômios, raízes e este teorema é bem importante. Vocês estão convidados a fazê-lo em http:// http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1051

**Atividade 5**

a. Resolva a equação $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$, sabendo que uma das raízes é $x = 3$)

b. Determine as soluções da equação $x^3 - 6x^2 + 32 = 0$, sabendo que $-2$ é uma de suas raízes.

Anote suas respostas em seu caderno

Determine as raízes da equação $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = 0$, sabendo que $-1$ e $2$ são duas de suas raízes.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

# Seção 3
## Relações de Girard

**Figura 5:** O matemático francês Albert Girard.

Como já estudado na unidade sobre equações do 2º grau, se $x_1$ e $x_2$ são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Vejamos um exemplo:

Determine a soma e o produto das raízes da equação $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $P = x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$

$S = -\dfrac{(-4)}{4} = 1$ $\qquad$ $P = \dfrac{-3}{4} = -\dfrac{3}{4}$

A soma das raízes é 1 e o produto das raízes é $\dfrac{-3}{4}$

O interessante é que estas relações entre coeficientes e raízes de uma equação podem ser estabelecidas para todas as equações algébricas. Vamos ver como isso ocorre na equação do 3º grau?

Suponha que $x_1$, $x_2$, $x_3$ são as raízes, não necessariamente distintas, da função polinomial dada por $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Como já vimos, podemos escrever a equação de forma fatorada, assim:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Efetuando os produtos, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\right]$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - (x_1 + x_2 + x_3)\, ax^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\, ax - (x_1x_2x_3)\, a$$

Fazendo- se uma analogia com as relações entre raízes e coeficientes da equação do 2º graus:

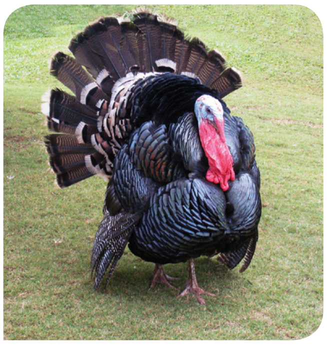
Como $b = -(x_1+x_2+x_3)a \longrightarrow x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{b}{a}$

Como $c = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\, a \longrightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}$

Como $d = -(x_1x_2x_3)\, a \longrightarrow x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}$

Estas são as chamadas relações de Girard para a equação do 3º grau.

De forma análoga, podemos estabelecer essas relações para outras equações de graus maiores que 3.



Caso você esteja se indagando da utilidade dos polinômios de grau maior do que 3, eis uma aplicação interessante: em 2010, Caroline Viezel e Gilcilene de Paulo se propuseram a determinar o tempo ideal de abate de perus e, para isso, fizeram a modelagem...usando um polinômio do quarto grau! O trabalho foi publicado nos anais do XXXIII Congresso de Matemática Computacional e Aplicada. O link está aqui: http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxiii_cnmac/pdf/561.pdf

Saiba Mais

Vamos fazer uns exemplos juntos?

Primeiro exemplo - Escreva as relações de Girard para a equação $x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$, considerando como raízes da equação $x_1$, $x_2$, e $x_3$.

Observando a equação vemos que: $a = 1$; $b = 7$; $c = -3$ e $d = 5$.

Então, podemos escrever:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{-7}{1} = -7$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

Segundo exemplo - Considerando a equação $2x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ e suas raízes sendo -1, 2 e 1, determine m, n e p e escreva a equação.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 2 + 1 = 2 = -\frac{m}{2}\ ;\ m = -4$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 \,.\, 2 + -1 \,.\, 1 + 2 \,.\, 1 = -1 = \frac{n}{2}\ ;n = -2$$

$$x_1x_2x_3 = -1.2.1 = -2 = -\frac{p}{2}\ ;\ p = 4$$

Logo a equação é $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

Para finalizar nosso conteúdo, convidamos vocês a fazerem mais duas atividades.

Atividade 7

As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio 3x3 – 13 x 2 + 7x – 1. Determine a razão entre os números que expressam a área total e o volume do paralelepípedo.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

Quais os valores de p e q para os quais a equação $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + px + q = 0$ admite uma raiz de multiplicidade 3. Chamamos de raiz de multiplicidade 3, quando a equação tem as 3 raízes iguais.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Vamos resolver alguns exercícios de aplicação das relações de Girard:

a. Calcule o valor de k na equação $(k + 2) . x^2 - 5x + 3 = 0$ de modo que o produto das raízes seja igual a 3/8.

b. Se m, n e p são as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$, determine o valor de 1/m+1/n+1/p.

Anote suas respostas em seu caderno

## Conclusão

Os polinômios são utilizado para resolver situações-problema de diferentes áreas e são uma valiosa ferramenta da Matemática. Conhecer um pouco da história do tema que estamos estudando é sempre interessante, pois pode auxiliar a compreender a importância e a construção histórica dos resultados encontrados.

O dispositivo de Briot- Ruffini para resolução de uma divisão de polinômio por um binômio do tipo x – a é bastante prático e simples, permitindo resolver problemas que exigem fatoração de polinômios e de determinação de suas raízes.

Da mesma forma, as relações entre os coeficientes das equações e suas raízes, chamadas de Relações de Girard, possibilitam a resolução de problemas  diversos envolvendo pesquisas de raízes de um polinômio.

## Resumo

- O valor numérico do polinômio p(x) para x = a, ou seja,  p(a), é igual ao resto da divisão desse polinômio por (x – a).
- Se p(a) for igual a zero, o resto da divisão do polinômio por x – a será zero, o que quer dizer que o polinômio é divisível por x – a e a é uma raiz do polinômio.
- Se p(a) for igual a zero, o polinômio p(x) pode ser escrito como um produto de dois fatores.
- Para dividir polinômios por x – a usamos o dispositivo prático de Briot-Ruffini.
- Raiz de um polinômio é o valor da variável que torna o polinômio nulo. Portanto, quando temos um polinômio p(x) e fazemos p(x) = 0, queremos obter os valores de x que anulam a função.
- As raízes de um polinômio podem ser encontradas via verificação (substituição) ou via cálculo direto.
- O cálculo direto da raiz dos polinômios do primeiro grau é feito resolvendo diretamente a equação ax + b = 0
- O cálculo direto da raiz dos polinômios de segundo grau é feita usando a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- As relações de Girard relacionam os coeficientes dos polinômios com suas raízes
- As relações de Girard para equações do segundo grau são: se $x_1$ e $x_2$ são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$
- As relações de Girard para equações do terceiro grau são: se $x_1$, $x_2$, $x_3$ são as raízes, não necessariamente distintas, da função polinomial dada por $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$ ; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ ; $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

# Veja Ainda

http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap111s4.html

Neste site, você poderá estudar e conhecer um pouco mais sobre Polinômios, praticando mais o cálculo e resolução de equações polinomiais.

## Referências


### Livros

- Dante, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*, 3ª edição, São Paulo, Editora Ática, 2010,736 páginas.
- Bordeaux, Ana Lúcia. (et al.), coordenação de João Bosco Pitombeira. *Matemática Ensino Médio*, 3ª série, Rio de Janeiro, Fundação Roberto Marinho, 2005, 440 páginas

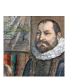
### Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=153960

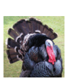
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1393676

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#mediaviewer/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=475768



- http://fr.wikipedia.org/wiki/Albert_Girard#mediaviewer/File:Jodocus_Hondius.jpg



- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=992677

- http://www.sxc.hu/photo/517386


## Respostas das Atividades

### Atividade 1

$p(-3) = (-3)^3 - 3\,(-3)^2 + 4 = -27 - 27 + 4 = -50$

O resto da divisão é –50.

### Atividade 2

Se p(x) é divisível por x + 1, o resto é zero. Para calcular o valor de c devemos calcular $p(-1) = 3(-1)^3 - c(-1)^2 + 4(-1) + 2c = 0$

$-3 - c - 4 + 2c = 0 \qquad -7 + c = 0 \qquad c = 7$

### Atividade 3

| | | |
|---|---|---|
| | 1 –4 1 | –4 |
| 4 | 1 0 1 | 0 |

$x^3 - 4x^2 + x - 4 = (x - 4)(x^2 + 1)$

### Atividade 4

$p(x) = x^2 - x - 5$

$d(x) = x - 5$

$p(5) = 25 - 5 - 5 = 15$

Sendo $p(5) \neq 0$ o resto é igual a 15, logo p(x) não e divisível por d(x).

Outra solução:

Fazer a divisão usando o dispositivo e encontrar resto igual a 15.

### Atividade 5

a. Começamos com a verificação, certo? Vamos verificar se x = 3 é raiz da equação, fazendo a substituição da variável.

   $2 . 3^3 - 5 . 3^2 - 4 . 3 + 3 = 0$

   $54 - 45 - 12 + 3 = 0$

   $0 = 0$

Verificamos, assim, que 3 é raiz da equação e p(x) é divisível por (x – 3). Aplicando o dispositivo prático, vamos fazer a divisão de $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ por $x - 3$.

| | | |
|---|---|---|
| | 2 –5 –4 | 3 |
| 3 | 2 1 –1 | 0 |

A partir dos coeficientes que encontramos no dispositivo, verificamos que o quociente dessa divisão é o polinômio $q(x) = 2x^2 + x - 1$.

