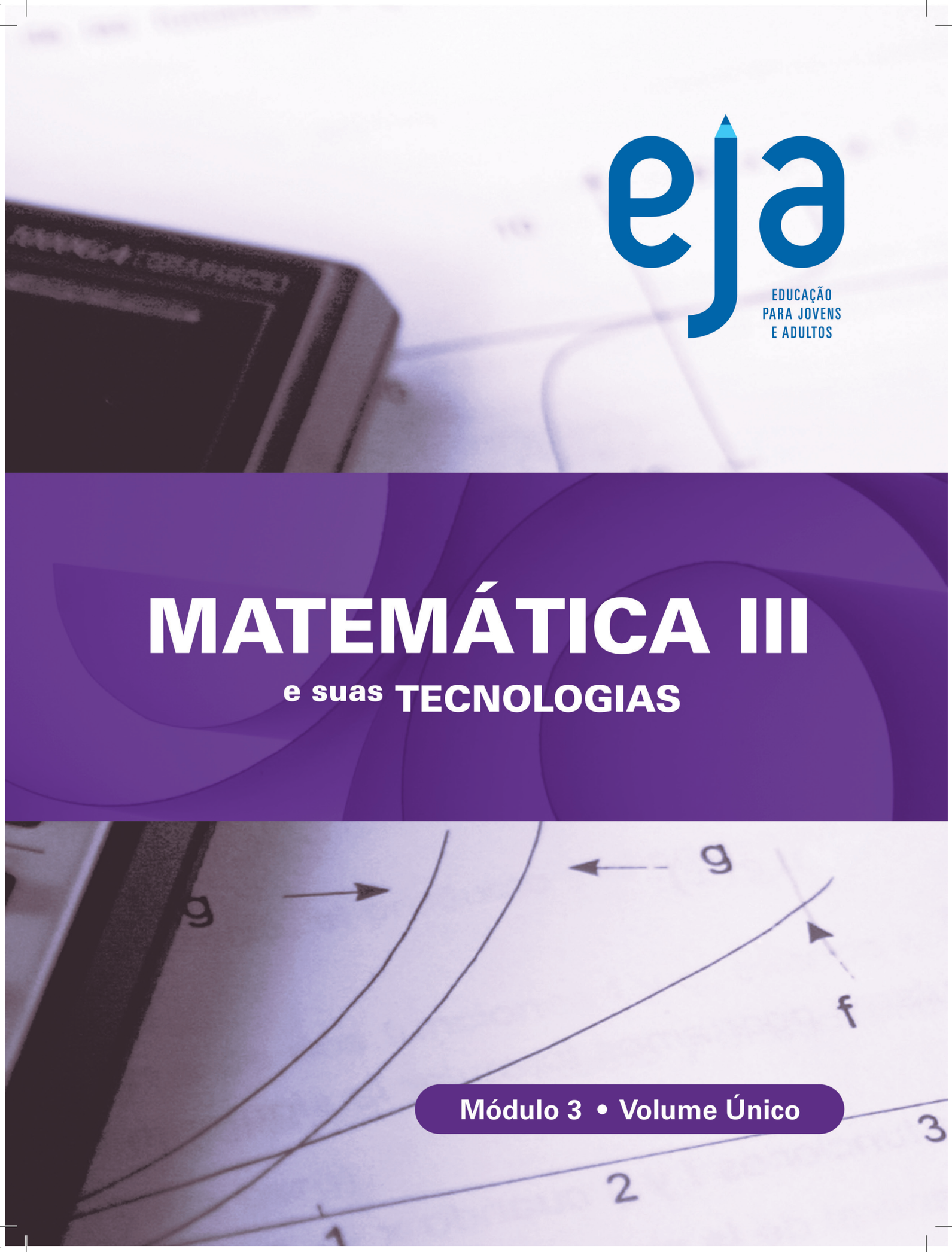


EDUCAÇÃO
PARA JOVENS
E ADULTOS

MATEMÁTICA III

e suas TECNOLOGIAS

Módulo 3 • Volume Único

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Educação
Antônio José Vieira de Paiva Neto

Chefe de Gabinete
Caio Castro Lima

Subsecretaria Executiva
Amaury Perlingeiro

Subsecretaria de Gestão do Ensino
Patrícia Carvalho Tinoco

Superintendência pedagógica
Carla Bertânia Conceição de Souza

Coordenadora de Educação de Jovens e adulto
Rosana Mendes

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL EJA (CECIERJ)

Diretoria Adjunta de Extensão
Elizabeth Ramalho Soares Bastos

Coordenadora de Formação Continuada
Carmen Granja da Silva

Gerência do Projeto
Michelle Casal Fernandes

Diretoria Adjunta de Material Didático
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela Maria da Fonseca Pinto

Elaboração
Agnaldo da C. Esquincalha
Cléa Rubinstein
Daniel Portinha Alves
Gisela Maria da Fonseca Pinto
Heitor B. L. de Oliveira
José Roberto Julianelli
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Raphael Alcaires de Carvalho
Thiago Maciel de Oliveira

Revisão de Conteúdo
Daniel Portinha Alves
José Roberto Julianelli
Luciana Getirana de Santana
Thiago Maciel de Oliveira

Revisão de Língua Portuguesa
Ana Cristina Andrade dos Santos
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Desenvolvimento Instrucional
Bruno José Peixoto
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Desenvolvimento Instrucional
Aroaldo Veneu

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção
Bianca Giacomelli

Projeto Gráfico e Capa
Andreia Villar

Imagem da Capa e Abertura da Unidade
http://www.sxc.hu/photo/475767

Diagramação
Andreia Villar
Alessandra Nogueira
Bianca Lima
Juliana Fernandes
Juliana Vieira
Patrícia Seabra
Ronaldo d' Aguiar Silva

Ilustração
Clara Gomes
Fernando Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider

Copyright © 2013, Brasilia

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito.

M425

Matemática e suas tecnologias. Módulo III - Matemática / Benaia Sobreira de Jesus Lima - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013.

296 p.; 21 x 28 cm - (Nova EJA)

ISBN: 978-85-7648-931-3

1. Matemática. 2. Logaritmos. 3. Geometria. 4. Prismas.

CDD: 510

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT e AACR2.

Sumário

Unidade 1 • Introdução à Geometria Espacial 7

Unidade 2 • Regularidades numéricas – sequências e progressões 47

Unidade 3 • Matemática Financeira 85

Unidade 4 • Matemática Financeira II 109

Unidade 5 • Matrizes e Determinantes 127

Unidade 6 • Sistemas Lineares 153

Expansão • Função Logarítmica 177

Expansão • Geometria Espacial: prismas e cilindros 209

Expansão • Geometria Espacial: pirâmides e cones 235

Expansão • Geometria Espacial: esferas 267

Prezado Aluno,

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação.

Através da educação a pessoa toma a sua história em suas próprias mãos e consegue mudar o rumo de sua vida. Para isso, acreditamos na capacidade dos alunos de aprender, descobrir, criar soluções, desafiar, enfrentar, propor, escolher e assumir suas escolhas.

O material didático que você está recebendo pretende contribuir para o desenvolvimento destas capacidades, além de ajudar no acompanhamento de seus estudos, apresentando as informações necessárias ao seu aprendizado.

Acreditamos que, com ajuda de seus professores, você conseguirá cumprir todas as disciplinas dos quatro módulos da matriz curricular para Educação de Jovens e Adultos da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

E assim, novas histórias acontecerão em sua vida.

Para ajudá-lo no seu percurso, segue abaixo uma tabela que apresenta a grade de disciplinas que irá cursar:

MÓDULO	NOME DISCIPLINA	CH SEMANAL	CARGA HORÁRIA TOTAL
MÓDULO I	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA I	4	80
MÓDULO I	MATEMÁTICA I	4	80
MÓDULO I	HISTÓRIA I	4	80
MÓDULO I	GEOGRAFIA I	4	80
MÓDULO I	FILOSOFIA I	2	40
MÓDULO I	SOCIOLOGIA I	2	40
MÓDULO I	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL DO MÓDULO I			420
MÓDULO II	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA II	4	80
MÓDULO II	MATEMÁTICA II	4	80
MÓDULO II	FÍSICA I	4	80
MÓDULO II	QUÍMICA I	4	80
MÓDULO II	BIOLOGIA I	4	80
MÓDULO II	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL DO MÓDULO II			420
MÓDULO III	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA III	4	80
MÓDULO III	MATEMÁTICA III	4	80
MÓDULO III	HISTÓRIA II	3	60
MÓDULO III	GEOGRAFIA II	3	60
MÓDULO III	FILOSOFIA II	2	40
MÓDULO III	SOCIOLOGIA II	2	40
MÓDULO III	EDUCAÇÃO FÍSICA	2	40
MÓDULO III	LÍNGUA ESTRANGEIRA OPTATIVA	2	40
MÓDULO III	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL NO MÓDULO III			460
MÓDULO IV	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA IV	4	80
MÓDULO IV	MATEMÁTICA IV	3	60
MÓDULO IV	FÍSICA II	3	60
MÓDULO IV	QUÍMICA II	3	60
MÓDULO IV	BIOLOGIA II	3	60
MÓDULO IV	LÍNGUA ESTRANGEIRA	2	40
MÓDULO IV	ARTES	2	40
MÓDULO IV	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL NO MÓDULO IV			420

Conte conosco.
Equipe da Fundação Cecierj e SEEDUC

“

Nada lhe posso dar que já não exista em você mesmo.

Não posso abrir-lhe outro mundo de imagens, além daquele que há em sua própria alma.

Nada lhe posso dar a não ser a oportunidade, o impulso, a chave.

Eu o ajudarei a tornar visível o seu próprio mundo, e isso é tudo.

Hermann Hesse

”

Introdução à Geometria Espacial

Para início de conversa...

Em abril de 2012, o jornalista Ethevaldo Siqueira, do jornal O Estado de São Paulo, publicou em seu blog uma interessante reportagem sobre uma televisão que permite ao espectador ver imagens em 3D sem o auxílio de óculos especiais. A tela do televisor tem 200 polegadas (aproximadamente 5 metros) de diagonal e permite visualizar imagens 3D em alta definição e num ângulo de visão muito maior do que os sistemas anteriores. O monitor é tão grande que pode reproduzir a imagem de pessoas, de um carro inteiro e mesmo de um tubarão em tamanho natural.

Multimídia

Para ler a reportagem na íntegra, acesse o link http://blogs.estadao.com.br/ethevaldo-siqueira/2012/04/21/enfim-a-tv-3d-sem-oculos-especiais/.

Você já parou para pensar no que significa dizer que essa nova tecnologia de televisores, computadores e etc é 3D?

Basta pensar um pouco para entender: nós podemos nos movimentar de um lado para o outro, para frente e para trás e para cima e para baixo. Dê uma olhada na figura seguinte e veja se consegue perceber essas possibilidades de movimentação.

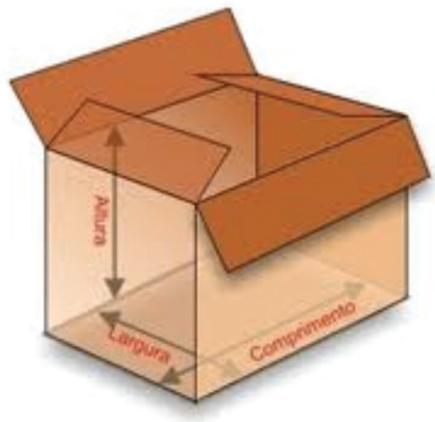


Figura 1: Caixa com suas 3 dimensões destacadas: altura, largura e comprimento.

Essa caixa, assim como a grande maioria dos objetos que conhecemos, tem 3 dimensões: altura, largura e comprimento. Assim, se nos movermos para cima e para baixo, estaremos acompanhando a altura da caixa. Nos movendo para frente e para trás, estaremos acompanhando seu comprimento. E, finalmente, nos movendo para um lado e para o outro, estaremos acompanhando sua largura. Conseguiu perceber as 3 possibilidades de movimentação agora?

A partir dessa explicação, fica mais fácil entender o significado da sigla 3D: ela faz referência ao fato de a grande maioria dos objetos que conhecemos terem três dimensões, por exemplo, comprimento, altura e largura. Um objeto cuja forma tem três dimensões é chamado de tridimensional.

O conceito de dimensão, além de constantemente utilizado por nós no dia a dia, é muito importante na Matemática. Na tecnologia disponível até então, nossos televisores e computadores reproduziam imagens tridimensionais em telas planas (com apenas duas dimensões).

O que se tenta fazer com essa nova tecnologia é projetar espacialmente imagens tridimensionais.

Agora repare à sua volta. Será que você consegue identificar objetos ou figuras com três dimensões (com altura, largura e comprimento)? O charmoso carro da imagem seguinte é um bom exemplo.

Figura 2: Um carro é um exemplo de objeto tridimensional.

E objetos bidimensionais, que têm apenas altura e largura?

O CD da próxima imagem é um bom exemplo!

Figura 3: CDs e DVDs são exemplos de objetos bidimensionais.

E objetos com apenas uma dimensão – somente largura, por exemplo – será que você consegue imaginá-los?

As linhas da estrada a seguir são bons exemplos!

Figura 4: As faixas de uma estrada são exemplos de objetos unidimensionais.

E objetos sem dimensão – será que existem?

Repare essas estrelas no céu, por exemplo!!

Figura 5: As estrelas do céu são exemplos de objetos sem dimensão.

E objetos com quatro dimensões, são mais difíceis de imaginar?

Certamente! Isto acontece porque vivemos em um mundo (aparentemente) com apenas três dimensões espaciais. Por isso, seria difícil enxergar dimensões superiores.

Então, que tal nos aprofundarmos mais nesses estudos? Vamos entender os conceitos e as formas que habitam nosso mundo a partir da habilidosa leitura feita pela matemática.

Uma dica bacana é o livro "Planolândia: um romance de muitas dimensões" (Flatland: A Romance of Many Dimensions) escrito por Edwin A. Abbott. *Nesse livro,* Abbott usou o mundo bidimensional fictício de Flatland para fazer reflexões sobre a sociedade e uma importante análise sobre as dimensões. A versão original, em inglês, está disponível para download, na íntegra e gratuitamente, no site Domínio Público, do Ministério da Educação. O link direto para o arquivo é http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ph000007.pdf. A tradução para o português foi feita pela Editora Conrad, que também é responsável pela sua distribuição.

Objetivos de aprendizagem

- Entender o conceito de dimensão
- Entender os conceitos básicos de ponto, reta e plano
- Identificar posições relativas entre pontos, retas e planos
- Identificar poliedros e não poliedros, identificando os diferentes tipos.
- Identificar os elementos de um poliedro
- Reconhecer os poliedros de Platão.
- Aplicar a relação de Euler

Seção 1
Geometria espacial: conceitos básicos

A palavra Geometria vem do grego e significa medir a terra. Seu surgimento está ligado ao cotidiano das civilizações egípcia e babilônica, por volta do século XX a.C. Estava relacionada, por exemplo, ao plantio, construções e movimento dos Astros e era muito utilizada para o cálculo de áreas e volumes .

Já a palavra espacial não se refere ao espaço sideral ou a algo sofisticado, complexo e de difícil compreensão. Pelo contrário, ela se refere ao mundo em que vivemos, com suas três dimensões: altura, largura e comprimento. Também serve para marcar a diferença entre a geometria no mundo de três dimensões – ou, no "espaço" – e a geometria no mundo de duas dimensões – ou no "plano". Assim, geometria espacial e plana poderiam muito bem se chamar, respectivamente, geometria tridimensional (ou em 3 dimensões) e geometria bidimensional (ou em 2 dimensões).

Esclarecidos os termos principais, podemos utilizar os exemplos que vimos anteriormente para conhecer alguns objetos matemáticos importantes e que farão parte do nosso estudo ao longo de toda essa unidade. Vamos lá?

Se você imaginar o objeto representado a seguir, que possui apenas duas dimensões, se estendendo infinitamente em todas as direções, você visualizará o conceito matemático primitivo de plano.

Figura 6: O objeto representado, se estendido infinitamente para cima, para baixo e para os lados esquerdo e direito, permite visualizar o conceito de plano.

Agora, se você imaginar o objeto unidimensional como o representado aqui também estendendo-se infinitamente para ambos os lados você terá a noção do conceito matemático primitivo de reta.

Figura 7: O objeto representado, se estendido infinitamente para os dois lados, permite visualizar o conceito de reta.

E o objeto sem dimensão? Imaginou desta maneira?

Figura 8: O objeto representado, se abstraído de suas já pequenas altura e largura, permite visualizar o conceito de ponto.

Esse objeto primitivo matemático é conhecido como ponto.

Saiba Mais

Estes conceitos foram propostos pela primeira vez pelo matemático grego Euclides, que viveu na Alexandria da primeira metade do séc. III a.C. (a data e o local de seu nascimento não são precisos).

Euclides possivelmente adquiriu seus primeiros conhecimentos matemáticos dos discípulos de outro importante filósofo grego: Platão. A mais importante obra de Euclides foi "Os Elementos". São treze capítulos fundamentais para matemática sobre Aritmética, Geometria e Álgebra.

A obra "Os Elementos" já está em domínio público e pode ser baixada gratuitamente no portal Domínio Público, do Ministério da Educação. O link direto para o arquivo é http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf.

Nos Elementos, Euclides afirma que "ponto é o que não tem partes ou grandeza alguma", "linha é o que tem comprimento sem largura" e "superfície é o que tem comprimento e largura". Parecido com o que acabamos de ver? E olha que o livro já tem mais de dois mil anos!

É claro que pontos, retas e planos são conceitos e objetos matemáticos e, por isso, não são encontrados em situações cotidianas. No entanto, podemos fazer aproximações. Dê uma olhada na figura seguinte:

Figura 9: Imagem de uma praça e do prédio da prefeitura de uma cidade polonesa.

De acordo com os conceitos que acabamos de apresentar, um plano se estende infinitamente em duas direções. No entanto, o piso da praça, apesar de não se estender infinitamente, pode perfeitamente ser considerado representação de um plano. As fachadas das casas à direita da foto vão pelo mesmo caminho: não se estendem infinitamente para cima e para os lados, mas também podem representar a ideia que temos de um plano. O mesmo vale para a fachada das casas à esquerda da foto.

Estão vendo as linhas, feitas com pedras pequenas, que se cruzam no chão da praça? E as linhas que separam um prédio do outro, na fachada das casas à direita? Pois então, podemos usar a mesma argumentação do parágrafo anterior: não se estendem indefinidamente, mas podemos considera-las como representações de retas. Mesmo os postes, que têm um tamanho menor do que as linhas do chão e as separações das fachadas, também podem representar a ideia que temos de uma reta.

Finalmente, mantendo a linha de argumentação, poderíamos considerar as lâmpadas penduradas nos postes e as pedras menores do calçamento – aquelas, que estão nas retas que se cruzam – como representações de pontos. Se representássemos esses planos, retas e pontos na imagem anterior, teríamos a seguinte figura:

Figura 10: Imagem da praça, agora com planos, retas e pontos marcados.

Acompanhe lá: o plano do piso da rua, chamamos de plano α. Já o plano das fachadas das casas à direita, chamamos de plano β, e o plano das fachadas à esquerda de plano γ. A reta r coincide com o poste, ao passo que as retas s, t e u – das linhas no piso do calçamento, lembra? – estão no plano do piso da rua, o plano α. No plano β, das fachadas das casas à direita, estão representadas as retas v, w e z, que separam uma casa da outra. O ponto A coincide com a lâmpada do poste, enquanto os pontos B, C e D coincidem com aquelas pequenas pedras do calçamento.

Conseguiu ver tudo? Se conseguiu, ótimo, parabéns! Se não conseguiu, tente novamente: olhe novamente as figuras e procure identificar os elementos que descrevemos. A visualização deles é muito importante e o tempo a mais que você investir nesta etapa certamente irá facilitar sua compreensão dos próximos tópicos.

Multimídia

A visualização é uma das competências mais importantes a serem desenvolvidas pelos que querem se sair bem no estudo de geometria espacial. No link http://www.uff.br/cdme/triplets/triplets-html/triplets-br.html você terá acesso a um jogo para exercitar a visualização em três dimensões em um trabalho interdisciplinar juntamente com Língua Portuguesa e Inglesa.

Antes de prosseguir, é preciso registrar a nomenclatura de pontos, retas e planos: planos são nomeados com letras gregas (α, β, γ, etc), as retas são nomeadas com letras minúsculas (r, s, t, etc) e os pontos são nomeados com letras maiúsculas (A, B, C, etc).

Atividade 1

Observe o prato representado na figura. Será que você consegue identificar elementos que possam ser um exemplo de ponto, reta e plano?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2

Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas

Muito bem! A partir da nossa conversa inicial sobre dimensões e sobre os conceitos que trabalhamos com a imagem da praça e a Atividade 1, podemos pensar que moramos num mundo de três dimensões, povoado por objetos que podem ter três, duas, uma ou nenhuma dimensão – e que estes objetos ora se encontram, ora não.

Para a conversa não ficar muito abstrata, dê uma olhada naquela imagem da praça já com as marcações de pontos retas e planos, que reproduzimos aqui, para facilitar seu estudo.

Figura 11: Imagem da praça, agora com planos, retas e pontos marcados.

Pronto? Muito bem. Como exemplo de objeto de 3 dimensões temos as próprias pessoas que andam na praça. O chão e as fachadas à esquerda e à direita são exemplos de planos; as linhas do piso e as que separam as frentes das casas da fachada à direita são exemplos de retas; e a lâmpada do poste e as pedras pequenas do calçamento são exemplos de pontos.

Perceba agora que o poste (para nós, uma reta), se encontra com o piso (um plano) apesar de não se encontrar com as fachadas à esquerda e à direita (outros dois planos). A lâmpada (um ponto), não se encontra com o poste (uma reta) ao passo que as pedras pequenas do calçamento se encontram com as linhas do calçamento (retas) e com o piso (um plano). As mesmas pedras pequenas (pontos), no entanto, não se encontram com os planos das fachadas à esquerda e à direita – e por aí vai.

É justamente para poder lidar com essas questões de forma mais precisa que vamos trabalhar os conceitos de posição relativa entre ponto, reta e plano.

Ponto e reta, ponto e plano

No que diz respeito à posição relativa entre um ponto e uma reta, o assunto é bem simples: ou o ponto está sobre a reta ou o ponto não está sobre a reta. Mesma coisa vale para os planos: ou o ponto está sobre o plano ou o ponto não está sobre o plano. Dê uma olhada nas imagens seguintes.

Figura 12: Os fios de eletricidade e os pássaros neles pousados podem ser representados por retas e pontos respectivamente.

Nesta imagem, podemos considerar os fios como retas e os pássaros como pontos. Os pássaros que estiverem pousados num fio serão considerados como pontos daquela reta. Já o pássaro que está voando (você consegue encontra-lo na imagem?) será um ponto que não está sobre nenhuma das retas representadas.

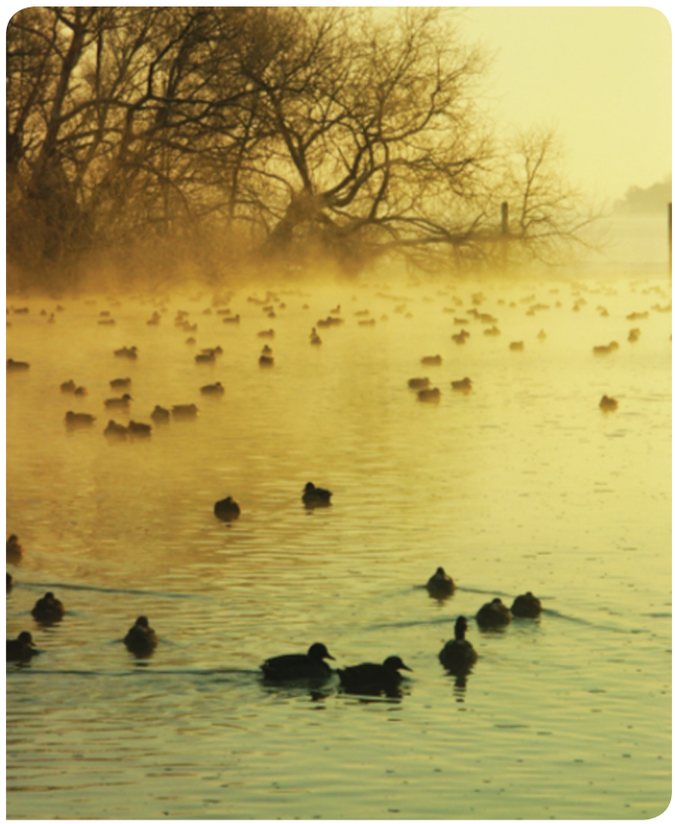


Figura 13: A superfície da lagoa e os patos desta imagem podem ser representados, respectivamente, por um plano e por pontos.

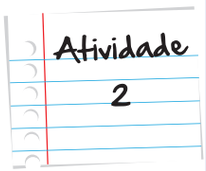
Já nesta imagem, podemos considerar a superfície da lagoa como um plano e os patos como pontos que estão situados sobre este plano. Caso houvesse algum pato voando, diríamos que ele seria um ponto que não estaria situado sobre o plano.

Antes de passarmos à notação matemática, cumpre falar dos pontos colineares - que, como você já pode ter adivinhado pelo nome, são aqueles que estão sobre a mesma reta. Olhando para a imagem dos pássaros pousados nos fios, você pode ver claramente que há uma grande quantidade de pontos colineares, uma vez que há muitos pássaros pousados sobre um único fio. Já na imagem da lagoa, o alinhamento dos patos não é muito claro – o máximo que conseguimos encontrar foram três patos alinhados. E vocês?

Finalizamos a seção, então, com a notação matemática:

- quando um ponto A está sobre uma reta r, dizemos que ele pertence a essa reta. Usando a notação convencional, diremos que $A \in r$.
- quando um ponto A não está sobre uma reta r, dizemos que ele não pertence a essa reta. Usando a notação convencional, dizemos que $A \notin r$.
- quando um ponto A está sobre um plano α, dizemos que $A \in \alpha$
- quando um ponto A não está sobre um plano α, dizemos que $A \notin \alpha$

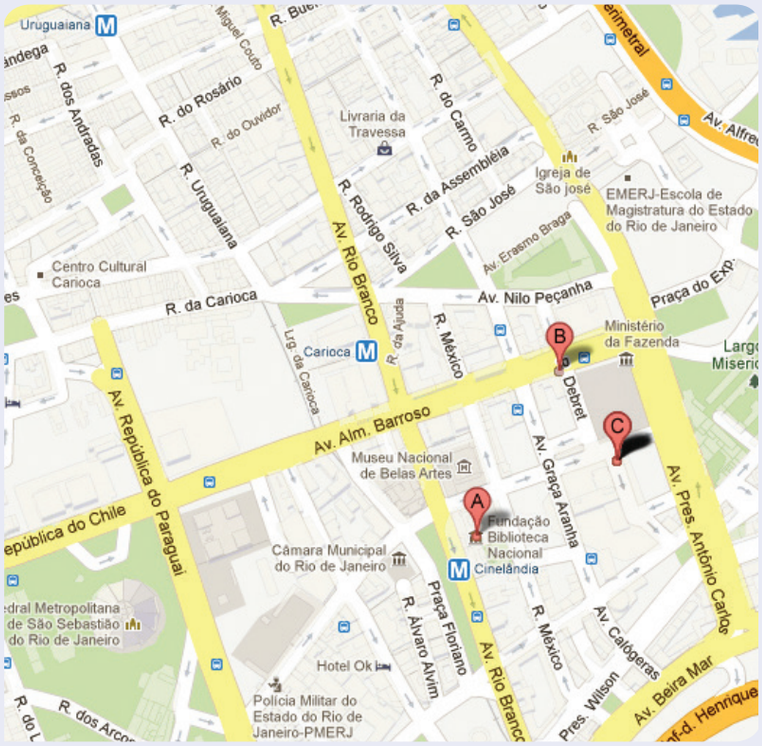
De posse deste conceitos, que tal fazer a próxima atividade?



Suponha que você quer fazer uma visita à Biblioteca Nacional no Rio de Janeiro. Para conhecer melhor as cercanias, você acessou o Google Maps, digitou "Biblioteca Nacional" e clicou em Ok. O site apresentou um mapa com 3 endereços, todos no centro do Rio: o da Fundação Biblioteca Nacional, marcado como A no mapa; o da Biblioteca Nacional, marcado como B, no mapa e o do escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional, marcado como C no mapa.

Ao longo do percurso, você aproveitou o trajeto para responder com verdadeiro ou falso algumas dúvidas de um amigo, sempre considerando as ruas e avenidas como retas e os endereços como pontos.

Atividade 2



a. O ponto A (Fundação Biblioteca Nacional) pertence à Av. Rio Branco.

b. O ponto C (escritório de direitos autorais da Biblioteca Nacional) não pertence à Av. Graça Aranha .

c. O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à Av. Almirante Barroso.

d. O ponto B (Biblioteca Nacional) pertence à rua Debret.

e. O Museu Nacional de Belas Artes (logo acima do ponto A) pertence à Avenida Rio Branco.

f. Os 3 endereços da Biblioteca Nacional (pontos A, B e C) são colineares.

g. A estação do metrô Uruguaiana (representada pela letra M) não pertence à rua Uruguaiana.

h. As estações do metrô Carioca e Cinelândia, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

i. As estações do metrô Carioca, Cinelândia e Uruguaiana, representadas pelos pontos M no mapa, são colineares.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Retas

Temos uma pergunta para fazer. Você estranhou quando leu os itens b e c da Atividade 2 pela primeira vez? Pensou alguma coisa do tipo "ué, mas um lugar não pode estar em duas ruas ao mesmo tempo"? Pois é, esse pensamento é bastante comum nesse tipo de questão.

Depois, claro, refletindo mais um pouco, você lembrou que se as duas ruas se cruzarem, o lugar que estiver exatamente na esquina entre elas pertencerá às duas ruas ao mesmo tempo - certo? Se agora lembrarmos que, nessa atividade, os locais eram os pontos e as ruas eram as retas, teremos um bom critério para iniciar o estudo das posições relativas entre as retas – a saber, o fato de elas se encontrarem ou não.

Duas retas que se encontram são chamadas de retas concorrentes. Elas se cruzam num único ponto, que é comum a ambas. Esse ponto é comumente chamado de ponto de interseção. Em nosso exemplo, ele seria justamente a esquina entre as duas ruas.

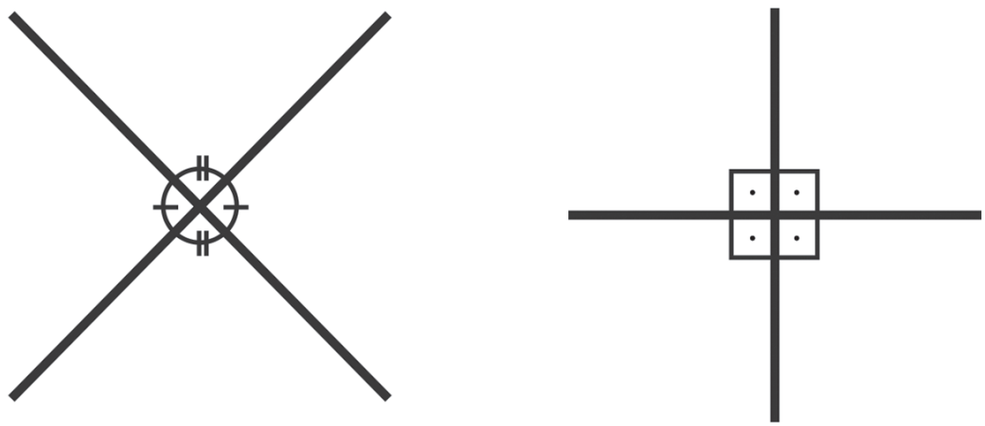


Figura 14: As duas retas à esquerda são concorrentes e, no ponto em que se encontram, formam quatro ângulos, iguais dois a dois – e, nesta figura, identificados com um ou dois traços. Já as duas retas à direita são perpendiculares porque, além de se encontrarem (serem concorrentes), formam, no ponto em que se encontram, quatro ângulos de 90 graus.

Duas retas, quando se encontram, formam quatro ângulos, iguais dois a dois. Veja na figura. Quando as retas se encontram formando um ângulo de 90° , são chamadas de perpendiculares – e, neste caso, os quatro ângulos formados são iguais. Veja na figura anterior. Para indicar que a reta r é perpendicular à reta s, escrevemos $r \perp s$.

Figura 15: Duas retas paralelas.

Encerrada a discussão sobre as retas que se encontram, vamos à discussão sobre as retas que não se encontram. Estas retas que não se encontram podem ser divididas em dois grupos. O primeiro deles é formado por retas que pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram. As retas r e s, representadas na figura 15, são um bom exemplo disso. As retas que pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram são chamadas de paralelas. Para indicar que a reta r é paralela à reta s, escrevemos $r \parallel s$.

O segundo grupo de retas que não se encontram é formado por retas que não pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram. As retas r (do poste) e t (piso de pedras) da figura 10 são um bom exemplo disso. As retas que não pertencem ao mesmo plano e nunca se encontram são chamadas de reversas.

Saiba Mais

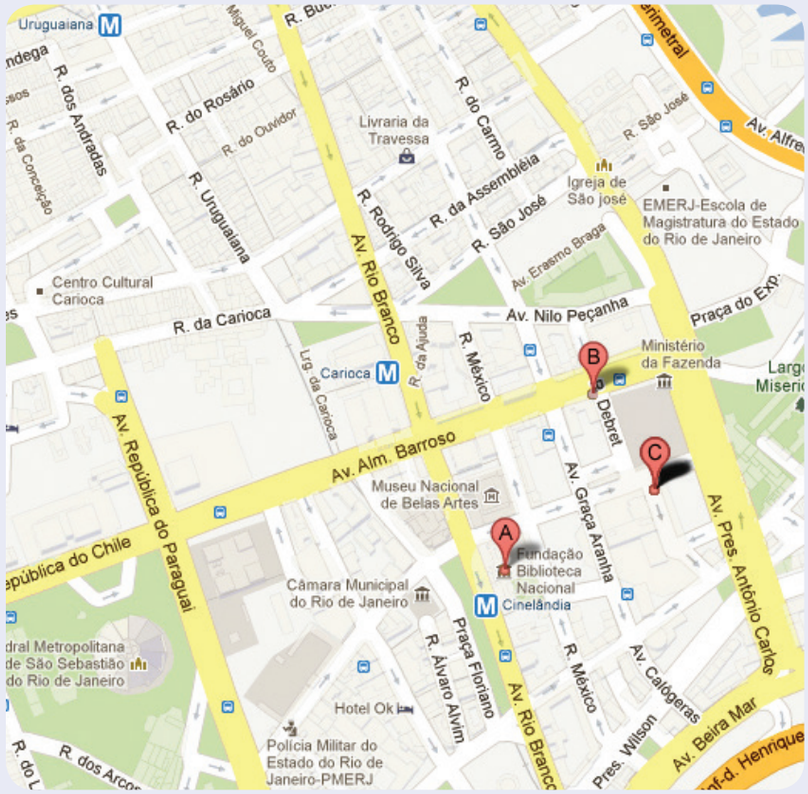
Uma grande crise na matemática está relacionada às retas paralelas, abordadas no 5º Postulado de Euclides. Esse postulado também consta do livro Elementos, a que nos referimos no início da nossa aula. Para tratar da Geometria, Euclides elaborou quatro axiomas (verdades iniciais do sistema que não necessitam ser demonstradas), postulou uma 5ª verdade e tentou demonstrá-la a partir das outras quatro.

O 5º postulado diz que dado um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta s paralela à reta r dada. Ele foi desafiador durante séculos. Na verdade, a existência da reta paralela era (e continua sendo) facilmente demonstrada. A unicidade das paralelas é que necessitava ser postulada.

A solução desse problema demorou cerca de dois mil anos para aparecer e somente em 1829 o matemático russo Nikolai Lobachevski (1793-1856) publicou Sobre os *Princípios da Geometria* onde apresentava uma nova geometria, baseada em um novo postulado que viria a substituir o 5º. Com essa nova geometria, era possível ter uma nova concepção de espaço, diferente daquela que tínhamos a partir da geometria euclidiana. Surgiam assim, as geometrias não euclidianas.

Dito isso, e aproveitando a familiaridade que já desenvolvemos com o mapa da Atividade 2 -, vamos trabalhar os conceitos de posição relativa entre retas na atividade a seguir.

Atividade 3

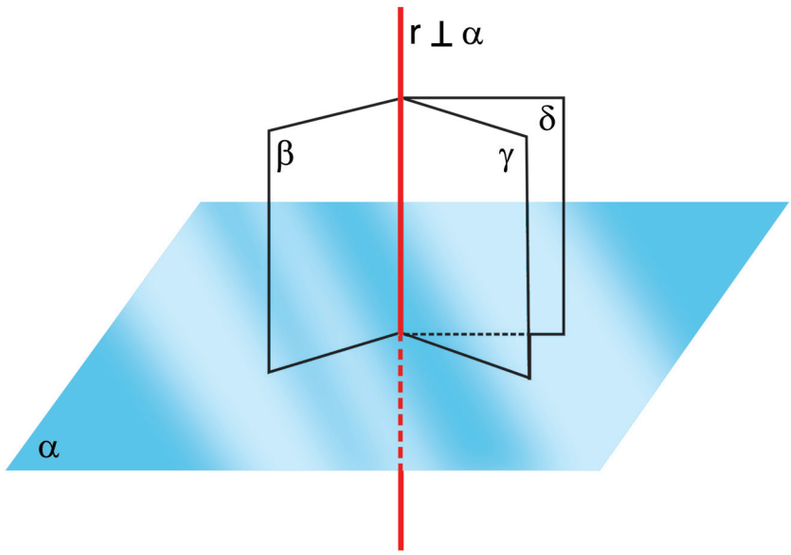


Eis novamente o mapa da região do centro do Rio de Janeiro. Só que, desta vez, as perguntas dizem respeito à posição relativa das ruas. Note que as ruas e avenidas continuam representando retas e os endereços representam os pontos. Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a. A Av. Almirante Barroso é perpendicular a Av. Rio Branco
b. A Rua Debret e a Rua México são concorrentes
c. A Av. Graça Aranha, a rua México e a Av. Rio Branco são paralelas
d. A rua São José e a Av. Nilo Peçanha não são concorrentes
e. A rua do Carmo é perpendicular à rua da Assembléia

Anote suas respostas em seu caderno

Finalizamos esta seção dizendo que o mesmo estudo que fizemos da posição relativa entre retas pode ser estendido às retas e planos e ainda aos planos entre si. Teríamos assim retas e planos perpendiculares a outros planos, retas e planos paralelos a planos, planos secantes e muitas outras situações de posicionamento relativo, com interessantes implicações matemáticas.



Saiba Mais

• Para conhecer as várias situações e implicações matemáticas do posicionamentos relativos entre retas e planos e entre vários planos, acesse o site http://www.colegioweb.com.br/matematica/perpendicularismo.html

Seção 3
Sólidos Geométricos

Que tal uma casquinha de sorvete com uma bola de sorvete de flocos?

Ou um suco bem gelado de laranja?

Ou ainda um delicioso chocolate?

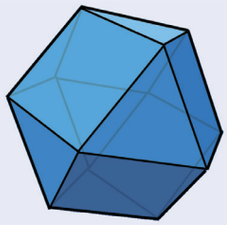
E uma viagem para conhecer as pirâmides do Egito?

Figura 16: Objetos e locais da vida real em que podemos encontrar representações de sólidos geométricos.

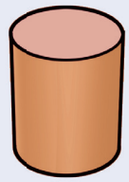
Em todas essas deliciosas opções temos representações do que chamamos em matemática de sólidos geométricos. Esses sólidos podem ser classificados como poliedros ou não poliedros. Mas qual seria a diferença entre um poliedro e um não poliedro? É justamente esse o tema da nossa próxima atividade.

Aqui faremos assim: nós vamos apresentar a vocês vários sólidos, dizendo quais são poliedros e quais não são poliedros. A ideia é que você identifique as características que permitem diferenciar um de outro e responda: qual (ou quais) a(s) diferença(s) entre um poliedro e um não poliedro?