Resolvendo a equação $2x^2 + x - 1 = 0$, encontraremos as demais raízes.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

O polinômio p(x), então, pode ser escrito de forma fatorada, da seguinte maneira:

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1).$$

b.

| | | |
|---|---|---|
| | 1 –6 0 | 32 |
| –2 | 1 –8 16 | 0 |

$(x + 2)(x^2 - 8x + 16) = (x + 2)(x - 4)(x - 4)$

As raízes são: –2, 4 e 4

## Atividade 6

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | –15 | 19 | 30 |
| –1 | 1 | 4 | –11 | 30 | 0 |
| 2 | 1 | -2 | –15 | 0 | |

$(x + 1)\ (x - 2)\ (x^2 - 2x - 15) = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos mais duas raízes

$(x + 1)\ (x - 2)\ (x + 3)\ (x - 5)$

## Atividade 7

Volume do paralelepípedo: $x_1x_2x_3 = \dfrac{1}{3}$

Área total do paralelepípedo: $2\ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2.\ \dfrac{7}{3} = \dfrac{14}{3}$

Razão entre a área e o volume: $\dfrac{14}{3} : \dfrac{1}{3} = \dfrac{14}{3} \times 3 = 14$

## Atividade 8

Eliminando os denominadores a equação pode ser escrita assim:

$x^3 - 6x^2 + 3px + 3q = 0$

Vamos aplicar as relações de Girard, considerando a raiz de multiplicidade 3 como a.

$a + a + a = 6$ $\qquad\qquad$ $a = 2$

$a\ .\ a\ .\ a = -3q \rightarrow -3q = 8 \rightarrow q = -\dfrac{8}{3}$

$ab + ac + bc = 3p$

$a^2 + a^2 + a^2 = 3p \rightarrow 3a^2 = 3p \rightarrow 12 = 3p \rightarrow p = 4$

## Atividade 9

a. O produto das raízes da equação $(k + 2)\ .\ x^2 - 5x + 3 = 0$ é dado pela expressão c/a, sendo $a = k + 2$ e $c = 3$. Assim, temos que

$c/a = 3/8$

$3/(k+2) = 3/8$

$k = 6$

## Respostas das Atividades

b. Se m, n e p são as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$, determine o valor de 1/m + 1/n + 1/p.

Primeiramente, temos que 1/m + 1/n + 1/p = (np + mp + mn)/mnp.

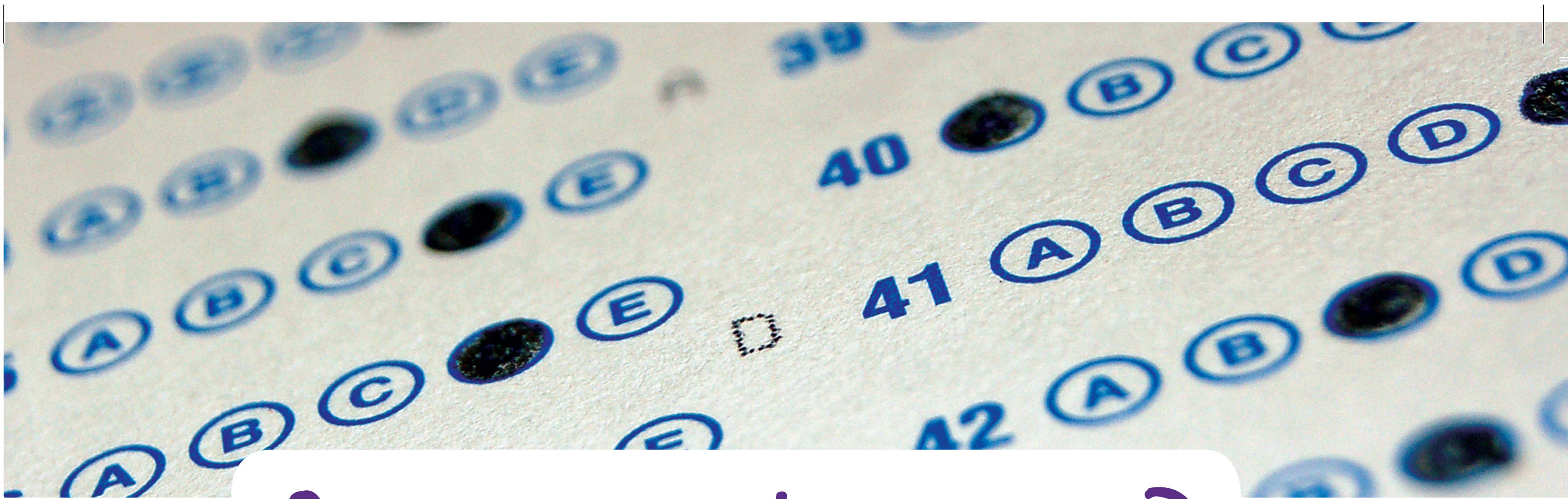
Como np + mp + mn = c/a e mnp = –d/a (sendo a = 1, c = 3 e d = 4), teremos

que np + mp + mn = 3/1 = 3

mnp = –4/1 = –4

e assim

1/m + 1/n + 1/p = (np + mp + mn)/mnp = 3/–4 = –3/4.



# O que perguntam por aí?

### Questão 1 (EEM – SP)

Determine as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$, sabendo-se que uma delas é dupla.

Uma das raízes, determinada por tentativa é 2.

**Resposta:** $x = -1$ (raiz dupla) e $x = 2$.

**Comentário:**

$2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$

Dividindo o polinômio por $(x - 2)$ encontramos $x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = -1$ é a raiz dupla

### Questão 2 (Faap – SP)

Calcule os valores de a,b,e,c para que o polinômio

$p_1(x) = a(x + c)^3 + b(x + d)$ seja idêntico a $p_2(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

**Resposta:** $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$ e $d = 2$

**Sugestão:** desenvolver os produtos, escrever na forma geral do polinômio e igualar os coeficientes de $p_1(x)$ com os de $p_2(x)$. Lembrando que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

# Geometria Analítica 2

## Para início de conversa...

Você já olhou para o céu hoje? Já pensou nas inúmeras teorias que foram desenvolvidas para tentar entender esse grande mistério que está acima de nossas cabeças? Alguns cientistas deram grandes contribuições para o melhor entendimento dos planetas que habitam essa imensidão.

O italiano Galileu Galilei, por exemplo, foi responsável por aprimorar e utilizar a luneta, importantíssima para as observações das posições dos planetas. Já o alemão Johannes Kepler desenvolveu modelos para as órbitas dos planetas, afirmando que eles descreveriam órbitas elípticas, e que o Sol ocuparia um dos focos desta elipse. Mais tarde, o inglês Isaac Newton mostrou, a partir da sua teoria da gravitação, que os planetas e cometas descreveriam órbitas circulares, elípticas, parabólicas ou hiperbólicas – desde que estivessem exclusivamente sob a ação da atração gravitacional do Sol.

**Figura 1:** Planetas se movendo no espaço.

A partir das formas das órbitas previstas pela teoria da gravitação de Newton,  foi possível fazer previsões fascinantes: o astrônomo inglês Edmond Halley concluiu que os cometas avistados em 1456, 1531, 1607 e 1682 era, na verdade, um mesmo cometa que, por estar em órbita do sol, passava perto da terra a cada 76 anos aproximadamente. A comprovação da previsão de que o cometa voltaria em 1758, coroou a tese de Halley e fez com que o cometa fosse batizado com seu nome. Já o matemático alemão Carl Friedrich Gauss conseguiu calcular a trajetória do asteróide Ceres, determinando quando e em que lugar do céu ele poderia ser visto novamente, depois de ter ficado muito tempo fora do campo de visão dos astrônomos. Impressionante, não é mesmo?

Agora, existe algo ainda mais impressionante do que estas previsões: as formas das trajetórias dos planetas - círculos, elipses, hipérboles, etc - tem uma coisa muito importante em comum com os problemas que resolvemos na aula passada.

## Objetivos de aprendizagem

- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
- Calcular as coordenadas do ponto de interseção entre retas.
- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida, dados o centro e o raio.
- Conhecer as cônicas

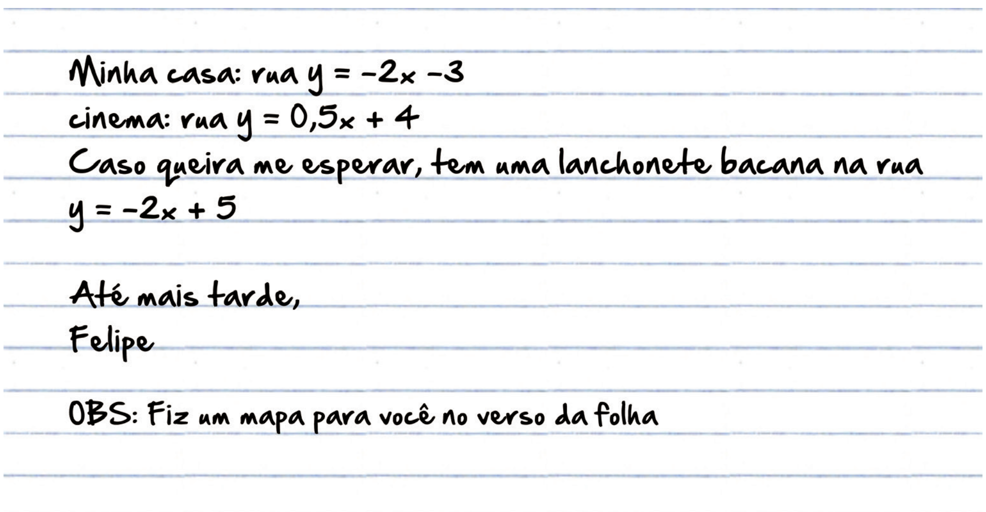
# Seção 1
## Retas

Iniciamos esta seção relembrando o problema que perpassou a aula anterior: as prefeituras de duas cidades, A e B, combinaram de construir uma estação de trem numa ferrovia do governo estadual que passava próxima a estas cidades. Isto serviria para aumentar a qualidade de vida dos moradores de ambas as cidades, que perdiam uma parte importante do dia nos engarrafamentos para ir e vir do trabalho. Como o custo foi dividido igualmente, a estação deveria ficar a uma mesma distância de ambas as cidades . Dessa forma, demos início ao estudo da Geometria Analítica.

**Figura 2:** Estação de trem de Liverpool, na Inglaterra. Uma das mais movimentadas do Reino Unido.

Felipe é morador de um bairro da cidade A. Porém, as ruas deste bairro não são nomeadas da maneira com que estamos acostumados. O bairro foi concebido a partir do plano cartesiano e, por isso, muitas de suas ruas são retas desse plano. Essas ruas foram nomeadas com a equação da reta que as representa. Muitas casas, também, são numeradas com um par ordenado, de acordo com sua localização no plano cartesiano.

Sandro, amigo de infância de Felipe, foi conhecer o bairro em que o amigo está morando. Sexta à noite, resolveram se divertir indo ao cinema. Como Felipe iria para o cinema direto do trabalho, deu a Sandro o nome da rua, para que ele o encontrasse diretamente no local do cinema.



Minha casa: rua $y = -2x - 3$
cinema: rua $y = 0{,}5x + 4$
Caso queira me esperar, tem uma lanchonete bacana na rua $y = -2x + 5$

Até mais tarde,
Felipe

OBS: Fiz um mapa para você no verso da folha

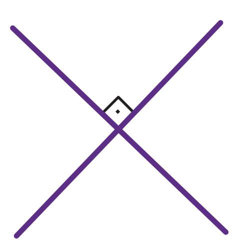
**Figura 3:** **Bilhete de Felipe para Sandro.**

Sandro aceitou a sugestão de Felipe e resolveu ir à lanchonete. Antes mesmo de sair de casa ou olhar o mapa, Sandro rapidamente percebeu que a lanchonete ficava em uma rua paralela à da casa de Felipe, ao passo que o cinema ficava em uma rua perpendicular à da casa do amigo.


Vale lembrar que retas paralelas são retas que não têm pontos em comum, como na figura




e retas perpendiculares possuem um ponto em comum e formam um ângulo de 90º , como representada a seguir



Sandro rapidamente foi conferir no mapa se realmente estava correto e se ainda recordava-se dos conceitos matemáticos que havia utilizado para chegar a essa conclusão. Olhando o mapa que Felipe deixou....

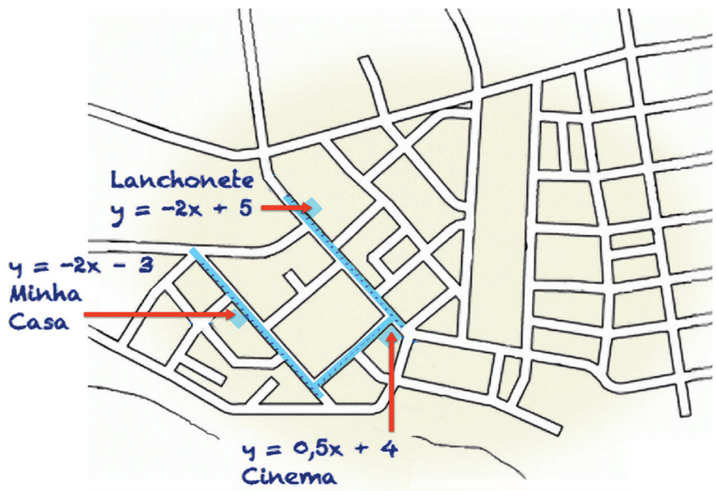



**Figura 4:** Mapa que Felipe entregou para Sandro.

E não é que Sandro realmente estava certo! Mas como será que ele fez para acertar a posição relativa entre as ruas sem olhar o mapa?

## Retas paralelas e perpendiculares

Vamos pensar juntos: o que faz com que duas retas sejam paralelas? E como será que isso pode ser percebido nas equações destas retas?

No plano cartesiano, podemos perceber que se duas retas são paralelas, necessariamente elas farão o mesmo ângulo com o eixo das abscissas! Veja na figura esses ângulo representados por $a_1$ e $a_2$:

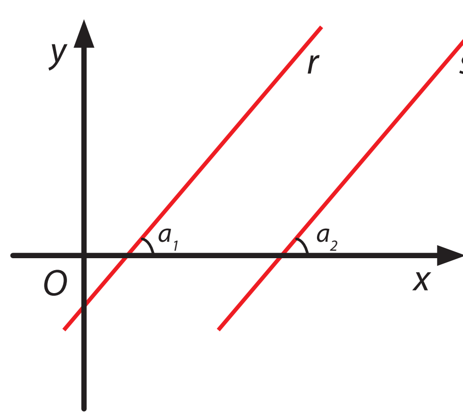



**Figura 5:** Duas retas paralelas, r e s, cortadas por duas transversais, os eixos x e y.

Como as retas fazem o mesmo ângulo com o eixo dos x, o valor da tangente destes ângulos será o mesmo e, por conseguinte, o coeficiente angular das retas também será o mesmo. Dessa forma ficou fácil para Sandro perceber que a casa de Felipe situada na rua $y = -2x - 3$ ficava na rua paralela a rua da lanchonete situada na rua $y = -2x + 5$, uma vez que seus coeficientes angulares são iguais: $-2$.

Para concluir que as ruas da casa de Felipe e da lanchonete eram perpendiculares a rua do cinema $y = 0{,}5x + 4$, Sandro lembrou da aula da professora Carmem, em que ela chegava a seguinte conclusão:

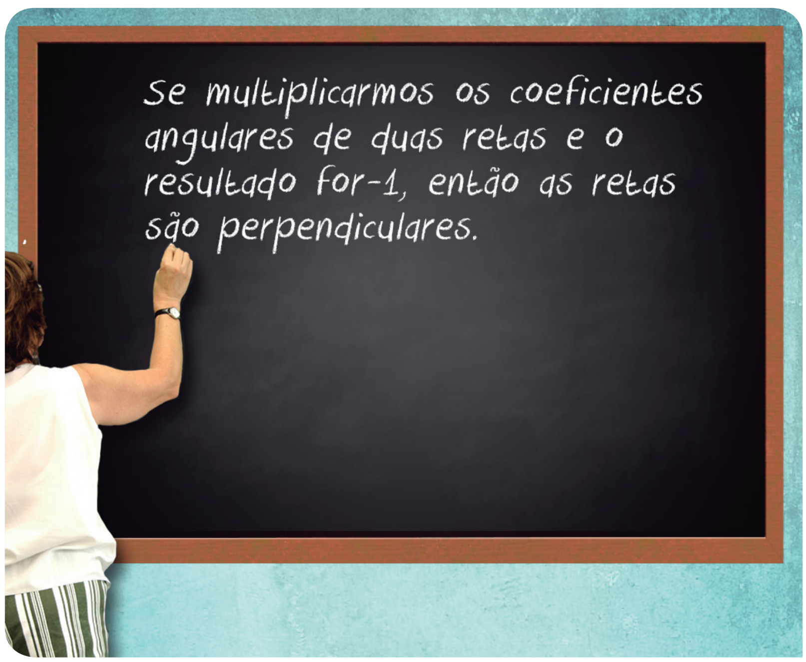



**Figura 6:** **Professora Carmem falando sobre as relação entre os coeficientes angulares de duas retas tangentes.**

Então, Sandro pensou: o coeficiente angular das retas que representam as ruas da casa de Felipe e da lanchonete é $-2$; o coeficiente angular da rua $y = 0{,}5x + 4$ que representa o cinema é 0,5; $-2$ vezes 0,5 é igual a $-1$. As retas são perpendiculares!