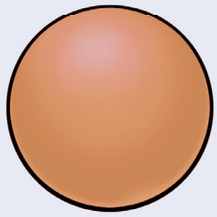
Atividade 4



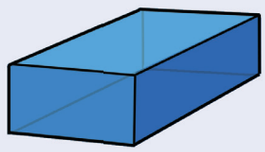
Exemplo de poliedro



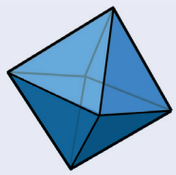
Exemplo de não poliedro



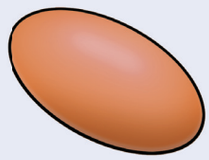
Exemplo de não poliedro



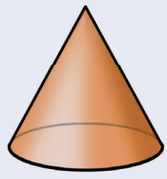
Exemplo de poliedro



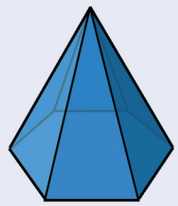
Exemplo de poliedro



Exemplo de não poliedro



Exemplo de não poliedro



Exemplo de poliedro

Anote suas respostas em seu caderno

Poliedros e a relação de Euler

Retomando a resposta da Atividade 4, denominamos de poliedro o sólido limitado por regiões poligonais planas, certo? Muito bem: essas regiões são chamadas de faces e têm, duas a duas, um lado comum, chamado de aresta. Vértice é o ponto comum a três ou mais arestas. Veja na figura seguinte:

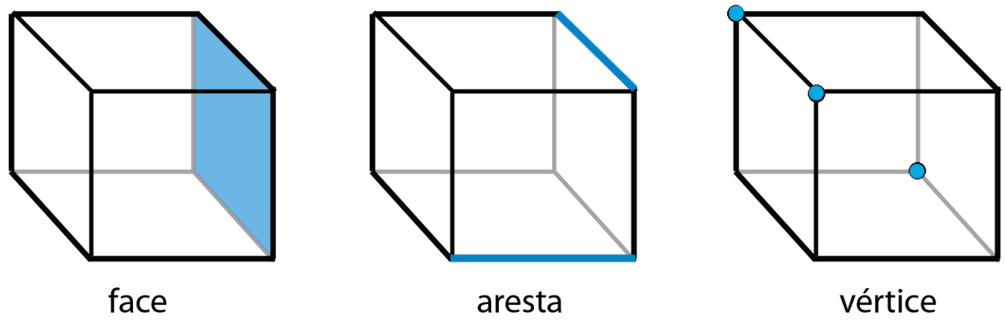
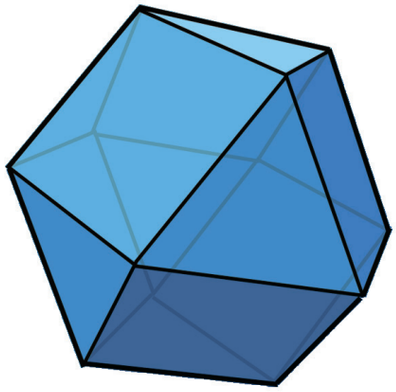


Figura 17: **Elementos de um poliedro. No poliedro da esquerda, está destacada a face lateral direita. No poliedro do centro, estão destacadas duas arestas. No poliedro da direita, estão destacados três vértices.**

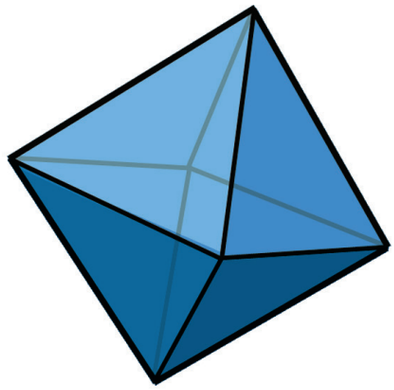
Assim como o interesse pelos fundamentos da Geometria, o interesse pelos poliedros remonta à Grécia antiga: o filósofo Platão (século IV a.C.) descreveu a construção do Universo a partir dos elementos Água, Ar, Terra e Fogo, representados da seguinte maneira.



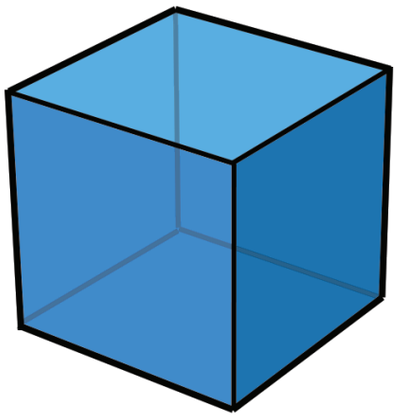
Icosaedro

O elemento água era representado pelo poliedro denominado Icosaedro, que possui um total de vinte faces. Daí o prefixo "ico", que vem da palavra grega "eikosi" (vinte). Todas as vinte faces são triangulares.

O elemento ar era representado pelo poliedro denominado Octaedro, que possui um total de oito faces, daí o prefixo "octa". Todas as faces do octaedro são triangulares.



Octaedro



Hexaedro

O elemento terra era representado pelo poliedro denominado Hexaedro, que possui um total de seis faces, daí o prefixo "hexa". Todas as faces do hexaedro de Platão são quadradas. Imaginamos que você tenha reparado que este hexaedro em particular é o nosso já conhecido e tão querido cubo.

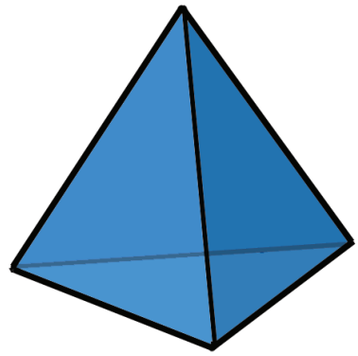
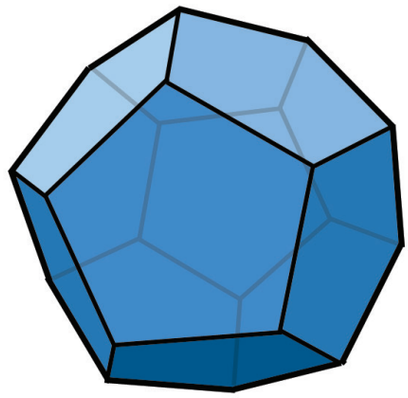
O elemento fogo era representado pelo poliedro denominado Tetraedro, que possui um total de quatro faces. Daí o prefixo tetra. Todas as faces do tetraedro são triangulares.	 Tetraedro
Além destes sólidos que representavam os elementos, dentre os sólidos de Platão existe ainda o dodecaedro. Um poliedro de 12 faces pentagonais que era associado ao Universo.	 Dodecaedro

Figura 18: Poliedros de Platão.

Os poliedros que Platão utilizou para representar os elementos são regulares. Isto é: suas faces são regiões poligonais regulares congruentes e em todo vértice do poliedro converge o mesmo número de arestas. É importante ressaltar aqui que um sólido, para ser chamado de icosaedro, octaedro, hexaedro ou tetraedro não precisa ser regular – basta ter as respectivas vinte, oito, seis ou quatro faces. Um bom exemplo é o hexaedro que representamos na figura seguinte.

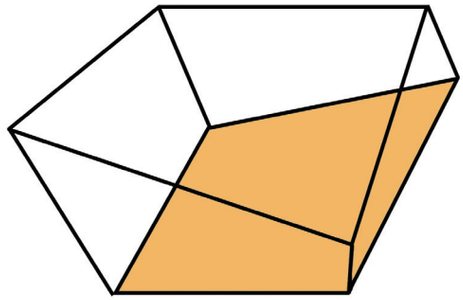
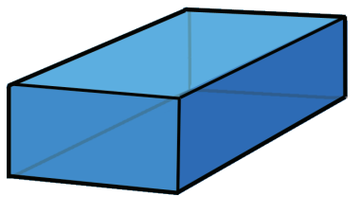


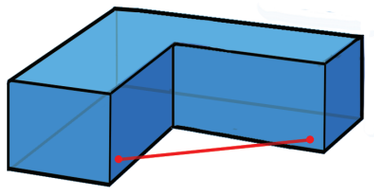
Figura 19: Hexaedro.

O grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) conseguiu estabelecer uma interessante relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e número de faces (F) de um **poliedro convexo**.

Um poliedro é convexo se o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido no poliedro.



Exemplo de poliedro convexo



Exemplo de poliedro não convexo

Importante

De acordo com essa relação, conhecida como relação de Euler, em todo poliedro convexo, o número de arestas (A) mais 2 é igual ao número de vértices (V) mais o número de faces (F). Ou, numericamente

$A + 2 = V + F$ ou ainda $V - A + F = 2$

Interessante, não? De posse dessa relação, convidamos você a fazer a atividade a seguir.

Atividade 5

Descubra quantos vértices e arestas têm cada um dos poliedros de Platão apresentados anteriormente:

a. Tetraedro
b. Hexaedro
c. Octaedro
d. Icosaedro

Anote suas respostas em seu caderno

Prismas, pirâmides e deltoedros pentagonais?

Os prismas e as pirâmides são poliedros convexos muito comuns em nosso dia a dia. Os prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).

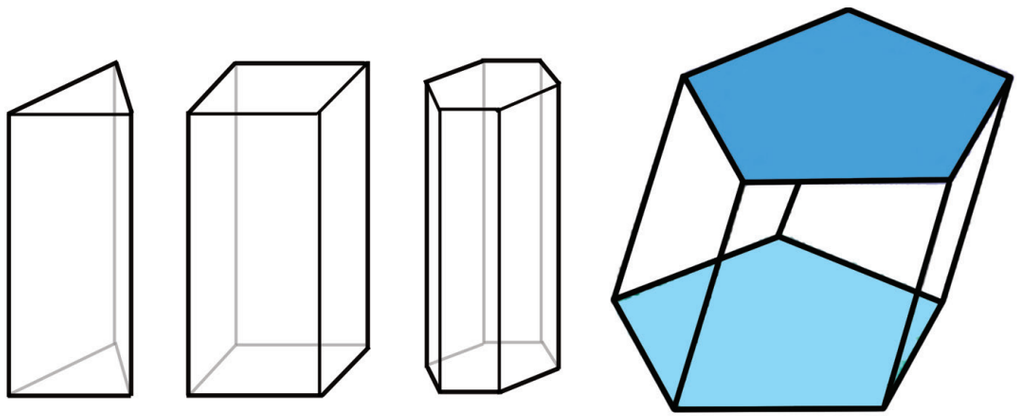


Figura 20: Prismas de base triangular, quadrada, hexagonal e pentagonal respectivamente. O prisma à direita, de base pentagonal, tem suas duas bases destacadas.

Já as pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal e as faces laterais são regiões triangulares.

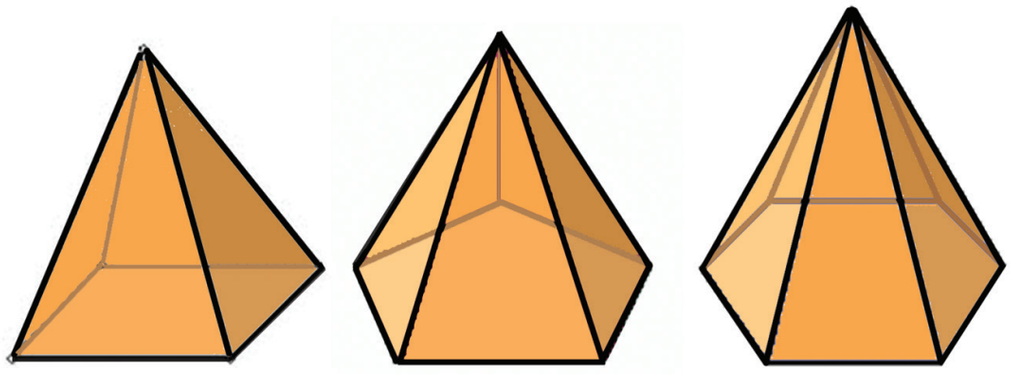


Figura 21: Pirâmides de base quadrada, pentagonal e hexagonal respectivamente.

Apesar de a palavra prisma não estar entre as mais corriqueiras da nossa língua, os prismas são muito comuns em nosso dia a dia – os prédios e casas em que moramos, a maioria das embalagens dos produtos que compramos, e por aí vai. Já as pirâmides frequentam nossos livros de história, nossos filmes e até mesmo os roteiros de viagem dos que tem um pouco mais de condição financeira. Mas...e um deltoedro pentagonal, o que seria?

Multimídia

O deltoedro pentagonal é um dos muito poliedros que aguardam você no software de geometria dinâmica Poly, que é gratuito e que pode ser baixado diretamente do site da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS.

O link para o programa é: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php#poly

Nesse programa, você encontra sólidos bem tradicionais, como os de Platão e de Arquimedes, bem como outros tipos de poliedros mais, digamos, alternativos – como o nosso deltoedro.

Como é um deltoedro pentagonal? Ah, dê um pulinho lá, baixe o Poly e descubra!

Não poliedros

Como vimos na Atividade 4, os sólidos que não são limitados por regiões poligonais planas são chamados de não poliedros. Muitos deles também são bastante comuns em nosso dia-a-dia. Dentre estes, destacamos o cone, o cilindro e a esfera. Como retornaremos a eles mais detalhadamente nas aulas seguintes, faremos agora uma apresentação mais sintética.

Lembram dos prismas? Pois então, se substituíssemos as bases poligonais por bases circulares – e conectássemos essas bases– nosso prisma se "transformaria" num cilindro. E das pirâmides, lembra? Então, se substituíssemos a base poligonal por uma circular – e ligássemos essa base ao vértice, nossa pirâmide se "transformaria" num cone. Veja a figura!

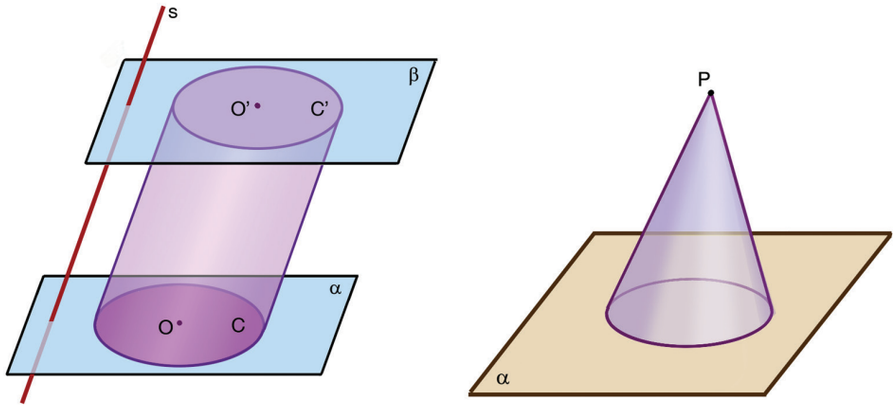


Figura 22: Um cilindro (à esquerda) e um cone (à direita).

Mais formalmente, o cilindro seria o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas pararelos a reta s que unem um ponto do cículo C (pertencente a α) a um ponto de β. O cone seria o sólido obtido por meio da reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto da região circular C (pertencente a α) ao ponto P (que não pertence a α). E, aproveitando o formalismo, a esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R (RAIO) de um outro ponto O, chamado de centro. Muito formalismo junto? Não se preocupe, ao longo das próximas aulas vamos explicar todos os detalhes destes enunciados mais formais. Por ora, vá lendo, se acostumando e vendo o que consegue perceber deles. Veja, por exemplo, se na figura seguinte você consegue perceber, ainda que intuitivamente, o que foi dito mais formalmente acerca da esfera.

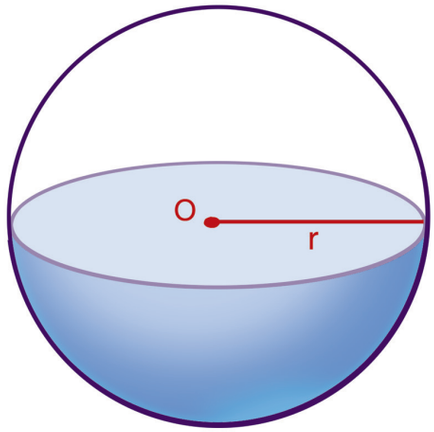


Figura 23: Esfera.

Retorne ao início da seção e diga quais sólidos geométricos os objetos representam:

a. Bola de sorvete

b. Pirâmide do Egito

c. Laranja

d. Casquinha de sorvete

e. Copo de suco

f. Caixa de chocolate

Atividade 6

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Dimensões; ponto, reta e plano.
- O mundo que nos cerca tem três dimensões: altura, largura e comprimento.
- Ponto, reta e plano são conceitos matemáticos primitivos.

- O ponto é um objeto matemático sem dimensão.
- A reta é um objeto matemático com apenas uma dimensão. A reta se estende infinitamente ao longo desta dimensão.
- O plano é um objeto matemático com apenas duas dimensões. O plano se estende infinitamente ao longo destas duas dimensões.
- O ponto A pertence à reta r ($A \in r$) quando se situa sobre ela.
- O ponto A não pertence à reta r ($A \notin r$) quando não se situa sobre ela.
- O ponto A pertence a um plano α ($A \in \alpha$) quando se situa sobre este plano.
- O ponto A não pertence a uma plano α ($A \notin \alpha$) quando não se situa sobre este plano.
- Dois ou mais pontos são chamados colineares quando pertencem a uma mesma reta.
- Retas são concorrentes quando têm um único ponto em comum.
- Retas são perpendiculares quando são concorrentes e determinam ângulos de 90°.
- Retas são paralelas quando pertencem ao mesmo plano e não têm ponto em comum.
- Retas são reversas quando não pertencem ao mesmo plano e não têm ponto em comum.
- Planos são paralelos quando não têm ponto em comum.
- Planos são secantes quando são planos distintos com uma reta em comum.
- Planos são perpendiculares quando um dos planos contêm uma reta perpendicular ao outro.
- Planos são oblíquos quando são secantes e não são perpendiculares.
- Uma reta está contida em um plano quando todos os pontos da reta pertencem ao plano.
- Uma reta e um plano são concorrentes quando têm um único ponto em comum.
- Uma reta e um plano são paralelos quando não têm ponto comum.
- Uma reta concorrente a um plano em um determinado ponto é perpendicular a ele se ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto.

Sólidos Geométricos

- Poliedro é o sólido limitado por regiões poligonais planas, chamadas de faces que têm, duas a duas, um lado comum, chamado de aresta.
- Vértice é um ponto comum a três ou mais arestas.
- Relação de Euler $A+ 2 = V+ F$ (A número de arestas, V número de vértices, F número de faces).
- Um poliedro é convexo se o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido no poliedro.

- Prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).
- Pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal e as faces laterais são regiões triangulares.
- Cilindro é o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas pararelos a reta s que unem um ponto do cículo C (pertencente a α) a um ponto de β. O cilindro é um sólido mas não é um poliedro.
- Cone é o sólido obtido por meio da reunião de todos os segmentos que ligam cada ponto da região circular C (petencente a α) ao ponto P (que não pertence a α). O cone é um sólido mas não é um poliedro.
- Esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a R de um centro O. A esfera é um sólido mas não é um poliedro.

Conclusão

Fizemos um grande passeio pelo mundo que nos cerca e analisamos de uma maneira matemática as formas que compõem os objetos do nosso cotidiano. Refletimos sobre dimensões, ponto, reta e plano. Também nos dedicamos a analisar os sólidos geométricos e entendemos a diferenciação entre poliedros e não poliedros. Alguns sólidos chamaram nossa atenção como os prismas, as pirâmides, o cilindro, cone e a esfera.

Referências

Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e Problemas*. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- _____. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexo e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1242172

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=916550

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1397088

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1005288

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1149358

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1353848

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=718564

- http://goo.gl/maps/irvmp

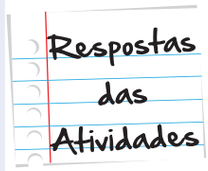
- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/517386

Veja ainda

Acesse o link http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1369 e descubra o que acontece nesse experimento ao tentar violar a Relação de Euler V – A + F = 2, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F é o número de faces do sólido.

Atividade 1



A primeira coisa a levar em consideração é aquele nosso comentário de que pontos, retas e planos são entes matemáticos e seu uso para representar objetos do dia-a-dia sempre implica alguma espécie de aproximação. Isso posto, podemos dizer que os pontinhos de salsinha podem ser considerados exemplos de pontos, justamente por "não terem" – e eis aqui nossa aproximação – altura, comprimento ou largura.

Como retas, poderíamos considerar tanto as bordas do prato quanto os próprios talheres situados ao lado do prato – lembrando, novamente, que as retas se estendem indefinidamente, enquanto tanto os lados do prato quanto os talheres tem comprimento limitado. Finalmente, mantendo as ressalvas usadas para os pontos e retas, dois exemplos de plano seriam o prato e o tampo da mesa.

Atividade 2

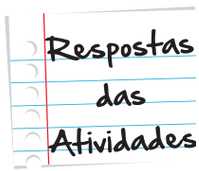
a. Se levarmos em consideração aquelas aproximações, diremos que a afirmativa é verdadeira – afinal, o prédio representado pelo ponto, está na Avenida Rio Branco, representada pela reta. Agora, se você levou o conceito ao extremo e argumentou que o balão não está posicionado exatamente sobre a linha da rua – e, por isso, a afirmativa é falsa – tudo certo também. O importante aqui é você visualizar a relação de pertencimento entre reta e ponto.

b. A afirmativa é verdadeira: de acordo com o mapa, o escritório (ponto C) fica no outro quarteirão.

c. A afirmativa é verdadeira: tanto o balão usado pelo Google Maps para representar o endereço (o ponto B) quanto o prédio em si estão situados sob a reta da Av. Almirante Barroso.

d. A afirmativa é verdadeira também: tanto o balão usado pelo Google Maps para representar o endereço (o ponto B) quanto o prédio em si estão situados sob a reta da rua Debret.

e. Vale aqui um argumento muito parecido com o da resposta do item a. A afirmativa é verdadeira porque o prédio representado pelo ponto se situa sobre a rua representada pela reta. Se você levar a precisão ao limite, argumentando que o desenho do museu não está posicionado exatamente sobre a rua – e, por isso, a afirmativa é falsa – vale também. O importante é você visualizar a relação de pertencimento entre reta e ponto.



f. A afirmativa é falsa. Não é possível achar uma única linha que ligue os 3 pontos. É possível, no entanto, conectá-los dois a dois por uma linha reta. Importante ressaltar que essa linha não seria uma rua e passaria por cima de vários prédios.

g. A afirmativa é falsa. O quadrado com a letra M está perfeitamente sobre a reta que representa a rua Uruguaiana.

h. A afirmativa é verdadeira: ambas estão na Avenida Rio Branco.

i. A afirmativa é falsa: não existe uma reta que ligue as três estações ao mesmo tempo.

Atividade 3

a. A afirmativa é verdadeira: as ruas se cruzam e fazem entre si um ângulo (na verdade, quatro ângulos) de 90º. Se porventura você argumentou que as ruas eram concorrentes mas não havia elementos para determinar se elas eram perpendiculares (afinal, não havia informação explícita neste sentido), também está ok.

b. A afirmativa é falsa: as ruas não se cruzam e, por isso, não podem ser concorrentes.

c. A afirmativa é verdadeira. Veja que, basicamente, trata-se da mesma situação que representamos na figura 15 – acrescida de uma terceira reta!

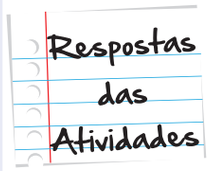
d. A afirmativa é falsa – as ruas se encontram um pouco acima do metrô da Carioca, por isso são concorrentes.

e. Aqui, uma argumentação muito parecida com a do item a . As ruas se cruzam e, portanto, são concorrentes. Se você entendeu que o ângulo é de 90º, as ruas são perpendiculares e a afirmativa é verdadeira. Se entendeu que não havia elementos suficientes para determinar se o ângulo era de 90º, então as ruas são apenas concorrentes.

Atividade 4

Imaginamos que você tenha conseguido perceber o que diferencia um poliedro de um não poliedro. Mais difícil, no entanto, seria colocar essa percepção em palavras, não é? Assim, vamos dar uma ajuda – e veja se a diferença que você encontrou entre poliedros e não poliedros pode ser expressa assim: um poliedro é delimitado por regiões poligonais planas. A mesma coisa não pode ser dita acerca dos não poliedros. Os não poliedros ou bem que não são delimitados por nenhuma superfície plana ou bem que são parcialmente delimitados por superfícies planas. Essas superfícies, no entanto, não são poligonais. Daí a nossa proposta de diferenciação. Convidamos você a ler novamente – e com calma – a nossa proposta e ver como ela se aplica nos exemplos que apresentamos, ok?

Atividade 5

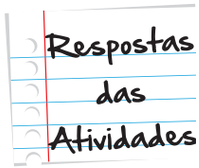


a) Sabemos que o tetraedro tem quatro faces, todas triangulares certo? Então, se cada triângulo tem 3 lados, teremos um total de 4x3=12 lados. No entanto, cada um desses lados é comum a dois triângulos (duas faces) e, por isso, é contado duas vezes. Assim, teremos um total de 12/2=6 arestas. Usando a relação de Euler, teremos que V+F=A+2; V+4=6+2; V+4=8; V=4. Assim o tetraedro tem 4 vértices. Quer dar uma olhada na figura e contar para conferir? Ah, você já resolveu contando? Está ok – mas, neste caso, é muito importante que você faça também as contas, até porque, para determinados poliedros a contagem pode ser bem problemática – quando não é completamente impossível.

b) Mesmo raciocínio aqui: o hexaedro tem seis faces quadradas. Com 4 lados por face (quadrado), temos 6x4=24 lados. Como cada lado é contado duas vezes (por ser comum a duas faces), teremos um total de 24/2=12 arestas. Usando a relação de Euler, teremos que V+F=A+2, V+6=12+2, V+6=14, V=8. Assim, o hexaedro em questão tem 8 vértices. Quer contar para conferir? Ah, você já resolveu contando? Mas de novo? Ok, ok– mas, vale o aviso anterior: é muito importante que você faça também as contas, até porque, para determinados poliedros a contagem pode ser bem problemática – quando não é completamente impossível.

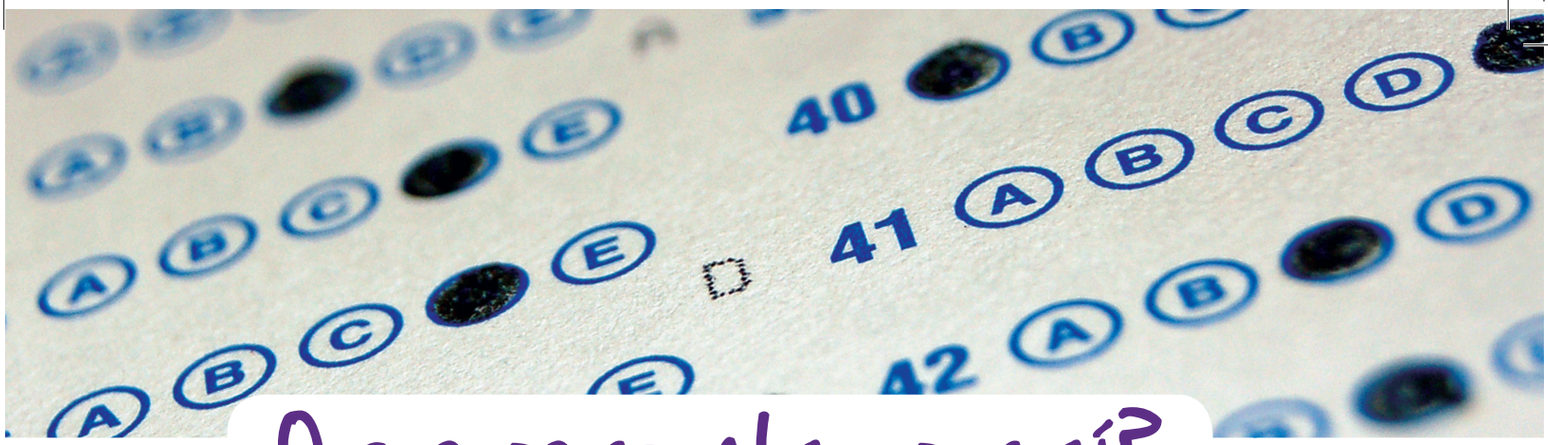
c) Novamente: temos oito faces triangulares, com 8x3=24 lados. Cada lado é comum a duas faces, o que nos deixa com 12 arestas. Aplicando a relação de Euler, teremos que V+F=A+2, V+8=12+2, V+8=14, V=6. Assim, o octaedro tem 6 vértices. Resolveu contando? Ah, foi? Bom, valem as considerações das respostas dos itens a e b.

d) O icosaedro em questão tem 20 faces triangulares, o que nos dá 20x3=60 lados. Como cada lado é comum a duas faces, será contado duas vezes e por isso dividimos o numero de lados por dois para encontrar o número de arestas: 60/2=30. Vamos agora à relação de Euler: V+F=A+2, V+20=30+2, V+20=32, V=12. Esse é muito mais difícil de resolver contando diretamente na figura, não é mesmo?



Atividade 6

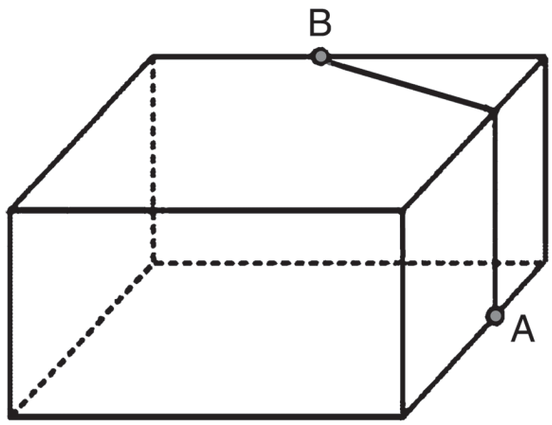
Casquinha de sorvete pode ser considerada um cone, por assim dizer invertido, com a base para cima, justamente para receber a bola de sorvete – que, juntamente com a laranja, são exemplos de esferas. O copo de suco pode ser considerado um cilindro – conseguiu ver? A caixa de chocolate pode ser considerada um prisma, e a pirâmide do Egito – essa foi fácil, hein? – uma pirâmide.



O que perguntam por aí?

ENEM - 2010

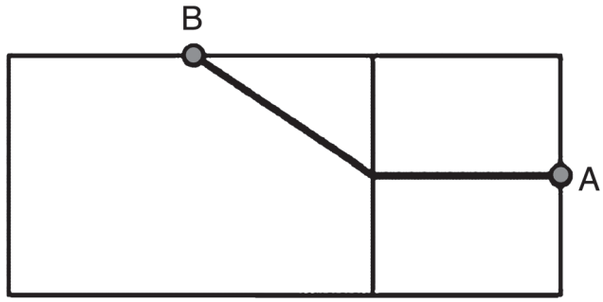
A figura seguinte representa um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.



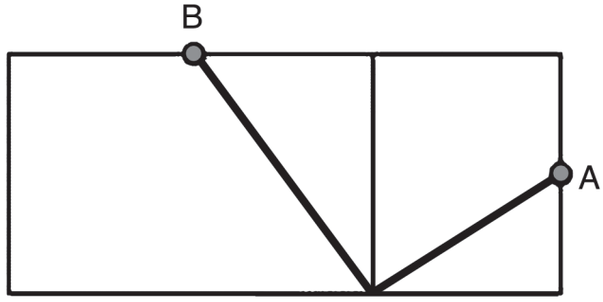
Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

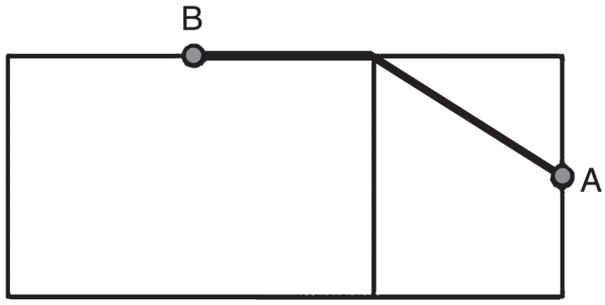
A)



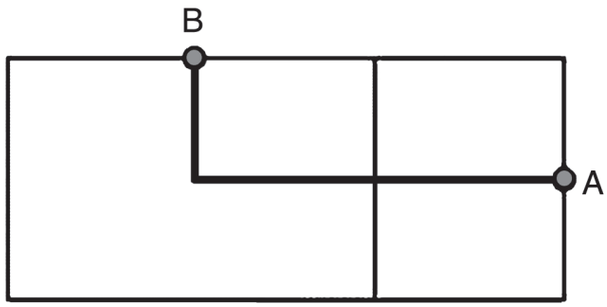
B)



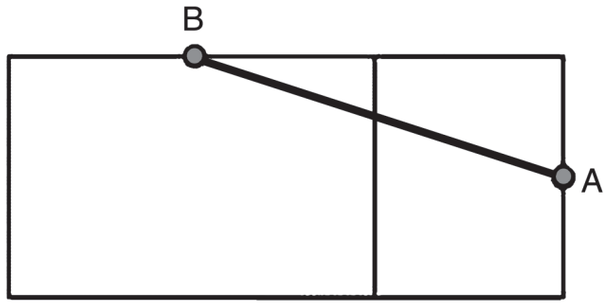
C)



D)

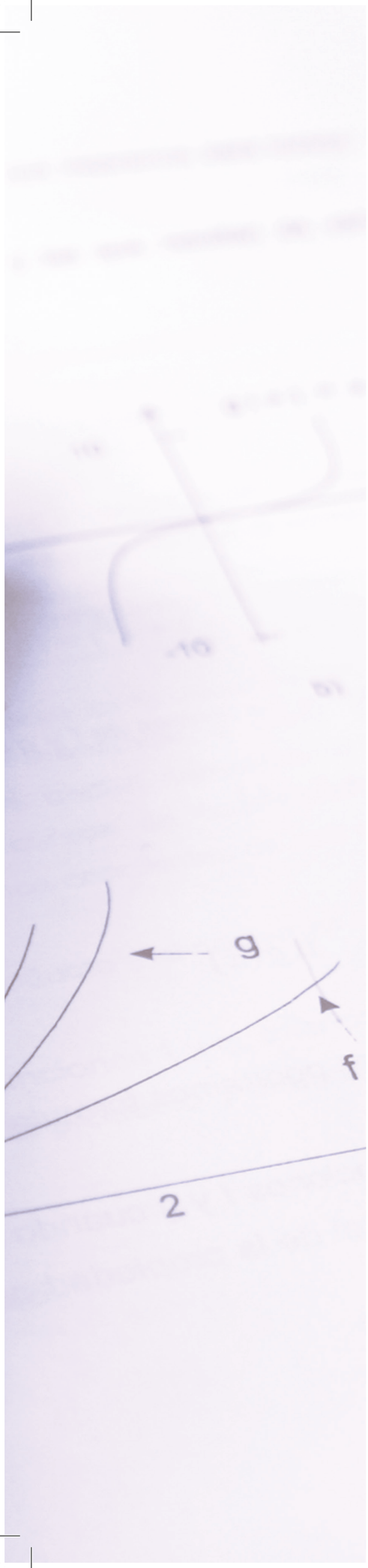


E)



Resposta: Letra E.

Comentário: Perceba o seguinte: o retângulo em que se situa o ponto B é o teto da sala e o retângulo em que se situa o ponto A é uma das paredes. Conseguiu ver? Muito bem. Então, num primeiro momento, podemos afirmar que os pontos estão em planos diferentes e, neste caso, um fio que percorresse o caminho mais curto entre A e B passaria pelo meio da sala. No entanto, o fato de o fio "correr" por dentro da parede faz com que as coisas mudem de figura: podemos considerar que os planos do teto e da parede são, na verdade, um plano contínuo. Dessa maneira, os pontos A e B estarão no mesmo plano e a menor distância entre eles será o tamanho da linha reta que os une. Assim, a resposta é letra E.



Regularidades numéricas – sequências e progressões

Para início de conversa...

Você já assistiu o filme O Código da Vinci (The Da Vinci Code) de 2006? Ou mesmo já leu o livro de mesmo nome? Pois esta interessante história mostra um simbologista de Harvard, Robert Langdon, tentando desvendar o mistério da morte do curador do museu do Louvre. Ao lado do corpo da vítima, havia uma mensagem cifrada:

13 – 3 – 2 – 21 – 1 – 1 – 8 – 5

Sophie Neveu, especialista em criptografia, verificou que se tratava de uma sucessão numérica muito famosa, porém fora de ordem: a Sequência de Fibonacci.

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21

Vocês já ouviram falar desta sequência? O que será que ela tem de interessante para ser tão famosa? Essas e outras informações a respeito das sequências serão discutidas por nós nesta unidade. Veremos como as sequências numéricas fazem parte do nosso dia-a-dia e aprenderemos a perceber algumas regularidades para tentarmos buscar algumas generalizações.

Multimídia

Assista a cenas de O Código Da Vinci acessando o site oficial do filme, disponível em http://www.sonypictures.com/homevideo/thedavincicode/index.html

E aí, estão preparados?

Então, vamos dar *sequência* a esta unidade mostrando seus objetivos.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar sequências numéricas e obter, quando existir, a expressão algébrica do seu termo geral;
- Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas;
- Diferenciar Progressão Aritmética (P.A.) de Progressão Geométrica(P.G.);
- Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A. e da P.G. na resolução de problemas.

Seção 1
As sequências, regularidades e generalizações

Quando falamos de sequências, nem sempre estamos nos referindo às sequências numéricas. Uma sequência é uma lista ordenada de objetos, números ou elementos. Um exemplo muito simples é a lista de sucessão de todos os Presidentes do Brasil.

Tabela 1 – Lista com todos os presidentes do Brasil desde 1889.

1889 - 1891 Marechal deodoro da Fonseca	1922 - 1926 Arthur Bernardes	1967 - 1969 Costa e Silva
1891 - 1894 Marechal Floriano Peixoto	1926 - 1930 Washington Luís	1969 - 1974 General Medici
1894 - 1898 Prudente de Morais	1930 Junta governativa: Gen. Tasso Fragoso, Gen. João de Deus Mena Barreto e Almirante Isaías de Noronha	1974 - 1979 Ernesto Geisel
1898 - 1902 Campos Sales	1930 - 1945 Getúlio Vargas	1979 - 1985 General João Figueiredo
1902 - 1906 Rodrigues Alves	1946 - 1951 General Eurico Dutra	1985 - 1990 José Sarney
1906 - 1909 Afonso Penna	1951 - 1954 Getúlio Vargas	1990 - 1992 Fernando Collor
1909 - 1910 Nilo Peçanha	1954 - 1955 Café Filho	1992 - 1995 Itamar Franco
1910 - 1914 Marechal Hermes da Fonseca	1956 - 1961 Juscelino Kubitschek	1995 - 2002 Fernando Henrique Cardoso
1914 - 1918 Wenceslau Brás	1961 - 1961 Jânio Quadros	2003 - 2010 Luiz Inácio Lula da Silva
1918 - 1919 Delfim Moreira	1961 - 1964 João Goulart - Jango	2011 Dilma Rousseff
1919 - 1922 Epitácio Pessoa	1964 - 1967 Marechal Castello Branco	

Ou, ainda, uma sucessão de figuras geométricas:

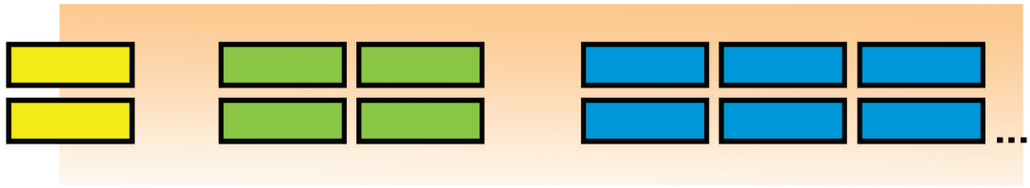


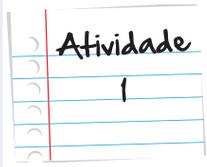
Figura 1: Sucessão de retângulos.

Em algumas sequências, podemos notar certo padrão, isto é, alguma informação ou característica que nos leve a entender como esta sucessão é construída e, sobretudo, nos permita determinar os elementos seguintes. Vejamos isso através dos exemplos dados.

Na sucessão de Presidentes do Brasil, é possível verificarmos alguma regularidade de elementos? Ou, ainda, é possível determinarmos quem será o próximo Presidente do nosso país? Bom, se fosse possível, não seriam necessários tantos investimentos em campanhas, não é mesmo?

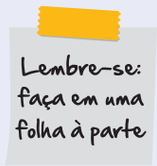
Contudo, na sequência de retângulos que acabamos de mostrar, podemos perceber certa caraterística. Será que você consegue identificá-la? Para visualizarmos melhor essa sucessão, vamos fazer a primeira atividade?

Veja a tabela a seguir, criada com base na sucessão de retângulos apresentada na figura anterior:



Posição do elemento na sequência	Número de retângulos
1	2
2	4
3	6
4	...
5	...
10	...
28	...
...	100

Anote esta tabela no seu caderno e termine de preenchê-la. Conseguiu estabelecer a relação entre o número de retângulos e a sua posição na sequência? Ótimo! Dê um pulo na seção de respostas e verifique se acertou.



Pudemos notar nesta sequência que há uma sucessão numérica que respeita uma regra, que podemos chamar de "lei de formação". Conhecendo esta regra, somos capazes de escrever todos os elementos desta sequência. Certamente, vocês devem estar se perguntando: "Todos? E se a sequência for infinita? Como podemos escrever infinitos números? Não íamos terminar nunca!". Tenham calma! Tem um jeito! Vamos utilizar para isso uma ferramenta algébrica que conhecemos: as variáveis.

Figura 2: **Pirâmides de um painel na Secretaria de Relações Exteriores do Governo do México. Imagine conta-las uma a uma! As variáveis nos ajudam a lidar, dentre outras coisas, com quantidades muito grandes ou infinitas.**

Mas o que são exatamente as variáveis? Bom, matematicamente falando, variável é uma representação, geralmente feita por letras – aquelas nossas conhecidas: x, y, z, a, b, etc - de diferentes valores ou quantidades em uma expressão algébrica ou em uma fórmula.

Como havíamos discutido na Atividade 1, o número de retângulos é sempre o dobro do número referente à posição do elemento na sequência. Isto é, o segundo elemento da sequência possui quatro retângulos, o terceiro possui seis retângulos. Então, o quarto terá oito, e assim por diante... Dessa forma, o número de retângulos presentes na posição n da sequência será o dobro desse número, ou seja, 2n.

Portanto, através da utilização de variáveis, conseguimos escrever todos os elementos da sequência, mesmo que seja infinita. Vejamos agora outro tipo de regularidade.

Observe a sequência de figuras abaixo e responda:

Atividade 2

a. Qual o próximo elemento da sequência?

b. Qual o 12º elemento da sequência?

c. Qual o 15º elemento da sequência?

d. Qual o 18º elemento da sequência?

e. Qual o 21º elemento da sequência?

f. Qual o 232º elemento da sequência? Anote em seu caderno o raciocínio que você utilizou para encontrar o resultado.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Nesta sequência, podemos perceber uma regularidade na disposição das figuras geométricas. Esta regularidade nos auxilia a responder às perguntas da atividade sem que haja a necessidade de desenharmos todos os elementos dela. Imaginem só ter que desenhar 232 elementos para apenas responder à questão (f)! Isto seria loucura!

As duas atividades anteriores mostram alguns exemplos de sucessões ora numéricas, ora não. Nesta unidade, vamos nos concentrar mais sobre as sucessões numéricas, como a **sequência de Fibonacci**.

Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci foi criada no século XIII pelo matemático Leonardo de Pisa, cujo apelido era Fibonacci. Ele criou a sequência para resolver um problema de crescimento populacional, que propôs em seu livro Liber Abaci, publicado pela primeira vez em 1202. O surpreendente é que a sequência de Fibonacci pode ser encontrada em muitas outras situações e padrões naturais, a princípio bastante distintos do crescimento de populações, como proporções do corpo humano, conchas do mar e nas sementes de girassol.

Conforme vimos na introdução, a sequência de Fibonacci é 1-1-2-3-5-8-13-21-... Vamos entender como a sequência é definida? Muito bem, ela se inicia por dois números 1. O que acontece se somarmos esses elementos? O resultado é 2, o terceiro elemento da sequência. Agora, o que acontece se somarmos o segundo e o terceiro elementos?

Ora, 1 + 2 = 3 é o quarto elemento da sequência. Somaremos agora o terceiro termo com o quarto: 2 + 3. Isso dá 5, que é o quinto elemento. Portanto, esta sequência é construída somando-se dois termos consecutivos da sequência e obtém-se o termo seguinte.

Isto é:

1+1=2

1+2=3

2+3=5

3+5=8

5+8=13

8+13=21

13+21=...

E assim, teremos a tão famosa sequência 1-1-2-3-5-8-13-21-...

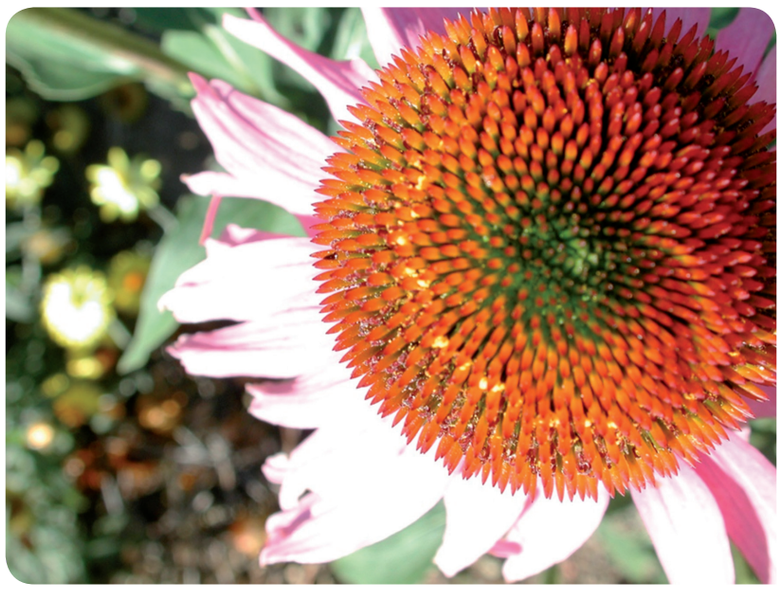


Figura 3: **A distribuição das sementes de girassol e das pequenas pétalas que estão em primeiro plano na imagem também obedecem à sequência de Fibonacci.**

A sequência de Fibonacci é mesmo fantástica! Mas existem outras sequências menos famosas que podem também fazer parte do nosso estudo. O nosso trabalho agora é tentar escrever expressões algébricas que representem determinadas situações. Vamos dar uma olhada nisso?

Quando falamos em expressões algébricas, estamos nos referindo ao uso de variáveis na escrita matemática. O uso dessa ferramenta nos permite generalizar as relações numéricas, isto é, nos ajuda a escrever fórmulas, o que, na matemática chamamos de **modelagem ou Modelo Matemático**.

Modelagem ou Modelo Matemático

Modelo matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão. (SWETZ, 1992, p. 65, GERTNER).

Vejamos agora um exemplo de modelagem matemática. Neste caso, vamos analisar a relação existente entre as idades de dois irmãos: Pedro e Paulo. Quando Pedro tinha 4 anos, Paulo tinha 1 ano. Já quando Pedro tinha 8 anos, Paulo tinha 5. Quando Pedro tinha 12 anos, Paulo tinha 9. A pergunta é: quantos anos Paulo terá quando Pedro tiver 25?

Podemos perceber que Pedro é mais velho que Paulo. Além disso, é mais velho 3 anos. Com isso, podemos garantir que quando Pedro tiver 25 anos, Paulo terá 3 anos a menos, ou seja, 22 anos.

Mas, se Pedro tem x anos, quantos anos Paulo tem?

Reparem que, neste caso, a idade não está definida como um número e sim como uma variável (x). Isto significa que a idade de Pedro é representada por um número natural qualquer. Para descobrirmos a idade de Paulo, é necessário que levemos em consideração a idade de Pedro. Ou seja, é importante utilizarmos a informação de que Pedro tem 3 anos a mais, ou então, que Paulo tem 3 anos a menos.

Dessa forma, como Pedro possui x anos e Paulo 3 anos a menos, Paulo possui, x – 3 anos.

Note que como não sabemos quantos anos Pedro tem, pois sua idade está representada por uma variável, fica impossível sabermos a idade exata de Paulo. Apenas somos capazes de gerarmos uma expressão, no caso x – 3, capaz de relacionar as idades dos irmãos. Quando quisermos escolher um valor para x, encontraremos as idades deles sem a menor dificuldade. Querem ver?

Se escolhermos, por exemplo, o valor 30 para x, temos que:

Pedro: x anos = 30 anos

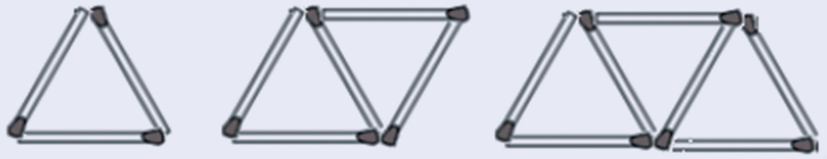
Paulo: x – 3 anos = 30 – 3 anos = 27 anos.

Viram como é simples e prático?

Muito bem! Que tal praticar o que você já aprendeu na

Atividade 3

Observe a sequência de palitos



a. Pegue uma folha de seu caderno e desenhe como seria a próxima figura da sequência de triângulos com palitos.

b. Quantos palitos serão usados para fazer 5 triângulos?

c. Quantos palitos serão usados para fazer 6 triângulos?

d. Quantos palitos serão usados para fazer 10 triângulos?

e. Quantos palitos serão usados para fazer 36 triângulos?

f. Copie para o seu caderno a tabela seguinte e procure completa-la com os dados obtidos anteriormente:

Nº de triângulos	Nº de palitos
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	
10	
36	

g. Você descobriu qual a regra matemática que relaciona o número de triângulos com o número de palitos? Caso já tenha encontrado, escreva com suas palavras esta regra matemática.

h. Escreva, agora, a expressão algébrica descrita no item anterior. Isto é, escreva a quantidade P de palitos necessária para fazer N triângulos.

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal! Essa atividade foi desafiadora, não é mesmo?! Em geral, escrever uma expressão algébrica que descreva alguma situação não é uma tarefa muito simples. Apesar disso, é muito importante enfrentarmos essas dificuldades. Então, que tal se déssemos uma olhada na próxima atividade?

Atividade 4

Dona Maria lavou as camisas do time de futebol de seu neto Lulu e vai colocá-las para secar da seguinte maneira:

- cada camisa é presa por 2 pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador.

a. Quantos pregadores D. Maria usará para pendurar 3 camisas? E 4 camisas? E 8 camisas?

b. E 10 camisas? E 11 camisas?

c. D. Maria comprou duas cartelas de 12 pregadores cada. Esse número de pregadores será suficiente para prender as camisas de 22 jogadores? Justifique sua resposta.

d. Com base nos resultados acima, construa uma tabela colocando na primeira coluna o número de camisas (C) e na segunda, o número de pregadores utilizados (P).

e. Escreva uma expressão algébrica que represente o número P de pregadores necessário para pendurar um número C qualquer de camisas.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Nada mal, pessoal! Como poderíamos imaginar que até estender roupas no varal pudesse ter matemática no meio?! E tem! Assim como diversas outras situações do nosso cotidiano. Neste momento, vamos dar novamente uma olhadinha na sequência gerada pelo número de pregadores da atividade anterior:

Tabela 2 – Quantidade de camisas a serem penduradas e quantidade de pregadores necessários para prendê-las.

Nº de Camisas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº de Pregadores	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – ...Esta sequência possui algumas características que podemos explorar. Por exemplo, qual será o próximo elemento desta sequência? Certamente não houve dificuldades em descobrir que é o 11. Mas, vamos analisar o motivo que nos levou a definir que o próximo elemento era de fato o 11. Reparem que, nesta sucessão, para chegarmos ao termo seguinte, estamos sempre somando uma unidade ao termo anterior, não é mesmo?

2+1=3

31+2=4

4+1=5

E assim por diante.

Essas sucessões em que obtemos o elemento seguinte somando uma quantidade fixa – que, no caso do exemplo, foi o número 1 – ao elemento anterior são chamadas de progressão aritmética.

Vamos à próxima seção desta unidade para conhecermos melhor esta progressão.

Seção 2
As Progressões Aritméticas

Como havíamos dito anteriormente, as progressões aritméticas possuem a característica de que para "saltarmos" de um termo para o seguinte precisamos adicionar a ele sempre o mesmo valor numérico (no nosso exemplo, esse valor é 1).

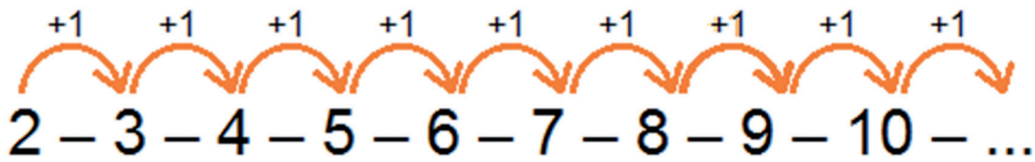


Figura 4: Progressão aritmética.

Lembre-se de que adicionar um número não significa apenas aumentar as quantidades. Podemos adicionar um número negativo, o que faz os números seguintes diminuírem. Por exemplo, um termo da sequência (12, 10, 8, ...) é obtido somando-se (-2) ao termo anterior.

Importante

Observe esse outro exemplo. Na sequencia (3, 7, 11, 15, ...), o valor que está sendo somado é o 4. A este número que sempre é adicionado daremos o nome de razão. Agora, observem a sequência dos números ímpares: 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – .... Nesta sequência, podemos identificar sua razão?

É claro que sim! Pois, sempre que quisermos escrever o termo seguinte desta sucessão, devemos somar o número 2. Dessa forma, a razão é 2 e ainda podemos dizer que estamos lidando com uma progressão aritmética. Se você teve alguma dificuldade de descobrir o valor da razão, aí vai uma dica muito boa: podemos calcular a razão, r , subtraindo um termo pelo seu anterior. Ou seja, r = 3 – 1 = 2, ou ainda, r = 9 – 7 = 2, ou então r = 11 – 9 = 2. Outra dica importantíssima: a progressão aritmética é carinhosamente chamada pelos matemáticos de P.A.

Observe a sequência abaixo, verifique se é uma progressão aritmética e calcule o valor da razão.

30 – 26 – 22 – 18 – 14 – ...

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Atividade 5

Suponham agora que quiséssemos descobrir o 10º termo da P.A. exibida na atividade anterior. Como faríamos? Bom, temos duas opções para solucionarmos esse problema:

1ª opção: Continuamos a escrever os números desta sucessão até chegarmos no décimo termo.

Assim: 30; 26; 22; 18; 14; (e entram os termos novos) **10; 6; 2; –2; –6**

Sendo assim, o décimo termo é – 6.

2ª opção: Podemos analisar de forma mais aprofundada o comportamento da P.A. Observem:

Vamos chamar cada termo desta sequência pela letra ***a***. Com isso, o termo a_1 representará o primeiro elemento da P.A., o a_2 será o segundo e assim por diante. E a razão, vamos chamar de *r*. Então, podemos dizer que a P.A. se desenvolve da seguinte maneira:

a_1
$a_2 = a_1 + 1.r$
$a_3 = a_1 + 2.r$
$a_4 = a_1 + 3.r$
$a_5 = a_1 + 4.r$
$a_6 = a_1 + 5.r$
$a_7 = a_1 + 6.r$

Ou, como mostra a figura seguinte,

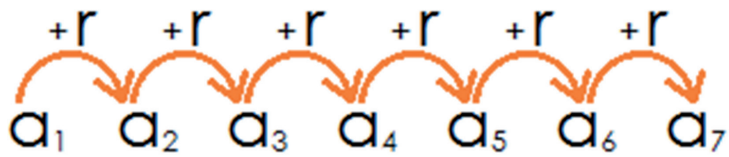


Figura 5: **Progressão aritmética com de termos a_n e razão *r*.**

Observe que temos que somar a razão 6 vezes para sairmos do 1º termo e chegarmos ao 7º. E se quisermos chegar ao 20º termo, partindo do 1º? E ao 51º?

E aí? Perceberam alguma característica nesta sequência de termos? Qual seria, então, o termo a_n, mais conhecido como termo geral da P.A.?

E se partimos do 8º para chegar ao 13º? Quantas vezes a razão deverá ser adicionada? Reparem que a quantidade de razões somadas para cada elemento a partir do primeiro é uma unidade a menos do que o número n referente à posição do termo. Ou seja, para chegarmos ao quarto termo, somamos 3 razões ao primeiro termo. Para atingirmos o 7º termo, somaremos 6 razões ao primeiro termo. E assim, sucessivamente.

Portanto, para chegarmos ao termo n, deveremos somar $n - 1$ razões. E assim chegamos à importante fórmula do termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Assista ao vídeo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1150. Esse vídeo é a respeito de um jovem atleta, que está preocupado com a distribuição de água ao logo da corrida. A questão enfrentada pelo atleta está diretamente relacionada aos conhecimentos que acabamos de adquirir sobre progressão aritmética.

Multimídia

Muito bem! Vamos a mais uma atividade?

Atividade 6

Observe esta sequência numérica e responda as perguntas:

2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 – ...

Responda:

a. Esta sequência é uma progressão aritmética? Justifique.

b. Qual será o 12º termo da sequência?

c. Qual será o 100º termo da sequência?

d. Qual o termo geral (a_n) da sucessão?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Essas progressões são realmente interessantes, não é?! Podemos descobrir quaisquer termos delas sem muitos problemas.

Falando em problemas, uma história muito interessante é aquela de um menino que surpreendeu seu professor ao resolver em poucos minutos um problema apresentado envolvendo sequencias numéricas. Estamos falando do alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Vamos ver o que aconteceu?

Conheça um pouco mais a vida de Carl Friedrich Gauss, um importante personagem da história da matemática, acessando o endereço http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss.

Saiba Mais

O professor de Gauss havia ficado chateado com a turma e aplicou uma tarefa muito demorada como castigo: os alunos deveriam encontrar o valor da seguinte soma sob a pena de ficarem depois da hora em sala de aula. A soma era:

1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100.

O professor tinha a certeza de que os alunos demorariam longos minutos resolvendo a questão, garantindo assim a aplicação do castigo. Porém, acabou sendo surpreendido por Gauss que resolveu este problema em aproximadamente cinco minutos. Até mesmo para nós, que possuímos calculadoras eletrônicas, instrumento inexistente naquela época, resolver em cinco minutos seria espantoso. Então, vamos dar uma olhada no que ele fez?

Gauss percebeu que a sequência numérica 1, 2, 3 ... , 100 possuía uma característica interessante: a soma do primeiro termo com o último termo dava 101, assim como a soma do segundo termo e o penúltimo (2 + 99 = 101). E assim por diante. Dessa forma, ele teria 50 pares de números cuja soma é 101, e respondeu que a soma pedida era 50x101 = 5050.

Foi um sucesso! Não só porque ele soube responder rapidamente como, sem querer, descobriu uma maneira de somar os termos de uma progressão aritmética.

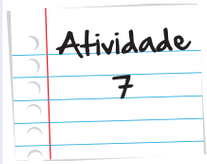
Notaram que esta progressão é uma P.A. de razão 1? Viram também que a soma dos termos desta P.A. foi obtida somando-se o primeiro termo com o último, em seguida multiplicando-se pela quantidade de termos desta sequência e, por fim, dividindo-se o resultado por 2? Muito bom! Então, vamos fazer uma generalização e propor a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A. Vejam só:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Em que S_n representa a soma dos n primeiros termos da sequência, a_1 é o primeiro termo, a_n o último considerado e n o número de termos da PA.

Vamos tentar fazer uma atividade para pôr este conhecimento em prática?

Observe a sequência 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80. Determine o valor da soma dos termos desta sequência. Como este material será utilizado pelos colegas dos anos seguintes, peço que você não escreva nele! Copie o problema abaixo para o seu caderno e, aí sim, complete as lacunas e utilize a expressão que acabamos de estudar, OK?



$a_1 =$ _____

$a_n =$ _____

$n =$ _____

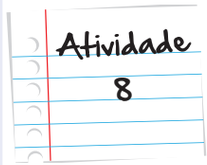
$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} =$ _____

Lembre-se: faça em uma folha à parte

a. Em uma PA de razão 3, se o primeiro termo é 5, qual será o décimo termo?

b. O primeiro termo de uma PA é 5 e o quarto termo é -10. Qual é a razão?

c. São conhecidos o 5º e o 13º termos de uma PA. Se eles são, respectivamente, 2 e 10, qual será o primeiro termo dessa sequência?



Lembre-se: faça em uma folha à parte

Estamos caminhando muito bem! Nossos conhecimentos estão cada vez mais apurados. Talvez possamos usá-los para dar uma passadinha no escritório do Osvaldo, pois está ocorrendo uma discussão séria a respeito de uma obra que sua empresa fará. Quem sabe, podemos ajudar! Vamos lá?!

Figura 6: As passarelas são importantes recursos para a segurança e a circulação de pedestres tanto em ruas quanto em estradas.

Osvaldo, dono de uma empresa de engenharia está discutindo com seu engenheiro chefe, Ítalo, sobre a construção de uma rodovia de 300 quilômetros que liga as cidades de Miracema e Rio de Janeiro. Osvaldo comenta que é preciso colocar passarelas a partir do 3º quilômetro distantes entre si 0,6 km. Ítalo rebate a opinião argumentando que, mesmo iniciando as passarelas a partir do terceiro quilômetro, só há material disponível para a construção de 100 passarelas.

E agora, o que fazer? Como poderemos ajudar os dois cavalheiros, que se encontram em uma situação complicada?

Vamos analisar cada caso:

A proposta de Osvaldo é colocar uma passarela a cada 600 metros a partir do 3º quilômetro. Então, vejamos:

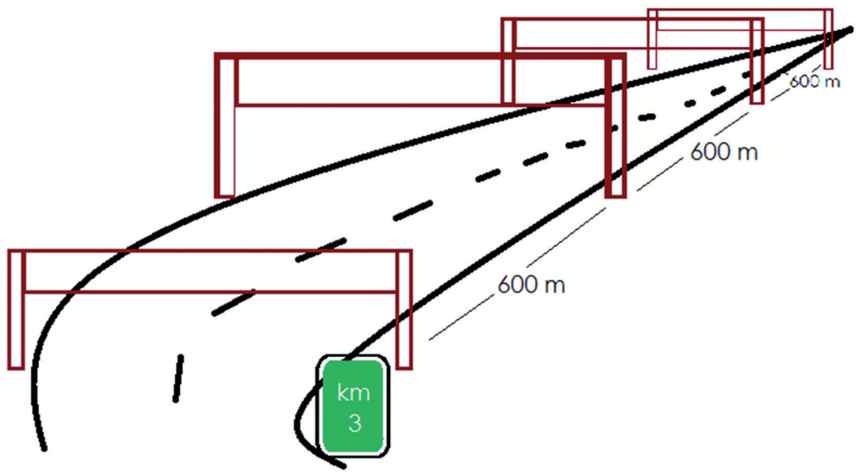


Figura 7: Esboço da estrada com passarelas a cada 600m.

No quilômetro 3, teremos uma passarela. A seguinte será colocada a 3,6 km. Em seguida, a 4,2km. Depois, a 4,8km. Sendo assim, a sequência que conseguimos é:

3; 3,6; 4,2; 4,8; 5,4; 6; ... ; 300

Neste caso, podemos verificar que estamos diante de uma progressão aritmética, pois para conhecermos o termo seguinte, somamos sempre a mesma quantidade (0,6 quilômetros). Então, podemos esquematizar da seguinte forma:

$a_1 = 3km$
$a_n = 300km$
$r = 0,6km$
$n = ?$

Nesta situação, não sabemos quantas passarelas Osvaldo planeja construir. Mas, para descobrirmos, vamos utilizar a fórmula do termo geral da P.A.

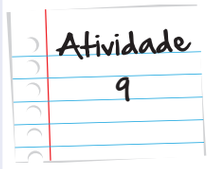
$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Substituindo os valores, temos:

$300 = 3 + 0,6n - 0,6$
$300 - 3 + 0,6 = 0,6n$
$0,6n = 297,6km$
$n = \frac{297,6}{0,6} = 496\ passarelas$

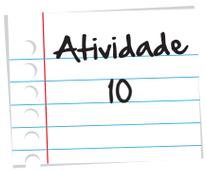
A proposta de Ítalo ressalta que só há material para construírem 100 passarelas. Assim, teremos uma P.A. de 100 termos, onde $a_1 = 3$, $n = 100$ e $a_n = 300$. Só nos resta saber a razão desta progressão que representará a distância constante entre as passarelas. Dessa forma, as passarelas deverão ser construídas a que distâncias uma das outras?

(Dica: utilize a fórmula de termo geral para encontrar a razão)



Anote suas respostas em seu caderno

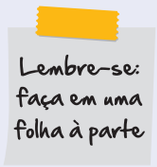
Diante da solução dessas atividades e levando em consideração que se cada passarela tem um custo de 500 mil reais, talvez Ítalo tenha razão: Por um lado, temos passarelas demais e por outro temos passarelas distantes demais entre si. Fazer muitas passarelas sai caro demais, porém é necessário dar acesso e segurança às pessoas. E para vocês? O que é melhor? Pensem. Reflitam sobre o assunto e verão que ele dá uma boa discussão.



Vejamos outras situações que envolvem progressões aritméticas:

a. Os anos bissextos possuem 366 dias e ocorrem a cada quatro anos. 2012 foi um ano bissexto; o próximo será 2016! Qual foi o primeiro ano bissexto do século 21? Qual será o vigésimo ano bissexto desse século?

b. Um medicamento deve ser tomado da seguinte forma: duas pílulas no 1º dia, quatro no 2º, seis no 3º, e assim por diante. Após quantos dias um paciente tomas as 72 pílulas contidas em um vidro desse medicamento?



Agora, pessoal, vamos conhecer mais um tipo de progressão. Da mesma forma que as sequências numéricas que estamos estudando nesta unidade, este novo tipo de progressão possui uma característica peculiar. Vamos dar uma olhada?

Seção 3
Progressões Geométricas

Para entendermos melhor esta progressão, vamos acompanhar a seguinte situação:

Um programa de televisão de perguntas e respostas dá prêmios em dinheiro. Se o candidato acertar a primeira pergunta, recebe o prêmio de R$ 10,00. Se quiser continuar respondendo, a cada acerto o seu prêmio dobra. Isto é:

1ª pergunta: 10 reais

2ª pergunta: 20 reais

3ª pergunta: 40 reais

4ª pergunta: 80 reais

...

Esta sequência é uma progressão aritmética?

Reparem que não há um número constante, razão, que possa ser somada a cada elemento dessa sequência para se obter o seguinte. Todavia, a partir de cada termo desta sequência, há um número que pode ser multiplicado para se obter o seguinte. Neste caso, o número é o 2. Observem.

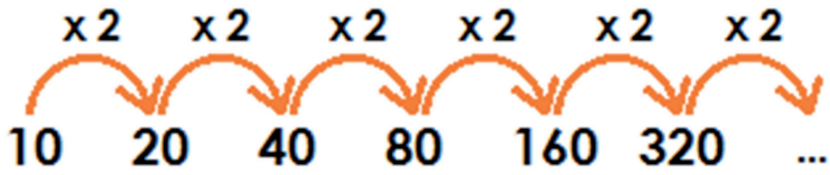


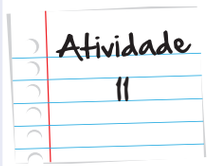
Figura 8: Progressão geométrica.

Diferentemente de uma progressão aritmética, esta sequência é formada pela multiplicação de um mesmo número para se obter o seguinte. Este número também recebe o nome de razão e esta progressão é conhecida por progressão geométrica, ou simplesmente, P.G.

Vamos analisar melhor esta sequência.

Consideremos que um candidato, Joaquim, esteja participando deste programa de TV. Seu prêmio vai depender da quantidade de perguntas que acertar. Responda às perguntas a seguir, sempre atento ao comportamento desta P.G.

Joaquim está muito empolgado para começar o jogo. Estudou muito durante duas semanas, pois quer ganhar um prêmio bastante alto. De acordo com as regras do programa, acertando a primeira pergunta, receberá 10 reais de prêmio. Acertando as perguntas seguintes, seu prêmio irá dobrando. Diante disso, Joaquim precisa de algumas informações para ficar mais calmo e, assim, atingir seus objetivos.

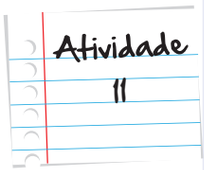


a. A sequência formada pelos prêmios dados pelo programa é uma progressão geométrica. Qual a razão desta progressão?

b. Após ganhar 320 reais, qual o prêmio que Joaquim irá receber caso acerte a pergunta seguinte?

c. Quantas perguntas deverá acertar para ganhar 2.560 reais?

d. Como já disse anteriormente, este material será utilizado pelos colegas dos anos seguintes e, por isso, é importante que você não escreva nele! Por isso, peço que copie a tabela abaixo para o seu caderno e complete as lacunas:



Questões respondidas corretamente	Cálculo do prêmio	Valor do prêmio
1	10	R$ 10,00
2	10×2^1	R$ 20,00
3	$10 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^2$	R$ 40,00
4	$10 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^3$	R$ 80,00
5	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^4$	R$ 160,00
6		R$...
10		R$...
n		

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Muito bom ganhar prêmios, não é, pessoal? Ainda mais aprendendo. E nesta última atividade, aprendemos a expressão que gera todos os termos de uma P.G., ou seja, a expressão do termo geral da P.G. Note que

- para obtermos o 2º termo, multiplicamos o 1º termo uma vez pela razão (aqui denominada de q);
- para obtermos o 3º termo, multiplicamos o 1º termo pela razão q multiplicada duas vezes por si mesma;
- dessa forma, o n-ésimo termo será obtido, multiplicando-se o 1º termo pela razão q multiplicada $n-1$ vezes por por si mesma. Essa conclusão pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Em que a_n representa o termo geral na posição n da sequência, a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é o número referente à posição do termo na sequência.

Que tal se fizéssemos a próxima atividade para verificarmos o nosso aprendizado?

Observe a sequência 1, 3, 9, 27, ...

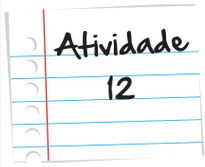
a. Determine se esta sequência é uma P.A. ou uma P.G.

b. Determine sua razão.

c. Encontre o 8º elemento da sequência.

d. O número 19.683 aparece nesta sequência em que posição?

e. Qual é a fórmula do termo geral dessa sequencia?



Lembre-se: faça em uma folha à parte

Esta atividade, além de nos ajudar a trabalhar os conceitos que aprendemos, permitiu ver que em uma progressão geométrica, os números podem crescer rapidamente. Porém, há outras possibilidades. Vejam:

Observe a sequência: 1000; 500; 250; 125; 62,5;.... Note que os números decrescem o tempo todo. Podemos dizer, então, que esta P.G. é decrescente. Vocês conseguem calcular a razão desta P.G.? Utilizemos uma dica: se cada termo é obtido multiplicando-se a razão pelo termo anterior, então o quociente entre um termo e seu antecedente nos dá o valor da razão, não é mesmo?! Observem:

Se $a_2 = a_1.q$, então: $\frac{a_2}{a_1} = q$

Portanto, no caso da sequência deste último exemplo, $q = \frac{1}{2}$.

Já na sequência 2; –4; 8; –16; ..., vemos que seus termos ficam alternando entre os positivos e os negativos. Não podemos dizer que é uma sequência crescente e nem decrescente, pois a cada momento, os números vão ficando cada vez maiores e, em seguida, cada vez menores. Verifique que se trata de uma PG de razão -2.

Legal! O estudo das sequências numéricas é mesmo muito rico em informações. Podemos explorar muitas situações e vermos o quanto esses conhecimentos podem ajudar, como no caso do laboratório do Dr. Loucus.

No laboratório químico do Dr. Loucus, está ocorrendo um experimento. Há um recipiente de vidro vazio que, no primeiro dia do mês, receberá 3 gotas de um elemento químico. No dia seguinte, observadas as possíveis reações, Dr. Loucus pinga 9 gotas. No terceiro dia, 27 gotas e assim por diante. No dia em que recebeu 2187 gotas, o recipiente ficou completamente cheio. Precisamos descobrir quantas gotas foram despejadas para encher este frasco.

Para isso, vamos observar a sequência formada pela quantidade de gotas:

3; 9; 27; 81; ...; 2187

Podemos verificar que esta sequência é uma P.G. cuja razão é 3. Conseguiu verificar? Muito bem. Não conseguiu? Tudo certo, também. Para identificar a razão de uma P.G., basta dividir um termo pelo seu antecessor : 81/27=3; 27/9=3; 9/3=3.

Contudo, ainda não sabemos quantos termos tem essa P.G.

Vamos calcular?

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$
$$2187 = 3.3^{n-1}$$
$$\frac{2187}{3} = 3^{n-1}$$
$$729 = 3^{n-1}$$
$$3^6 = 3^{n-1}$$
$$n-1=6$$
$$n=7$$

Portanto, sabemos que a experiência terminou em 7 dias. Mas, ainda estamos longe de saber o total de pingos despejados no recipiente de vidro.

Precisamos encontrar um jeito de somar todos esses números sem ter que escrevê-los. Isto é, algum jeito mais simples de calcular a soma dos termos desta P.G. Será que é possível?

É sim! Da mesma forma que na progressão aritmética, existe uma fórmula que calcula a soma dos seus n primeiros termos.

Está fórmula é:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Pelo que podemos observar nesta fórmula, para calcularmos a soma dos n primeiros termos de uma P.G., precisamos utilizar apenas o valor do primeiro termo, a razão e o número de termos que estamos somando.

Saiba Mais

Curiosos para saber como chegamos nesta fórmula? Ótimo! Acessem o link http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/soma-dos-termos-uma-pg-finita.htm. Como vocês sabem, tudo na matemática tem uma justificativa e a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica também tem.

Portanto, vamos calcular o total de gotas despejadas no recipiente por Dr. Loucus.

Para isso, temos que:

$a_1 = 3$
$n = 7$
$q = 3$

Então,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(3^7 - 1)}{7 - 1} = \frac{3.(2187 - 1)}{6} = \frac{3.2186}{6} = \frac{6558}{6} = 1093$$

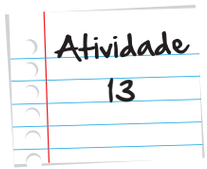
Assim, descobrimos que foi colocado um total de 1.093 gotas neste recipiente. Fácil, não é mesmo?!

Uma propriedade bem interessante da PG – e da soma de seus termos – é que ambas crescem muito rápido de um passo para outro. Lembram da Atividade 11? Pois então! Uma das lendas a respeito da criação do jogo de xadrez envolve essa propriedade das P.Gs e da soma de seus termos.

Figura 9: Tabuleiro de xadrez.

De acordo com a história, o xadrez foi criado na Índia Antiga e seu criador, assim que terminou de fazer sua primeira versão completa do jogo foi mostrá-lo ao imperador. Depois de aprender a jogar, o imperador, felicíssimo, decidiu recompensar o inventor, que poderia escolher o que quisesse – jóias, cavalos, palácios, etc, oferecendo a ele o que ele quisesse.

O inventor agradeceu muito, mas disse queria receber o pagamento em grãos de arroz, de acordo com uma regra feita a partir do desenho do tabuleiro. Na primeira casa do tabuleiro, o imperador colocaria um grão. Na segunda casa, dois grãos. Na terceira, 4 grãos, na quarta oito grãos e assim até a 64ª casa. O imperador ficou um pouco surpreso e achou o preço por demasiado barato, mas aceitou o pedido e ordenou ao tesoureiro que fizesse as contas e pagasse o criador do jogo. Uma semana depois, o tesoureiro voltou dizendo que passara todo o tempo trabalhando e que, ao terminar a conta, verificou que não haveria no império riqueza suficiente para pagar o que foi pedido. Aqui as lendas variam: em umas o inventor do xadrez vira imperador, em outras é punido – e até morto - por ele. Sabem quantos grãos de arroz haveria ao todo no tabuleiro? 18.446.744.073.709.551.615 grãos, o que pesaria em torno de 461.168.602.000 toneladas e seria aproximadamente 1000 vezes mais pesado do que a produção mundial de arroz...no ano de 2010 ! ! !



As situações-problema a seguir envolvem progressões geométricas. Vamos resolvê-las?

a. Uma empresa de cartão de crédito cobra juros de 10% ao mês. Uma pessoa adquiriu uma dívida de 1000 reais no cartão de ficou 5 meses sem pagá-lo. Qual é sua dívida após esses 5 meses?

b. De 2001 a 2010, uma empresa dobrou seu patrimônio a cada ano. Em que ano ela tinha a metade do seu patrimônio em 2008? Se em 2010 a empresa acumulava um patrimônio de 1 milhão de reais, qual era seu patrimônio em 2005?

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Veja ainda

Para quem é curioso e quer conhecer algumas histórias famosas que envolvem o conceito de sequências numéricas, indicamos conhecer o Paradoxo de Zenão. Ou, mais precisamente, o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga.

Acesse o endereço eletrônico abaixo e se divirta conhecendo esse paradoxo muito interessante que deixou o mundo intrigado por muitos e muitos séculos.

http://educacao.uol.com.br/filosofia/paradoxo-zenao-e-os-argumento-logicos-que-levam-a-conclusao-falsa.jhtm

Os paradoxos de Zenão motivam o estudo de sequencias cujos termos diminuem muito, assumindo valores cada vez mais próximos de zero. Ainda falando sobre a soma dos termos, embora pareça muito estranho, é possível somarmos os elementos de uma P.G. infinita, mas com uma condição: esta progressão precisa ser decrescente, isto é, uma razão maior que –1 e menor que 1.

Por exemplo:

A progressão 1000; 500; 250; ... que vimos anteriormente é um exemplo de P.G. decrescente. Apesar de parecer muito estranho, mesmo tendo infinitos termos, conseguimos calcular a soma desses infinitos números.

Para nos ajudar a encontrar essa soma, ou esse limite, utilizamos a fórmula abaixo:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

Repare que levamos em consideração nesta fórmula apenas o valor do primeiro termo da sequência e a razão. O número de termos não é utilizado, pois estamos somando infinitos termos.

Então, vamos utilizá-la para determinarmos a soma dos termos da sequência dada no exemplo anterior.

Na sequência dada anteriormente, temos que:

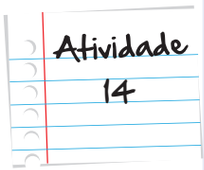
$a_1 = 1000$

$q = \frac{1}{2} = 0,5$

Então,

$$S_{\infty} = \frac{1000}{0,5} = 2000$$

Podemos garantir que, mesmo tendo infinitos termos, a soma de todos os elementos dessa P.G. não ultrapassa o número 2000. Interessante, não é mesmo?! Então vamos colocar isso em prática!



Vocês conhecem uma dízima periódica, não é?! Por exemplo, temos o número 0,333333....

Considerando que 0,33333..... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ..., escreva os termos dessa soma em sua forma fracionária e determine a soma desses números fracionários. Dessa forma, você descobrirá que essa dízima periódica pode ser escrita como uma fração, chamada de *fração geratriz* desta dízima.

Lembre-se: faça em uma folha à parte

Muito bem, pessoal! Pudemos perceber que é possível organizar os números em sequências numéricas e que essas podem ter diversas características. As progressões aritméticas e as geométricas nos permitem maior exploração matemática e aplicação em situações do dia-a-dia tal como os exemplos e atividades trabalhados nesta unidade.

É muito importante que vocês estudem bastante este assunto, pois é rico em informações e, devido a sua grande aplicabilidade, pode se tornar uma grande ferramenta para diversos outros temas.

Contudo, em relação a esta unidade, nosso trabalho está cumprido! Parabéns a todos nós e até a próxima!

Resumo

- Uma sequencia numérica em que um termo é obtido somando-se um fator constante ao termo anterior é chamada de progressão aritmética (PA).
- O termo geral de uma P.A. é dado por $a_n = a_1 + (n-1).r$.
- A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dado por é dado por $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$.
- Uma sequencia numérica em que um termo é obtido multiplicando-se o termo anterior por um fator constante é chamada de progressão geométrica (PG).
- O termo geral de uma P.G. é dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$.

- A soma dos n primeiros termos de uma P.G. finita é $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

- A soma dos termos uma P.G. infinita é dada por $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$

Referências

Livros

- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, p. 18.
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, p. 24.
- SOUZA & DINIZ (1994), *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: CAEM/IME-USP, Pp. 56 – 57
- TINOCO (2002), *Construindo o Conceito de Função*. 4. Ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, p. 33.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=630098

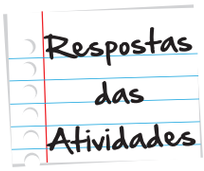
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=118870

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=847256

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=730723

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=477365

- http://www.sxc.hu/photo/517386



Atividade 1

Posição do elemento na sequência	Número de retângulos
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
10	20
28	56
50	100

Através do preenchimento da tabela, podemos notar que o número de retângulos é sempre igual ao dobro do número referente à posição do elemento na sequência.

Atividade 2

a. triângulo

b. quadrado

c. quadrado

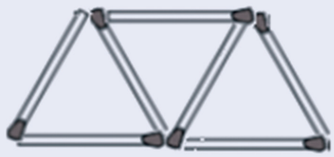
d. quadrado

e. quadrado

f. Como, através das perguntas anteriores, percebemos que as posições múltiplas de 3 são sempre ocupadas por um quadrado, descobre-se que 231 é múltiplo de 3, ou seja, um quadrado. Logo, 232 é o seguinte, um triângulo. Ou ainda, como a sequência mostrada possui 9 elementos, podemos calcular quantas vezes essa sequência irá se repetir até encontrarmos o 232º elemento. Para isso, fazemos $232 \div 9 = 25$, resto 7. Portanto, a sequência se repete 25 vezes e ainda "pula" mais sete elementos, cuja figura que ocupa esta posição é o triângulo.

Atividade 3

Respostas das Atividades

a. 

b. 11

c. 13

d. 21

e. 73

f.

Nº de triângulos	Nº de palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
10	21
36	73

g. O número de palitos é o dobro do número de triângulos mais uma unidade.

h. $P = 2N + 1$

Atividade 4

a. 4. 5. 9 pregadores.

b. 11 e 12 pregadores.

c. Sim, pois usará 23 pregadores, quando há disponíveis 24.