Construa no plano cartesiano os gráficos das retas r1 e r2 de equações $y = 2x$ e $y = -x + 2$, respectivamente.

a. Qual o ângulo formado por essas retas com o eixo x?

b. Na figura construída, é possível identificar um triângulo? Classifique-o quanto a medida dos seus ângulos internos.

Atividade

Lembre-se: faça em uma folha à parte

A demonstração de que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é –1 é bastante interessante – e até acessível ao nosso nível. No entanto, como temos ainda muita aula pela frente, fazemos assim: se você quiser vê-la na íntegra, acesse o site do Instituto de Matemática da UFRJ: http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap41s4.html. Do contrário, siga direto adiante na leitura da aula. Combinado?

Saiba Mais

Agora, chegou a sua vez de praticar, se localizando no bairro de Felipe!

Verifique se as ruas da escola e do parque são perpendiculares ou paralelas a rua da casa de Felipe.

Rua da Escola: $y = 2x - 1$

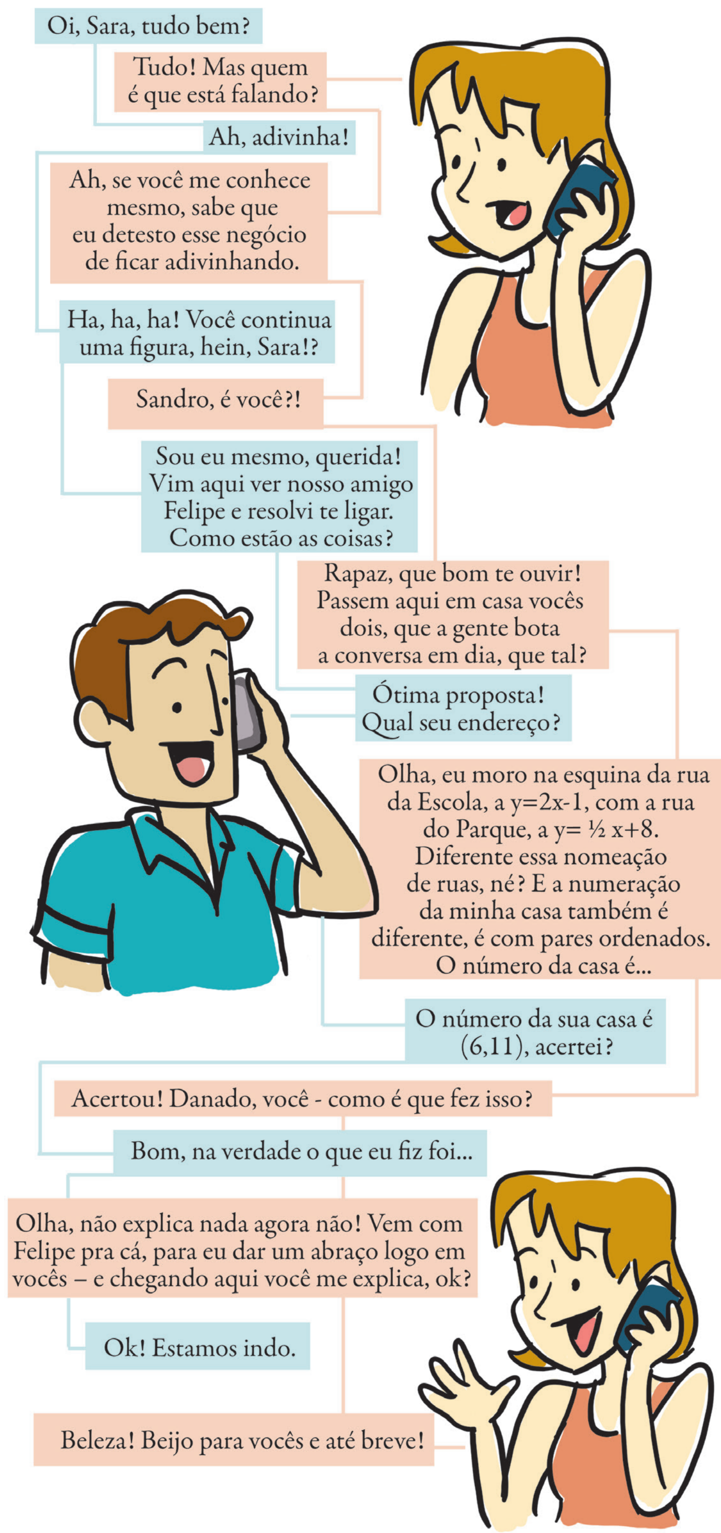
Rua do Parque: $y = \frac{1}{2}x + 8$

Atividade 1

Lembre-se: faça em uma folha à parte

## Interseção entre retas

Depois do cinema, Sandro resolveu ligar para Sara, que também não o via há tempos.



A Sara falou que mora numa esquina, certo? Pois então, a primeira coisa a se pensar é que uma esquina é o ponto de encontro entre duas ruas. E, se as ruas estão representadas pelas retas, a esquina é justamente o ponto de encontro entre estas retas. Entenderam? Ótimo, vamos adiante.

A segunda coisa a pensar é que o ponto de encontro entre duas retas pertence a ambas as retas e, por isso, suas coordenadas satisfazem tanto à equação de uma reta quanto à equação de outra reta. Noutras palavras, o ponto de interseção entre duas retas é o ponto em que as equações das duas retas são iguais. Se representarmos uma reta por $y_1=a_1x_1+b_1$ e a outra por $y_2=a_2x_2+b_2$, o ponto de interseção $P_i(x_i,y_i)$ será aquele em que $y_1=y_2$. Veja na figura.

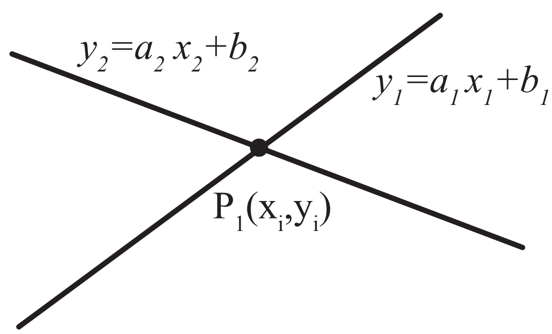



**Figura 7:** **Retas y1 e y2 e seu ponto de interseção Pi.**

Assim, Sandro pensou o seguinte: a equação da rua da Escola é y = 2x –1; a equação da rua do Parque é y = ½ x + 8; Sara mora na esquina das duas, ou seja, no lugar em que 2x – 1 = ½ x + 8. Desenvolvendo, vem

2x – ½ x = 8 + 1

1,5x = 9

x = 6

Para obtermos o valor correspondente para y, basta substituirmos o valor de x encontrado em uma das equações anteriores.

y = 2(6) –1

y = 12 – 1 = 11

Assim, Sara mora na casa (6,11).

Observação: Sabemos que existem 4 esquinas no cruzamento de duas ruas, porém, no nosso exemplo, vamos considerar que todas levam a mesma numeração, ok?

Novamente, hora de vocês se orientarem no bairro de Sara e Felipe.

**Atividade 2**

Encontre as coordenadas cartesianas da esquina das ruas do cinema (y=0,5x + 4) e da lanchonete (y = -2x + 5). Depois, encontre as coordenadas cartesianas da esquina da rua do cinema (y=0,5x + 4) com a rua da casa do Felipe (y = -2x - 3)

Lembre-se: faça em uma folha à parte

## Articulando os conceitos: o problema da estação

Nesta seção, vamos juntar tudo o que vimos até agora – inclusive conceitos da aula anterior – para resolver um problema maior, mais complexo. Nosso objetivo é mostrar que a geometria analítica pode nos levar muito, mas muito longe na resolução problemas bastante concretos. O problema escolhido é aquele já conhecido de vocês da aula anterior: o de encontrar a localização da estação de trem.

Na aula anterior, tínhamos usado este problema como um mote para calcular o ponto médio da distância entre as duas cidades. Agora vamos mostrar que, a partir daí – e do que acabamos de ver nas seções anteriores – é perfeitamente possível calcular o ponto exato da linha do trem em que deve ser construída a estação. Vamos lá? Acompanhe na figura, então:

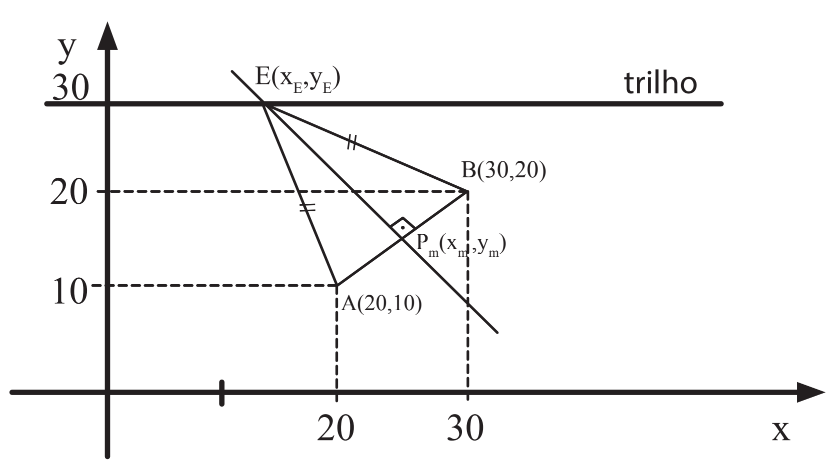



**Figura 8:** Cidades A e B, estação E, ponto médio Pm entre A e B e trilho do trem representados no plano cartesiano.

Vemos então que, o ponto a ser determinado deve estar contido na mediatriz do segmento AB, uma reta perpendicular a esse segmento e que passa pelo seu ponto médio. Dessa forma, nossa solução está dividida então em 3 partes:

1. encontrar o ponto médio $P_M$ do segmento AB,
2. encontrar a equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa pelo ponto $P_M$
3. encontrar a interseção desta reta com a reta que representa o trilho do trem

## Solução, parte 1

Para a primeira parte da solução, vamos usar muito do que já vimos na aula anterior, vejam só:

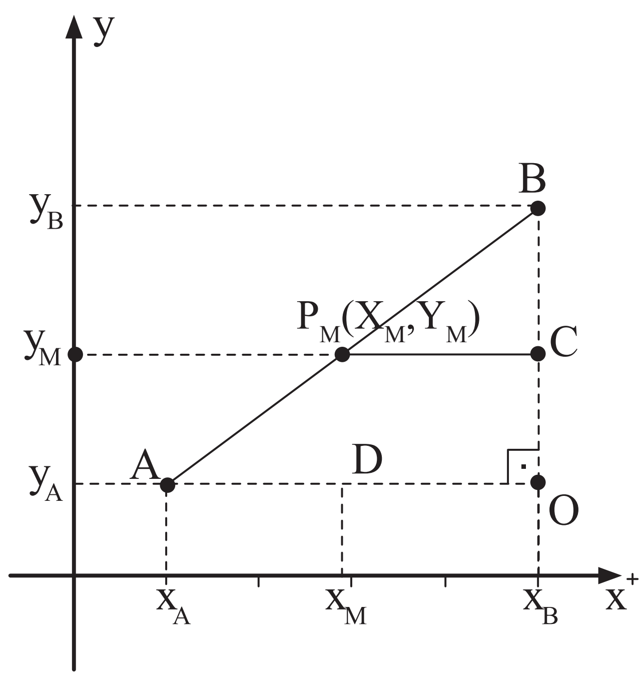



**Figura 9:** **Cidades A(xA, yA) e B(xB, yB) e ponto médio PM(xM, yM) representados no plano cartesiano.**

Na figura anterior, os triângulos $ABP_M$ e AOB são semelhantes e a razão de semelhança é ½ (já que $P_M$ é, por hipótese, ponto médio de AB). Dessa forma, teremos que D é ponto médio de AO e, analogamente, C é ponto médio de BO. Assim, xM = (xA+xB)/2 e yM=(yA+yB)/2. No nosso caso, como A(20,10) e B(30,20), $x_M = 25$ e $y_M = 15$.

## Solução, parte 2

Encontrando o ponto médio, vamos ao segundo passo: encontrar a equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa por $P_M$. Lembramos aqui que, na aula anterior, já fizemos atividades em que encontrávamos a equação de uma reta que passava por um determinado ponto e que tinha uma determinada inclinação, certo? Então, o ponto já temos: é o ponto $P_M(25, 15)$. Falta agora encontrar a inclinação da reta perpendicular ao segmento AB.

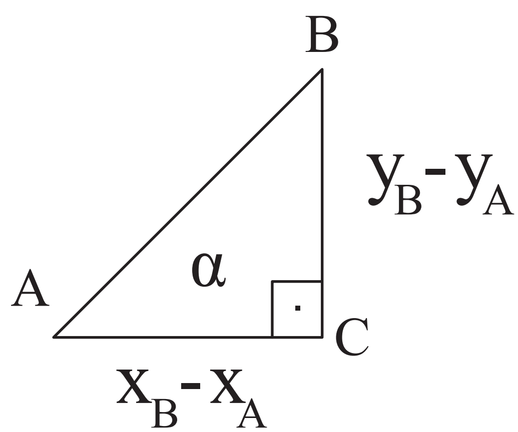




**Figura 10: Triângulo retângulo ABC, com ângulo α e medidas dos lados AC e BC destacados.**

Sabemos que

$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$

Logo:

$$tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

O valor encontrado é justamente o do coeficiente angular da reta que dá suporte ao segmento AB. Se usarmos a equação reduzida da reta, ele será o valor de a na expressão y = ax + b. Se usarmos a fundamental, ele será o valor de m na expressão $y - y_0 = m\,(x - x_0)$.

Aí ficou fácil! Já temos os valores de $x_A$, $y_A$, $x_B$, $y_B$ – basta substituir na expressão. Vamos lá?

$$tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$tg\alpha = \frac{20 - 10}{30 - 20}$$

$$tg\alpha = \frac{10}{10} = 1$$

Achado o valor do coeficiente angular desta reta, entrar com ele na expressão $m_P$=-1/ $m_{AB}$ (que vem daquela propriedade apresentada pela professora Carmem, certo?)

$m_P$ = -1/ $m_{AB}$

$m_P$ = -1/ 1

$m_P$ = -1

Opa! Uma beleza! Já temos o ponto, $P_M$(25, 15) e a inclinação da reta, -1. Vamos agora achar a equação da reta na forma reduzida (poderíamos perfeitamente encontrar essa equação na forma fundamental, ok?)

y = ax + b; a = –1, $P_M$(25, 15)

y = –1 . x + b

15 = –1 . (25) + b

15 + 25 = b

b = 40

Equação da reta: y = –x + 40

Ufa! Por um lado, é trabalhoso, não é verdade? Mas veja que, por outro, não estamos trazendo conceitos novos: tudo o que utilizamos até aqui já foi discutido nesta aula e na aula anterior. A novidade está justamente na articulação dos conceitos, que pode nos levar a resolver problemas muito mais complexos do que imaginamos a princípio. Tomaram fôlego? Ótimo, estamos quase lá!

## Solução, parte 3

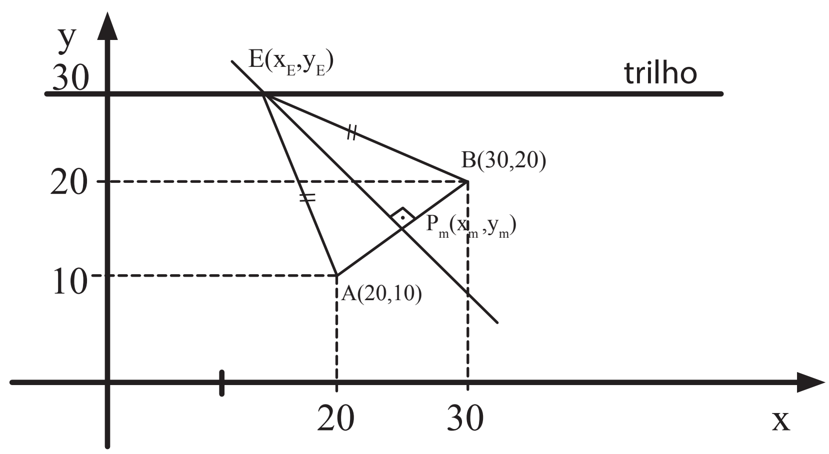



**Figura 10:** Desenho base do problema com etapas da solução destacadas.

Muito bem, vamos dar uma olhada na figura e recapitular o que já fizemos até agora: na primeira etapa da solução, achamos o ponto médio $P_M$ do segmento AB. Na segunda, encontramos a reta perpendicular a AB e que passa por este ponto médio. Agora, na etapa final, vamos encontrar o ponto de interseção entre esta reta e a reta que representa o trilho do trem. A equação da reta perpendicular ao segmento AB e que passa por $P_M$, já temos: y=–x+40. Falta achar a equação da reta que representa o trilho do trem e encontrar a interseção entre ambas, igualando as duas equações. Lembramos que foi exatamente isso que fizemos na Atividade 2 desta aula – e na explicação que a antecedeu, certo?

A reta que representa o trilho do trem é uma reta paralela ao eixo dos x e que corta o eixo dos y no ponto 30 – o tal ponto (0,30) do plano cartesiano. Assim, se a gente achar mais um ponto da reta, já poderemos descobrir sua equação. Como essa reta é paralela ao eixo dos x na altura 30, todos os seus pontos têm y=30 – dêem uma conferida no gráfico, se quiserem: o ponto com x=1, tem y=30, o ponto com x=–2 tem y=30, o ponto com x=1512 tem y=30 e assim por diante, para todos os pontos. Vamos então escolher um ponto qualquer – com x=15, digamos. Esse ponto terá – adivinhem?! – y=30! Então já sabemos que o ponto (15,30) também pertence a esta reta. Temos então dois pontos e queremos achar a equação da reta que passa por eles.