Respostas das Atividades

Atividade 4

d.

Nº de camisas	Nº de pregadores
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7

Atividade 5

A sequência ***30 – 26 – 22 – 18 – 14 –*** ... é uma progressão aritmética, pois para obtermos cada elemento, devemos somar – 4 ao termo anterior. O valor da razão é exatamente – 4, pois $r = a_2 - a_1 = 26 - 30 = -4$.

Atividade 6

2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 –

a. Esta sequência é uma progressão aritmética, pois a partir do primeiro termo, somamos 3 unidades para obter o seguinte.

b. $a_{12} = a_1 + 11.r = 2 + 11.3 = 2 + 33 = 35$

c. $a_{100} = a_1 + 99.r = 2 + 99.3 = 2 + 297 = 299$

d. $a_n = a_1 + (n-1).r = 2 + (n-1).3 = 2 + 3n - 3 = -1 + 3n$

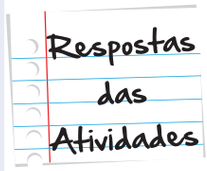
Atividade 7

$a_1 = 10$

$a_n = a_8 = 80$

$n = 8$

$$S_n = \frac{(10+80).8}{2} = \frac{90.8}{2} = 360$$



Atividade 8

a. Se $r = 3$ e $a_1 = 5$, $a_{10} = 5 + 9 \cdot 3 = 32$

b. Sabemos que $a_1 = 5$ e $a_4 = -10$. Como $a_4 = a_1 + 3r$, temos que

$-10 = 5 + 3r$

$-15 = 3r$

$r = -5$

c. Sabemos que $a_5 = 2$ e $a_{13} = 10$. Como, partindo do quinto termo, devemos somar a razão 8 vezes para obter o décimo terceiro termo, temos que $a_{13} = a_5 + 8r$

$10 = 2 + 8r$

$8 = 8r$

$r = 1$

Agora, para obtermos o 1º termo da sequencia, basta observarmos que

$a_5 = a_1 + 4r$

$2 = a_1 + 4 \cdot 1$

$2 = a_1 + 4$

$a_1 = -2$

Atividade 9

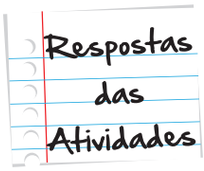
$300 = 3 + (100 - 1).r$

$300 = 3 + 99.r$

$99r = 300 - 3$

$99r = 297$

$r = \frac{297}{99} = 3$ *quilômetros*



Atividade 10

Vejamos outras situações que envolvem progressões aritméticas:

a. Se 2012 foi um ano bissexto, foram bissextos os anos 2008, 2004, 2000, ... Logo, o primeiro ano bissexto desse século foi 2004. Esse problema pode ser modelado por uma PA em que $a_1 = 2004$ e $r = 4$. O vigésimo bissexto será $a_{20} = a_1 + 19r = 2004 + 19 \cdot 4 = 2080$.

b. Note que, a cada dia, o número de pílulas a ser tomado é aumentado em duas. Esse problema pode ser modelado por uma PA em que $a_1 = 2$ e $r = 2$. Contudo, deseja-se saber, após quantos dias o total de remédios tomados (a soma dos remédios tomados em todos os dias) é 72. Como $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$ e $Sn = 72$, temos que

$S_n = (a_1 + an) \cdot n/2$

$72 = (2 + 2n) \cdot n/2$

$72 = (1 + n)\, n$

$n2 + n - 72 = 0$

$(n + 9)\,(n - 8) = 0$

Dessa forma, $n = -9$ ou $n = 8$. Como n deve ser positivo, o número de dias é 8.

Atividade 11

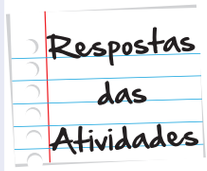
a. Esta progressão tem razão igual a 2.

b. R$ 320,00 x 2 = R$ 640,00.

c. $2.560 = 10 \times 2^8$. Logo, terá que acertar 9 perguntas, afinal, uma para ganhar 10 reais e outras 8 para que seu prêmio dobre 8 vezes (2^8).

d.

Questões respondidas corretamente	Cálculo do prêmio	Valor do prêmio
1	10	R$ 10,00
2	10×2^1	R$ 20,00
3	$10 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^2$	R$ 40,00
4	$10 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^3$	R$ 80,00
5	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^4$	R$ 160,00
6	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^5$	R$ 320,00
10	$10 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^9$	R$ 5.120,00
n	$10 \times 2^{n-1}$	$10 \times 2^{n-1}$



Atividade 12

a. Esta sequência é uma P.G., pois $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_2}{a_3}$

b. A razão é igual a $r=\frac{a_2}{a_1}=3$

c. $a_8=a_1.q^{8-1}=1.3^7=2.187$

d. $a_n=1.3^{n-1}=19683$

$3^{n-1}=3^9$

$n=10$

e. $a_n=1.3^{n-1}$

Atividade 13

a. O problema pode ser modelado por uma PG em que a_1 = 1000 e q = 1,10. Assim, a dívida será dada por $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 1000.1,10^4 = 1464,1$ reais.

b. Ela tinha a metade do seu patrimônio em 2007. O problema pode ser modelado por uma PG em que $a1_0$ (o patrimônio em 2010) é igual a 1000000 e q = 2. Para saber o seu patrimônio em 2005 (a_5), temos que

$a_{10} = a_5 \cdot q^4$

$1000000 = a_5 \cdot 2^4$

$1000000 = a_5 \cdot 16$

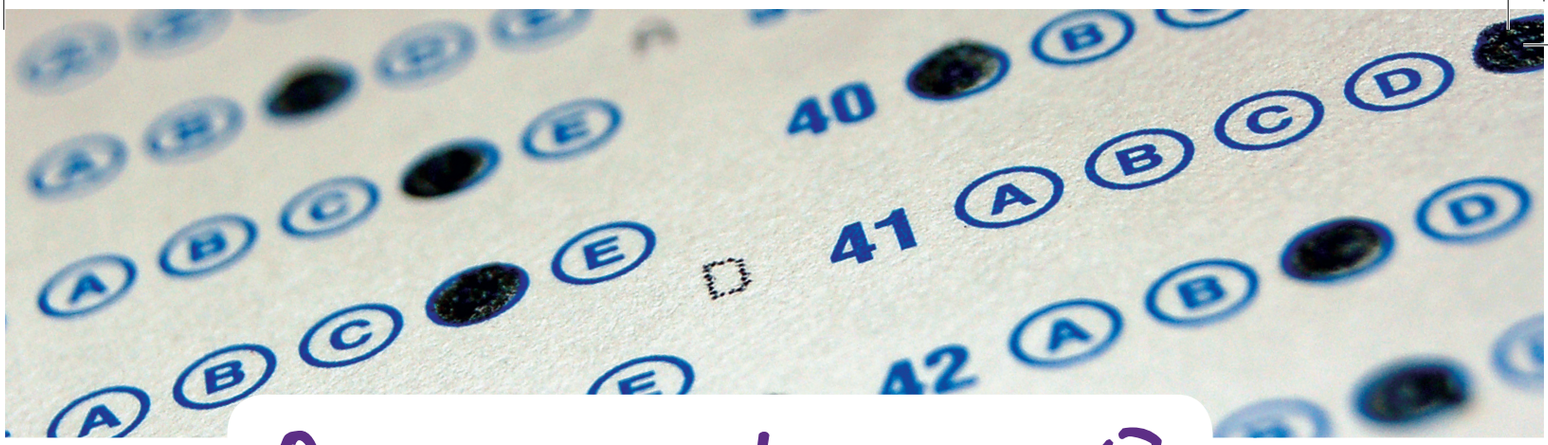
a_5 = 1000000/16 = 62500 reais

Atividade 14

Com isso, temos que é a soma dos termos da P.G. ao lado, onde a_1 e a razão é 0,1.

Logo, estamos diante de uma razão infinita. Portanto, a soma dos termos dessa razão é:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0,3}{1-0,1}=\frac{0,3}{0,9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$



O que perguntam por aí?

Questão 1 (PUC-SP/2003)

Os termos da seqüência (10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; …) obedecem a uma lei de formação. Se a_n, em que n pertence a N*, é o termo de ordem n dessa seqüência, então $a_{30} + a_{55}$ é igual a:

a) 58

b) 59

c) 60

d) 61

e) 62

Resposta: Letra B

Comentário: Primeiro, observem que os termos de ordem ímpar da sequência formam uma PA de razão 1 e primeiro termo 10 – (10; 11; 12; 13; …). Da mesma forma, os termos de ordem par formam uma PA de razão 1 e primeiro termo igual a 8 – (8; 9; 10; 11; …) . Assim, as duas PA têm como termo geral o seguinte formato:

(1) $a_i = a_1 + (i - 1) \cdot 1 = a_1 + i - 1$

Para determinar $a_{30} + a_{55}$ precisamos estabelecer a regra geral de formação da sequência, que está intrinsicamente relacionada às duas progressões da seguinte forma:

- Se n (índice da sucessão) é impar temos que $n = 2i - 1$, ou seja, $i = (n + 1)/2$;
- Se n é par temos $n = 2i$ ou $i = n/2$.

Daqui e de (1) obtemos que:

$a_n = 10 + [(n + 1)/2] - 1$ se ***n*** é ímpar

$a_n = 8 + (n/2) - 1$ se n é par

Logo:

$a_{30} = 8 + (30/2) - 1 = 8 + 15 - 1 = 22$

e

$a_{55} = 10 + [(55 + 1)/2] - 1 = 37$

E portanto:

$a_{30} + a_{55} = 22 + 37 = 59$

Questão 2 (UFLA – 99)

A soma dos elementos da sequência numérica infinita (3; 0,9; 0,09; 0,009; …) é:

a) 3,1

b) 3,9

c) 3,99

d) 3,999

e) 4

Resposta: Letra E

Comentário: Sejam ***S*** a soma dos elementos da sequência e $\boldsymbol{S_1}$ a soma da PG infinita (0,9; 0,09; 0,009; …) de razão $q = 10^{-1} = 0,1$. Assim:

$S = 3 + S_1$

Como $-1 < q < 1$ podemos aplicar a fórmula da soma de uma PG infinita para obter S_1:

$S_1 = 0,9/(1 - 0,1) = 0,9/0,9 = 1 \Rightarrow S = 3 + 1 = 4$.

Matemática Financeira

Para início de conversa...

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1241539, http://www.sxc.hu/photo/1241540, http://www.sxc.hu/photo/1403392, http://www.sxc.hu/photo/784488

Novas regras da Caixa para financiamento da casa própria começam a valer hoje

A partir desta segunda-feira (11), passam a valer as novas regras da Caixa Econômica Federal para os financiamentos habitacionais. Pelo novo modelo, os mutuários terão mais cinco anos para quitar os empréstimos. A Caixa ampliou o prazo do crédito habitacional de 30 anos para 35.

Os empréstimos serão feitos com recursos do Sistema Brasileiro de Poupança e Empréstimo (SBPE). Os financiamentos do SBPE beneficiam apenas os mutuários que ganham mais de R$ 5.400 por mês ou que adquirirem imóveis de mais de R$ 170 mil.

A Caixa também reduziu as taxas de juros para essas modalidades. Para imóveis financiados pelo Sistema Financeiro da Habitação (SFH), as taxas caíram de 9% para 8,85% ao ano. Para os imóveis fora do SFH, os juros passaram de 10% para 9,9% ao ano.

Fonte: http://economia.uol.com.br/ultimas-noticias/redacao/2012/06/11/novas-regras-para-financiamento-da-casa-propria-comecam-a-valer-hoje.jhtm

Demanda das empresas por crédito sobe 7,9% em julho, aponta Serasa

Alta é sobre junho; com relação ao mesmo mês de 2011 há queda de 3%.

Micro e pequenas empresas expandiram a busca por crédito em 8,5% em julho sobre junho.

Fonte: http://g1.globo.com/economia/noticia/2012/08/demanda-das-empresas-por-credito-sobe-79-em-julho-aponta-serasa.html

Faturamento do comércio da Grande SP sobe 5,2% no 1º semestre

Dados foram divulgados nesta quinta-feira pela FecomercioSP.

Só em junho, comércio faturou R$ 13,3 bilhões em junho, alta de 9,3%.

Fonte: http://g1.globo.com/economia/noticia/2012/08/faturamento-do-comercio-da-grande-sp-sobe-52-no-1-semestre.html

Notícias como essas você deve ver todos os dias nos jornais, telejornais e também na internet.

Nessas e em outras situações relacionadas com problemas de ordem financeira, como financiamentos de moradias, compras a crédito, investimentos, empréstimos, são aplicados conhecimentos de Matemática Financeira.

Todos os problemas financeiros envolvem taxas de juros. Veja alguns exemplos:

- Quando fazemos uma compra a crédito, por exemplo, o pagamento é feito por prestações mensais acrescidas de juros.
- Quando aplicamos uma quantia em poupança, receberemos os juros dessa aplicação, que é acrescentado ao capital inicial.
- Você certamente já ouviu falar na palavra juros. O que são juros?
- Podemos dizer que juros são o valor que uma pessoa ou uma empresa paga pelo uso de uma quantia de dinheiro de outra pessoa ou de um banco durante certo período de tempo.

Nesta unidade vamos conhecer elementos da matemática financeira, bem como modelar e resolver situações-problema em diferentes contextos utilizando o conceito de porcentagem.

Objetivos de Aprendizagem

- Rever o conceito de porcentagem;
- Calcular porcentagem em diferentes situações;
- Calcular mentalmente porcentagem.
- Calcular aumentos e descontos;
- Calcular o lucro ou prejuízo em situações específicas;
- Calcular aumentos e descontos sucessivos.

Seção 1
Revendo porcentagens

Em diferentes momentos da nossa vida aparecem notícias e informações com dados em forma de porcentagem, por exemplo:

- O governo propôs um reajuste no salário dos servidores técnico-administrativos das Universidades Federais de 15,8%, em 3 anos, a partir de 2013.
- O preço do frango sofreu um aumento de 18% no último mês.
- A Bolsa de Valores subiu hoje 0,5%.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/983490

Essas situações envolvem uma razão especial chamada Porcentagem, tema que já foi estudado, mas que iremos rever nesta aula por ser muito importante para o estudo da Matemática Financeira e também para outros temas da Matemática.

A expressão porcentagem tem origem na expressão latina per centum, que significa por cento ou por cem.

Esse conceito foi criado para representar valores em relação a cem (100) e é atribuído aos gregos, apesar do nome latino.

Saiba Mais

Você certamente já deve ter ouvido falar dos outros nomes usados para uma

Porcentagem, tais como: razão porcentual, índice ou taxa porcentual e percentil.

O símbolo % que aparece depois dos números deve ser lido por cento e representa uma fração de denominador 100.

Exemplos: $50\% = \frac{50}{100}$ $19\% = \frac{19}{100}$ $37\% = \frac{37}{100}$

Sendo uma fração centesimal, uma porcentagem também pode ser escrita como número decimal. Assim:

$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$ $7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07$ $15{,}8\% = \frac{15{,}8}{100} = 0{,}158$

Também podemos escrever algumas frações não centesimais como porcentagem. Para isso, determinamos a fração equivalente de denominador 100. Veja:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times25}{4\times25}=\frac{75}{100}=75\ \%$$

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times20}{5\times20}=\frac{40}{100}=40\ \%$$

Porcentagem de um número

Podemos calcular porcentagem de um número de várias maneiras: uma delas é escrever a porcentagem na forma de número decimal e multiplicá-lo pelo número. Também podemos calcular porcentagem de um número trabalhando com fração ou usando a calculadora. Veja o exemplo:

Na eleição para prefeito de uma cidade com 425.212 eleitores, 25% votaram no candidato vencedor. Quantos votos ele recebeu?

$$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

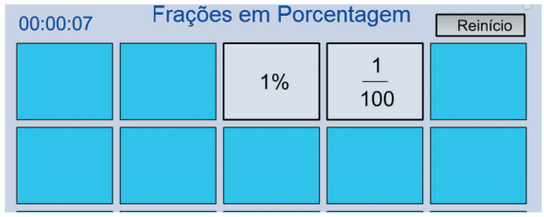
25% de 425 212 = 0,25 de 425 212 = 0,25 × 425 212 = 106 303

Logo, o candidato vencedor recebeu 106.303 votos.

Fundação Roberto Marinho – Multicurso – Ensino médio-volume 2

Multimídia

Quer aprender um pouco mais sobre porcentagem jogando? Então acesse http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/10468 e divirta-se com um jogo de memória em flash, onde se propõe fazer relação entre as frações e suas correspondentes em porcentagem.



Usando a calculadora, é mais prático trabalhar com o número decimal, ou também podemos usar a tecla com o símbolo de % que quase todas as calculadoras possuem. Podemos fazer o mesmo cálculo anterior digitando as seguintes teclas e encontraremos o resultado 106.303. Experimente fazer

Veja o passo a passo de como calcular a porcentagem na calculadora. Você pode usar qualquer calculadora padrão ou a do Windows (clicando no botão Iniciar, Programas, Acessórios e Calculadora, exibir, padrão):

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1259850

Para calcular 40% de R$ 400,00, por exemplo, siga os três passos descritos adiante para calculadora padrão do Windows:

1. Ligue a calculadora (ON) e digite 40.
2. Pressione o sinal de multiplicação (X ou *).
3. Digite 400 e pressione a tecla %.

Siga os quatros passos a seguir para calculadora científica:

1. Ligue a calculadora (ON), digite 40.
2. Aperte no sinal de multiplicação (X ou *).
3. Digite 400, pressione a tecla 2ndF(shift), pressione a tecla %.
4. Pressione a tecla do sinal de igualdade (=).

Exercite!

Saiba Mais

Calculando mentalmente algumas porcentagens:

É muito útil sabermos calcular algumas porcentagens mentalmente (de cabeça), pois isso nos traz agilidade na hora de fazermos alguma compra ou calcularmos descontos ou multas.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/987763

1º) 50% de um número é a metade do número, pois

$50\% = \frac{50}{100}$ e simplificando essa fração temos

$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Logo, para calcular 50% de 96, por exemplo, basta dividi-lo por 2.

50% de 96 = 96 ÷ 2 = 48.

2º) 10% de um número é a décima parte do número, pois $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Logo, para calcular 10% de 360, por exemplo, basta dividi-lo por 10.

10% de 360 = 360 ÷ 10 = 36

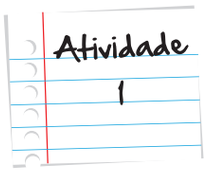
3º) 25% de um número é a quarta parte do número, pois 25% = $\frac{25}{100}$ e simplificando essa fração temos $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. Logo, para calcular 25% de 328, por exemplo, basta dividi-lo por 4.

25% de 328 = 328 ÷ 4 = 82

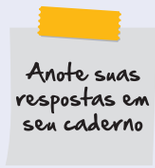
4º) 1% de um número é a centésima parte do número. Logo, para calcular 1% de 965, por exemplo, basta dividi-lo por 100.

1% de 965 = 965 ÷ 100 = 9,65

Utilizando-se esses resultados, podemos fazer outros cálculos mentalmente, tais como: 5%, que é a metade de 10%; 20%, que é o dobro de 10%; e outros.



Calcule mentalmente 15% de R$ 500,00 e explique como fez o cálculo.



Calculando a taxa de porcentagem

Em muitas situações necessitamos descobrir qual é a taxa de porcentagem que está sendo usada para calcular multas ou desconto. Assim poderemos fazer comparações entre taxas que nos são oferecidas como desconto ou como encargos e, se for possível, fazer as escolhas mais favoráveis ao nosso orçamento.

Isso pode ser resolvido por meio de uma equação algébrica do 1º grau onde a taxa de porcentagem, que chamaremos de p, é a incógnita da equação.

Exemplo:

Luana não pagou a fatura de seu cartão de crédito no valor de R$ 857,00 no dia do vencimento. No mês seguinte recebeu a cobrança de R$ 111,41 referente à multa pelo atraso. Que porcentagem do valor da fatura a multa representa?

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1316485

Escrevendo a equação para calcular a taxa de porcentagem(p), temos:

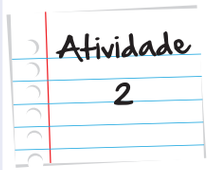
111,41 = p de 857,00

111,41 = p × 857, 00, sendo p a taxa de porcentagem.

Logo p = 111,41 ÷ 857,00 e p = 0,13.

Logo, como $0,13 = \frac{13}{100}$, a taxa de porcentagem da multa foi de 13%.

Vânia recebeu no seu contracheque desse mês, além do salário de R$1.258,00, um aumento no valor de R$ 251,60. Qual foi a taxa de porcentagem do aumento que Vânia recebeu?



Anote suas respostas em seu caderno

Calculando o número, conhecendo a porcentagem

No próximo exemplo, vamos apresentar uma situação em que são conhecidas a porcentagem e a respectiva taxa, e precisamos calcular o número sobre o qual foi calculada essa porcentagem. Isso também será resolvido por meio de uma equação do 1º grau.

Exemplo: Uma casa ocupa uma área de 121m² que representa 55% da área total do terreno. Qual é a área do terreno?

55% do terreno correspondem a 121 m².

0,55 x A = 121, sendo A a área total do terreno.

A = 121÷ 0,55

A = 220

A área total do terreno é 220m².

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1387294

Atividade 3

Em uma cidade, 53.100 habitantes têm menos de 18 anos, o que corresponde a 60% do total de habitantes da cidade. Quantos são os habitantes dessa cidade?

Fundação Roberto Marinho- Multicurso- Ensino médio -volume 2

Anote suas respostas em seu caderno

Porcentagem de porcentagem

Em algumas situações, é necessário calcular a porcentagem de um número que já está relacionado à outra porcentagem.

No exemplo a seguir será mostrado que, para se fazer esse cálculo, as duas taxas serão multiplicadas entre si.

Exemplo:

Mauricio gastou 20% de sua mesada de R$ 250,00 comprando material escolar, sendo que 12% desse gasto foram para comprar uma caneta.

Qual o porcentual da mesada que corresponde ao preço da caneta?

O preço da caneta corresponde a 12 % de 20% de 250,00, ou seja,

$0{,}12 \times 0{,}20$ de $250 = 0{,}024 \times 250 = 6$.

O preço da caneta corresponde a 2,4% da mesada de Mauricio e seu custo é igual a R$ 6,00.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1206626

Da população total do Brasil, 52% são mulheres. Além disso, 20% das mulheres possuem o ensino médio completo. Qual a porcentagem de mulheres que possuem o ensino médio completo em relação ao total da população brasileira?

Fundação Roberto Marinho- Multicurso- Ensino médio -volume 2

Atividade 3

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Aumentos e descontos

É bastante comum precisarmos calcular um novo valor obtido após um aumento. Essa situação pode ser resolvida em duas etapas, calculando primeiramente o aumento para depois acrescentarmos esse aumento ao valor inicial.

Da mesma forma acontece quando precisamos calcular um novo valor obtido após um desconto. Calculamos em primeiro lugar o desconto para depois subtraí-lo do valor inicial. Veja nos exemplos a seguir de que forma aparece e como se soluciona esse tipo de problema muito comum em nosso cotidiano.

1 º Exemplo:

Marina se esqueceu de pagar a sua conta do condomínio na data do vencimento. Ela pagará uma multa de 5% do valor da conta, que é R$ 220,00.

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/865433

Quanto Marina terá que pagar?

Calculando o valor da multa: 5% de 220,00 = 0,05 × 220 = 11.

Calculando o novo valor a ser pago: 220 + 11 = 231.

Marina terá que pagar R$ 231,00.

2º Exemplo: No final do ano passado, uma livraria ofereceu desconto de 7% no preço de todos os livros. Fiz uma compra de alguns livros no valor de R$ 154,00. Quanto pagarei após o desconto?

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/871147

Calculando o desconto: 7% de 154,00 = 0,07 × 154 = 10,78.

Calculando o novo valor a ser pago: 154 – 10,78 = 144,22.

Pagarei R$ 144,22 pela compra após o desconto.

Essas duas situações, que foram resolvidas em duas etapas, também poderiam ser resolvidas em apenas uma etapa, o que facilitaria no caso de você usar uma calculadora.

No 1º exemplo podemos calcular diretamente o novo valor fazendo:

$$\underbrace{100\%\,de\,220}_{\textit{valor da conta}} + \underbrace{5\%\,de\,220}_{\textit{valor da multa}} = \underbrace{105\%\,de\,220}_{\textit{valor a ser pago}}$$

105% de 220 = 1,05 × 220 = 231. O novo valor é R$ 231,00.

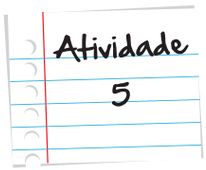
Resumindo, você pode calcular o novo valor já com o aumento multiplicando o valor inicial por 1,05. O número 1,05 é chamado "fator de correção".

No 2º exemplo vamos calcular o novo valor após o desconto.

$$\underbrace{100\%\,de\,154}_{\text{valor da compra}} - \underbrace{7\%\,de\,154}_{\textit{desconto}} = \underbrace{93\%\,de\,154}_{\textit{preço a pagar}}$$

93% de 154 = 0,93 × 154 = 144,22. O novo valor é R$144,22.

Ou seja, para calcular o valor da compra com desconto, basta multiplicar o valor inicial por 0,93. Nesse caso, 0,93 é o fator de correção.



O preço de um celular em certa loja é R$ 480,00. Se eu pagar à vista, a loja me oferece 15% de desconto. Quanto pagarei pelo celular se eu pagá-lo à vista?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Aumentos e descontos sucessivos

É bastante comum que sejam feitos aumentos sucessivos em salários ou descontos sucessivos em faturas ou preços de mercadorias. Por isso, é importante saber efetuar esse tipo de cálculo com a finalidade, entre outras, de controlar esses aumentos e descontos.

1º Exemplo: Uma pessoa teve um aumento de salário de 5% no mês de janeiro e outro aumento de 10% no mês seguinte. Como você calcularia a taxa total do aumento que essa pessoa recebeu nesses dois meses? Será que devemos somar as duas taxas de aumento?

Vamos fazer os cálculos para verificar.

Como não conhecemos o salário dessa pessoa sobre o qual vamos calcular os aumentos, vamos imaginar que este salário seja de R$ 100,00.

No mês de janeiro ela recebeu 5% de aumento, então:

5% de 100 = 0,05 × 100 = 5.

Logo, o salário passou a ser R$ 105,00.

No mês seguinte ela recebeu 10% de aumento, então:

10% de 105 = 0,1 × 105 = 10,5.

O salário passou a ser 105 + 10,5 = 115,50.

O aumento total foi 115,50 – 100 = 15,50, ou seja, 15,5%.

Vimos que, quando temos dois aumentos sucessivos, não devemos somar as taxas para determinar o total do aumento. Esse raciocínio vale para o caso de mais de dois aumentos sucessivos.

Qual seria o fator de correção? Como encontrar esse fator?

2º Exemplo: Em uma liquidação, o preço de uma saia sofreu um desconto de 15%. Como não foi vendida, no mês seguinte sofreu mais um desconto de 12%. Qual foi a taxa total de desconto?

Considerando que a saia custe R$ 100,00, o primeiro desconto foi

0,15 ×100= 15, e o preço da saia caiu para R$ 85,00.

O segundo desconto foi de 12% de 85, ou seja, 0,12 × 85 = 10,20, e o preço da saia passou a ser 85 – 10,20 = 74,80.

O desconto total do preço da saia foi 100 – 74,80 = 25,20.

Logo, a taxa total de desconto total foi de 25,20%.

Qual o fator de correção? E como encontrá-lo?

Atividade 6

Atividade 06- Uma empresa distribuidora oferece, sobre o valor de uma fatura, os descontos sucessivos de 10% e 4%. Sabendo que o valor da fatura é de R$ 6.000,00, qual o seu valor líquido?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Atividade 07- Aumentos sucessivos de 20% e de 30% equivalem a um aumento único de que percentual? E descontos sucessivos de 20% e de 30% equivalem a um desconto único de que percentual? E um aumento de 20% seguido de um desconto de 30% equivalem a um único aumento ou desconto? De que percentual?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Lucro e Prejuízo

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/958658

Esses são termos muito utilizados em atividades comerciais. Você com certeza os conhece.

Pense um pouco e escreva em uma folha as explicações. Dê exemplos.

Nos próximos exemplos vamos apresentar situações de lucro ou de prejuízo, muito comuns no nosso dia a dia, e mostrar como é feito o cálculo em cada situação.

1º Exemplo: Um comerciante pretende lucrar 20% na venda de uma mercadoria que lhe custou R$ 1.800,00. Por quanto deve vendê-la?

Calculando o lucro: 20 % de 1.800,00 = 0,20 × 1.800 = 360.

Calculando o preço de venda da mercadoria: 1.800 + 360 = 2.160.

Para lucrar 20%, o comerciante deve vender a mercadoria por R$ 2.160,00.

Atenção: O preço de venda da mercadoria também poderia ser calculado em uma só etapa, pois o preço de venda é a soma do preço de compra com o lucro. Logo:

$$\text{Preço de venda} = \underbrace{\text{preço de compra}}_{100\%} + \underbrace{\text{lucro}}_{20\%}$$

Preço de venda = 120% do preço de compra = 1,20 de 1.800,00.

Preço de venda = 1,20 × 1.800 = 2.160.

Preço de venda: R$ 2.160,00

Portanto, para calcular o preço de venda, basta multiplicar o preço de compra por 1,20 (1 + 0,20), onde 0,20 é a porcentagem do lucro.

2º Exemplo: Um relógio que custou R$ 950,00 foi vendido com um prejuízo de 17%. Por quanto foi vendido o relógio?

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1365362

Calculando o prejuízo: 17% de 950,00 = 0,17 × 950 = 161,50.

Calculando o preço de venda do relógio: 950,00 – 161,50 = 788,50.

O preço de venda do relógio foi de R$ 788,50.

Atenção: Da mesma forma podemos calcular o preço de venda em uma só etapa:

$$\text{Preço de venda} = \underbrace{\text{preço de compra}}_{100\%} - \underbrace{\text{prejuízo}}_{17\%}$$

Preço de venda = 83% do preço de compra = 0,83 de 950,00.

Preço de venda = 0,83 × 950 = 788,50.

Preço de venda: R$ 788,50.

Portanto, para calcular o preço de venda basta multiplicar o preço de compra por 0,83 (1 – 0,17), onde 0,17 é a porcentagem do prejuízo.

Saiba Mais

Existem outros termos usados em diferentes setores da economia, com o significado semelhante a lucro e prejuízo.

Em uma empresa, por exemplo, usa-se anotar o movimento de entrada e saída de dinheiro ou créditos e débitos.

Também é usual se falar em superávit ou saldo positivo em vez de lucro ou déficit e saldo negativo para prejuízo.

Saber calcular o lucro ou o prejuízo é importante, pois são conceitos fundamentais em transações financeiras. O primeiro diz respeito ao ganho obtido na compra e venda de determinada mercadoria. O segundo diz respeito à perda. Resumindo, podemos dizer que:

Lucro (L) = Preço de venda (V) – Preço de custo (C)

Prejuízo (P) = Preço de custo (C) – Preço de venda (V)

Faça as atividades a seguir e exercite a compreensão desses conceitos.

Atividade 8

Maria vendeu uma jóia por R$ 1.250,00 com prejuízo de 10,5% sobre o preço de compra. Qual foi o preço de compra da jóia de Maria?

Anote suas respostas em seu caderno

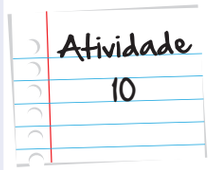
Atividade 9

Se eu comprar um objeto por R$ 20.000,00 e vendê-lo por R$ 25.000,00 qual será a minha porcentagem de lucro sobre o preço de compra?

Anote suas respostas em seu caderno

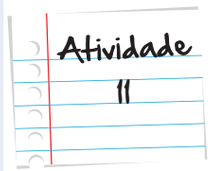
Caso você multiplique o preço de uma mercadoria por 1,08, o resultado obtido será um preço com lucro ou com prejuízo? De quantos por cento em relação ao preço de custo?

Anote suas respostas em seu caderno



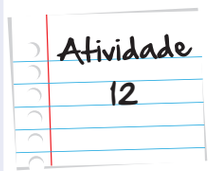
Para calcular o preço de venda de um objeto que foi vendido com prejuízo de 35%, por quanto devemos multiplicar o preço de custo do objeto?

Anote suas respostas em seu caderno



Quanto custou um relógio vendido por R$ 198,00, com um prejuízo de R$ 28,00 sobre o preço de custo?

Anote suas respostas em seu caderno



Conclusão

Os conceitos apresentados nesta aula podem já ser conhecidos. No entanto, é importante rever e organizar os conhecimentos adquiridos anteriormente visando a sua aplicação em diferentes situações da nossa vida financeira. Essa aula terá uma continuidade, quando serão estudados outros conceitos importantes da Matemática Financeira.

Resumo

O estudo de Matemática Financeira parte do conhecimento correto de porcentagem: seu conceito e os diversos tipos de cálculo que usamos para resolver situações envolvendo este conceito.

É importante que se desenvolva o cálculo mental de porcentagens, para permitir maior autonomia do indivíduo ao fazer uma compra, na hora de escolher uma forma de pagamento ou ainda na hora de escolher como investir o seu dinheiro.

O uso da calculadora também é valioso, já que essa ferramenta é usada amplamente no mercado e na vida cotidiana de todos nós. Portanto, torna-se importante conhecer todos os recursos que uma calculadora, mesmo do tipo simples, nos oferece.

Foram apresentadas também as primeiras noções de Lucro e Prejuízo e as maneiras de se fazer os cálculos para a determinação desses valores.

Os aumentos e descontos sucessivos são também parte do nosso cotidiano e é importante ressaltar que muitas pessoas pensam erroneamente a respeito desse cálculo, fazendo a soma das porcentagens sucessivas.

Foi mostrado que podemos considerar o valor desconhecido como 100. Isso facilita os cálculos, e, dessa forma, podemos calcular o primeiro aumento (ou desconto) e em seguida calcular os outros aumentos (ou descontos). No final saberemos qual foi o aumento (ou desconto) total aplicado sobre o valor 100.

Veja ainda

- http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/aplicacao-porcentagem-matematica-financeira.htm

Este site apresenta alguns exemplos de como o cálculo de porcentagem é importante no estudo da Matemática Financeira.

- http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1458-6.pdf.

Aqui é apresentado um trabalho da professora Ângela Regina da Silva com diversas atividades ilustradas que foram aplicadas no Colégio Estadual de Paraíso do Norte em 2008 para alunos do Ensino Médio.

Referências

Livros

- FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO. Multicurso – Ensino Médio. p. 73 a 84. v. 2.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contextos e aplicações. Editora Ática, 2010, p. 196 a 208, volume único.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/1241539

- http://www.sxc.hu/photo/1241540

- http://www.sxc.hu/photo/1403392

- http://www.sxc.hu/photo/784488

- http://www.sxc.hu/photo/983490

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1259850

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/987763

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1316485

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1387294

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1206626

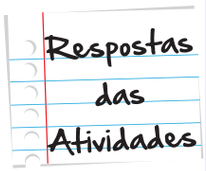
- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/865433

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/871147

- **Fonte: http://www.sxc.hu/photo/958658**

- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1365362

- http://www.sxc.hu/photo/517386



Atividade 1

Exemplo de resposta:

10% de 400 = 50

5% de 500 é a metade de 10% de 500, logo, são 25.

15% de 500 = 50 + 25 =75

Resposta: R$ 75,00.

Atividade 2

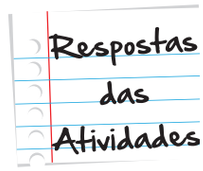
Resposta: 20%

Atividade 3

0,6 x N = 53.100, onde N é o número de habitantes.

N = 53 100 ÷ 0,6 = 88.500.

Resposta: 88.500 habitantes.



Atividade 4

52% × 20% = 0,52 × 0,20 = 0,104

Resposta: 10,4%.

Atividade 5

1 – 0,15 = 0,85.

0,85 × 480 = 408.

Resposta: R$ 408,00.

Atividade 6

10% de 6 000 = 600.

6.000 – 600 = 5.400.

4% de 5.400 = 216.

5.400 -216 = 5.184.

Resposta: R$ 5.184,00.

Atividade 7

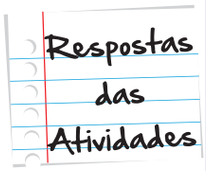
Resposta: 56% e 44%. Desconto de 14%.

Atividade 8

1- 0,105 = 0,895.

0,895 x = 1.250 x = 1.250 ÷ 0,895 = 1.396,64.

Resposta :R$ 1.396,64.



Atividade 9

Esta atividade pode ser resolvida mentalmente.

O lucro foi de R$ 5.000,00 que representa a quarta parte do preço de compra, que foi de R$ 20.000,00.

Logo, o lucro foi de 25%.

Atividade 10

$100 \times 1{,}08 = 106$.

$108 - 100 = 8$.

Resposta: lucro de 8%.

Atividade 11

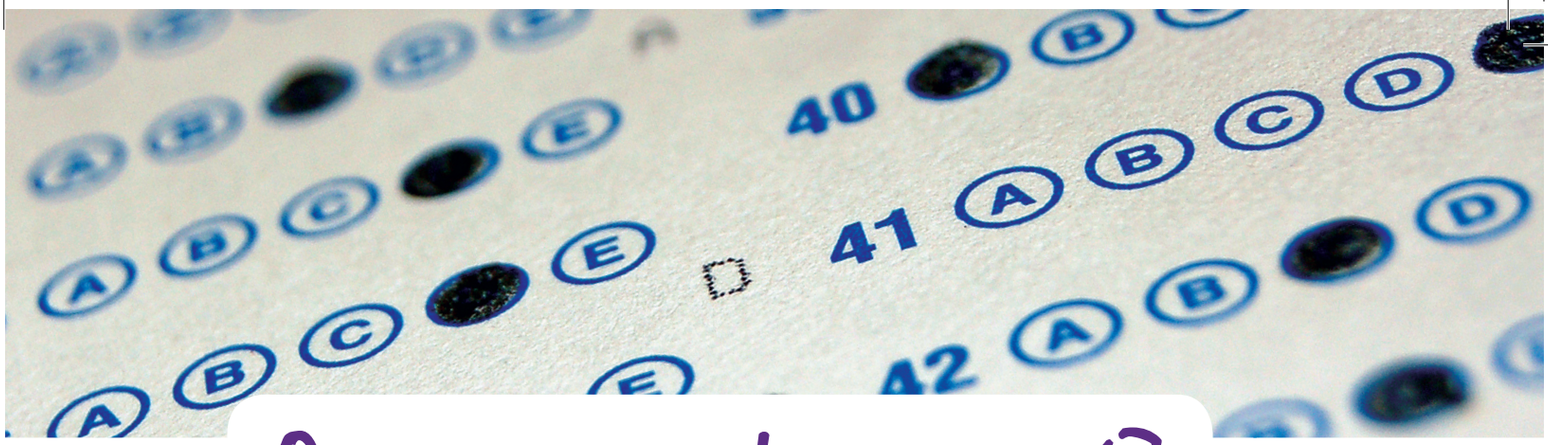
$1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

Resposta: 0,65.

Atividade 12

$198 + 28 = 226$.

Resposta: R$ 226,00.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (Prova 1- Amarela-ENEM 2008 – pag.10)

A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	Vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data do documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se M(x) é o valor, em reais, a mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então

a. M(x) = 500 + 0,4x

b. M(x) = 500 + 10x

c. M(x) = 510 + 0,4x

d. M(x) = 510 + 40x

e. M(x) = 500 + 10,4x

Resposta: Letra C

Comentário: Como é cobrada uma multa fixa de R$ 10,00 pelo pagamento em atraso, deve-se somar 500 + 10= 510.

Cada dia de atraso, representado por x deve ser multiplicado por 40 centavos, ou seja, 0,40.

Então teremos: M(x) = 510 + 0,40x

Questão 2 (Prova azul – caderno 7 – MT 2° dia – ENEM 2010 – pag. 20)

Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.

Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é:

a.

b.

c.

d.

e.

Resposta: Letra C

Comentário: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

Portanto essa porcentagem está representada pela figura do item C, pois a lousa está dividida em 5 partes iguais e o professor usou 2 dessas partes.

Questão 3 (ENEM 2010 – MT – 2o dia - Caderno 7 – Azul - Página 28)

Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não pbtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

a) 16% b) 24% c) 32% d) 48% e) 64%

Resposta: Letra B

Comentário: 60% dos pacientes foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade, ou seja, 30% em cada um. No 1º tratamento inovador a cura foi de 35% dos pacientes.

35% de 30% = 0,35 × 0,30 = 0,105.