Se a gente pensar na equação reduzida, y=ax+b, só faltaria só achar o valor de a e proceder às substituições. Esse valor, como vimos na aula anterior e resgatamos nesta aula, é o valor da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo dos x, dada pela expressão $tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, onde $x_A$, $y_A$, $x_B$ e $y_B$ são, respectivamente, ordenadas e abcissas dos pontos A e B, pertencentes à reta. Como já temos os valores, é só substituir:

y = ax + b; A(0,30); B(15,30)

$$tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$tg\alpha = \frac{30-30}{15-0}$$

$$tg\alpha = \frac{0}{15} = 0$$

a = 0

Fazendo a substituição com B(15,30), temos

30 = 0.15 + b

30 = 0 + b

b = 30

e a equação da reta fica y = 0 . x + 30; y = 30

**Importante**

Você deve estar se perguntando: y=30? Ué, mas cadê o x? Isso está certo mesmo? Ao que responderemos, é y=30 mesmo, não tem x e está certíssimo. Veja que o fato de a equação "não ter x" corresponde justamente àquela situação que descrevemos anteriormente: para qualquer valor de x, teremos y=30.

Mais precisamente, retas paralelas ao eixo dos x têm a=0, justamente porque, na expressão da tangente ($tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$), que vai dar o valor de a, o termo yb–ya sempre se anula (se a reta é paralela ao eixo dos x, yA=yB=yC=...). Assim, estas retas terminam representadas na forma y=b, visto que o primeiro termo, ax, é sempre nulo, em consequência de 0.x ser sempre igual a zero.

Chegamos então à reta final: encontrar a interseção entre a reta y=30 e a reta y= –x+40. Como já vimos na Atividade 2, vamos igualar as duas equações:

y = 30; y = –x + 40

30 = -x + 40

x = 40 – 30

x = 10.

Substituindo em qualquer uma das duas equações – y=30 é bem mais fácil – teremos que, para x=10, y=30

A estação, então, ficará situada no ponto (10, 30) ! ! !

# Seção 2
## Circunferência

**Figura 11:** Estação de trem de Atocha, em Madri, Espanha.

A notícia de que as cidades iriam fazer uma parceria para construir a estação de trem teve grande repercussão! A população ficou muito motivada e várias instituições decidiram colaborar com o processo. O escritório de arquitetura mais famoso da cidade A, por exemplo, sugeriu que a estação fosse construída no mesmo espírito da estação de Atocha, em Madri, na Espanha. Essa estação é mais do que um simples lugar embarque e desembarque de passageiros, oferecendo cafés, restaurantes, praça de alimentação e um excelente espaço de convivência para as pessoas que estão em trânsito – veja na figura. O escritório sugeriu ainda que fosse construído um parque ao redor da estação, ideia que foi muito bem recebida pela população e pelas prefeituras.

Outra instituição que decidiu colaborar foi a associação de comerciantes da cidade A, que entrou em contato com a associação de comerciantes da cidade B para que, juntas financiassem o parque. A ideia era dividir o custo em 100 cotas iguais e oferecê-las a 100 comerciantes, 50 de cada cidade. O comerciante que comprasse a cota poderia construir um quiosque no parque. Depois de vendidas as cotas – o que aconteceu muito rapidamente – todos os comerciantes que compraram as cotas queriam ficar exatamente na entrada da estação, lugar em que teriam a melhor chance de vender aos passageiros. Como a construção de 100 quiosques todos juntos seria impossível – ou, na melhor das hipóteses, comprometeria inapelavelmente os projetos arquitetônicos da estação e do parque – as prefeituras se viram diante de um problema: como fazer para que todos os comerciantes tivessem a mesma chance de acessar os passageiros?

Depois de muitas reuniões, as prefeituras decidiram estabelecer que todos os 100 quiosques deveriam estar a uma mesma distância da entrada/saída da estação. Assim, todos teriam, pelo menos teoricamente, a mesma chance de ser visitados por um cliente. Seu amigo José, estagiário no escritório de arquitetura, foi designado para fazer a planta da área em que vão ficar os quiosques. Marcou boa parte deles, todos à mesma distância da estação, e chegou à seguinte figura:

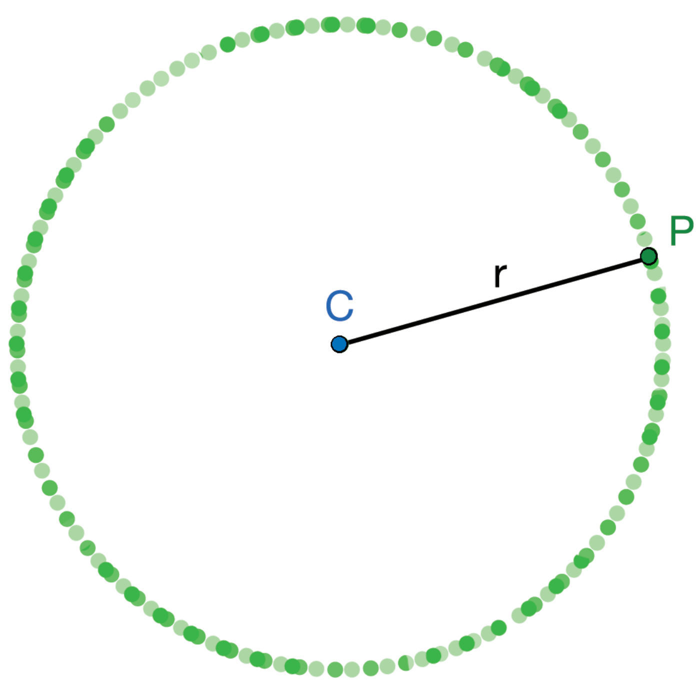


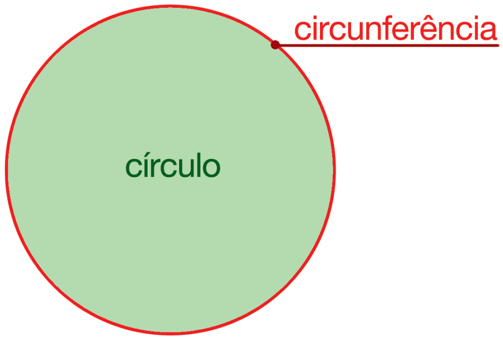

**Figura 12:** Distribuição dos quiosques em torno da estação, representada pelo ponto C.

Ah, é um círculo! disse José – ou será que é uma circunferência? Ih, que dúvida! Existe diferença entre uma e outra ou será que as duas palavras querem dizer a mesma coisa? Como será que eu faço para saber isso, hein?

Para dar aquela resposta caprichada ao prezado José, dê uma olhadinha no boxe seguinte.

Saiba Mais

É muito comum a confusão entre circunferência e círculo. Vamos aproveitar para sanar essa dúvida logo no início. Circunferência é a linha de contorno, enquanto o círculo é a figura plana delimitada pela circunferência.




Circunferência é lugar geométrico dos pontos (x,y) de um plano que estão a uma mesma distância – chamada de raio, R – de um ponto fixo desse plano, denominado centro $C(x_c,y_c)$. Veja na figura seguinte

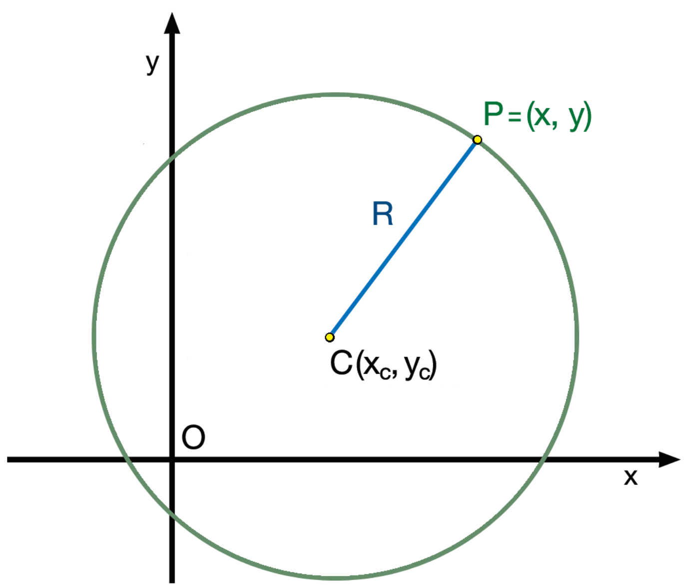



**Figura 13:** Circunferência de raio R e centro em C.

Destacamos aqui a semelhança entre esta situação e a distribuição dos quiosques na figura 12: da mesma forma que todos os 100 quiosques estão a uma determinada distância da estação do trem, todos os pontos P da circunferência estão a uma distância R do centro C. Ok?

Outro elemento conhecido da circunferência  é o diâmetro. O diâmetro é uma corda, ou seja, um segmento que une dois pontos distintos da circunferência. Mas por passar pelo centro, o diâmetro é uma corda especial. O diâmetro tem o dobro da medida do raio (que já definimos anteriormente).