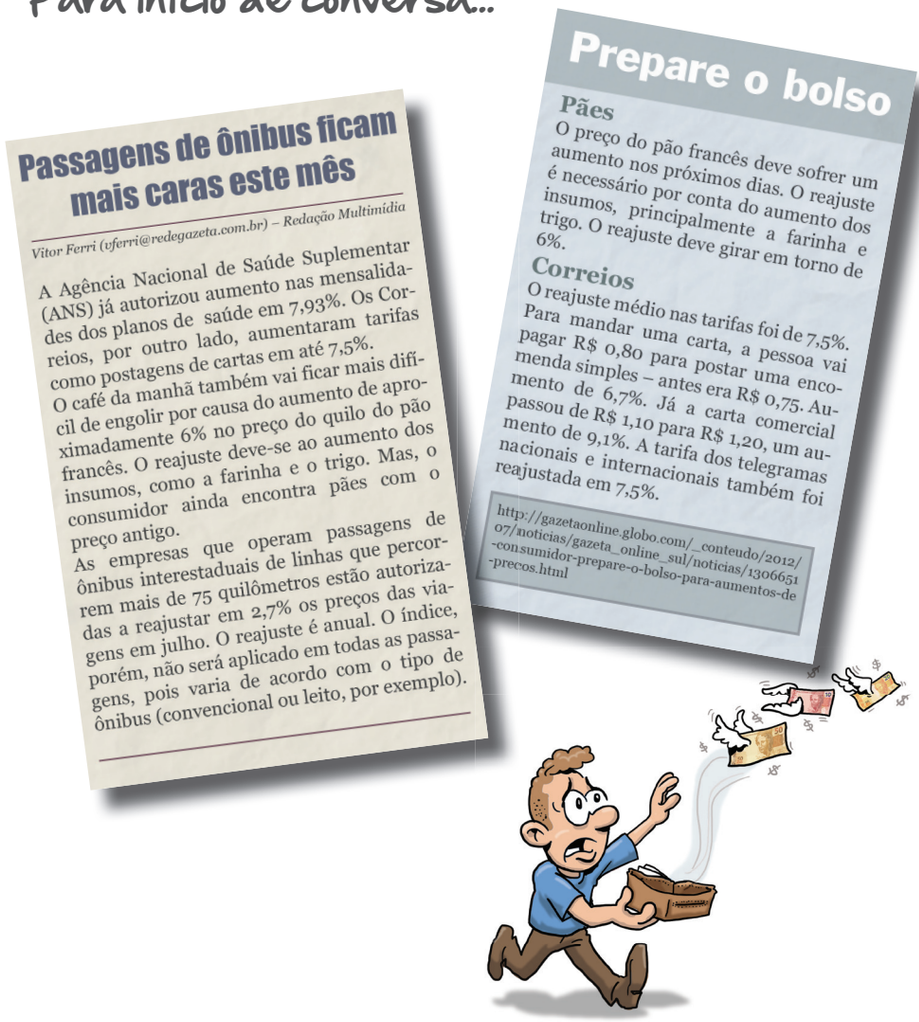
No 2º tratamento inovador a cura foi de 45% dos 30%.

45% de 30% = 0,45× 0,30 = 0,135.

Somando-se os resultados dos dois tratamentos: 0,105 + 0,135 = 0,24 = 24%.

Matemática Financeira II

Para início de conversa...



Passagens de ônibus ficam mais caras este mês

Vitor Ferri (vferri@redegazeta.com.br) – Redação Multimídia

A Agência Nacional de Saúde Suplementar (ANS) já autorizou aumento nas mensalidades dos planos de saúde em 7,93%. Os Correios, por outro lado, aumentaram tarifas como postagens de cartas em até 7,5%.

O café da manhã também vai ficar mais difícil de engolir por causa do aumento de aproximadamente 6% no preço do quilo do pão francês. O reajuste deve-se ao aumento dos insumos, como a farinha e o trigo. Mas, o consumidor ainda encontra pães com o preço antigo.

As empresas que operam passagens de ônibus interestaduais de linhas que percorrem mais de 75 quilômetros estão autorizadas a reajustar em 2,7% os preços das viagens em julho. O reajuste é anual. O índice, porém, não será aplicado em todas as passagens, pois varia de acordo com o tipo de ônibus (convencional ou leito, por exemplo).

Prepare o bolso

Pães

O preço do pão francês deve sofrer um aumento nos próximos dias. O reajuste é necessário por conta do aumento dos insumos, principalmente a farinha e trigo. O reajuste deve girar em torno de 6%.

Correios

O reajuste médio nas tarifas foi de 7,5%. Para mandar uma carta, a pessoa vai pagar R$ 0,80 para postar uma encomenda simples – antes era R$ 0,75. Aumento de 6,7%. Já a carta comercial passou de R$ 1,10 para R$ 1,20, um aumento de 9,1%. A tarifa dos telegramas nacionais e internacionais também foi reajustada em 7,5%.

http://gazetaonline.globo.com/_conteudo/2012/07/noticias/gazeta_online_sul/noticias/1306651-consumidor-prepare-o-bolso-para-aumentos-de-precos.html

Notícias como essas são encontradas em jornais com bastante frequência atualmente. Essas situações de aumentos e outras como financiamentos de carros, de moradias, empréstimos pessoais, rendimentos de poupança estão sempre relacionadas com a noção de juros.

Vamos continuar, nesta aula, a estudar mais alguns tópicos sobre Matemática Financeira. Nela vamos falar sobre situações que envolvem juros simples e compostos.

Objetivos de aprendizagem

- Resolver situações-problema que envolvem cobranças de juros simples.
- Resolver situações-problema que envolvem cobrança de juros compostos.
- Avaliar e comparar os dois tipos de situações.

Seção 1
Capital, juros e montante

Se uma pessoa pedir um empréstimo por determinado tempo, ela devolverá, no final do período, essa quantia, chamada de **Capital**, acrescida de um valor previamente combinado. Este valor chamado de juros é estabelecido por uma porcentagem, a **taxa de juros**.

O capital inicial, acrescido dos juros, é chamado de **Montante**.

Capital

Capital é a quantia emprestada ou investida sobre a qual serão calculados os juros.

Taxa de juros

Taxa de juros é o porcentual de juros cobrado em um empréstimo ou em um investimento. Ela pode ser cobrada ao dia, ao mês, ao ano etc.

Montante

Montante é a soma do Capital com os juros.

No exemplo a seguir vamos mostrar como se calculam juros, destacando depois os dados importantes da situação e suas nomenclaturas.

Exemplo 1

Janaína pediu emprestada a um amigo a quantia de R$ 950,00. Eles combinaram que ela devolveria o dinheiro com uma taxa de juros de 2% ao mês.

No final do 1º mês, Janaína teria que devolver:

950,00 + 2% de 950,00

$950 + 0{,}02 \times 950 = 950 + 19 = 969$

No final do 1º mês, Janaína teria que devolver a quantia de R$ 969,00.

Então, neste problema podemos destacar:

Capital (C): R$ 950,00

Tempo(t): 1 mês

Juros Simples

No cálculo dos juros podemos observar que há uma regularidade envolvendo o capital, o tempo e a taxa de juros. Veja o exemplo:

Léo emprestou R$ 500 a uma amiga à taxa de juros de 3% ao mês. Quanto ele pagará de juros ao final de 4 meses?

Juros de **1** mês : 500 x 0,03 x 1 = 15 x **1** = 15

Juros de **2** meses: 500 x 0,03 x 2 = 15 x **2** = 30

Juros de **3** meses: 500 x 0,03 x 3 = 15 x **3** = 45

Juros de **4** meses: 500 x 0,03 x 4 = 15 x **4** = 60

Juros de **t** meses: 500x 0,03 x **t** = 15 x **t**

Podemos, então, generalizar escrevendo a fórmula para o cálculo dos juros:

$j = c \times i \times t$ ou $j = c.i.t$

sendo:

- j: total de juros;
- c: capital;
- i: taxa de juros;
- t: tempo de empréstimo.

Observe que a taxa de juros e o tempo devem estar na mesma unidade (meses, anos, etc.)

Neste exemplo, os juros não são acrescentados ao capital ao final de cada mês, por isso o capital permanece o mesmo a cada mês. Portanto, os juros pagos a cada mês são todos iguais, calculados sobre o mesmo valor inicial.

Dizemos, nesse caso, que se trata de *Juros simples*.

É interessante notar que os juros dependem do tempo a que se referem.

Se o tempo aumenta, os juros também aumentam na mesma proporção. No caso de o tempo diminuir, os juros também diminuirão na mesma proporção. Portanto, juros e tempo são grandezas diretamente proporcionais.

Saiba Mais

Regime de Capitalização Simples é o sistema de capitalização no qual os juros são sempre calculados tendo por base de cálculo o valor do capital original.

No regime de capitalização simples, a evolução dos juros ocorre de forma linear ao longo do tempo.

A aplicação dos juros simples tem utilização limitada nos dias atuais, pois que o mercado financeiro adota por critério os juros compostos (que veremos a seguir), limitando-se a utilização dos juros simples para operações financeiras de curto prazo.

Outro exemplo:

Cléber guardou R$ 16.000,00 por 3 anos e 2 meses, recebendo juros simples à taxa de 9% ao ano (a.a.). Verifique se o montante que Cléber acumulou nesse período permite que ele compre um carro de R$ 20.000,00.

Como, nesse caso, a taxa de juros se refere ao período de 1 ano e o tempo é dado em anos e meses, devemos fazer algumas transformações.

3 anos e 2 meses = $3\frac{1}{2}$ do ano = 38 meses.

9% ao ano = $\frac{9}{12}$% ao mês = 0,75% ao mês = 0,0075 ao mês.

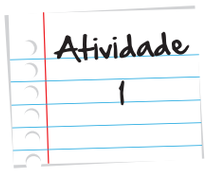
O montante M pode ser calculado somando-se ao capital aplicado c os juros j obtidos na aplicação dados pela fórmula j=c.i.t. Assim, teremos que **M = c + c.i.t**, expressão que pode ser escrita na forma M = c(1+it). Substituindo-se as informações do enunciado nessa fórmula, temos:

M = 16 000(1 + 0,0075 . 38) = 16 000(1 + 0,285) = 16 000 . 1,285

M = 20 560

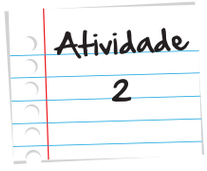
Cléber poderá comprar o carro com esse dinheiro e ainda sobrarão R$ 560,00.

Entendeu o raciocínio? Então faça as atividades a seguir para verificar seu aprendizado.



Marcos pegou emprestado a quantia de R$ 15.000,00 durante 6 meses, com juros simples, e pagou no final desse período R$ 18.600,00. Qual foi a taxa de juros cobrada?

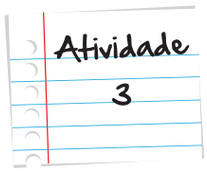
Anote suas respostas em seu caderno



Uma pessoa pegou emprestada a juros simples a quantia de R$ 3.500,00 e devolveu o montante de R$ 4025,00, sendo a taxa de juros igual a 1,5% ao mês.

Quantos meses durou o empréstimo?

Anote suas respostas em seu caderno



Se eu aplicar o meu capital a juros simples de 6% ao ano durante 5 meses, obterei um montante de R$ 7.687,50. Qual é o meu capital?

Anote suas respostas em seu caderno

Juros Compostos

Diferentes dos juros simples, os juros compostos são determinados sempre em função do montante acumulado no período anterior, e não com base no capital inicial. Veja a situação a seguir:

João pediu um empréstimo de R$ 5000,00 no banco pelo prazo de 3 meses, com taxa de 4% ao mês. Sabendo que os juros são compostos, qual será o valor dos juros a pagar após esse período?

Vamos fazer uma tabela, calculando os juros a cada mês.

Capital	Tempo	Juros pagos a cada mês	Juros acumulados
5000	1	4% de 5000 = 200	200
5200	2	4% de 5200 = 208	408
5408	3	4% de 5408 = 216,32	624,32

Neste caso, os juros calculados a cada mês são somados ao capital que vai ser usado para calcular os juros no mês seguinte.

João pagará de juros, no final dos 3 meses, a quantia de R$ 624,32.

Multimídia

Clique no link http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/19090/index.html?sequence=65 para simular a compra de uma moto usando os conceitos estudados nesta aula. Primeiramente será preciso guardar dinheiro na poupança e, depois, esse valor será dado como entrada na compra da moto. O restante do preço será *financiado*. Para facilitar os cálculos dessa aquisição, serão necessários alguns conceitos de juros compostos.

Fórmula para o cálculo de juros compostos

Você viu que, para calcular o Montante em um sistema de juros compostos, calculamos os juros no final de cada período, somamos esse valor ao capital e formamos um montante sobre o qual calculamos os juros do período seguinte.

Isto é o que chamamos de "juros sobre juros".

Este processo só é prático se o prazo não for longo. No caso de um prazo maior, devemos usar um processo mais prático para resolver este tipo de problema.

Vamos calcular, no sistema de juros compostos, qual será o montante(M) produzido por um capital (C) aplicado a uma taxa mensal (i) durante 4 meses.

	Capital	Juros	Montante no fim de cada período
1º mês	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1 + i)$
2º mês	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) =$ $= C(1 + i)(1 + i)$ $M_2 = C(1 + i)^2$
3º mês	M_2	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) =$ $= C(1 + i)^2(1 + i)$ $M3 = C(1 + i)^3$
4º mês	M_3	iM_3	$M_4 = M_3 + iM_3 = M_3(1+i) =$ $= C(1 + i)^3(1 + i)$ $M_4 = C(1 + i)^4$

Generalizando, podemos escrever a fórmula para o cálculo do Montante ao final de um tempo **t** a juros compostos.

$$M = C(1 + i)^t$$

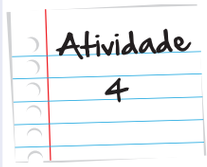
Podemos observar que os valores de C, M_1, M_2, M_3,... são termos de uma Progressão Geométrica cuja razão é (1 + i).

Dica: Para resolver essas atividades, é mais prático usar uma calculadora.

Nas próximas atividades você irá aplicar a fórmula de cálculo de juros compostos.

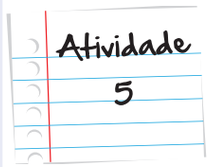
Joana tomou um empréstimo no valor de R$ 200,00 a juros compostos de 8% ao mês, por um período de 4 meses. Qual será, ao final do período, a dívida de Joana?

Anote suas respostas em seu caderno



O capital de R$ 1.000,00 aplicado a juros compostos rendeu R$ 82,50 após 4 meses. Qual foi a taxa de juros mensal?

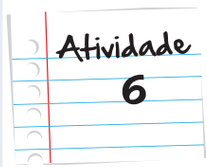
Anote suas respostas em seu caderno



Uma pessoa aplicou, a juros compostos, R$ 10.000,00 à taxa de 2% ao mês, gerando um montante de R$ 10.612,08. Por quanto tempo este capital ficou aplicado? Use: log1,06 = 0,0258 e log1,02 = 0,0086.

Fonte: Fundação Roberto Marinho – Multicurso – 2º grau – volume 2 – p. 93

Anote suas respostas em seu caderno



Atividade 7

Qual o capital que, aplicado a juros compostos de 5% ao mês, gera um montante de R$ 55.330,00 no prazo de dois meses?

Fonte: Fundação Roberto Marinho – Multicurso – 2º grau – volume 2 – p. 93

Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

O simulador "Matemática Comercial e Financeira" é constituído por seis situações que, para serem resolvidas, utilizam conceitos de juros simples e compostos, descontos e amortizações. Este simulador funciona como um jogo, no qual progredir para a segunda situação implica resolver corretamente a primeira.

Clique no link http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15899/index.html?sequence=4 e divirta-se.

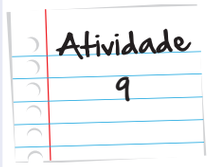
Atividade 8

Quando minha filha nasceu, guardei na poupança R$ 500,00 com uma taxa de juros de 0,5% ao mês. Ao final de 1 ano, quanto ela terá aproximadamente na poupança?

Anote suas respostas em seu caderno

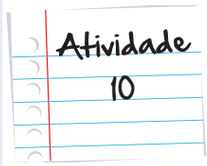
Um capital de R$ 2.000,00 aplicado a juros compostos rendeu, após 4 meses, o Montante de R$ 2.064,77. Qual foi, aproximadamente, a taxa de juros desse investimento?

Anote suas respostas em seu caderno



Para emprestar dinheiro, uma financeira cobra juros compostos de 15% ao mês (a.m.). Se uma pessoa pegar um empréstimo de R$ 4.300,00 por 2 meses, qual a quantia que ela deverá devolver à financeira?

Anote suas respostas em seu caderno



Seção 2
Juros e funções

Vamos observar diferentes formas de aplicações de um capital de R$ 500,00 a uma taxa de 20% ao ano.

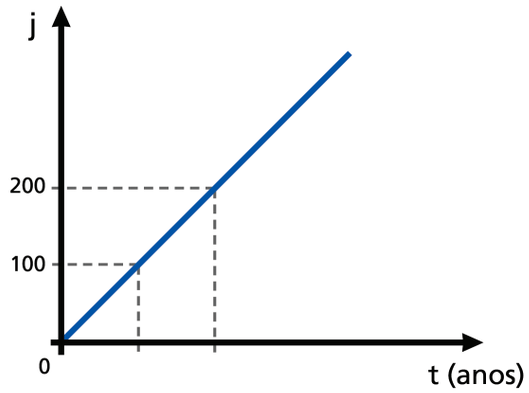
1º) Sistema de juros simples.

Nesse sistema, os juros são função do tempo de aplicação e podemos escrever:

$j = 500 \times 0{,}2.t \longrightarrow j = 100\,t$, que é uma função linear do tipo $y = ax$

Vamos construir o gráfico dessa função escolhendo alguns valores para t.

t(em anos)	j
0	0
1	100
2	200



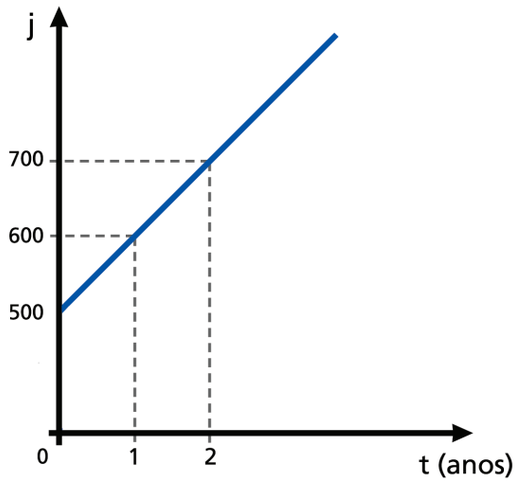
2º) Ainda no sistema de juros simples, vejamos agora o que acontece na mesma aplicação do item anterior quando queremos obter o Montante em função do tempo de aplicação.

Podemos escrever então a expressão matemática que representa uma função afim do tipo y = ax + b.

Lembrando que M = C + C it, temos: M = 500 + 100t.

Vamos construir o gráfico dessa função escolhendo alguns valores para t:

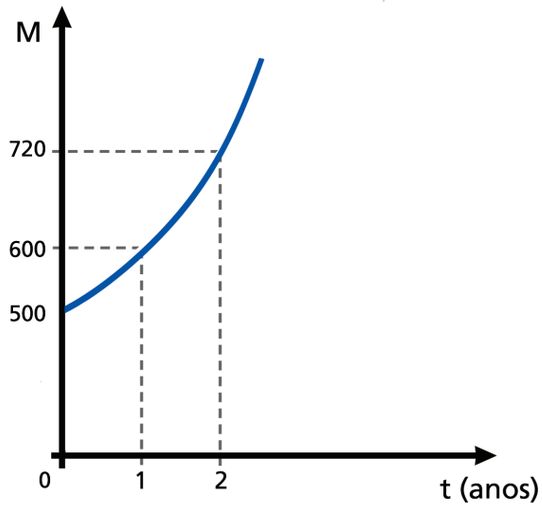
t(em anos)	M
0	500
1	600
2	700



3º) No sistema de juros compostos, o Montante será obtido em função do tempo, por meio da função $M = 500.1,2^t$, que é uma função exponencial.

Vamos construir o gráfico escolhendo alguns valores para t:

t(em anos)	M
0	500
1	600
2	720



Conclusão

O estudo de Matemática Financeira feito nesta aula se propõe a dar uma noção do assunto, principalmente no que se refere à diferença entre juros simples e compostos. Sabemos que juros compostos é o sistema mais aplicado na nossa vida real. Os bancos, os planos de crediário, os financiamentos de casa própria ou de carro, e também a dívida do cartão de crédito, todos usam o sistema de juros compostos. No entanto, para se resolver problemas envolvendo juros compostos, muitas vezes é necessário utilizar uma calculadora científica.

Resumo

Juros é um termo que vemos quase todos os dias em jornais, televisão ou internet. Outros termos associados a este, como taxa de juros, capital e Montante, também devem ser conhecidos de todos nós.

Consideramos que compreender bem a diferença entre juros simples, em que o capital é sempre o mesmo durante o período de rendimento, e juros compostos, em que os juros são acrescidos ao capital a cada intervalo de tempo, é essencial para poder fazer escolhas na hora de um financiamento ou de uma compra a prazo.

Com isso, o crescimento de um capital no sistema de juros simples é linear (proporcionalidade direta) e o crescimento de um capital no sistema de juros compostos é exponencial. Os termos que se apresentam em uma situação de juros compostos, como o capital e os diversos montantes, formam uma Progressão Geométrica de razão $(1 + i)^t$.

Os conteúdos de Matemática Financeira não foram esgotados nestas duas aulas. Eles são muitos extensos e, para serem aprofundados, seria necessário um curso mais completo dedicado ao tema.

Veja ainda

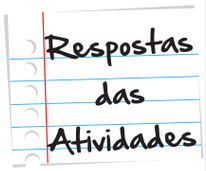
- http://www.infoescola.com/matematica/juros-simples-e-juros-compostos-matematica-financeira/

  Neste site você terá a oportunidade de rever os conceitos apresentados na aula e também resolver mais atividades relacionadas com o tema.

Referências

Livros

- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática, contextos e aplicações*. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2010. 736 p.
- Fundação Roberto Marinho. *Multicurso*: Ensino Médio. 2ª série. 1ª ed. Rio de Janeiro, 2005. 406 p.



Atividade 1

$M = c(1 + it)$

$18.600 = 15.000(1 + i \cdot 6) = 15.000 + 90.000\ i$

$18.600 - 15.000 = 90.000\ i \longrightarrow 3.600 = 90.000\ i \longrightarrow i = 3.600 : 90.000 = 0,04$

Resposta: A taxa de juros cobrada foi de 4% ao mês.

Atividade 2

$4025 = 3.500 + 3.500.\ 0,015.t = 3.500 + 52,5\ t$

$525 = 52,5\ t \qquad t = 525 : 52,5 = 10$

Resposta: O tempo do empréstimo foi de 10 meses.

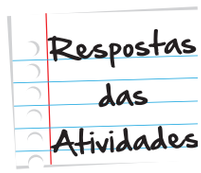
Atividade 3

6% ao ano $= \frac{6}{12}\%$ ao mês $= 0,5\%$ ao mês

$0,5\% = 0,005$

$7.687,50 = c(1 + 0,005.\ 5) \longrightarrow 7687,50 = c.1,025 \longrightarrow c = 7687,50 : 1,025 \longrightarrow c = 7500$

Resposta: O meu capital é de R$ 7.500,00.



Atividade 4

$M = C(1 + i)^4$ $M = 200(1 + 0,08)^4$ $M = 200. 1,3604$

$M = 272,09$

Resposta: A dívida de Joana será de R$ 272,09.

Atividade 5

$N = 1.000 + 82,50 = 1.082,50$

$1.082,50 = 1.000(1 + i)^4$ $(1 + i)^4 = \frac{1.082,50}{1.000} = 1,0825$

$1 + i = \sqrt[4]{1,0825} = 1,020015$ $i = 1,020015 - 1 = 0,020015 = 2,0015\%$

Resposta: A taxa de juros foi de 2,0015% ao mês.

Atividade 6

$10.612,08 = 10.000(1 + 0,02)^t \longrightarrow (1 + 0,02)t \cong 1,06 \longrightarrow t.\ \log 1,02 = \log 1,06$

$t = \frac{\log 1,06}{\log 1,02} = \frac{0,0258}{0,0086} = 3$

Resposta: O capital ficou aplicado por 3 meses.

Atividade 7

$55.330 = C(1 + 0,05)^2$ $55.330 = C(1,05)^2$ $C = \frac{55.330}{1,1025} = 50.185,94$

Resposta: O capital é R$ 50.185,94.

Atividade 8

$M = 500(1 + 0,005)^{12} = 500(1,005)^{12} \longrightarrow M = 500 . 1,0616 = 530,83$

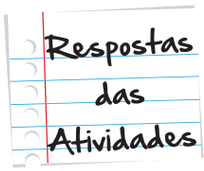
Resposta: Ela terá aproximadamente R$ 530,83.

Atividade 9

$2.064,77 = 2.000(1 + i)^4 \longrightarrow (1+i)^4 = 1,03238 \longrightarrow 1 + i = \sqrt[4]{1,03238} \cong 1,007999$

$i = 0,007999$ $i = 0,7999\%$

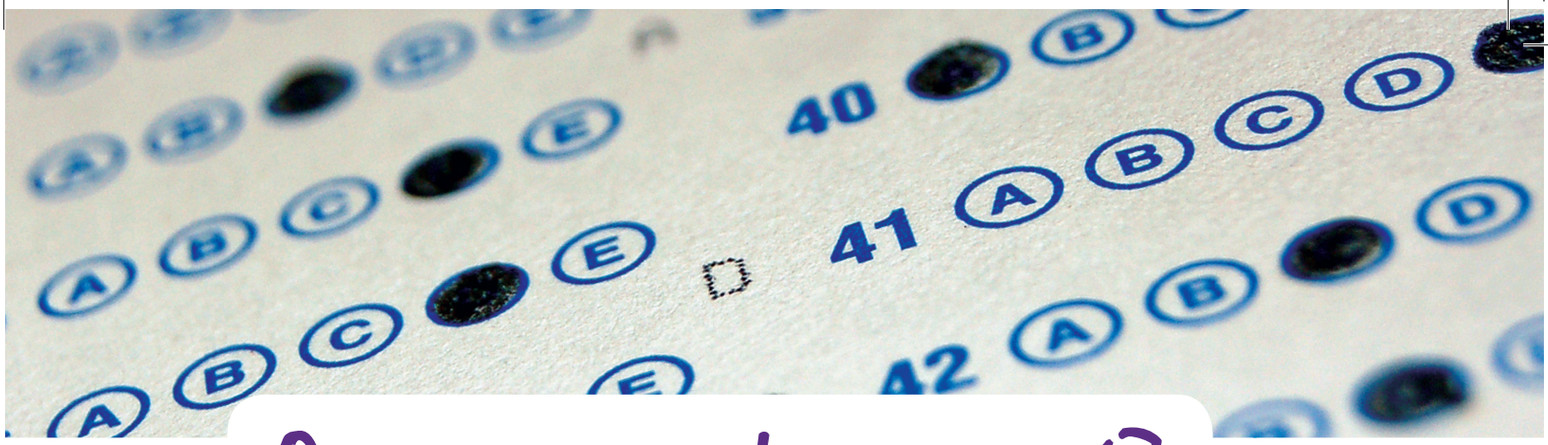
Resposta: A taxa é de aproximadamente 0,8% ao mês.



Atividade 10

$M = 4.300(1 + 0,15)^2$ $M = 4.300. 1,3225 = 5.686,75$

Resposta: Ela terá que devolver R$ 5.686,75.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (FGV-SP)

A rede Corcovado de hipermercados promove a venda de uma máquina fotográfica digital pela seguinte oferta. "Leve agora e pague daqui a 3 meses". Caso o pagamento seja feito à vista, Corcovado oferece ao consumidor um desconto de 20%. Caso um consumidor prefira aproveitar a oferta, pagando no final do 3º mês após a compra, a taxa anual de juros simples que estará sendo aplicada no financiamento é:

a. 20%
b. 50%
c. 100%
d. 80%
e. 120%

Daqui a 3 meses o cliente pagará x reais.

O pagamento à vista é de 0,8x reais.

$0{,}2x = 0{,}8x \cdot i \cdot 3 \qquad 0{,}2x = 2{,}4i\,x \qquad i = \frac{1}{12}$ ao mês

A taxa anual será $\frac{1}{12} \cdot 12 = 1$. Ou seja, 100%.

Resposta: Letra c.

Questão 2 (Unicamp-SP)

Um capital de R$ 12.000,00 é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas aplicações ou retiradas, encontre:

a. O capital acumulado após 2 anos.
b. O número inteiro mínimo de anos para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial (se necessário, use log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477).

Respostas:

a. $M = 12.000(1 + 0,08)^2 = 13.996,80$

O capital acumulado foi de R$ 13.996,80.

b. $M > 12\,000 \times 2$

$12.000(1 + 0,08)^t > 12.000 \times 2$

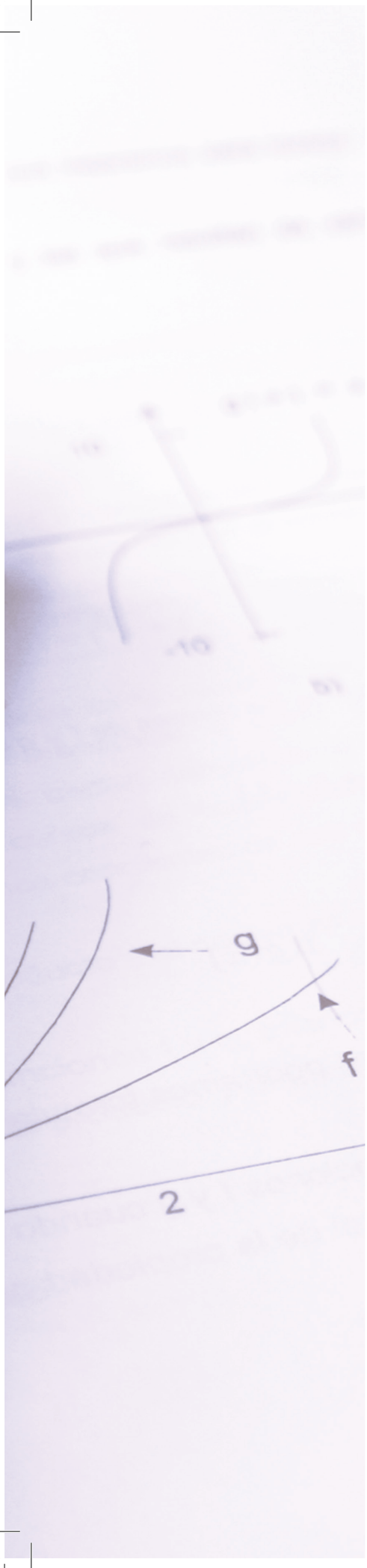
$1,08^t > 2 \longrightarrow t \log 1,08 > \log 2 \longrightarrow t \log \frac{108}{100} > \log 2$

$t (\log 108 - \log 100) > \log 2 \longrightarrow t \{\log(2^2 . 3^3) - 2 \log 10\} > \log 2$

$t \{2 \log 2 + 3 \log 3 - 2\} > \log 2$

$t . 0,033 > 0,301 \qquad t > 9,1212$

O número inteiro mínimo de anos é 10.



Matrizes e Determinantes

Para início de conversa...

Frequentemente em jornais, revistas e também na Internet encontramos informações numéricas organizadas na forma de tabelas, com linhas e colunas. Esta tabela numérica com linhas e colunas é o que chamaremos de Matriz. Vejamos alguns exemplos de tabelas comumente encontradas:

Tabela 1: Tabela anual IR 2012

Rendimento (R$)	Alíquota	Parcela a deduzir (R$)
Até 18.799,32	-	-
De 18.799,33 a 28.174,20	7,5%	1.409,95
De 28.174,21 a 37.566,12	15,0%	3,523,01
De 37.566,13 a 46.939,56	22,5%	6.340,47
Acima de 46.939,56	27,5%	8.687,45

Retirado do site: http://www.meubolsoemdia.com.br/dica/imposto-de-renda/tabela-anual-ir-2012

Tabela 2: Custo e lucro de alguns artigos de uma sapataria

Artigo	Bota	Sapato	Sandália
Custo R$	200	120	80
Lucro R$	75	25	20

Tabela 3: Quantidade de artigos vendidos dessa sapataria em alguns meses do ano

Mês	Março	Abril	Maio
Bota	10	15	35
Sapato	20	25	25
Sandália	30	20	05

(tabelas 2 e 3 retiradas do site: http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/Ana26agosto-AtividadeExtra.pdf, que é uma atividade que adaptaremos para utilizarmos posteriormente nessa aula).

Quando trabalhamos com matrizes, em geral utilizamos apenas os números das tabelas, organizando-os em linhas e colunas, entre parênteses, colchetes ou entre duas barras (os dois primeiros são mais comuns). Veremos que esta representação utilizada facilitará nosso trabalho, quando estudarmos as operações com matrizes.

Observação: Utilizamos uma letra maiúscula para identificar matrizes.

Alguns exemplos de matrizes:

Chamando de A a matriz obtida pelos números da tabela 2 e B a matriz obtida pelos números da tabela 3, teremos então:

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

Aprenderemos na seção 1 a reconhecer um elemento ou termo de uma matriz (um desses números que aparecem na matriz) dados a posição da linha e da coluna em que ele está.

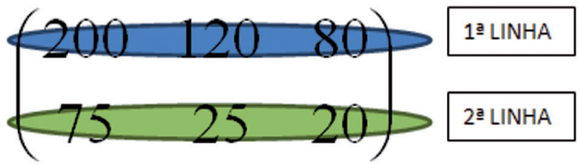
Objetivos de aprendizagem

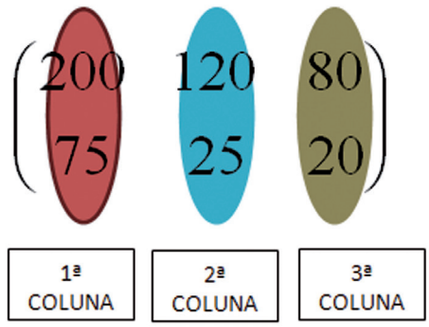
- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes.
- Efetuar cálculos, envolvendo as operações com matrizes.
- Resolver problemas, utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial.
- Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 .

Seção 1
Conhecendo e construindo matrizes

Antes de qualquer coisa, procuremos compreender como identificar um elemento de uma matriz, utilizando a posição de sua linha e coluna.

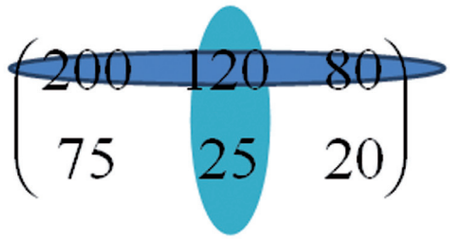
Utilizando nossa Tabela 2, identificamos a seguir as linhas e colunas da matriz:





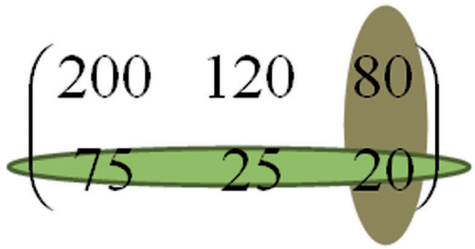
Então, esta matriz é formada por duas linhas e três colunas.

Agora que já sabemos reconhecer linhas e colunas de matrizes, podemos reconhecer seus elementos, utilizando essas informações. Por exemplo, podemos ver que o elemento que está na primeira linha e segunda coluna é o 120, pois:



Visualmente falando o número que está na primeira linha e segunda coluna é o 120, pois ele é o elemento que está na interseção das cores.

O elemento que está na segunda linha e terceira coluna é o 20, pois:



Reconhecendo elementos de uma matriz.

Agora é com você! Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix}$. Identifique o elemento que está na:

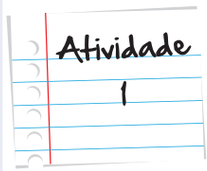
a. primeira linha e primeira coluna.

b. terceira linha e segunda coluna.

c. segunda linha e terceira coluna.

d. terceira linha e terceira coluna.

Dica: Se precisar, utilize a ideia de circular a linha e coluna respectiva e veja que o elemento procurado é exatamente o que estará na interseção.



Anote suas respostas em seu caderno

Considerando uma matriz A com m linhas e n colunas, podemos identificar os elementos desta matriz por meio do símbolo a_{ij}, em que o índice i refere-se a linha em que se encontra tal elemento e o índice j refere-se à coluna em que se encontra o elemento. Como vimos anteriormente, convencionamos que as linhas são numeradas de cima para baixo e as colunas da esquerda para direita.

Observe que o índice i varia de 1 até m , enquanto o índice j varia de 1 até n.

Exemplo: Considerando a matriz A abaixo:

$$\begin{pmatrix} 200 & 120 & 80 \\ 75 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

Temos:

a_{11} = 200 (elemento que está na primeira linha e primeira coluna)

a_{12} = 120 (elemento que está na primeira linha e segunda coluna)

a_{13} = 80 (elemento que está na primeira linha e terceira coluna)

a_{21}= 75 (elemento que está na segunda linha e primeira coluna)

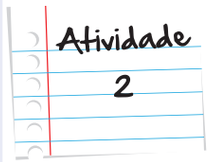
a_{22}= 25 (elemento que está na segunda linha e segunda coluna)

a_{23}= 20 (elemento que está na segunda linha e terceira coluna)

Multimídia

Preocupado com o impacto ambiental que a poluição pode causar à sua represa, um jovem procura a ajuda de um gestor ambiental, que sugere o uso do conceito de matrizes para determinar se o impacto ambiental é sustentável. Ficou curioso? Então acesse o link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=33154 e surpreenda-se.

Identificando elementos de uma matriz



Dada a matriz a seguir, identifique seus elementos:

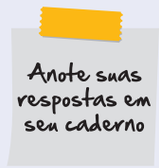
$$\begin{pmatrix} -4 & \sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & 100 \end{pmatrix}$$

a_{11} = ???

a_{12} = ???

a_{21} = ???

a_{22} = ???



Construindo uma matriz a partir de uma "regra de formação".

Podemos construir uma matriz a partir de uma regra de formação – que é uma expressão, envolvendo as variáveis i e j de um elemento geral a_{ij}. Calma! Não é algo difícil. Veja:

Dada uma matriz com 3 linhas e 2 colunas, por exemplo, e a regra de formação $a_{ij} = i + j$, poderíamos escrever todos os elementos dessa matriz. Mas como?

Primeiro, observamos que, como a matriz tem 3 linhas e 2 colunas, ela pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Após ter escrito os elementos desta forma (geral), utilizamos a regra dada e assim obtemos os elementos de forma numérica... Observe que a regra geral é $a_{ij} = i + j$, basta substituirmos as letras i e j pelos números que ali aparecem. Por exemplo, como encontrar o termo a_{11}?? Basta no lugar do i colocarmos o 1 e no lugar do j também colocarmos o 1 e assim encontraremos

$a_{11} = 1 + 1 = 2$. Encontrando os demais termos:

$a_{12} = 1 + 2 = 3$

$a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

$a_{31} = 3 + 1 = 4$

$a_{32} = 3 + 2 = 5$

Agora basta voltarmos a nossa matriz inicial e substituirmos as letras por números! Ela ficará assim então:

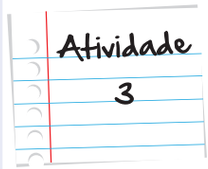
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Observem que:

Dependendo da regra de formação podemos encontrar termos negativos, frações, números irracionais... Afinal, estamos trabalhando com números reais!

Utilizamos a_{ij} para o termo geral de uma matriz A, mas podemos utilizar também b_{ij}, c_{ij}, etc., porém o mais comum é utilizar o b_{ij} para uma matriz B, c_{ij} para uma matriz C etc...

Vamos construir uma matriz?



a. Construa uma matriz com 2 linhas e 2 colunas, onde a regra geral é dada por $a_{ij} = i - j$.

Dizemos que uma matriz é **quadrada** se o número de linhas é igual ao número de colunas.

b. Os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ compõem a **diagonal principal** de uma matriz quadrada. Construa a matriz 2 x 2 (ou seja, com 2 linhas e 2 colunas) dada por $a_{ij} = 3i + j$ e identifique os elementos da sua diagonal principal.

c. Construa a matriz com 3 linhas e 3 colunas dada por $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

A matriz quadrada em que os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero é chamada de matriz **identidade**.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Vamos operar com matrizes?

O objetivo desta seção é aprender a operar com matrizes. Vejamos um exemplo de problema em que podemos aplicar uma das operações:

Somando e Subtraindo matrizes

As tabelas a seguir representam as vendas de uma confeitaria, de dois tipos de bolos, tipo A e B, de acordo com o tamanho (pequeno, médio e grande), durante os dois primeiros meses de um ano:

JANEIRO

	Pequeno	Médio	Grande
A	35	40	23
B	40	35	32

FEVEREIRO

	Pequeno	Médio	Grande
A	31	25	30
B	25	40	35

Como poderíamos determinar as vendas de cada tipo (e tamanho) de bolo no primeiro bimestre desse ano?

Vejamos que não é uma tarefa difícil, visto que, por exemplo, para encontrarmos a quantidade vendida de bolos pequenos do tipo A e pequeno nesse bimestre, basta somarmos as quantidades de bolos tipo A e pequeno do mês de Janeiro, que foram 35, com a quantidade de bolos tipo A e pequeno do mês de fevereiro, que foram 31, assim encontraremos 35 + 31 = 66 bolos tipo A e pequeno vendidos nesse primeiro bimestre. Da mesma maneira, podemos fazer as demais somas, ou seja, basta somarmos os elementos correspondentes das tabelas. Utilizando a representação por matrizes, teremos:

$$\begin{pmatrix} 35 & 40 & 23 \\ 40 & 35 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 31 & 25 & 30 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-31 & 40-25 & 23-30 \\ 40-25 & 35-40 & 32-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 65 & 53 \\ 65 & 75 & 67 \end{pmatrix}$$

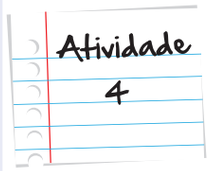
Viram como não é difícil? Observem que é bem simples retirar a informação desejada da matriz. Por exemplo, se estivéssemos desejando encontrar quantos bolos do tipo B, tamanho médio foram vendidos no bimestre, bastaríamos procurar o elemento que está na segunda linha e segunda coluna da última matriz, encontrando como resultado o número 75.

Poderíamos efetuar a subtração de matrizes, subtraindo-se os elementos da primeira pelos respectivos elementos da segunda. Veja o exemplo a seguir:

$$\begin{pmatrix} 35 & 40 & 23 \\ 40 & 35 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 31 & 25 & 30 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-31 & 40-25 & 23-30 \\ 40-25 & 35-40 & 32-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & -7 \\ 15 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Outra observação é que só podemos somar matrizes com o mesmo número de linhas e colunas.

O problema das faltas



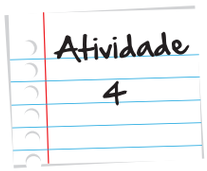
As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (A, B e C) em três disciplinas (Física, Química e Matemática), nos meses de Outubro de Novembro.

OUTUBRO

	Física	Química	Matemática
Aluno A	3	2	3
Aluno B	4	1	2
Aluno C	2	0	1

NOVEMBRO

	Física	Química	Matemática
Aluno A	2	4	2
Aluno B	0	3	1
Aluno C	1	2	1



a. Construa uma matriz que represente o número de faltas, neste bimestre, de cada aluno por matéria.

b. Neste bimestre, quem teve o maior número de faltas em Matemática? E o menor número de faltas em Física?

c. Construa uma matriz, fazendo a diferença entre o número de faltas do mês de Novembro e o número de faltas do mês de Outubro.

d. O que você pode concluir com estes elementos encontrados?.

Anote suas respostas em seu caderno

Multiplicando um número real por uma matriz

Para multiplicar um número real por uma matriz basta multiplicarmos cada um dos elementos da matriz por este número.

Observe o seguinte exemplo:

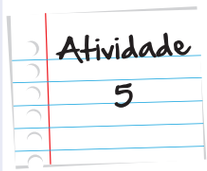
$$2 \times \begin{bmatrix} 10 & 15 & 35 \\ 20 & 25 & 25 \\ 30 & 20 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 10 & 2 \times 15 & 2 \times 35 \\ 2 \times 20 & 2 \times 25 & 2 \times 25 \\ 2 \times 30 & 2 \times 20 & 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 70 \\ 40 & 50 & 50 \\ 60 & 40 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplicando matrizes

Nós vimos que para somar matrizes, somamos os elementos respectivos e que para multiplicar um número real por uma matriz, basta que multipliquemos este número real por cada um dos elementos dessa matriz. Veremos agora como fazemos para multiplicar duas matrizes. Você poderia pensar: - Ah, deve ser multiplicando cada elemento respectivo... Mas nós veremos que não é dessa forma. Faça a atividade abaixo passo a passo e você verá que é capaz de multiplicar matrizes, quando possível, pois nem sempre podemos efetuar a multiplicação entre matrizes!

O problema da sapataria

(atividade adaptada do site: http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/Ana26agosto-AtividadeExtra.pdf)



Considere as duas tabelas a seguir que já estamos familiarizados nessa aula:

Artigo	Bota	Sapato	Sandália
Custo R$	200	120	80
Lucro R$	75	25	20

Tabela 2: Custo e lucro de alguns artigos de uma sapataria

Mês	Março	Abril	Maio
Bota	10	15	35
Sapato	20	25	25
Sandália	30	20	05

Tabela 3: Quantidade de artigos vendidos dessa sapataria em alguns meses do ano

A Tabela 2, como já vimos, apresenta-nos o custo e o lucro de alguns artigos de uma sapataria, enquanto que a tabela 3 apresenta-nos a quantidade dos artigos vendidos durante três meses do ano.

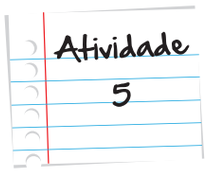
a. É possível criar uma tabela que nos apresente o custo total e o lucro total de cada um desses três meses. Construa-a! Vamos lá, você consegue.

Vou ajudar: Como será que faríamos para encontrar, por exemplo, o custo total no mês de Março? E aí, descobriu? Acho que sim, né! Para calcular o custo total no mês de Março é só calcularmos o custo da bota, do sapato, da sandália e depois somar para encontrar o custo final deste mês. Concorda? Então fica: 200 x 10 + 120 x 20 + 80 x 30 = 2000 + 2400 + 2400 = 6800 reais.

Como faríamos para calcular o lucro no mês de Março? De forma bem parecida, basta pegarmos os lucros de cada artigo, multiplicarmos pelas quantidades vendidas e, ao final, somar estes valores, encontrando então:75 x 10 + 25 x 20 + 20 x 30 = 750 + 500 + 600 = 1850 reais.

Complete a matriz com os valores que faltam:

$$\begin{pmatrix} 6800 & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ 1850 & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix}$$



b. Quantas linhas e quantas colunas de dados numéricos você obteve na sua matriz?

c. Se na Tabela 2 existisse também coluna para o item "chinelo", ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

d. Se na Tabela 2 existisse também uma linha para o item "Gastos com Funcionários", seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total, lucro total e gasto total com funcionários?

e. Se na Tabela 3 existisse também colunas para os meses de Junho, Julho e Agosto, ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

f. Se na Tabela 3 existisse também uma linha para o item "tênis", ainda seria possível criar uma tabela que apresentasse custo total e lucro total?

g. Qual a condição necessária para que possamos relacionar as duas tabelas?

Anote suas respostas em seu caderno

E aí, conseguiu descobrir, quando é possível fazer a multiplicação entre matrizes? Conseguiu entender como se faz a multiplicação entre matrizes? Acredito que sim, então agora estudaremos um pouco de determinante!

Determinantes

Antes de sabermos como se encontra o determinante de uma matriz, é importante observarmos alguns itens:

1. Somente definimos determinante de uma matriz quadrada, então precisamos saber o que é uma matriz quadrada, certo? Uma matriz quadrada nada mais é que uma matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplos:

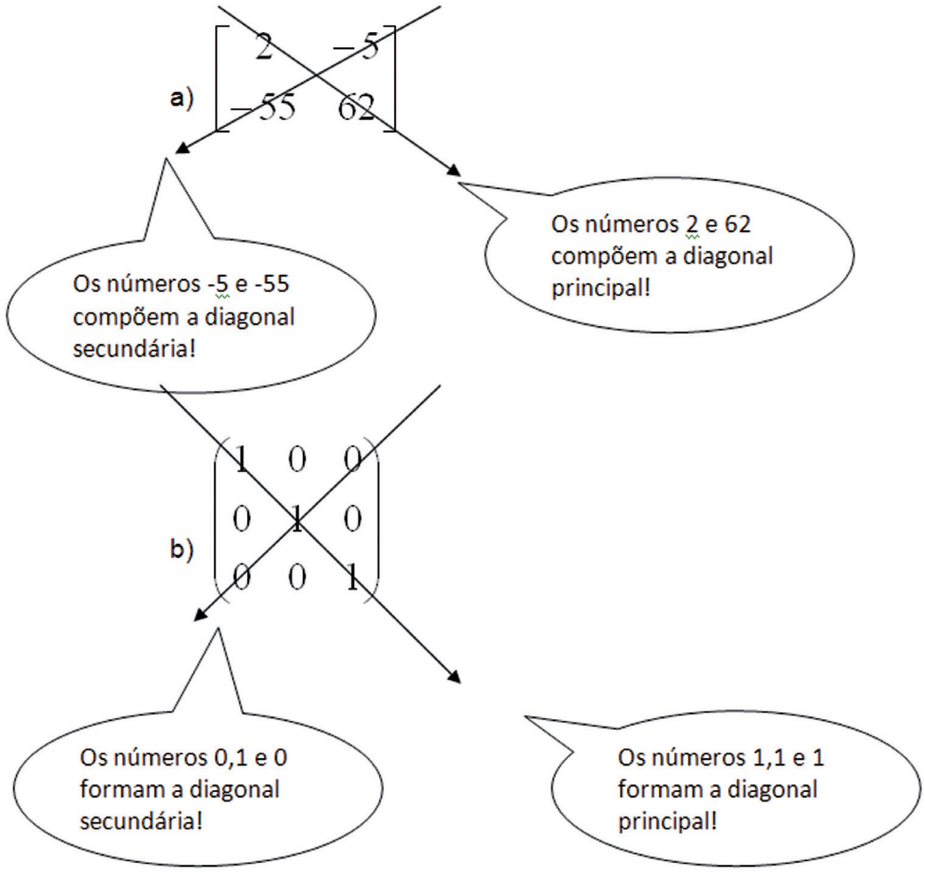
a. (3) – Matriz com uma linha e uma coluna.

b. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -55 & 62 \end{bmatrix}$ - Matriz com duas linhas e duas colunas.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - Matriz com 3 linhas e 3 colunas.

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ - Matriz com 4 linhas e 4 colunas.

2. Precisamos reconhecer a diagonal principal e diagonal secundária de uma matriz quadrada – utilizaremos principalmente esta ideia quando formos encontrar o determinante de uma matriz com duas linhas e duas colunas. Observe a seguir nos exemplos, os elementos que compõe a diagonal principal e secundária de uma matriz.



Bem, acho que agora podemos ver o que é o determinante de uma matriz. Vamos lá!

Dada uma matriz quadrada A qualquer, dizemos que o determinante da matriz A, que indicamos por det A é o número obtido a partir de operações com os elementos de A. Observe que, como dizemos "o determinante!" já podemos imaginar com razão que ele é único. Nós aprenderemos aqui a encontrar o determinante de matrizes um por um (uma linha e uma coluna) ou simplesmente ordem 1 (quando a matriz é quadrada ela possui o mesmo número de linhas e colunas e para simplificações dizemos apenas ordem tal), também veremos por meio de atividades como encontrar determinante de matrizes de ordem 2 e 3.

- O determinante de uma matriz A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Exemplos:

a. A = (7) è det A = 7

b. B= (-6) è det B = -6

- O determinante de uma matriz A de ordem 2 é igual a diferença do produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Num primeiro momento pode aparentar ser difícil, mas veremos que se fizermos passo a passo não é complicado não! Exemplo:

Dada a matriz de ordem 2: $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$, façamos passo a passo o que se pede e encontraremos o determinante dela.

1. Os elementos que formam a diagonal principal da matriz A são: 2 e 10.
2. O produto dos elementos da diagonal principal é igual a: 2 x10 = 20
3. Os elementos da diagonal secundária são: 5 e 3.
4. O produto dos elementos da diagonal secundária é igual a: 5 x 3 = 15
5. A diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de A e o produto dos elementos de sua diagonal secundária é igual a: 20 – 15 = 5

Portanto, det A = 5.

- Para encontrarmos o determinante de uma matriz de ordem 3, utilizaremos um procedimento conhecido por "Regra de Sarrus". A ideia é a seguinte:

1º) Copiamos ao lado direito da matriz A as suas duas primeiras colunas.

2º) Multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos separadamente os elementos das outras duas "diagonais" (paralelas à diagonal principal).

3º) Multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos.

4º) Somamos todos os resultados obtidos no 2º e 3º passos.

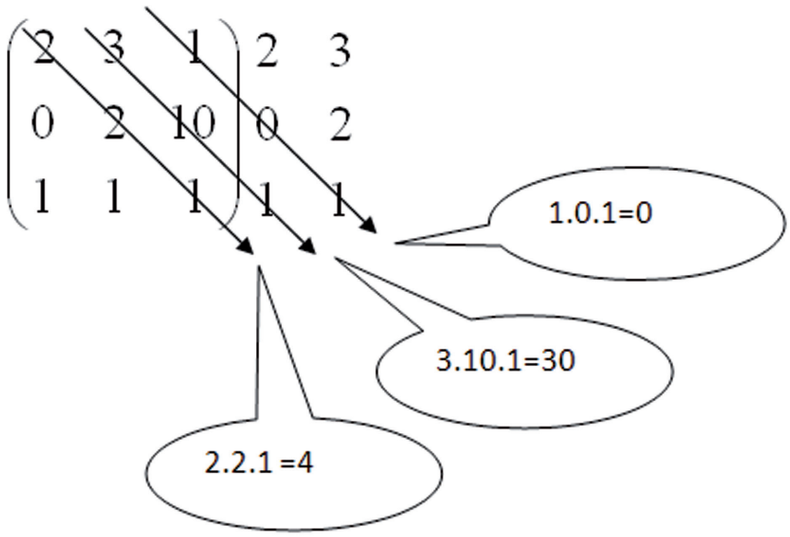
Façamos um exemplo, passo a passo, para você compreender melhor como encontrar o determinante de uma matriz de ordem 3.

Exemplo: Encontrar o determinante da matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

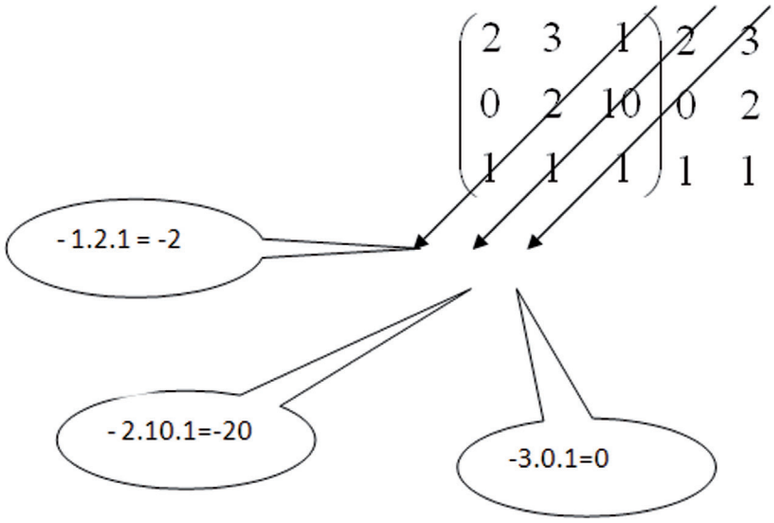
Vamos lá então! O primeiro passo é copiar as duas primeiras colunas ao lado direito da matrriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Agora façamos o passo 2: Multipliquemos os elementos da diagonal principal e suas duas "paralelas":



Agora o passo três: Multipliquemos os elementos da diagonal secundária, também os elementos de suas "paralelas" não esquecendo de TROCAR os sinais de seus resultados:



Para terminar, pelo passo 4, basta somarmos os resultados encontrados, e daí encontraremos det D = 4 + 30 + 0 + (-2) + (-20) + 0 = 4 + 30 – 2 – 20 = 34 – 22 = 12.

Saiba Mais

Existem algumas matrizes que recebem um nome especial, como é o caso da matriz quadrada que já vimos, onde o número de linhas é igual ao número de colunas.

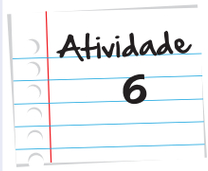
Bem agora falaremos de mais uma matriz com nome especial que é a matriz identidade. Uma matriz quadrada de ordem n é dita identidade quando os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais elementos dessa matriz são iguais a 0. Por exemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

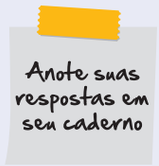
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E assim por diante, independente da ordem da matriz quadrada...

Encontrando o determinante de uma matriz.



Encontre, utilizando o conhecimento adquirido nesta seção, qual o determinante das matrizes identidade I_2 e I_3. Será que você se arriscaria dizer qual o determinante da matriz identidade I_4 sem fazer contas? Por quê?



No site a seguir, vocês poderão baixar uma calculadora bem legal que vocês poderão calcular determinantes. Divirtam-se!

Baixem do site: http://www.baixaki.com.br/site/dwnld46266.htm

Instale e abra a calculadora.

Clique em "Equações – Polinômios" e a calculadora abrirá uma nova tela. Lá em cima, clique na aba "Determinantes" e pronto, você poderá saber o valor de determinantes até ordem 4, apenas colocando os valores dos elementos.

Vimos neste módulo quão importante as matrizes são importantes para a nossa vida. Organizamos dados, visualizamos de maneira rápida, extraindo informações facilmente. Vimos também como operar com matrizes.

Resumo

Aprendemos neste módulo:

- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes: vimos que a partir de uma tabela de dados, ou de uma regra de formação, sabendo o número de linhas e de colunas, podemos construir uma matriz.
- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes: vimos que é bem natural efetuar algumas das operações entre matrizes, como a soma, que basta somar os elementos correspondentes. Temos de ter uma atenção especial com o produto de matrizes, pois ela é especial, não basta multiplicar os termos correspondentes.

- Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 : por fim aprendemos a calcular determinantes, que quando a matriz é de ordem 2, fazemos a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária, quando a matriz é de ordem 3, utilizamos a regra de Sarrus.

Veja ainda

Calculando determinante por escalonamento:

- http://www.youtube.com/watch?v=qCYvugOqQAo
- Neste vídeo, você aprenderá como calcular um determinante de uma maneira diferente da que estudamos. Não deixem de conferir!

Referência

Livros

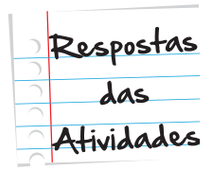
- IEZZI, Gelso, et al. *Matemática Ciência e Aplicações.* 6ª edição, vol2. São Paulo, 2010. 320 páginas.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/photo/1289957



ATIVIDADE 1

a. 10

b. 20

c. 25

d. 5

ATIVIDADE 2

$a_{11} = -4$ (elemento que está na primeira linha e primeira coluna)

$a_{12} = \sqrt{2}$ (elemento que está na primeira linha e segunda coluna)

$a_{21} = \frac{2}{3}$ (elemento que está na segunda linha e primeira coluna)

$a_{22} = 100$ (elemento que está na segunda linha e segunda coluna)

ATIVIDADE 3

a. Como queremos construir uma matriz com duas linhas e duas colunas, sabemos que ela é da forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Daí, como a regra de formação é $a_{ij} = i - j$, teremos:

$a_{11} = 1 - 1 = 0$ (substituímos o i por 1 e o j também por 1)

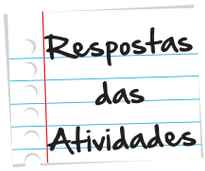
$a_{12} = 1 - 2 = -1$ (substituímos o i por 1 e o j por 2)

$a_{21} = 2 - 1 = 1$ (substituímos o i por 2 e o j por 1)

$a_{22} = 2 - 2 = 0$ (substituímos o i por 2 e o j também por 2)

Logo, a matriz procurada é:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



b.

$a_{11} = 3.1 + 1 = 4$ (substituímos o i por 1 e o j também por 1)

$a_{12} = 3.1 + 2 = 5$ (substituímos o i por 1 e o j por 2)

$a_{21} = 3.2 + 1 = 7$ (substituímos o i por 2 e o j por 1)

$a_{22} = 3.2 + 2 = 8$ (substituímos o i por 2 e o j também por 2)

Logo, a matriz procurada é:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal são 4 e 8.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ATIVIDADE 4

a. Para encontrar a matriz de faltas do bimestre, temos de fazer a soma das matrizes de faltas dos meses Outubro e Novembro:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Para descobrir quem teve o maior número de faltas em Matemática, basta encontrar o maior número da última coluna, onde vemos que foi o aluno A, com cinco falta. O menor número de faltas em Física foi 3 (basta olhar para a primeira coluna) e assim o aluno C teve o menor número de faltas.

c.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 4-2 & 2-3 \\ 0-4 & 3-1 & 1-2 \\ 1-2 & 2-0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Podemos concluir, por exemplo, que o aluno C teve o mesmo número de faltas em Outubro e Novembro em Matemática, visto que o elemento que aparece na terceira linha e terceira coluna é 0. Podemos concluir que todos os alunos tiveram mais faltas em Novembro do que em Outubro em Química, pois os números da segunda coluna são todos positivos.

ATIVIDADE 5

a. Calculando os demais elementos:

$$\begin{pmatrix} 6800 & 200 \text{ x } 15 + 120 \text{ x } 25 + 80 \text{ x } 20 & 200 \text{ x } 35 + 120 \text{ x } 25 + 80 \text{ x } 5 \\ 1850 & 75 \text{ x } 15 + 25 \text{ x } 25 + 20 \text{ x } 20 & 75 \text{ x } 35 + 25 \text{ x } 25 + 20 \text{ x } 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6800 & 3000+3000+1600 & 7000+3000+400 \\ 1850 & 1125+625+400 & 2625+625+100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6800 & 7600 & 10400 \\ 1850 & 2150 & 3350 \end{pmatrix}$$

b. Duas linhas e três colunas.

c. Não daria, pois sem a quantidade de chinelos vendidos, não conseguiríamos efetuar os cálculos.

d. Sim daria, pois bastaria multiplicarmos como fizemos com os itens custo e lucro e encontraríamos assim uma matriz com três linhas e três colunas.

e. Sim, pois ainda assim teríamos como multiplicar (3 produtos) e fazer a soma no fim.

f. Não. Pois sem ter na tabela 2 seu custo e lucro, não teríamos como fazer as contas. (observe que não teríamos alguém da tabela 2 para multiplicar com os valores da tabela 3...)

g. O número de colunas da primeira tabela tem que ser igual ao número de linhas da segunda tabela. Esta é a condição de existência do produto entre duas matrizes.

Respostas das Atividades

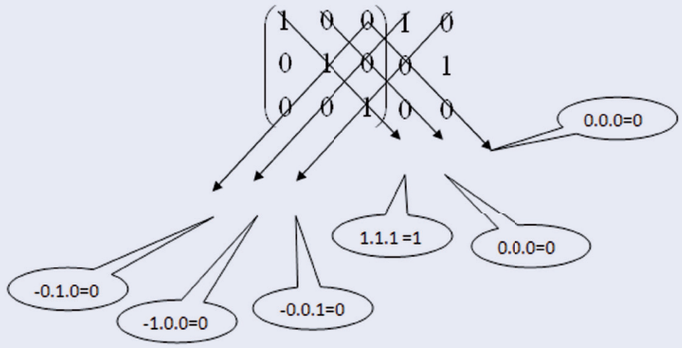
ATIVIDADE 6

Encontrando o determinante da matriz I_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

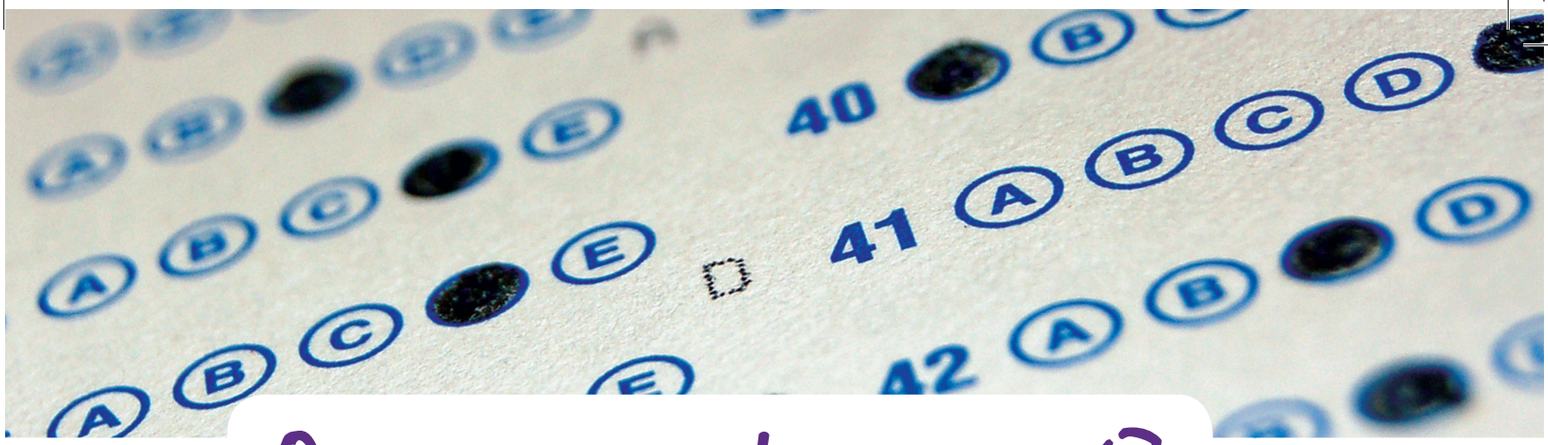
Temos que a diferença do produto dos elementos da diagonal e o produto dos elementos da diagonal secundária será: 1.1 – 0.0 = 1

Encontrando o determinante da matriz I_3 :



Somando todos os resultados encontraremos: 0+0+0+1+0+0=1

Bem, quando ao determinante de I_4 podemos esperar que também seja igual a 1, visto que encontramos os outros determinantes anteriores iguais a 1, mas teríamos de demonstrar de alguma forma, que no momento, com as ferramentas que possuímos não é possível...



O que perguntam por aí?

Questão ENEM 2012

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando o produto de matrizes, Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Como para encontrar a média bastaria somar as 4 notas bimestrais de uma determinada disciplina e dividir por 4, que é o mesmo que multiplicar cada uma das notas por ¼ e depois somar, temos que para encontrar as médias, bastaria multiplicar a matriz obtida da tabela pela matriz coluna em que todos os elementos são iguais a ¼. Portanto, letra e. Obs: Façam as contas e confirmem o fato!

Sistemas Lineares

Para início de conversa...

Diversos problemas interessantes em matemática são resolvidos utilizando sistemas lineares. A seguir, encontraremos exemplos de alguns desses problemas:

1. O problema da população: a população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes. Qual a população da cidade B?

Observação: A população de uma cidade é a quantidade de habitantes daquela cidade.

2. O problema do pagamento com notas específicas: Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?
3. O problema do teste: um professor de matemática aplicou um teste com 20 questões, e cada questão que o aluno acertasse receberia 5 pontos e cada questão que ele errasse perderia 3 pontos. Sabendo que Emília conseguiu 60 pontos nesse teste, quantas questões ela errou?
4. O problema da pontuação de cada medalha:

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação geral das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?

Todos esses problemas apresentados podem ser traduzidos para uma linguagem algébrica, escritos na forma do que chamamos de sistemas lineares, e então resolvidos por alguns métodos que aprenderemos mais adiante. Voltaremos a resolver os problemas anteriores no decorrer desta aula. Fiquem tranquilos e diminuam a ansiedade!

Objetivos de aprendizagem

- Identificar uma equação linear.
- Aprender a encontrar a solução de uma equação linear.
- Identificar um sistema linear.
- Identificar sistemas possíveis e impossíveis.
- Identificar um sistema na forma escalonada.
- Resolver um sistema por escalonamento.

Seção 1
Problemas envolvendo equação linear

Diversos problemas da vida cotidiana podem ser traduzidos para a linguagem algébrica na forma do que chamamos de equação linear. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo: Miguel foi sacar R$ 70,00 em um caixa eletrônico que tinha apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 20,00. Quantas notas de cada ele pode ter recebido do caixa eletrônico?

Vamos resolver este problema?

Primeiramente observamos que, como o problema trabalha com a quantidade de notas concluímos que estamos lidando com números naturais (1, 2, 3,...), afinal, não faz sentido falar em "um terço de nota" ou "raiz quadrada de três notas", certo?

Bem, para facilitar nossa vida, utilizamos letras para representar os números que procuramos, traduzindo o problema inicial para uma linguagem algébrica... Calma, não é algo difícil! Veja só! O que estamos interessados em descobrir? Isso mesmo! A quantidade de notas de 10 reais e de 20 reais que Miguel pode ter recebido. Essas serão as nossas variáveis (letras)...

Podemos utilizar duas letras quaisquer para representar essas quantidades. Vamos escolher, então, x para representar o número de notas de R$ 10,00 e y para o número de notas de R$ 20,00. Traduzindo o nosso problema, encontraremos a nossa equação linear $10 . x + 20 . y = 70$, ou podemos apenas escrever $10x + 20y = 70$, afinal, já aprendemos que quando vemos um número e uma letra juntas a operação que estamos utilizando é a multiplicação.

E por que escrevemos 10x e 20y? Como x representa a quantidade de notas de 10 reais que o caixa eletrônico liberou, 10x representa a quantia em reais com notas de 10 reais, ou seja, se o caixa eletrônico liberar três notas de 10 reais e duas notas de 20 reais, por exemplo, isso quer dizer que Miguel recebeu $10.3 = 30$ reais em notas de dez reais e $20.2 = 40$ reais em notas de 20 reais, totalizando $30 + 40 = 70$ reais, que fora o valor solicitado por Miguel. Mas observe que esta não é a única possibilidade! Vamos construir uma tabela com todas as possibilidades? Sim!!!

Uma das maneiras de encontrarmos todas as soluções de uma equação desse tipo é atribuirmos valores a uma de nossas incógnitas para encontrarmos o valor da outra, encontrando assim o que chamamos de solução da equação. Observe que já conhecemos uma solução, $x = 3$ e $y = 2$, que representaremos pelo par ordenado (3,2), pois quando substituímos esses valores na equação $10x + 20y = 70$ encontramos uma sentença verdadeira. Encontremos as outras possíveis soluções:

Para x = 0, temos: $10x + 20y = 70 \rightarrow 10.0 + 20y = 70 \rightarrow 0 + 20y = 70 \rightarrow y = \frac{70}{20} = 3,5$ --- o que é impossível, pois não podemos ter esta quantidade de notas (três notas e meia???).

Para x = 1, temos que $10.1 + 20y = 70$. Resolvendo essa equação, temos: $10 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}10 \rightarrow 20y = 60 \rightarrow y = \frac{60}{20} = 3$. Portanto, (1,3) é solução da equação linear.

Para x = 2, temos: $10.2 + 20y = 70 \rightarrow 20 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}20 \rightarrow 20y = 50 \rightarrow y = \frac{50}{20} = 2,5$ --- impossível novamente!

Para x = 3, temos: $10.3 + 20y = 70 \rightarrow 30 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}30 \rightarrow 20y = 40 \rightarrow y = \frac{40}{20} = 2$. Portanto, (3,2) é solução da equação linear conforme já havíamos visto!

Para x = 4, temos: $10.4 + 20y = 70 \rightarrow 40 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}40 \rightarrow 20y = 30 \rightarrow y = \frac{30}{20} = 1,5$ --- impossível novamente.

Para x = 5, temos: $10.5 + 20y = 70 \rightarrow 50 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}50 \rightarrow 20y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{20} = 1$. Portanto, (5,1) é solução da equação linear.

Para x = 6, temos: $10.6 + 20y = 70 \rightarrow 60 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}60 \rightarrow 20y = 10 \rightarrow y = \frac{10}{20} = 0,5$ ---impossível novamente.

Para x = 7, temos: $10.7 + 20y = 70 \rightarrow 70 + 20y = 70 \rightarrow 20y = 70\text{-}70 \rightarrow 20y = 0 \rightarrow y = \frac{0}{20} = 0$. Portanto, (7,0) é solução da equação linear.

O que aconteceria se pensássemos em x = 8? Faça as contas e conclua porque nós paramos no x = 7 ...

Podemos, então, construir a tabela das possibilidades que atendem às condições do problema:

x (nº de notas de R$ 10,00)	y (nº de notas de R$ 20,00)
1	3
3	2
5	1
7	0

Assim, os pares ordenados (1,3), (3,2), (5,1) e (7,0) são as soluções do problema.

Esta equação que encontramos, $10x + 20y = 70$, que representa nosso problema, é chamada de equação linear, pois todas as variáveis (x e y neste caso) têm o expoente igual a 1. Por exemplo, a equação $x^2 + 4y + z = 0$ não é uma equação linear, pois o expoente da variável x não é igual a 1.

Além disso, não chamamos de lineares as equações com termo misto (que contém produto de duas ou mais variáveis). Por exemplo, as equações $xy + 3 = 0$ e $a + b + cd = 23$ não são equações lineares, pois possuem termo misto.

Verificando a solução de uma equação linear e encontrando algumas soluções

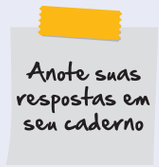
Dada a equação linear $2x + 3y = 11$, faça o que se pede.

a. Verifique se (2,3) é solução da equação.

b. Encontre a solução da equação que temos $x = -1$.

c. Encontre a solução da equação que temos $y = 5$.

d. Encontre outra solução qualquer diferente das encontradas no item b e c.



Seção 2
Aprendendo um pouco de Sistemas lineares 2 x 2

O objetivo desta seção é aprender a reconhecer um sistema linear e resolvê-lo, sempre traduzindo um problema para a linguagem algébrica.

Sistemas lineares 2x2 – aprendendo a resolver...

Voltemos ao problema 1, do início de nossa aula – O problema da população: a população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes. Qual a população da cidade B?

Vamos resolver este problema!? Bem, observemos que temos duas equações lineares neste problema e o conjunto dessas duas equações será o que chamamos de sistema linear 2x2.

Inicialmente o problema diz que: "A população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B"; chamando de x a população da cidade A e de y a população da cidade B, podemos escrever da afirmação entre aspas: x = 4y.

Temos outra afirmação no problema de onde podemos escrever outra equação linear: "Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes". Desta afirmação podemos escrever que x + y = 250.000.

Podemos então escrever uma equação em baixo da outra utilizando o símbolo chaves da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Esta forma de representar é o que chamamos de sistema de equações (no caso, equações lineares). O que seria resolver esse sistema linear? Seria encontrar valor de x e de y que satisfaça tanto a equação x = 4y quanto a equação x + y = 250.000. Observe que podemos encontrar solução para uma equação que não satisfaça a outra. Por exemplo, (4,1) é solução da equação x = 4y, visto que 4 = 4.1, mas (4,1) não satisfaz a equação x + y = 250.000, pois 4 + 1 é diferente de 250.000. Portanto, (4,1) não é solução do sistema.

Bem, como encontrar, então, a solução deste sistema? Existem alguns métodos para resolver um sistema linear 2x2. Vamos utilizar o método da substituição para resolver este nosso problema. Outros métodos serão apresentados em um Box Saiba Mais posteriormente.

No que consiste o método da substituição? Consiste em isolar uma das variáveis e então substituir seu valor respectivo na outra equação.

No caso do nosso sistema $\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$ a variável x da equação de cima já está isolada em função do y. Então, no lugar do x da equação de baixo, basta colocar 4y no lugar do x. Entendeu? Vamos lá então...

Temos a equação x + y = 250.000, substituindo encontraremos:

4y + y = 250.000. Agora basta resolvermos a equação do primeiro grau e encontrar o valor de y...

5y = 250.000 $\rightarrow$ y = $\frac{250000}{5}$ = 50.000 habitantes. Como queríamos descobrir a população da cidade B, o problema foi resolvido, visto que encontramos y = 50.000, que é a população da cidade B. Mas e se quiséssemos encontrar a população da cidade A? Bastaria voltarmos a qualquer uma das equações e substituir y por 50.000. Voltando à equação x = 4y, teríamos: x = 4 . 50.000 = 200.000 habitantes. Vamos representar esta solução pelo par ordenado (200000, 50000). Simples, não é mesmo?

Um sistema linear 2 x 2, é um conjunto de duas equações lineares com duas variáveis.

- Resolvendo um sistema 2x2 pelo método da adição:

Explicaremos agora como resolver um sistema pelo método da adição. Para tal, utilizaremos o mesmo sistema que resolvemos pelo método da substituição, verificando assim a mesma solução. O sistema que resolveremos então é este aqui:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Pelo método da adição: o método da adição consiste em somar as equações de forma que uma das variáveis desapareça, resultando, assim, numa equação com uma única variável, que será facilmente solucionável. Lembrando que podemos multiplicar uma equação por qualquer número real e ela será uma equação equivalente (possuirá as mesmas soluções), resolvemos facilmente o sistema.

Organizando melhor nosso sistema, "passando o y para o primeiro membro" (somando -4y a ambos os membros) na equação x = 4y, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Vamos agora multiplicar a primeira equação (a equação de cima) por (-1). Mas por que professor? Porque assim, como temos x na segunda equação (a equação de baixo), quando somarmos (-x) com x, irá desaparecer o x e encontraremos uma equação apenas com a incógnita y, ficando assim simples de encontrar o valor de y... Observe:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \quad .(-1) \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Ficamos com:

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

Somando as duas equações do último sistema, encontramos a equação:

-x + x + 4y + y = 250.000 → 5y = 250.000 → y = 50.000 habitantes. Substituindo o valor de y em qualquer uma das duas equações, encontraremos o valor de x. Por exemplo, substituindo na segunda equação, teremos: x + 50.000 = 250.000 → x = 250.000-50.000 = 200.000 habitantes, que é a mesma solução que encontramos anteriormente. Simples, não é?

- Resolvendo um sistema 2x2 pelo método da comparação:

Explicaremos agora como resolver um sistema pelo método da comparação. Para tal, utilizaremos o mesmo sistema (novamente) que resolvemos pelo método da substituição e da adição, verificando assim que possuirá a mesma solução. O sistema que resolveremos é este aqui:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + y = 250000 \end{cases}$$

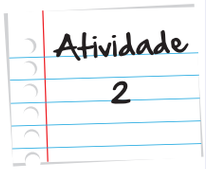
Para resolver um sistema pelo método da comparação, devemos isolar a mesma variável nas duas equações (qualquer uma das duas) no primeiro membro e então igualar o segundo membro das equações, desta maneira encontrando o valor de uma das variáveis. Vejamos como fica:

Observe que na primeira equação (x = 4y) o x já está isolado. Isolando o x na segunda equação, encontramos x = 250.000-y, ficando com o seguinte sistema em que ambas as equações expressão o valor de x:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x = 250000 - y \end{cases}$$

Daí, podemos escrever a seguinte equação comparando essas duas: 4y = 250.000-y, que resolvendo temos:

4y + y = 250.000 → 5y = 250.000 → y = 50.000. Substituindo em qualquer uma das duas equações, encontramos o valor de x. Por exemplo, utilizando a segunda equação, temos: x = 250.000-50.000 = 200.000 habitantes. Simples, não?



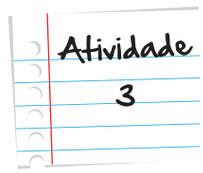
O problema do pagamento com notas específicas

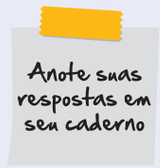
Resolva o problema do pagamento com notas específicas, do início da aula, utilizando um dos três métodos de solução de sistema 2x2. O enunciado do problema é: Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?

Anote suas respostas em seu caderno

O problema do teste

Resolva o problema do teste do início da aula utilizando um dos três métodos de solução de sistema 2x2. O enunciado do problema é: Um professor de matemática aplicou um teste com 20 questões, e cada questão que o aluno acertasse receberia 5 pontos e cada questão que ele errasse perderia 3 pontos. Sabendo que Emília conseguiu 60 pontos nesse teste, quantas questões ela errou?





Interpretação geométrica e classificação de um sistema linear 2 x 2

Podemos resolver um sistema linear 2x2 graficamente. Como? Basta lembrar que uma equação com duas variáveis pode ser "vista" como a lei de formação de uma função polinomial do 1º grau cujo gráfico é uma reta, como já estudamos.