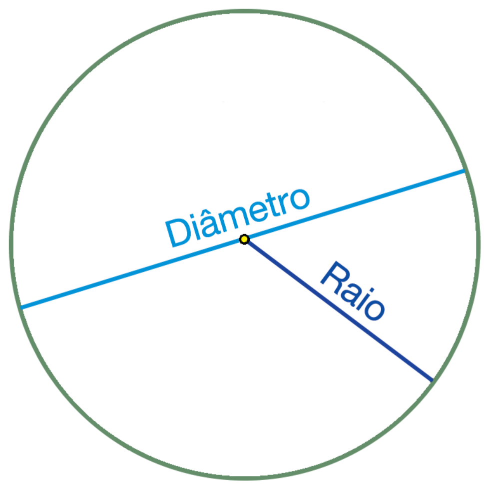



**Figura 14:** Circunferência com diâmetro e raio marcados.

Muito bem! Diâmetro, raio, centro, todos os pontos a uma mesma distância... será que a gente consegue construir uma equação para a circunferência? A resposta, vocês já devem ter adivinhado, é sim, claro! E olha que é até bem simples a idéia. Vamos retomar a figura 13, com algumas alterações:

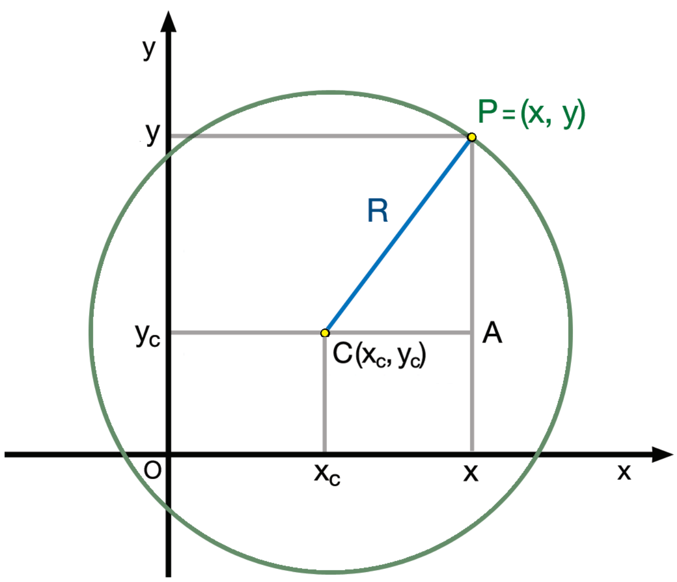



**Figura 15:** Circunferência de raio R e centro em C(xC, yC), com ponto P(x,y) destacado.

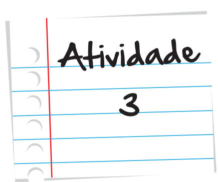
A ideia central é que a distância entre os pontos P e C permanece constante e igual a R. Ora, se nos lembramos da aula anterior, veremos que uma das primeiras coisas que fizemos foi encontrar uma expressão para a distância entre dois pontos. Lembraram dela?

$$d_{AB}{}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Vamos agora substituir os valores de acordo com a figura 15. Vejam lá:

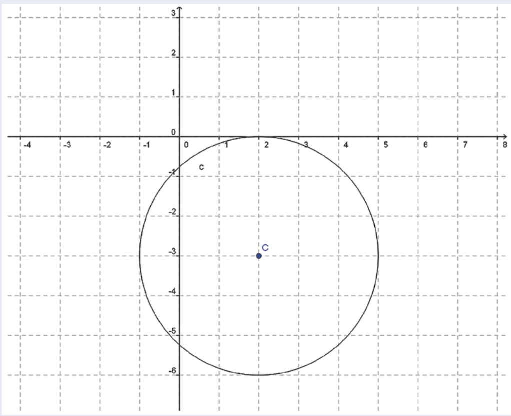
$$R^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$$

Essa é a *equação reduzida* da circunferência, dada em função da medida do raio da circunferência e das coordenadas do seu centro.

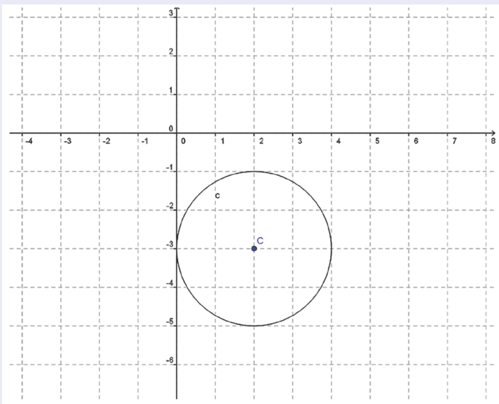



Qual dos desenhos abaixo representa a planta do bairro A e qual representa a planta do bairro B, sendo A uma circunferência de centro (2,-3) e raio 3 e B uma circunferência de centro (3,3) e raio 3?

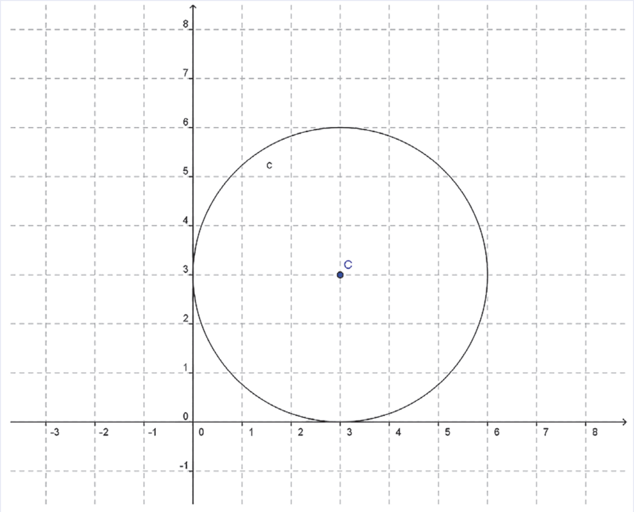
1.



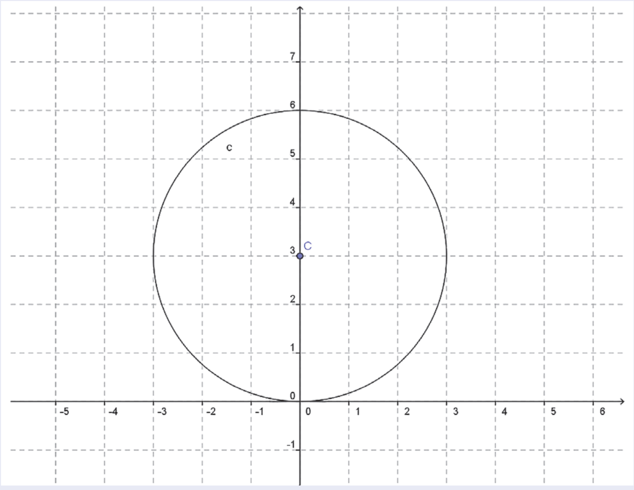
2.



3.




4.




Atividade 3

Lembre-se: faça em uma folha à parte

**Atividade 4**

Lembram da nossa estação? Aquela que ficava no ponto (10, 30) e que estaria rodeada pelos quiosques dos comerciantes que financiaram a construção do parque? Então, levando em consideração que as distâncias estão em quilômetros e que a distância entre os quiosques e a estação deve ser de 100m, escreva a equação reduzida da circunferência formada pelos quiosques.

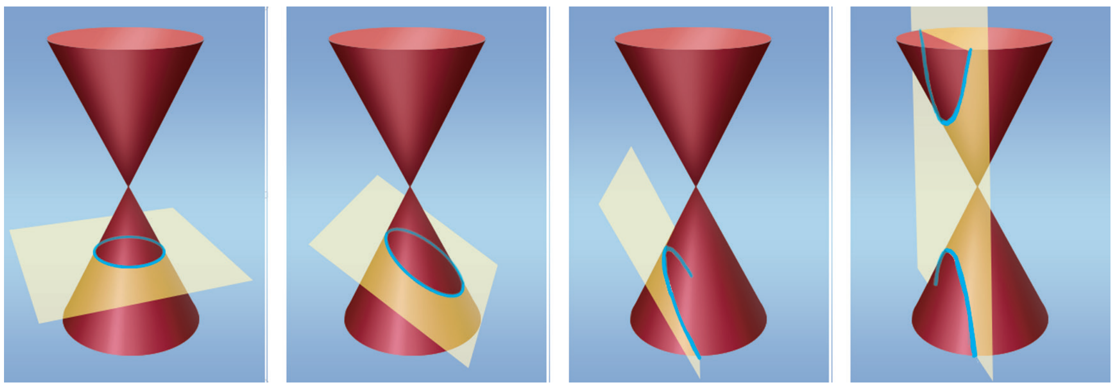
Lembre-se: faça em uma folha à parte

# Seção 3
## As cônicas

Na seção "Para início de conversa", falamos que os primeiros modelos para o nosso sistema solar presumiam que os planetas descreviam órbitas circulares e que, mais tarde, a partir da teoria newtoniana, verificou-se que estas órbitas eram, de fato, elípticas. No entanto, é importante deixar claro que é perfeitamente possível para um corpo celeste descrever uma trajetória circular em torno de um outro corpo – muitos satélites que usamos para comunicação, por exemplo, descrevem órbitas circulares em torno da Terra.

**Figura 16:** Antena para transmissão via satélite situada no teto de um caminhão de TV.

Umas das características fascinantes acerca da teoria newtoniana da gravitação é que as órbitas previstas por ela – circunferência, elipse, parábola e hipérbole – podem ser obtidas “cortando” um cone de folha dupla com um plano. Vejam a figura seguinte:



Circunferência Elipse Parábola Hipérbole

**Figura 17:** **Secção de um cone de folha dupla por um plano, gerando, da esquerda para a direita, uma circunferência, uma elipse, uma parábola e uma hipérbole.**

Atentem para o movimento do plano: quando ele está paralelo à base, o corte – ou seção, para usar o termo mais apropriado – gera um círculo. Quando o plano começa a rodar, estando mais alto na parte esquerda do que na direita, ele gera uma elipse. Quando a rotação se acentua, ele corta apenas uma parte de uma das folhas do cone, gerando a parábola. Finalmente, quando o plano gira ainda mais e começa a tocar as duas folhas do cone, a curva é a hipérbole. E sabem o que é melhor? Todas – e repetimos – todas estas curvas podem ser descritas por equações semelhantes à da circunferência. Assim, encontrar a trajetória de um satélite, ou encontrar o ponto exato em que a trajetória de um determinado cometa cruza a órbita de um planeta termina se resumindo a um problema de álgebra – às vezes com um pouco mais de contas, às vezes com um pouco menos, mas sempre um problema de álgebra.

Cumprimos assim a promessa da seção “Para início de conversa”: as retas que modelam as ruas e trilhos da cidade; as circunferências que modelaram a distribuição dos quiosques e modelam as órbitas dos satélites; as elipses hipérboles e parábolas que modelam as órbitas dos cometas e dos planetas – todas essas retas e curvas, sem exceção – podem ser representadas e trabalhadas pela geometria analítica, muito à maneira do que fizemos no problema de encontrar a posição da estação de trem. Já pensou nas possibilidades que isso pode abrir? Enquanto estiver pensando nelas, ou, até, para expandi-las ainda mais, convidamos você a ver o vídeo do link seguinte – e nos despedimos.

**Multimídia**

Para saber mais sobre a relação entre a Astronomia e a Geometria Analítica, acesse o vídeo "Na cauda do cometa" no link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1137.

## Resumo

- Retas são paralelas se, e somente se, possuem a mesma declividade. Isto é:
- A reta r com declividade $m_r$ é paralela a reta s com declividade $m_s$ se, e somente se, $m_r = m_s$.
- Retas são perpendiculares se, e somente se, a multiplicação de suas declividades é -1. Isto é:
- A reta r com declividade $m_r$ é perpendicular a reta s com declividade $m_s$ se e somente se $m_r \cdot m_s = -1$.
- Para achar o ponto de encontro entre a reta $y_1$ e a reta $y_2$ basta fazer $y_1=y_2$, encontrar o valor de x e, em seguida, substituir em qualquer uma das duas equações.
- Circunferência é lugar geométrico dos pontos (x,y) de um plano que estão a uma mesma distância - chamada de raio, R - de um ponto fixo denominado centro $C(x_c,y_c)$
- Equação reduzida da circunferência: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$

## Veja ainda

Acesse o link http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=pru&cod=_geometriaanalitica e tenha acesso ao um texto interessante sobre geometria analítica que além de resgatar as técnicas básicas e as equações de curvas enfoca suas aplicações.

## Referências

### Livros


- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e*

*Problemas.* Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.

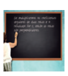
- ________________________. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexto e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

## Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1354144

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=188608



- http://www.sxc.hu/photo/347706 ; http://www.sxc.hu/photo/987819_17827363

- http://www.sxc.hu/photo/908651

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1222796

- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

## Atividade 1

A rua da escola não é nem perpendicular nem paralela a rua da casa de Felipe, as ruas da casa de Felipe e da escola são apenas concorrentes (se interceptam em um único ponto).

Já a rua do parque é perpendicular. Observe os cálculos:

Declividade da rua de Felipe $-2$

Declividade da rua do parque ½

$-2.\ ½ = -1$

## Atividade 2

Interseção entre a rua do cinema, $y = 0{,}5x + 4$ e a rua da lanchonete, $y = -2x + 5$

$0{,}5x + 4 = -2x + 5$

$0{,}5x + 2x = 5 - 4$

$2{,}5x = 1$

$5/2x = 1$

$x = 1/(5/2) = 2/5 = 0{,}4$

Substituindo na equação $y = -2x + 5$ (poderia ter sido na outra, ok?), teremos

$y = -2(0{,}4) + 5 = -0{,}8 + 5 = 4{,}2$

Assim, as coordenadas da interseção são (0,4; 4,2)

Interseção entre a rua do cinema $y = 0{,}5x + 4$ e a rua da casa de Felipe, $y = -2x - 3$

$0{,}5x + 4 = -2x - 3$

$0{,}5x + 2x = -3 - 4$

$2{,}5x = -7$

$x = -7/2{,}5 = -2{,}8$

Substituindo na equação y = 0,5x + 4 (poderia ter sido na outra, ok?), teremos

y = 0,5 . (–2,8) + 4

y = –1,4 + 4

y = 2,6

As coordenadas da interseção são (–2,8 ; 2,6)

## Atividade 3

O desenho 1 representa c1 A. Já o desenho 3 representa c2.

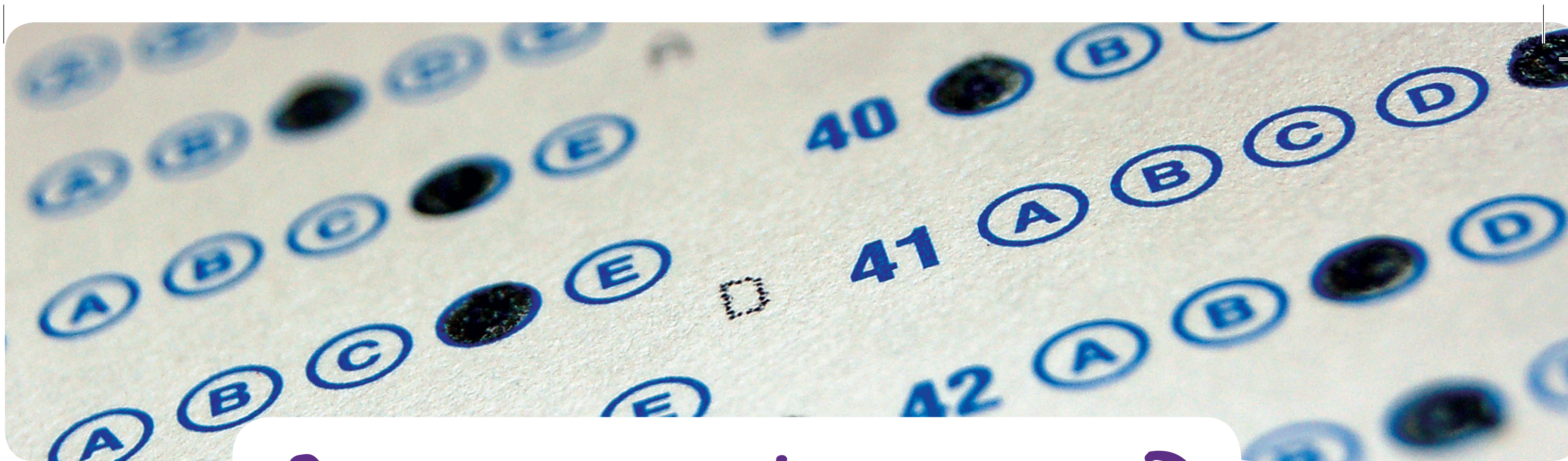
## Atividade 4

A equação reduzida da circunferência é $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

No caso, $x_c = 10$ e $y_c = 30$ e R = 0,1 (100m = 0,1Km, certo?)

A equação então fica

$$(x - 10)^2 + (y - 30)^2 = (0,1)^2$$
$$(x - 10)^2 + (y - 30)^2 = 0,01$$




# O que perguntam por aí?

## QUESTÃO 1 (USP)

A equação da reta passando pela origem e paralela à reta determinada pelos pontos A(2,3) e B( 1, – 4) é:

a. $y = x$

b. $y = 3x - 4$

c. $x = 7y$

d. $y = 7x$

**Resolução**

A reta que passa pelos pontos A e B é descrita pela seguinte equação $y = ax + b$

substituindo o ponto A

$3 = 2a + b$

substituindo o ponto B

$-4 = 1a + b$

então, temos:

$$\begin{array}{l} 3 = 2a + b \\ -(-4) = -a - b \\ \hline \quad 7 = a \end{array}$$

Não é necessário encontrar o valor de b. O valor de a é suficiente para resolver o problema.

Como a reta é paralela a reta que passa por A e B, ambas têm a mesma inclinação, logo o coeficiente angular dessa reta também é 7.

Como a reta passa pela origem $b = 0$.

Assim, a equação da reta que estamos procurando é $y = 7x$

**Resposta:** Letra D