Vejamos alguns exemplos:

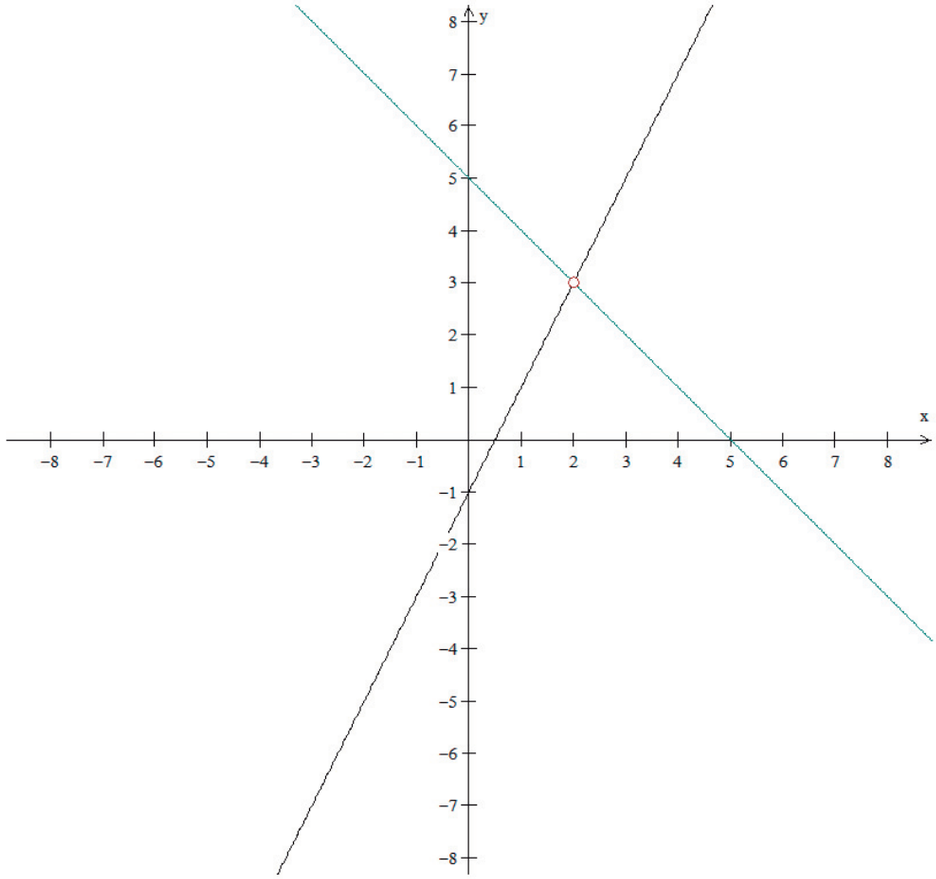
1. Observe o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Aplicando o método da adição na resolução desse sistema, teríamos x + y + 2x – y = 5 + 1. Cancelando os termos simétricos, teríamos 3x = 6, donde concluímos que x = 2. Substituindo esse valor na primeira equação teríamos que y = 3. Essa solução possui uma interpretação gráfica.

Observem que a equação linear x + y = 5 é equivalente a y = 5-x, que é a lei de uma função polinomial do 1º grau, cujo gráfico é uma reta e passa pelos pontos (0,5) e (5,0), e podemos ver seu gráfico a seguir, assim como a equação 2x-y = 1 é equivalente a y = 2x-1, cujo gráfico também se encontra a seguir.

Construindo os gráficos das funções, encontramos:



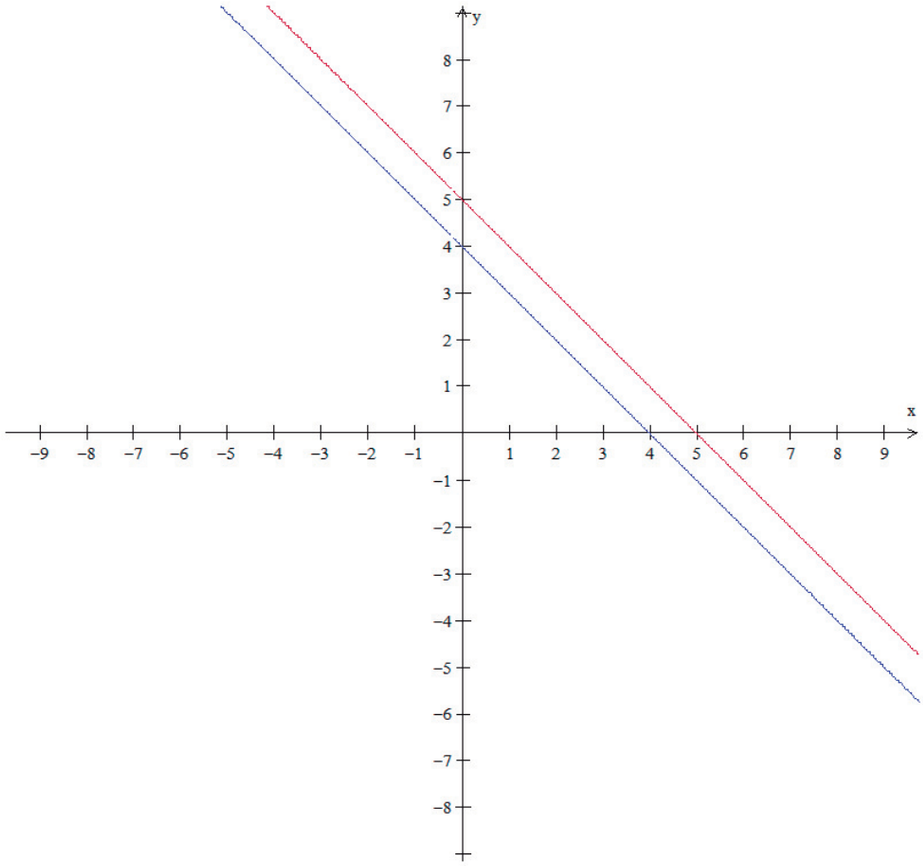
Observem que estas retas possuem um único ponto, (2,3), como ponto de intersecção, que é a solução procurada do sistema linear. Como o sistema possui uma única solução S = {(2,3)}, ele é chamado de sistema possível e determinado.

2. Observe o sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Esse sistema é equivalente ao sistema de equações y = -x + 5 e y = -x + 4. Ora, se aplicamos o método da comparação em sua resolução, concluímos que –x + 5 = -x + 4, ou seja, 5 = 4. Isso é impossível! Vamos ver a interpretação gráfica dessa situação?

Da mesma maneira que no exemplo 1, construindo os gráficos das funções, encontramos:



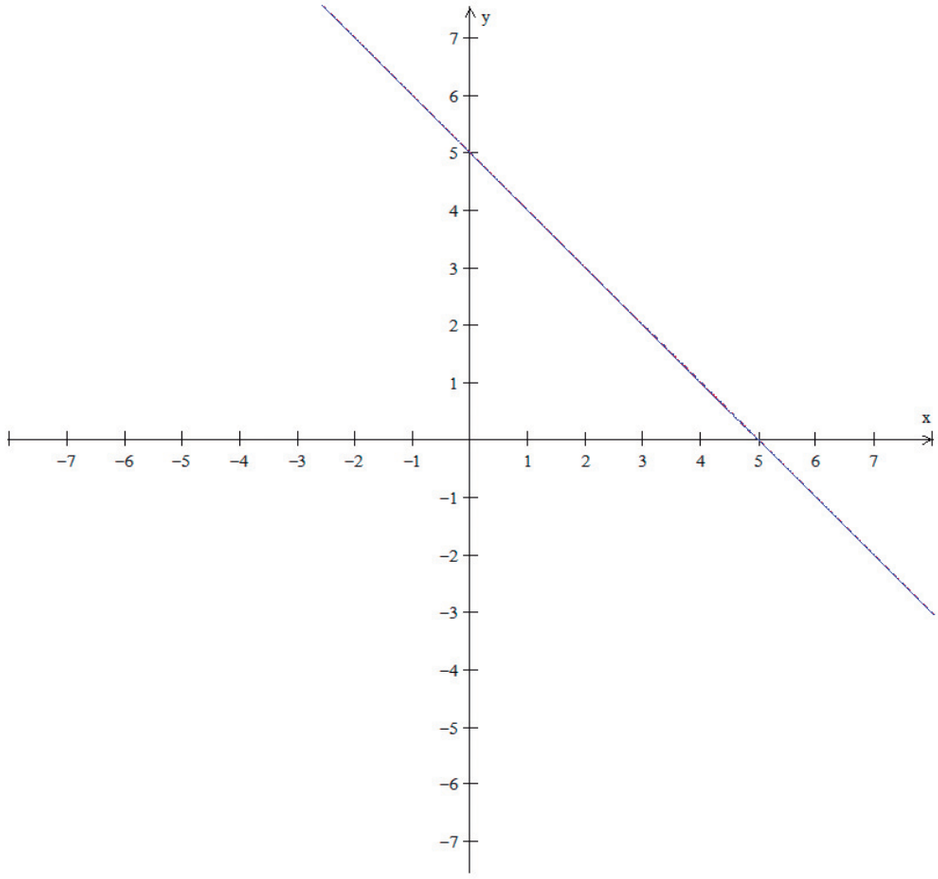
Podemos observar que as retas são paralelas, ou seja, não possuem ponto em comum. Nesse caso, dizemos que o sistema é impossível! A solução é o conjunto vazio: S = ∅.

3. Observe o sistema.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x + 4y = 20 \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a y = -x + 5. A segunda equação pode ser simplificada (todos os termos podem ser divididos por 4), de modo que teríamos x + y = 5. Da mesma forma, essa segunda equação é equivalente a y = – x + 5. Ora, se usamos o método da comparação, teríamos que –x + 5 = -x + 5. Tal fato é verdadeiro para qualquer valor de x. Vamos à interpretação gráfica dessa situação.

Da mesma maneira que nos exemplos anteriores, construiremos os gráficos das funções:



Podemos observar que as retas são coincidentes e, portanto, o sistema será possível e indeterminado, visto que ele admitirá infinitas soluções.

Assim, vemos que os sistemas podem ser classificados a partir da interpretação gráfica.

1. As retas são concorrentes: Quando isso ocorrer, haverá um ponto apenas em comum e diremos que o sistema é possível e determinado (SPD), visto que só existirá uma única solução.

2. As retas são paralelas (distintas): Quando isso ocorrer, as retas não terão pontos em comum e diremos que o sistema é impossível (SI), visto que não haverá soluções para ambas as equações ao mesmo tempo.

3. As retas são coincidentes: Quando isso ocorrer, as retas terão infinitos pontos em comum e diremos que o sistema é possível e indeterminado (SPI), visto que existirão soluções (possível), porém infinitas (indeterminado).

Seção 3
Aprendendo um pouco sobre sistemas lineares m x n

Nesta seção aprenderemos a resolver alguns sistemas lineares com mais equações e mais incógnitas que no sistema linear 2x2 que possuía apenas duas equações e duas incógnitas.

O que é um sistema linear m x n?

Bem, um sistema linear m x n nada mais é do que um sistema linear com **m** equações e **n** incógnitas. Por exemplo:

a. O sistema linear $\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x-y=1 \\ x-5y+4z=0 \end{cases}$ é um sistema linear com três equações e três incógnitas.

b. O sistema linear $\begin{cases} a+b=5 \\ a-c=-10 \\ b+c+d=10 \\ a-2e=\frac{4}{3} \end{cases}$ é um sistema linear com quatro equações e cinco incógnitas (a, b, c, d, e)

c. O sistema linear $\begin{cases} x+2y-3z+w=k \\ 10x-y+7k-4w=0 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e cinco incógnitas.

Solução de um Sistema linear

Uma solução de um sistema linear é uma sequência de números reais quando é solução de cada uma das equações do sistema. Por exemplo, no sistema linear $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-y=3 \\ x-5y+4z=-7 \end{cases}$ temos que (2, 1, -1) é uma solução, pois se fizermos x = 2, y = 1 e z = -1 em cada equação do sistema encontraremos sentenças verdadeiras: 2 + 1 - (-1) = 4; 2 . 2 -1 = 3; 2 -5 . 1 + 4. (-1) = -7.

Sistemas escalonados

Observemos alguns exemplos de sistemas escalonados:

a. $\begin{cases} x+y-z=5 \\ y-z=1 \\ 2z=4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-y+z=5 \\ y-3z=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4a+b-3c+4d-e=6 \\ c+2d-5e=-1 \\ d+e=10 \end{cases}$

Mas por que o chamamos de escalonados? É simples, basta observar que o nº de coeficientes (números reais que acompanham as variáveis) não nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Resolução de um sistema escalonado

Para resolvermos um sistema escalonado, temos que separá-los em dois tipos:

1º) Sistema com número de equações igual ao número de variáveis:

Para resolver um sistema linear escalonado, em que o número de equações é igual ao número de variáveis, basta encontrar o valor de uma das variáveis (geralmente situada na última equação) e ir substituindo nas outras equações de cima para encontrar o valor das outras variáveis.

Por exemplo, no sistema $\begin{cases} x+y-z=5 \\ y-z=1 \\ 2z=4 \end{cases}$ temos:

$2z = 4 \rightarrow z = 2$. Substituindo na equação de cima, teremos:

$y-2 = 1 \rightarrow y = 1 + 2 = 3$, que finalmente, substituindo na primeira equação, encontraremos: $x + 3-2 = 5 \rightarrow x = 5-1 = 4$. Portanto, a solução do sistema é (4,3,2).

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações igual ao número de variáveis, ele é possível e determinado, ou seja, ele terá uma única solução.

2º) Sistema com número de equações menor que o número de variáveis:

Para resolver um sistema linear escalonado, onde o número de equações é menor que o número de variáveis, colocaremos uma ou mais variáveis em função de um número real qualquer (outra variável). Parece difícil, mas não é. Observe o exemplo a seguir atentamente:

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ \quad y - 3z = 0 \end{cases}$$

Observe que temos duas equações e três variáveis e, portanto, estamos neste tipo de sistema escalonado. Da última equação temos que, se y-3z = 0, então y = 3z, certo? Então, façamos z = α. Daí, y = 3α. Finalmente utilizando a primeira equação, teremos que, se x-y + z = 5, então x = 5 + y-z = 5 + 3α – α = 5 + 2α.

Portanto, teremos a solução geral (5 + 2α,3 α, α), onde $\alpha \in R$.

Observe que para cada valor de α real teremos uma solução do sistema. Por exemplo, para α = 0, teremos (5 + 2.0,3.0,0) = (5,0,0); para α = 10, teríamos como solução (5 + 2.10,3.10,10) = (25,30,10). Logo, o sistema será possível e indeterminado.

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações menor do que o número de variáveis, ele é possível e indeterminado, ou seja, ele terá infinitas soluções.

Importante

Escalonando um sistema e resolvendo-o

Para escalonar um sistema, utilizamos as seguintes "propriedades":

1. Podemos multiplicar ambos os membros de uma equação qualquer por um número real k, diferente de zero.
2. Podemos substituir uma equação do sistema pela soma dela, membro a membro, com alguma outra equação.
3. Podemos trocar a posição de duas equações do sistema.

Qual a ideia para encontrarmos um sistema escalonado? A ideia é:

- Escolher para a primeira equação aquela em que o coeficiente da 1ª variável seja não nulo. Se possível, fazer a escolha de tal coeficiente igual a 1 para facilitar os cálculos.
- Anulamos o coeficiente da 1ª variável das demais equações, utilizando a "propriedade" II.
- Utilizar a segunda equação para anular o coeficiente da 2ª variável das demais equações. (Não fazer na primeira equação.)
- Repetir o processo até a última equação.

Exemplo: Escalonar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x+y+z=0 \\ 5x+2y-z=2 \end{cases}$$

Como o coeficiente da variável x é igual a 1, basta partirmos para anular o coeficiente das outras equações. Para tal, basta substituirmos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2:

$$\begin{array}{r} -2x-2y-4z=-8 \\ 2x+y+z=0 \quad + \\ \hline -y-3z=-8 \end{array}$$

Do mesmo modo, substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por (-5):

$$\begin{array}{r} -5x-5y-10z=-20 \\ 5x+2y-z=2 \quad + \\ \hline -3y-11z=-18 \end{array}$$

Ficamos, então, com o sistema assim:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ -y-3z=-8 \\ -3y-11z=-18 \end{cases}$$

Para ficar mais simples de fazer os cálculos, multipliquemos a segunda e a terceira equações por (-1):

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ y+3z=8 \\ 3y+11z=18 \end{cases}$$

Agora basta substituirmos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª multiplicada por -3:

$$\begin{array}{r} -3y-9z=-24 \\ 3y+11z=18 \quad + \\ \hline 2z=-6 \end{array}$$

Encontramos, então, o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 3z = 8 \\ 2z = -6 \end{cases}$$

Como o sistema possui 3 equações e 3 variáveis, sabemos que este sistema é possível e determinado. Resolvendo...

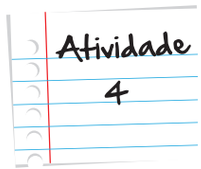
$2z = -6$

$z = -3$

Substituindo na segunda equação: $y + 3.(-3) = 8 \rightarrow y-9 = 8 \rightarrow y = 8 + 9 = 17$, que substituindo na primeira equação: $x + 17 + 2.(-3) = 4 \rightarrow x = 4-17 + 6 = -7$.

Portanto, a solução procurada é (-7,17,-3).

O problema da pontuação de cada medalha



Resolva o problema do início da aula sobre a pontuação de cada medalha:

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação geral das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?

Anote suas respostas em seu caderno

Como vocês viram, é muito interessante o estudo de sistemas lineares, principalmente para resolução de problemas envolvendo situações reais, como foi o caso do problema do caixa eletrônico e do problema das medalhas.

Esperamos que vocês utilizem o conhecimento desta aula para facilitar a resolução de seus problemas, não somente utilizando a Aritmética substituindo valores, mas também utilizando a Álgebra.

Resumo

Nesta aula pudemos estudar principalmente:

- Equações lineares – vimos que estas são equações nas quais as variáveis têm expoentes iguais a 1 e não têm termos mistos. Por exemplo, $x + 3k + 9e = 3$ é uma equação linear, mas $x^2 + 4y = 0$ não é uma equação linear.
- Sistemas lineares – aprendemos a identificar um sistema linear e a reconhecer quando ele é:

  Possível – Quando há solução. Dividimos em dois:

  - Possível e Determinado: quando há apenas uma única solução; quando trabalhamos com sistemas 2x2, vimos que geometricamente representamos por duas retas concorrentes.
  - Possível e Indeterminado: o sistema possui infinitas soluções e quando trabalhamos com sistemas 2x2 vimos que geometricamente representamos por duas retas coincidentes.
- Finalmente, quando o Sistema é Impossível é porque não há solução e no sistema 2x2 representamos por retas paralelas.

Veja ainda

Recomendamos um vídeo do youtube para aprenderem a resolver de outra maneira um sistema linear, por uma regra conhecida como "regra de Cramer". O link é http://www.youtube.com/watch?v = 3FpN8wsOsi8&feature = fvst.

Referências

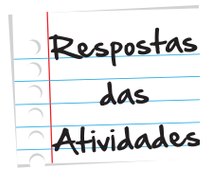
Livros

- IEZZI, Gelso, et al. **Matemática Ciência e Aplicações**. 6ª ed., vol. 2. São Paulo, 2010. 320 p.

Imagens

• Imagem retirada do Google

Atividade 1



a. Para verificar se (2,3) é solução da equação, nós substituímos x por 2 e y por 3 na equação, verificando assim se a sentença é verdadeira ou não. No caso, temos: 2.2 + 3.3 = 4 + 9 = 13 e, portanto, (2,3) não é solução, pois não encontramos 11 e sim 13.

b. Substituindo x por -1 na equação, teremos: 2 . (-1) + 3y = 11, daí -2 + 3y = 11, então 3y = 11 + 2 >> 3y = 13>> $y = \frac{13}{3}$. Portanto, a solução procurada é $(-1, \frac{13}{3})$.

c. Substituindo y por 5 na equação, teremos que: 2x + 3.5 = 11 >> 2x + 15 = 11. Daí, 2x = 11-15 => 2x = -4 => $x = \frac{-4}{2} = -2$. Portanto, a solução procurada é (-2,5).

d. Para encontrar outra solução qualquer, basta atribuirmos algum valor para x e encontrar o correspondente para y. Por exemplo, se fizermos x = 2, teremos: 2.2 + 3y = 11 => 4 + 3y = 11=> 3y = 11-4 => 3y = 7 => $y = \frac{7}{3}$. Portanto, uma solução será $(2, \frac{7}{3})$.

Atividade 2

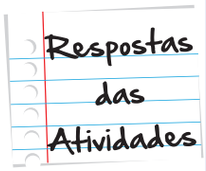
Se chamarmos de x o número de notas de R$ 10,00 e y o número de notas de R$ 50,00, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10x + 50y = 350 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

Resolvamos pelo método da adição. Multiplicando a segunda equação por -10, encontramos: -10x-10y = -150. Somando as equações, teremos:

40y = 200 → y = 5. Substituindo o valor de y na primeira equação, encontramos o valor de x: 10x + 50. 5 = 350 → 10x + 250 = 350 → 10x = 350-250 = 100 → x = 10.

Portanto, Roberto utilizou 10 notas de R$ 10,00 e 5 notas de R$ 50,00.



Atividade 3

Chamemos de *x* o nº de questões que Emília acertou e de *y* o nº de questões que ela errou. Daí, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 60 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Resolveremos desta vez por substituição. Isolando a variável x da segunda equação, encontraremos: $x = 20 - y$. Substituindo na primeira equação para encontrar o valor de *y*, temos: $5(20 - y) - 3y = 60 \rightarrow 100 - 5y - 3y = 60 \rightarrow -8y = 60 - 100 \rightarrow -8y = -40 \rightarrow y = 5$.

Portanto, Emília errou 5 questões.

Atividade 4

Chamemos de *x* a quantidade de pontos que vale cada medalha de ouro, de *y* a quantidade de pontos que vale cada medalha de prata e de *z* a quantidade de pontos que vale cada medalha de bronze.

Traduzindo o problema, utilizando a tabela, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

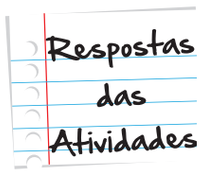
Vamos escalonar esse sistema: Substituímos a 2ª equação pela soma dela com 3ª equação multiplicada por (-1):

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ x - 2z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Trocamos de posição a primeira e a segunda equações:

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 46 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por (-4) e substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª multiplicada por (-4):



$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ 2y + 10z = 30 \\ 3y + 11z = 37 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ y + 5z = 15 \\ 3y + 11z = 37 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª multiplicada por (-3):

$$\begin{cases} x - 2z = 4 \\ y + 5z = 15 \\ -4z = -8 \end{cases}$$

Agora com o sistema escalonado, basta encontrarmos a solução:

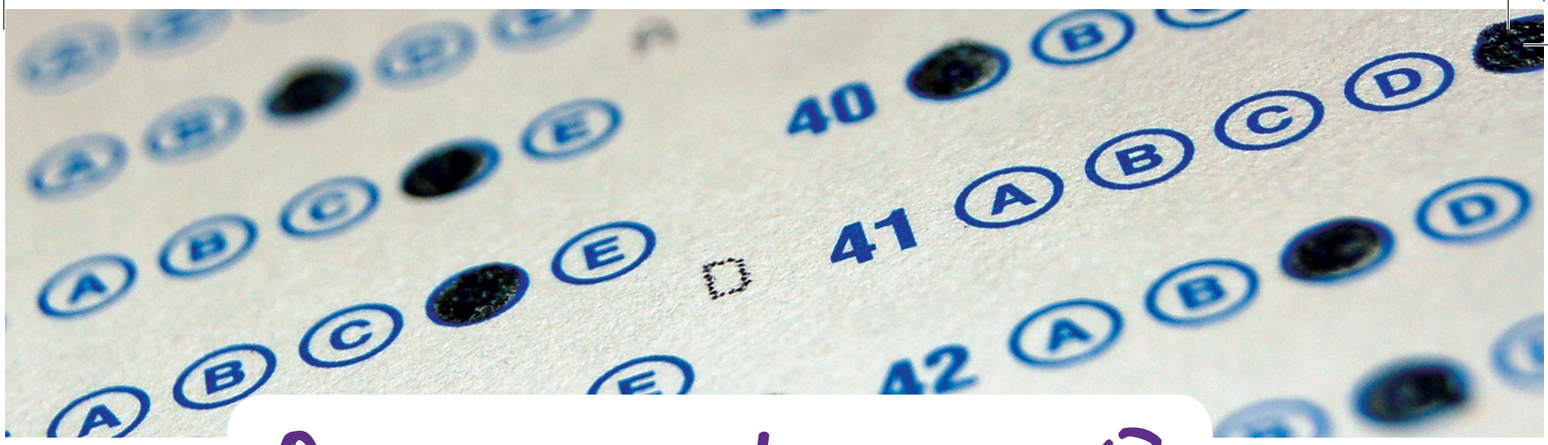
$-4z = -8 \Rightarrow z = 2$

Substituindo na segunda equação: $y + 5 \cdot 2 = 15 \Rightarrow y = 15 - 10 = 5$.

Substindo na primeira equação: $x - 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 = 8$.

Portanto, a medalha de:

- ouro vale 8 pontos.
- prata vale 5 pontos.
- bronze vale 2 pontos.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UENF)

Para preencher sua necessidade diária de 300g de carboidratos, um adulto ingere um tipo de alimentação mista que consiste em batatas e soja.

Admita que 100g de batata e 100g de soja contêm, respectivamente, 19g e 35g de carboidratos, e que x e y representam as quantidades diárias, em gramas, que esse adulto irá consumir, respectivamente, de batatas e soja.

Considerando a necessidade diária de carboidratos desse adulto:

a. Calcule a quantidade de soja, em gramas, que ele deverá ingerir num determinado dia em que tenha consumido 400g de batata;

b. Estabeleça uma equação que relacione as variáveis x e y.

Resposta:

a. Se ele consumiu 400g de batata e a cada 100g ele ingere 19g de carboidratos, foram ingeridos 4x19 = 76g de carboidratos. Para atender à necessidade diária de 300g, restam 224g de carboidratos. Assim, a quantidade de soja a ser ingerida deve ser (224:35)x100 = 640g.

b. A equação é 0,19x + 0,35y = 300.

Questão 2 (UNI-Rio)

Um laboratório farmacêutico fabrica 3 tipos de remédios utilizando diferentes compostos. Considere a matriz $A = (a_{ij})$ dada a seguir, onde a_{ij} representa quantas unidades do composto j serão utilizadas para fabricar uma unidade do remédio do tipo i.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Quantas unidades do composto 2 serão necessárias para fabricar 3 remédios do tipo 1; 2 remédios do tipo 2 e 5 remédios do tipo 3?

a. 19
b. 21
c. 24
d. 27
e. 30

Resposta: O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 1 é o elemento a_{12}, ou seja, 2.

O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 2 é o elemento a_{22}, ou seja, 5.

O número de unidades do composto 2 para fazer o remédio do tipo 3 é o elemento a_{32}, ou seja, 1.

Logo, a resposta é 3 x 2 + 2 x 5 + 5 x 1 = 21.

Questão 3 (UFF)

Na perfumaria XEROBOM, o xampu, o condicionador e a loção de sua fabricação estão sendo apresentados aos clientes em três tipos de conjuntos:

Conjunto	y (nº de notas de R$ 20,00)
2 loções e 3 xampus	R$ 38,00
4 xampus e 2 condicionadores 3	R$ 26,00
2 loções e 1 condicionado	R$ 31,00

Determine o preço de cada um desses produtos, considerando que o preço individual de cada produto é o mesmo, independente do conjunto ao qual pertence.

Resposta: Se x, y e z são respectivamente os preços individuais do xampu, do condicionador e da loção, temos as seguintes equações para a situação-problema proposta:

3x + 2z = 38

4x + 2y = 26

y + 2z = 31

Na terceira equação, temos que y = 31 – 2z. Substituindo y por 31 – 2z na 2ª equação, teremos 4x + 2(31 – 2z) = 26 → 4x + 62 – 4z = 26 → 4x + 36 = 4z, que é equivalente a x + 9 = z. Substituindo z por x + 9 na 1ª equação temos 3x + 2(x + 9) = 38 è 3x + 2x + 18 = 38 → 5x = 20 → x = 4. Como z = x + 9, z = 13. Como y = 31 – 2z, y = 5.

Função Logarítmica

Para início de conversa...

Vários países do mundo são regularmente atingidos por terremotos ou sofrem indiretamente – mas de forma igualmente devastadora – com as consequências destes fenômenos naturais. Em 2004, por exemplo, houve um terremoto de 9 graus na escala Richter na costa de Sumatra, na Indonésia. Além de destruir inúmeras casas, edifícios e vitimar diretamente milhares de pessoas, o terremoto provocou uma onda gigante, também chamada de tsunami, que atingiu outros 11 países. Ao todo, 288.800 pessoas perderam a vida.

Figura 1: Foto tirada logo após um terremoto na região de Kashmir, Índia. À direita os destroços da casas e, ao fundo, as barracas dos desabrigados.

Ainda bem que no Brasil não ocorrem terremotos, certo? Hum... a verdade não é bem essa. Aqui entre nós, você já sentiu algum tremor de terra ou pelo menos teve a sensação de algum?

Se você mora na parte urbana de uma cidade, deve ter notado que às vezes os prédios tremem quando passa um grande caminhão ou o metrô se aproxima... Esses são pequenos abalos que ocorrem no solo, porém não podem ser confundidos com um terremoto.

Um terremoto de verdade pode ser originado por falhas geológicas, vulcanismos e, principalmente, pelo encontro de placas tectônicas. Essas placas são porções gigantescas da crosta terrestre, formadas por parte do piso dos oceanos e por continentes inteiros – ou grande parte deles.

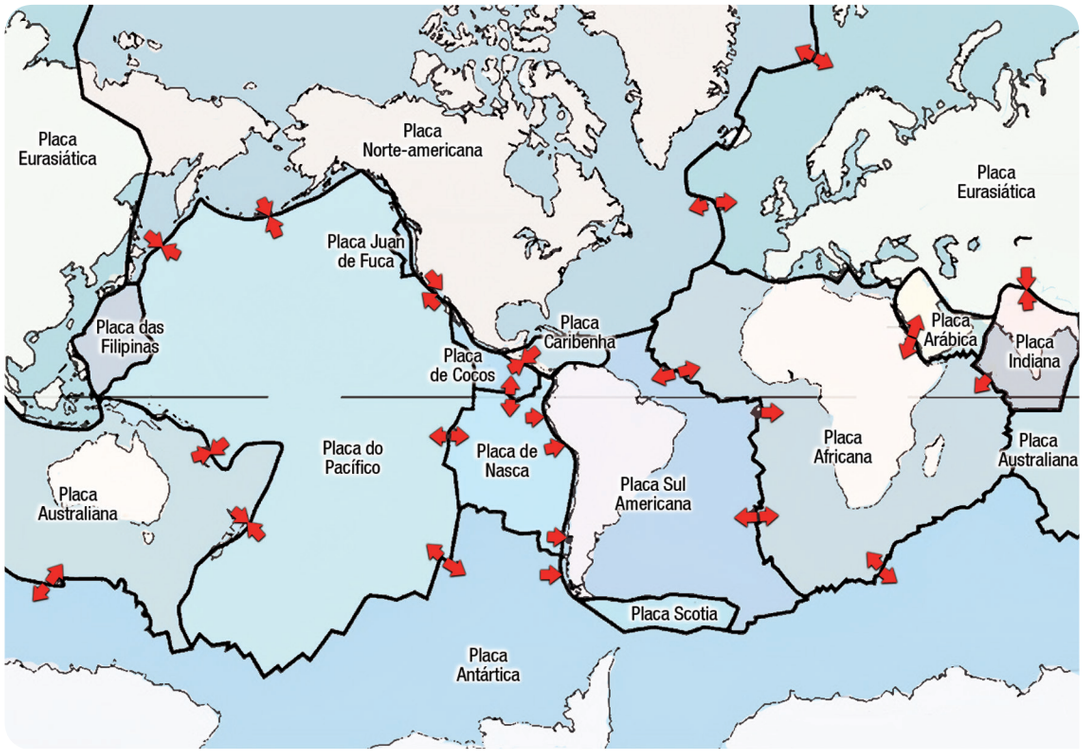


Figura 2: Mapa mundi com as principais placas tectônicas. As setas indicam o movimento das placas.

Quando duas destas placas se movem em sentidos contrários, geram tensão e instabilidade na área de contato entre elas. Essa instabilidade termina se convertendo em atividade vulcânica e em terremotos. Como o Brasil está localizado bem no centro da placa Sul-Americana, a gente quase não tem notícias sobre terremotos em nosso país.

Porém, (não fiquem assustados) segundo o Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo (USP), no século XX foram registrados mais de uma centena de terremotos no Brasil, o mais forte atingindo 6,6 pontos na escala Richter. Todavia, a maior parte desses abalos não passou de 4 graus.

Um destes tremores ocorreu no dia 13 de setembro de 2012 na cidade de Montes Claros, no estado de Minas Gerais. De acordo com o site de notícias R7, o tremor atingiu 2,9 pontos na escala Richter e, apesar de assustar a população, não causou vítimas ou danos materiais.

Para ler a matéria na íntegra, acesse o endereço http://noticias.r7.com/brasil/noticias/brasil-ja-registrou-mais-de-20-pequenos-terremotos-em-2012-20120914.html

É difícil prever a ocorrência de um terremoto. Pelo que pudemos perceber, conseguimos apenas medir sua intensidade. A escala Richter é utilizada como padrão para a comparação entre os terremotos. Esta escala foi desenvolvida pelos **sismólogos** Charles Francis Richter e Beno Gutenberg em 1935. Esta escala aumenta de forma logarítmica. Vamos entendê-la melhor? Para isso, precisamos aprender como trabalhar com os logaritmos. Estão preparados? Coragem! Não tem perigo...

Sismólogo

É o profissional que estuda os abalos sísmicos ocorridos na superfície do planeta Terra.

Objetivos desta unidade:

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas.
- Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

Seção 1
Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala varia de 0 a 10, porém pode atingir valores ainda maiores, embora até hoje não se tenha notícia de registros de tais abalos. A tabela seguinte mostra a escala e os efeitos causados pelos terremotos.

Tabela 1: Magnitudes dos terremotos segundo a escala Richter, os efeitos causados e a frequência desses abalos.

Descrição	Magnitude	Efeitos	Frequência
Micro	<2,0	Micro tremor de terra, não se sente	Aproximadamente 8000 por dia
Muito pequeno	2,0-2,9	Geralmente não se sente, mas é detectado/registrado	Aproximadamente 1000 por dia
Pequeno	3,0-3,9	Frequentemente sentido, mas raramente causa danos	Aproximadamente 49000 por ano
Ligeiro	4,0-4,9	Tremor notório de objetos no interior de habitações, ruídos de choque entre objetos. Dificilmente causa danos significativos.	Aproximadamente 6200 por ano
Moderado	5,0-5,9	Pode causar danos maiores em edifícios mal concebidos e que estiverem próximo da origem do tremor. Provoca danos ligeiros em edifícios bem construídos	800 por ano
Forte	6,0-6,9	Pode ser destruidor em zonas habitadas num raio de até 180 quilômetros da origem do tremor	120 por ano
Grande	7,0-7,9	Pode provocar danos maiores em regiões mais vastas	18 por ano
Importante	8,0-8,9	Pode causar danos sérios em regiões num raio de centenas de quilômetros	1 por ano
Excepcional	9,0 – 9,9	Devasta regiões num raio de milhares de quilômetros	1 a cada 20 anos
Extremo	> 10,0	Nunca registrado	Desconhecida

A partir desta tabela, começamos a entender como é possível haver terremotos no Brasil. Veja que os terremotos com magnitude inferior a 2,0 – que ocorrem em torno de 8000 vezes por dia! – não podem ser percebidos por nós. A mesma coisa vale para os terremotos com magnitude entre 2,0 e 2,9, que ocorrem em torno de 1000 vezes por dia. Aliás, será que está acontecendo algum terremoto aqui no Brasil neste momento?

Para responder a essa pergunta, acesse o site do observatório sismológico da UnB, que tem o registro detalhado e atualizado de todos os terremotos que ocorreram recentemente no Brasil: http://www.obsis.unb.br/

Saiba Mais

Como podemos calcular a magnitude de um terremoto? Para isso, utilizamos a fórmula a seguir:

$$M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$$

Nesta fórmula, M_S representa a magnitude local, A representa a amplitude máxima da onda registrada por um **sismógrafo** e f representa a frequência da onda.

Sismógrafo

Um sismógrafo é um aparelho que os cientistas usam para medir terremotos. O objetivo de um sismógrafo é gravar com exatidão o movimento do chão durante um terremoto. Ele contém uma agulha extremamente sensível a trepidações, que registra as vibrações do solo numa folha de papel contínua.

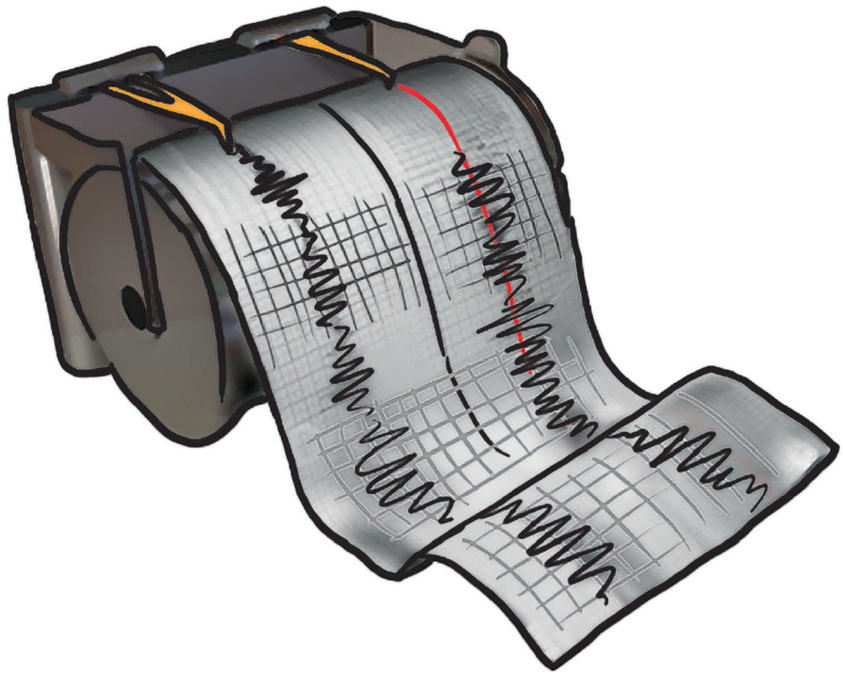


Figura 3: Um dos vários modelos de sismógrafos disponíveis no mercado.

Então, quando ligamos o sismógrafo, o rolo de papel começa a rodar e o papel começa a passar por baixo das agulhas. Quando a terra treme, ainda que de forma imperceptível, as agulhas do sismógrafo se movem, registrando no papel a imagem de uma onda. Essa onda corresponde às vibrações detectadas pelo aparelho. Para entendermos melhor o que é uma onda registrada pelo sismógrafo, vamos observar a figura seguinte.

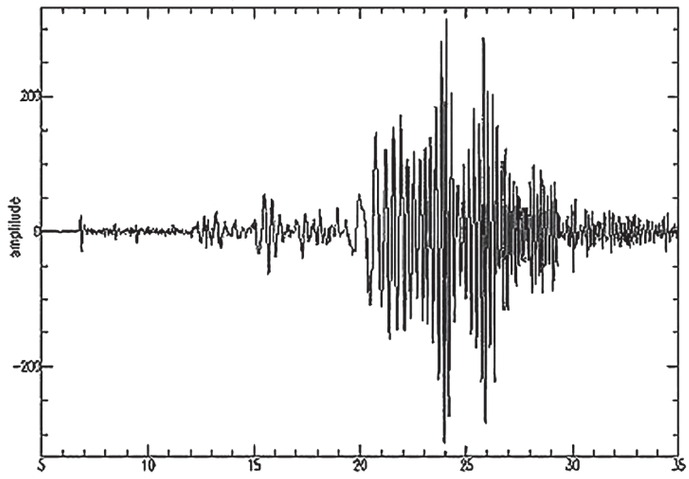


Figura 4: **A figura representa um sismograma, que é uma folha de papel que contém essas ondas.**

A variação dessas ondas denota a presença de um abalo sísmico. Quanto maior a amplitude dessas ondas, maior é a magnitude do terremoto. Amplitude, não custa lembrar, é a "altura" da onda, é a distância entre o eixo da onda e a crista. Quanto maior for a amplitude, maior será a quantidade de energia transportada – e mais forte o terremoto. Entenderam?

Muito bem! Agora já sabemos como obter os dados necessários para calcular a magnitude de um terremoto, não é mesmo? Mas, e aquele *log* que está sendo usado na fórmula? Como podemos trabalhar com ele?

Log é a abreviatura de Logaritmo. Veremos a seguir o que significa e como funcionam os logaritmos

Saiba Mais

A unidade utilizada para descrever a amplitude das ondas registradas pelo sismógrafo é o micrômetro (μm). Como o prefixo micro, neste caso, significa 10^{-6}, um micrômetro equivale a uma milionésima parte do metro (10^{-6} vezes um metro). A unidade utilizada para descrever as frequências – ou a quantidade de ocorrências do fenômeno por unidade de tempo – é o Hertz (Hz).

Os logaritmos

Nas aulas anteriores, estudamos as equações e funções exponenciais, aprendemos algumas de suas propriedades e efetuamos alguns cálculos. Como exemplo, nós temos:

$$2^3 = 8$$

Ou, em bom português, dois elevado à terceira potência vale oito.

No que diz respeito aos logaritmos, esta mesma expressão pode ser escrita assim:

$$\text{Log}_2 8 = 3$$

O que, em bom português, equivale a dizer que log na base dois de oito vale três.

A ideia é que estas expressões são equivalentes, ou seja

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

Isto significa dizer: se dois elevado à terceira potência vale oito, então log na base dois de oito vale três – e vice- versa.

Reparem que, nas duas sentenças acima os números mudam de lugar e, na sentença com o logaritmo, a ordem deles parece um pouco estranha. Não se preocupem, à primeira vista é estranho mesmo – mas já já vocês se acostumam. Antes de continuarmos a falar sobre essa expressão, vamos colocar mais alguns exemplos, para vocês se acostumarem:

$$5^2 = 25 \Leftrightarrow \log_5 25 = 2$$

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \log_3 27 = 3$$

$$10^4 = 10.000 \Leftrightarrow \log_{10} 10.000 = 4$$

E aí? Será que conseguimos perceber alguma coisa nessas correspondências? Está fácil perceber como os números ficam dispostos quando trabalhamos com logaritmo?

Você observou que o resultado do logaritmo é exatamente o expoente utilizado na igualdade da esquerda? Veja que, no primeiro caso, 2 é o expoente da base 5, para que o resultado seja 25; assim, podemos dizer que 2 é o logaritmo de 25 na base 5.

No terceiro exemplo, temos que 10 elevado a 4 é igual a 10.000; assim, podemos dizer que 4 (que é o expoente) é o logaritmo de 10.000 na base 4. Entendeu?

Se ainda não ficou, vamos dar uma olhada na correspondência abaixo, que define Logaritmo.

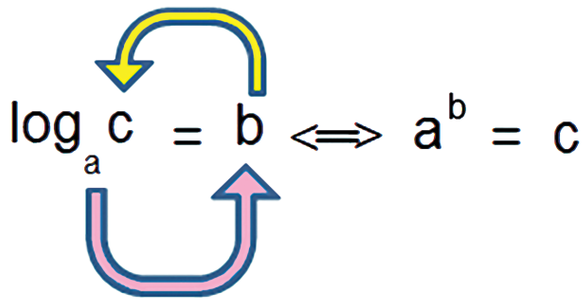
$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$$

Veja: b é o expoente da potência de base a e o resultado desta expressão é c; então b é chamado de logaritmo de c na base a.

Importante

Nesta expressão que está escrita à direita, a representa a base, b é o valor do logaritmo do número c, que é chamado de logaritmando ou antilogaritmo

Para deixar tudo o mais simples possível, vamos escrever essa sentença por extenso: se **a** elevado a **b** é igual a **c**, então log de **c** na base **a** é igual a **b** – e vice versa. Colocamos umas setas para ajudar, veja lá:

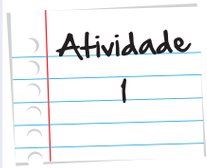


E, para simplificar ao máximo, escrevemos por extenso: se log de **c** na base **a** é igual a **b**, então **a** elevado a **b** é igual a **c** – e vice versa. Acompanhou as setas? Muito bem!

Todavia, é muito importante observarmos que existem algumas restrições para esses número, pois o valor de **c** necessariamente precisa ser real e positivo e o valor de **a** precisa ser real e positivo, porém diferente de 1. A seguir veremos estas restrições mais detalhadamente.

Agora vamos ver se conseguimos entender bem essa definição?

Como já dissemos em outras unidades, este material será utilizado por outros colegas. Assim, pedimos que você não escreva nele! Copie as questões da atividade abaixo para o seu caderno e, aí sim, tente resolvê-las. Vamos lá? Muito bem, a atividade consiste em completar as lacunas dos itens a, b, c e d com os números que estão faltando:



a. $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 \ldots = 2$

b. $3^4 = \ldots \Leftrightarrow \log_{\ldots} \ldots = \ldots$

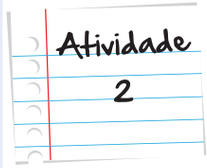
c. $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log\ldots \ldots = \ldots$

d. $0^3 = \ldots \Leftrightarrow \log_{\ldots} \ldots = \ldots$

Anote suas respostas em seu caderno

Excelente! Agora, podemos caminhar um pouco mais. Que tal tentarmos calcular o valor de um logaritmo?

Utilize a definição de logaritmo para calcular o valor das expressões abaixo conforme o modelo:



MODELO: $\log_3 9 = x$

(lembre-se: o logaritmo de um número é o valor do expoente que deve ser dado à base, para se obter o número que foi dado. No exemplo dado, temos que encontrar o expoente que deve ser dado à base 3, para se obter o número 9, vamos lá!)

Pela definição, $\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 9$

Além disso, sabemos que $9 = 3^2$

Assim, $3^x = 3^2$

Usando os conhecimentos trabalhados na unidade de função exponencial, concluímos que:

$x = 2$, ou seja, $\log_3 9 = 2$

Atividade 2

Pronto? Copie os itens abaixo para o seu caderno e boa sorte com a resolução.

a. $\log_{10} 100 =$

b. $\log_{6} 216 =$

c. $\log_{8} 1 =$

d. $\log_{13} 13 =$

e. $\log_{2} (1/2) =$

Anote suas respostas em seu caderno

Atenção! Atenção! Acaba de ocorrer um terremoto. Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 1000 μm e frequência de 0,1 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Com as atividades anteriores, já temos tudo o que precisamos para utilizar a fórmula, não é verdade?

Então vamos lá:

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (A.f)$

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (1000 \,.\, 0{,}1)$

$M_s = 3{,}30 + \log_{10} (100)$

Neste momento, já conseguimos calcular $\log_{10} (100)$. Segundo a definição, temos que $\log_{10} (100) = 2$, pois como sabemos, 2 é o expoente que devemos elevar a base 10, para obtermos 100) Com isso,

$M_s = 3{,}30 + 2$

$M_s = 5{,}30$

A partir das informações que constam da Tabela 1, este terremoto recebeu a classificação de Moderado.

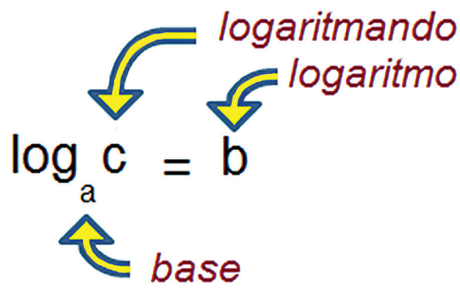
Muito bem! Conseguimos! Calculamos direitinho a magnitude do terremoto que acabou de ocorrer.

Propriedade dos logaritmos

Na seção anterior, vimos que existe uma equivalência entre os logaritmos e as potências. Para falar a verdade, a logaritmação (logaritmo) é a operação inversa da potenciação (exponencial) Ou seja, a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Portanto, há muitas coisas em comum entre essas duas funções! Vamos investigá-las?

Na expressão $3^4 = 81$, o número 3 é chamado de base, o 4 de expoente e o 81 é a potência.

A expressão logarítmica equivalente a esta exponencial é $\log_3 81 = 4$. Nela, como já dissemos, o número 3 também é chamado de base, o 81 de logaritmando e o 4 de logaritmo. O esquema a seguir pode nos ajudar a entender isso.

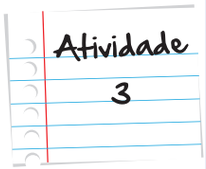


Agora, uma propriedade importantíssima: na definição de logaritmo, a base deve sempre ser um número real, positivo e diferente de 1. Em consequência disso, o logaritmando será sempre um número real e positivo. No que diz respeito às bases – todas positivas e diferentes de 1 – a base 10 é a mais frequente. Assim, é comum representarmos um logaritmo decimal sem explicitarmos a base. Noutras palavras, representamos $\log_{10} x$ (log na base dez de x) como sendo logx (log de x).

Essa restrição quanto aos valores da base e do logaritmando é muito importante. Assim, aproveitamos este boxe para repeti-la: na definição de logaritmo, a base deve sempre ser um número real positivo e diferente de 1. Em consequência disso, o logaritmando será sempre um número real positivo.

Importante

Vimos na unidade anterior que as potências possuem propriedades. Será que os logaritmos também possuem? Vejamos:



Copie as questões abaixo para o seu caderno e resolva-as:

a. $\log_2 8 =$

b. $\log_2 4 =$

c. $\log_2 8 + \log_2 4 =$

d. $\log_2 (8 . 4) =$

e. $\log_3 9 =$

f. $\log_2 81 =$

g. $\log_3 9 + \log_3 81 ==$

h. $\log_3 (9 . 81) =$

i. $\log_{10} 1.000 =$

j. $\log_{10} 10.000 =$

k. $\log_{10} 1.000 + \log_{10} 10.000 =$

l. $\log_{10} (1.000 . 10.000) =$

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Agora, uma pergunta. Vocês repararam que o resultado do item d é igual ao resultado do item c (cinco) – que, por sua vez, é a soma dos valores dos itens a e b (três mais dois)? Repararam que a mesma coisa acontece tanto para os itens e, f, g e h quanto para os itens i, j, k e l?

A partir dessa observação, vamos fazer a seguinte generalização:

Se $\log_a b = c$ e $\log_a d = e$, podemos concluir que $\log_a (b . d) = \log_a b + \log_a d = c + e$. Em outras palavras, o logaritmo de um produto $\log_a (b . d)$ é igual à soma dos logaritmos de cada um dos fatores $\log_a b + \log_a d$)

Isso nos faz lembrar a propriedade das potências que tratava do produto de duas potências de mesma base. Nesta propriedade, vimos que, por exemplo:

$$2^3 = 8 \text{ e } 2^2 = 4 \text{ Além disso, } 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32\ 8 \cdot 4$$

Da mesma forma, as potências têm a propriedade que trata da divisão de potências de mesma base. Porém, neste caso, devemos diminuir os expoentes. Pensando desta forma, os logaritmos possuem uma propriedade similar. O logaritmo de um quociente é igual a diferença dos logaritmos de cada fator. Sendo um pouco mais formais, teremos:

Se $\log_a b = c$ e $\log_a d = e$, podemos concluir que: $\log_a\left(\frac{b}{d}\right) = \log_a b - \log_a d = c - e$

Vejamos isso acontecer:

$\text{Log}_3\ 243 = 5$ e $\log_3\ 27 = 3$

Então, . $\log_3\left(\frac{243}{27}\right) = \log_3 243 - \log_3 27 = 5 - 3 = 2$

Agora, $\left(\frac{243}{27}\right) = 9$. Portanto, $\log_3\ 9 = 2$.

Outro terremoto ! ? ! ? ! Impressionante ! ! ! Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 50.000 μm e frequência de 0,2 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilize a fórmula de magnitude a seguir.$M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$

Será que você consegue, a partir da tabela 1, descobrir a classificação deste terremoto? Ufa! Essa foi por pouco... Vocês viram a magnitude deste terremoto? Esse não veio para brincadeira, não é?!

Bom, vamos a uma pequena aplicação das propriedades que acabamos de ver. Considerando que $\log_{10} 2 \cong 0{,}3$ e que $\log_{10} 3 \cong 0{,}4$ (esses valores são aproximados), como podemos calcular o valor de $\log_{10} 6$?

Pelo que aprendemos com as propriedades:

$\log_{10} 6 = \log_{10}(2.3) = \log_{10} 2 = \log_{10} 3$

Assim, $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$

Portanto, $\log_{10} 6 = 0{,}7$

Bem fácil, não é mesmo?

Importante

Nos tempos em que não havia internet, celular e as calculadoras científicas eram muito caras – acredite, esse tempo realmente existiu -, era possível calcular os valores dos logaritmos decimais (base 10) usando uma tábua de logaritmos. Quer saber um pouco mais a respeito? Acesse o site http://www.matematicadidatica.com.br/TabuaLogaritmosDecimais.aspx

Agora, que tal exercitarmos um pouquinho?

Atividade 4

Considere que $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e que $\log_{10} 3 \cong 0{,}17$. Determine o valor dos logaritmos abaixo. Não se esqueça de utilizar a definição e as propriedades de logaritmos que aprendemos – e também de resolvê-los em seu caderno. Dessa maneira, os colegas que estudarem esta unidade depois de você poderão contar com um material novinho em folha.

a) $\log_{10} 4 =$

b) $\log_{10} 9 =$

c) $\log_{10} 12 =$

d) $\log_{10} 20 =$

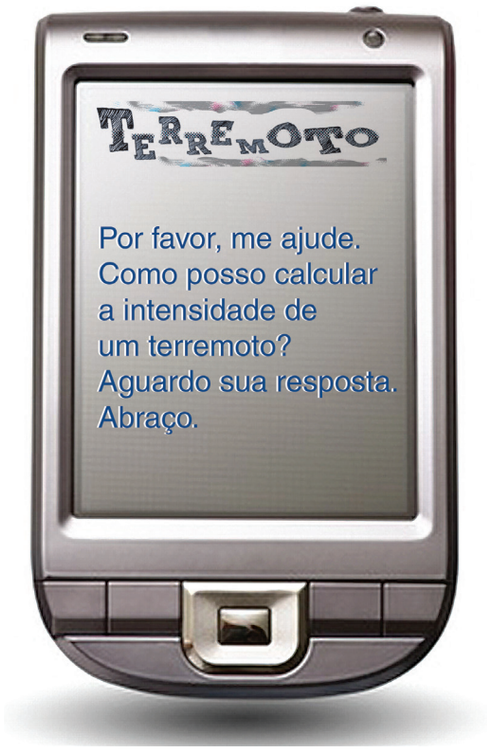
e) $\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right) =$

f) $\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right) =$

g) $\log_{10} 5 =$

h) $\log_{10} \left(\frac{10}{3}\right) =$

Anote suas respostas em seu caderno



Seu celular acabou de receber uma mensagem ! ! ! É um amigo telefonando para avisar que onde ele mora acabou de ocorrer um terremoto. Ele precisa calcular a intensidade deste terremoto e não sabe como. Sabedor da sua habilidade com os logaritmos, manda um torpedo para pedir uma ajuda. Os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 4000 μm e frequência de 0,1 Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilizando a já conhecida fórmula de magnitude, $M_{10} - 3{,}30 + \log_{10}$ (A.f), os valores dos logaritmos da atividade anterior e os valores da tabela 1, perguntamos: qual a classificação deste terremoto?

Ei, nada mal! Nossa fama está circulando! Estamos quase virando sismólogos. O próximo, tenho a certeza de que vai ser moleza!

Agora, de volta à nossa discussão.

Existe uma propriedade dos logaritmos que deriva da primeira propriedade que estudamos. Vejam só:

Sabemos que $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Sendo assim,

$$\log_a 2^3 - \log_a (2 \cdot 2 \cdot 2)$$

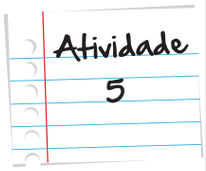
Pela primeira propriedade que aprendemos, temos que:

$$\log_a 2^3 - \log_a (2 \cdot 2 \cdot 2) = \log_a 2 + \log_a 2 + \log_a 2 = 3 \cdot \log_a 2$$

E, de uma forma geral, teremos que

$$\log_c 2^b = b \cdot \log_c a$$

Assim, podemos fazer mais uma atividade para reforçarmos este conhecimento.



Maria está discutindo com João acerca de um cálculo envolvendo logaritmos. Ambos calcularam o valor de $\log_3 9^5$. Maria garante que o resultado é 32 e João insiste que o valor correto é 10. E aí, qual dos dois tem razão? Será que nenhum deles está correto? Dê sua opinião mostrando seus cálculos.

Anote suas respostas em seu caderno

Atenção! Atenção! Você acaba de receber uma mensagem eletrônica de um técnico da Defesa Civil de uma região distante. De acordo com a mensagem, os sismógrafos marcaram ondas com amplitude de 10^4 μm e frequência de 10^{-1} Hz. Temos que calcular a magnitude deste terremoto. Utilize a mesma fórmula de magnitude das vezes anteriores – $M_s = 3{,}30 + \log_{10}(A.f)$ – e os valores dos logaritmos da atividade 3. Qual a classificação deste terremoto (ver tabela 1)?

Passou o susto, pessoal. Podemos retornar aos trabalhos.

Agora, vejamos esta situação em que minha amiga, Marina, me colocou ontem e que até agora não consegui resolver.

Marina lançou o seguinte desafio: com uma calculadora capaz apenas de calcular logaritmos na base 10, determine o valor de $\log_2 5$.

Parece um desafio simples, mas me intrigou muito, pois Marina queria que calculasse o logaritmo de base 2 e, naquele momento, só dispunha de uma calculadora capaz de me fornecer apenas logaritmos decimais (base 10). E agora? Será que é possível resolver esse desafio? Marina me garantiu que sim!

Bom, só nos resta discutir um pouco sobre as bases dos logaritmos. É a única forma que temos de resolver o desafio.

Vejamos:

Como já vimos no início desta unidade,

$\log_2 5 - x \Leftrightarrow 2^x - 5$

Além disso, a calculadora consegue nos dar a informação de que $\log_{10} 2 \cong 0{,}3 \Leftrightarrow 10^{0{,}3} \cong 2$

Portanto,

$2^x \cong (10^{0{,}3})^x$

$2^x \cong 10^{0{,}3x}$

Assim,

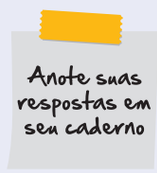
$10^{0{,}3x} - 5$

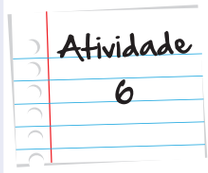
Calculando o logaritmo decimal em ambos os membros da equação, temos:

$\log_{10} 10^{0{,}3x} - \log_{10} 5$

Agora, é com vocês! A continuação dos cálculos será responsabilidade de vocês nesta próxima atividade.

Conclua os cálculos para descobrir o valor de x e resolver o desafio de Marina.

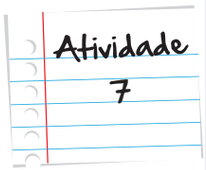




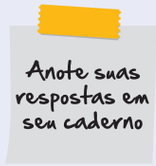
Muito bem! O desafio foi feito.

De uma forma geral, os cálculos que fizemos nesta atividade tratam da propriedade conhecida como mudança de base, e podem ser generalizados da seguinte forma:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$



Sabendo que $\log_{10} 2 = 0{,}30$, calcule o $\log_2 10$



E, já que estamos falando em bases, relembramos as restrições que vimos anteriormente para as bases e os logaritmandos: a base deve sempre ser um número real, positivo e diferente de 1 e o logaritmando deve ser sempre um número real e positivo.

Estudamos até aqui as seguintes propriedades dos logaritmos

Se $\log_a b = c$ e $\log_a d = e$, podemos concluir que:

- $\log_a (b \cdot d) = \log_a b + \log_a d = c + e$
- $\log_a \left(\frac{b}{a}\right) = \log_a b - \log_a d = c - e$

Além disso,

- $\log_c a^b = b \cdot \log_c a$
- $\log_b a = \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Outras aplicações dos logaritmos

Vocês repararam que utilizamos o logaritmo como ferramenta para calcularmos a magnitude de terremotos. Mas será que é só para isso que serve um logaritmo? Certamente não! Sua aplicação prática se espalha por diversas áreas da atividade humana, chegando inclusive à sua saúde – quer ver?

O site do programa Bem Estar da Rede Globo exibe uma reportagem muito interessante sobre a saúde dos ouvidos, em que afirmam que a pressão alta e o colesterol alto podem acelerar o processo de perda de audição devido à diminuição da circulação sanguínea no único vaso do ouvido. Afirmam ainda que ouvir música alta com fones de ouvido também pode danificar sua audição

Saiba Mais

Vocês tomam cuidado com os ouvidos de vocês? Comparem o que vocês fazem regularmente com a reportagem do programa Bem Estar, disponível na íntegra no endereço http://g1.globo.com/bemestar/noticia/2012/06/escutar-som-muito-alto-pode-causar-perda-irreversivel-da-audicao.html

O que ouvimos e definimos como som são apenas ondas sonoras que se formam devido à pequenas vibrações de partículas do meio. Assim, quando uma pedra cai no chão, há uma vibração de moléculas de ar em volta da pedra que se propaga pelo ar. Essa vibração faz uma pressão sobre nosso sistema auditivo, que é convertida em impulso elétrico e enviada ao cérebro, que a interpreta como som.

A menor intensidade sonora – ou a menor pressão – que nossos ouvidos são capazes de captar é $1_a = 10^{-12}\ W/m^2$ (watt por metro quadrado). Por outro lado, se essa pressão for demasiadamente grande – ou seja, se o som for muito alto – poderá machucar nosso sistema auditivo.

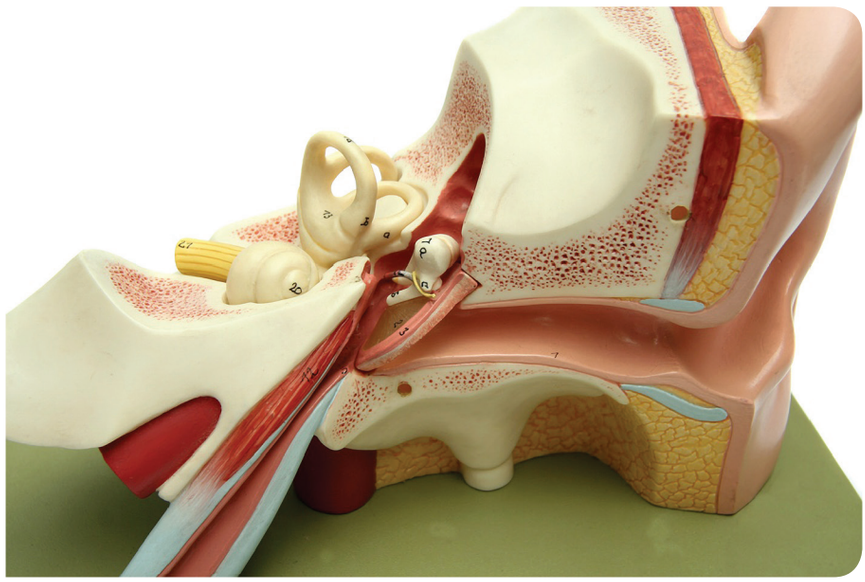


Figura 5: Um modelo das partes interna (no centro da imagem) e externa (à direita da imagem) do nosso delicado sistema auditivo.

O nível sonoro pode ser calculado através de uma expressão, de maneira análoga à que fizemos no cálculo da magnitude de um terremoto. O mais interessante de tudo é que esta fórmula também utiliza o logaritmo para os cálculos. A expressão está logo a seguir:

$$Ns = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

O nível sonoro é medido em decibéis (dB).

Importante

Você gostaria de saber mais sobre a escala decibel? Acesse o site http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/meio-ambiente-poluicao-sonora/decibeis.php e descubra essas e muitas outras informações importantes sobre o som, além de mais dicas sobre a saúde dos seus ouvidos.

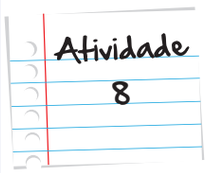
Vamos ver como isso funciona?

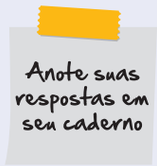
Pensem em algo muito barulhento... que tal uma britadeira?

Figura 6: Uma britadeira é usada para quebrar concreto, asfalto e outras tantas coisas bem duras. O barulho produzido por ela é altíssimo e sempre incomoda toda a vizinhança. Você já foi acordado pelo ruído de alguma?

Imaginemos que a britadeira produza um som com intensidade I – 1000 W/m^2. Qual o nível sonoro produzido por esta máquina?

Encontre o nível sonoro produzido pela britadeira utilizando os dados disponibilizados anteriormente.





Muito bom, pessoal ! ! ! Vamos aprender em seguida como os logaritmos podem nos auxiliar em equações exponenciais que, a princípio, parecem muito difíceis ou sem solução.

Seção 2
O logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais

Algumas equações exponenciais são facilmente resolvidas através da comparação entre as bases. Um exemplo é a equação

$$2^x - 16$$

Como $16 = 2^4$, temos que: $2^x - 2^4$. Então, comparando-se as bases, concluímos que $x = 4$

Contudo, algumas equações tornam essa solução mais complicada. É o caso da equação:

$$2^x = 5$$

Aqui, não temos como comparar as bases das potências, pois são diferentes. E agora, o que faremos?

Para resolver essa situação, vamos utilizar a operação inversa, o logaritmo. Afinal, não podemos nos esquecer de que o logaritmo, por ser uma operação inversa, será capaz de desfazer a exponencial. Vejamos:

Inicialmente, calculamos o logaritmo em ambos os membros da equação:

$$\log_{10} 2^x - \log_{10} 5$$

Escolhemos a base 10, pois os valores podem ser consultados na tábua de logaritmos.

Aplicando a terceira propriedade, a propriedade das potências, temos que:

x . $\log_{10} 2 - \log_{10} 5$ Encontre o nível sonoro produzido pela britadeira utilizando os dados disponibilizados anteriormente.

Em seguida, identificamos na tábua de logaritmo os valores de $\log_{10} 2$ e $\log_{10} 5$.

$\log_{10} 2 \cong 0{,}301$

$\log_{10} 5 \cong 0{,}699$

Substituindo os valores na equação, temos:

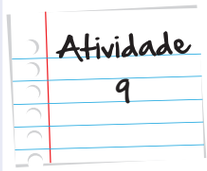
$$x \,.\, 0{,}301 - 0{,}699$$

$$x - \frac{0{,}699}{0{,}301} \cong 2{,}322$$

Atenção! Atenção! Acaba de ocorrer outro terremoto. Segundo a reportagem exibida na televisão, os sismógrafos apresentaram um pequeno defeito. Não foi possível identificar a amplitude das ondas, mas a frequência foi de 0,5 Hz. Os jornais estão anunciando que o terremoto teve magnitude 7 na escala Richter. Como faremos para calcular a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos? Utilize a nossa fórmula de magnitude – $M_s = 3{,}30 + \log_{10} (A.f)$ e os valores dos logaritmos da atividade 3. Qual a classificação deste terremoto (ver tabela 1)?

Já ocorreram muitos terremotos nesta aula... As placas tectônicas estão bem agitadas ultimamente, não é?! Mas, não se preocupem. Parece que, de agora em diante, elas devem acalmar um pouquinho – e, com isso, nós também.

Acalmados todos, finalizamos a aula propondo que você resolva, usando logaritmos, uma situação muito interessante de que tratamos na aula de exponencial. Essa situação diz respeito a questões da Economia. Ei-la.



O cálculo do montante originado por um investimento a juros compostos é realizado através da fórmula:

$M = C . (1 + i)$

Um capital (C) de R$ 1.000,00 é aplicado em regime de juros compostos a uma taxa mensal (i) de 2%. Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?

(Para facilitar)

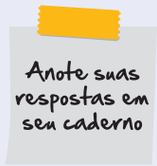
Montante = dobro do capital = R$ 2.000,00

Capital = R$ 1.000,00

Taxa (i) = 2% = 0,02

$\log_{10} 2 – 0,30103$

$\log_{10} 1,02 – 0,0086$



Resumo

- A função exponencial possui como inversa a função logarítmica;
- Os logaritmos possuem restrições nos valores das bases e do logaritmando: as bases devem ser reais, positivas e diferentes de 1 e os logaritmandos devem ser reais e positivos;
- O logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números: $\log_a b . d = \log_a b + \log_a d$
- O logaritmo do quociente de dois números é igual à diferença do logaritmos desses números: $\log_a \left(\frac{b}{a}\right)$

$= \log_a b - \log_a d$

- O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente dessa potência pelo valor do logaritmo da base: $\log_c a^b = b \cdot \log_c a$
- Podemos modificar as bases dos logaritmos de acordo com a propriedade $\log_b a = \left(\frac{\log_c a}{\log_c b} \right)$.
- Os logaritmos podem ser utilizados como ferramenta na resolução de equações exponenciais onde não é possível igualar as bases.

Veja ainda

Nesta unidade, falamos sobre o uso dos logaritmos nos cálculos das magnitudes dos terremotos. Para isso, citamos um aparelho chamado sismógrafo. Este aparelho consiste em registrar as ondas geradas pelos abalos sísmicos. Vocês sabiam que é possível fazer um sismógrafo em casa? Acesse este site "Feira de Ciências" e veja o passo-a-passo de como construir um aparelho desses. Sem dúvida, vai ser muito interessante.

http://www.feiradeciencias.com.br/sala19/texto41.asp

Referências

Livros

- ZAGO, Glaciete Jardim, Walter Antonio Sciani. *Exponencial e Logaritmos*. 2º edição. São Paulo: Editora Érika. Estude e Use, 1996.95p.
- TERREMOTOS no brasil. Disponivel em:

Sites

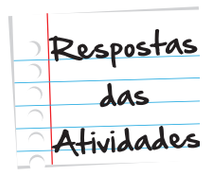
- http://cae.freeservers.com/geografia_tremores_no_Br.html. Acesso em: 05 jul. 2012.

Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=977158

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=753471

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=565431



Atividade 1

a. $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$

b. $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

c. $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

d. $10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$

Atividade 2

a. $\log_{10} 100 = 2$

b. $\log_6 216 = 3$

c. $\log_1 1 = 0$

d. $\log_{13} 13 = 3$

e. $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$

Atividade 3

a. $\log_2 8 = 3$

b. $\log_2 4 = 2$

c. $\log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$

d. $\log_2 8 \,.\, 4 = \log_2 32 = 5$

e. $\log_3 9 = 2$

f. $\log_3 81 = 4$

g. $\log_3 9 + \log_3 81 = 2 + 4 = 6$

h. $\log_3 9 \,.\, 81 = \log_3 729 = 6$

i. $\log_{10} 1.000 = 3$

j. $\log_{10} 10.000 = 4$

k. $\log_{10} 1.000 + \log_{10} 10.000 = 3 + 4 = 7$

l. $\log_{10} 1.000 \,.\, 10.000 = \log_{10} 10.000.000 = 7$

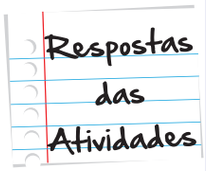
TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 50.000 \,.\, 0{,}2$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 10.000$

$Ms = 3{,}30 + 4 = 7{,}30$

Este terremoto é classificado como GRANDE.



Atividade 4

a. $\log_{10} 4 = \log_{10} 2 \,.\, 2 = \log_{10} 2 + \log_{10} 2 = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$

b. $\log_{10} 9 = \log_{10} 3 \,.\, 3 = \log_{10} 3 + \log_{10} 3 = 0{,}47 + 0{,}47 = 0{,}94$

c. $\log_{10} 12 = \log_{10} 4 \,.\, 3 = \log_{10} 4 + \log_{10} 3 = 0{,}6 + 0{,}47 = 1{,}07$

d. $\log_{10} 20 = \log_{10} 2 \,.\, 10 = \log_{10} 2 + \log_{10} 10 = 0{,}3 + 1 = 1{,}3$

e. $\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = 0{,}3 + 0{,}47 = 0{,}17$

f. $\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right) = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0{,}47 - 0{,}3 = 0{,}17$

g. $\log_{10} 5 = \log_{10} \left(\frac{10}{2}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

h. $\log_{10} \left(\frac{10}{3}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 3 = 1 - 0{,}47 = 0{,}53$

TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4.000 \,.\, 0{,}1$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 400$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4 \,.\, 100$

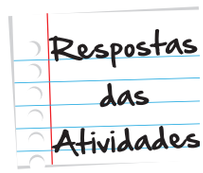
$Ms = 3{,}30 + \log_{10} 4 + \log_{10} 100$

$Ms = 3{,}30 + 0{,}6 + 2 = 5{,}90$

Este terremoto é classificado como MODERADO.

Atividade 5

João tem a razão, uma vez que $\log_3 9^5 = 5 \,.\, \log_3 9 = 5 \,.\, 2 = 1$. O erro de Maria foi justamente confundir $\log_3 9^5$ com $(\log_3 9)^5$. Perceba a diferença entre os dois: o que se pediu – e o que João fez – foi o cálculo do logaritmo na base 3 de um determinado número. Este número era o número 9 à 5 potência. Já Maria entendeu, de forma equivocada, que o que se pedia era o cálculo de um determinado número elevado à quinta potência. Esse número seria o log na base 3 de 9, que é igual a 2. Esse 2, elevado à quinta potência, seria realmente o 32 encontrado. Atenção, portanto.



TERREMOTO

$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(10^4 \,.\, 10^{-1})$

$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(10^3)$

$Ms = 3{,}30 + 3\log_{10} 10$

$Ms = 3{,}30 + 3 \,.\, 1$

$Ms = 3{,}30 + 3 = 6{,}30$

Este terremoto é classificado como FORTE.

Atividade 6

$\log_{10} 10^{0{,}3x} = \log_{10} 5$

$0{,}3x \,.\, \log_{10} 10 = \log_{10} 5$

$0{,}3x \,.\, 1 = \log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)$

$0{,}3x \,.\, \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$0{,}3x = 1 - 0{,}3$

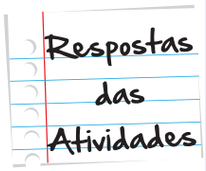
$0{,}3x = 0{,}7$

$x = \frac{0{,}7}{0{,}3} = \frac{7}{3}$

Atividade 7

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

$\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{\frac{1}{3}}{10} = \frac{10}{3}$



Atividade 8

$100 - 10^3$

Usamos a fórmula de Nível Sonoro abaixo:

$$Ns = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$Ns = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{10^3}{10^{-12}}\right)$$

$$Ns = 10 \cdot \log_{10} 10^{15}$$

$$Ns = 10 \cdot 15 \cdot \log_{10} 10$$

$$Ns = 10 \cdot 15 \cdot 1$$

$$\boldsymbol{Ns = 150\ dB}$$

TERREMOTO

$$Ms = 3{,}30 + \log_{10}(A \cdot f)$$

$$7 = 3{,}30 + \log_{10}(A \cdot 0{,}5)$$

$$7 = 3{,}30 + \log_{10} A + \log_{10} 0{,}5$$

$$3{,}70 = \log_{10} A + \log_{10}\frac{5}{10}$$

$$3{,}70 = \log_{10} A + \log_{10} 5 - \log_{10} 10$$

$$3{,}70 = \log_{10} A + 0{,}7 - 1$$

$$3{,}70 - 0{,}7 + 1 = \log_{10} A$$

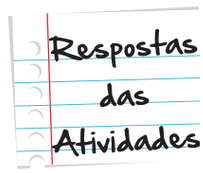
$$\log_{10} A = 4$$

$$A = 10^4$$

$$A = 10.000\mu m$$

Este terremoto é classificado como GRANDE.

Atividade 9



Montante = dobro do capital = R$ 2.000,00

Capital = R$ 1.000,00

Taxa (i) = 2% = 0,02

$\log_{10} 2 = 0{,}30103$

$\log_{10} 1{,}02 = 0{,}0086$

$2.000 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02)^n$

$$\frac{2.000}{1.000} = 1{,}02^n$$

$1{,}02^n = 2$

Calculando o logaritmo em ambos os membros da equação:

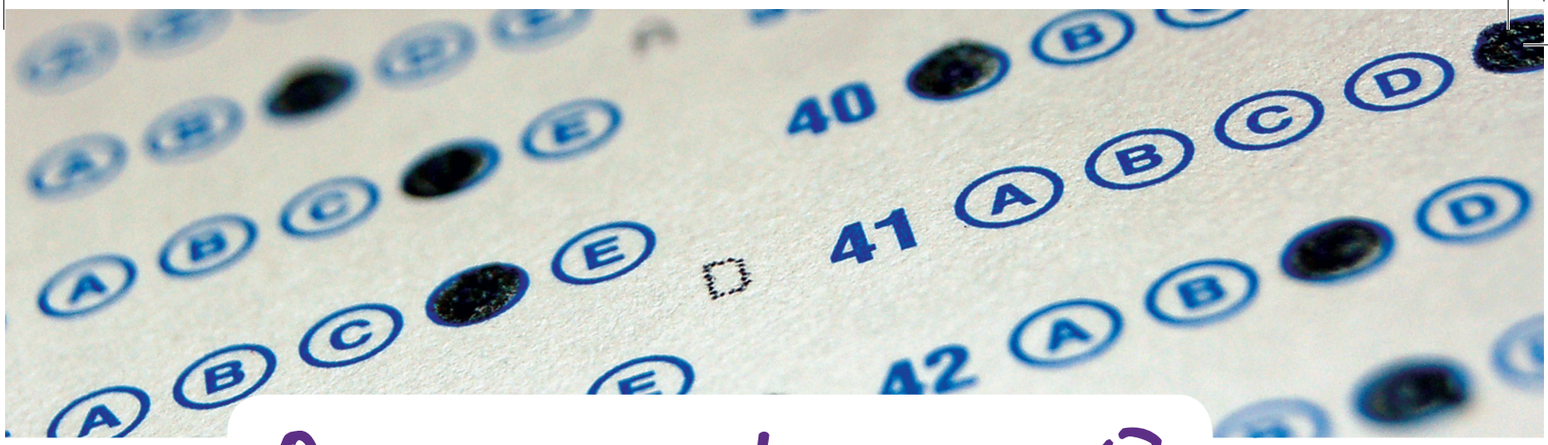
$\log_{10} 1{,}02^n = \log_{10} 2$

$n \cdot \log_{10} 1{,}02 = \log_{10} 2$

$n \cdot 0{,}0086 = 0{,}30103$

$$n = \frac{0{,}30103}{0{,}0086}$$

$n \cong 35$ meses.



O que perguntam por aí?

Questão 1 FGV (2008)

Adotando log2 = 0,301, a melhor aproximação de $\log_5 10$ representada por uma fração irredutível de denominador 7 é:

a. 8/7

b. 9/7

c. 10/7

d. 11/7

e. 12/7

Resposta: Letra C.

Comentário:

$$\log_5 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5} = \frac{1}{\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{1}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} = \frac{1}{1-0,301} = \frac{1}{0,699}$$

Não se esqueçam de que o problema procura por uma aproximação. Portanto,

$$\frac{1}{0,699} \cong \frac{1}{0,7}$$

Logo,

$$\frac{1}{0,7} = \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7}$$

Questão 2 (IBMEC – 2007)

Quando aumentamos em 60% um número real positivo b, seu logaritmo decimal aumenta em 20%. Considerando log2 = 0,30, podemos concluir que

a. b = 1
b. b = 2
c. b = 4
d. b = 8
e. b = 10

Resposta: Letra E.

Comentário:

Podemos representar o aumento de 60% de um número b assim:

$b + 0{,}6b - 1{,}6b$

Ao mesmo tempo, de acordo com o problema, temos que o logaritmo decimal de b aumenta em 20%. Isto é:

$\log_{10} 1{,}6b = 1{,}2 \cdot \log_{10} b$ (Lembrem-se de que um aumento de 20% é o mesmo que 100% + 20% = 1 + 0,2 = 1,2)

$\log_{10} 1{,}6 + \log_{10} b = 1{,}2 \cdot \log_{10} b$

$\log_{10} 1{,}6 = 1{,}2 \cdot \log_{10} b - \log_{10} b$

$\log_{10} 1{,}6 = 0{,}2 \cdot \log_{10} b$

$\log_{10} \left(\frac{16}{10}\right) = 0{,}2 \cdot \log_{10} b$

$\log_{10} - \log_{10} 10 = 0{,}2 \cdot \log_{10} b$

$\log_{10} 2^4 - \log_{10} 10 = 0{,}2 \cdot \log_{10} b$

$4 \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = 0{,}2 \cdot \log_{10} b$

$4 \cdot 0{,}3 - 10 = 0{,}2 \cdot \log_{10} b$

$1{,}2 - 1 = 0{,}2 \cdot \log_{10} b$

$\log_{10} b = 1$

Pela definição de logaritmo:

$b = 10$

Geometria Espacial: prismas e cilindros

Para início de conversa...

Figura 1: De cima para baixo e da esquerda para a direita: caixa de presente, comida japonesa, rolo de feno, dados, prédio triangular em Berlim, Alemanha e um rolo de filme.

Cilindros e prismas, esses serão os nossos companheiros dessa unidade. A esta altura, você já deve ter imaginado que muitos objetos do dia a dia podem ser considerados exemplos de prismas e cilindros – dê uma olhada nos que trouxemos nesta primeira imagem! Mas além de serem importantes para o dia a dia, essas formas geométricas são muito importantes também na Física.

Em 1974, Frank Tipler, da Universidade Tulane, investigando a possibilidade de viagem no tempo, calculou que um cilindro maciço, infinitamente comprido, girando em torno do seu eixo em velocidades próximas à da luz, permitiria visões do passado, mais uma vez porque a luz seria puxada em torno do cilindro, formando um círculo.

Já em 2002, a revista Physics World realizou uma enquete junto aos físicos, pedindo que elegessem os 10 mais belos experimentos da Física. O quarto experimento mais votado foi justamente o da decomposição da luz solar, realizada por Newton, no século XVII. A experiência é extraordinariamente simples, necessitando apenas de luz solar e de um prisma de vidro. Como ilustra a figura a seguir. Ao passar por um prisma, a luz solar, que é branca, se decompõe nas cores do arco-íris.

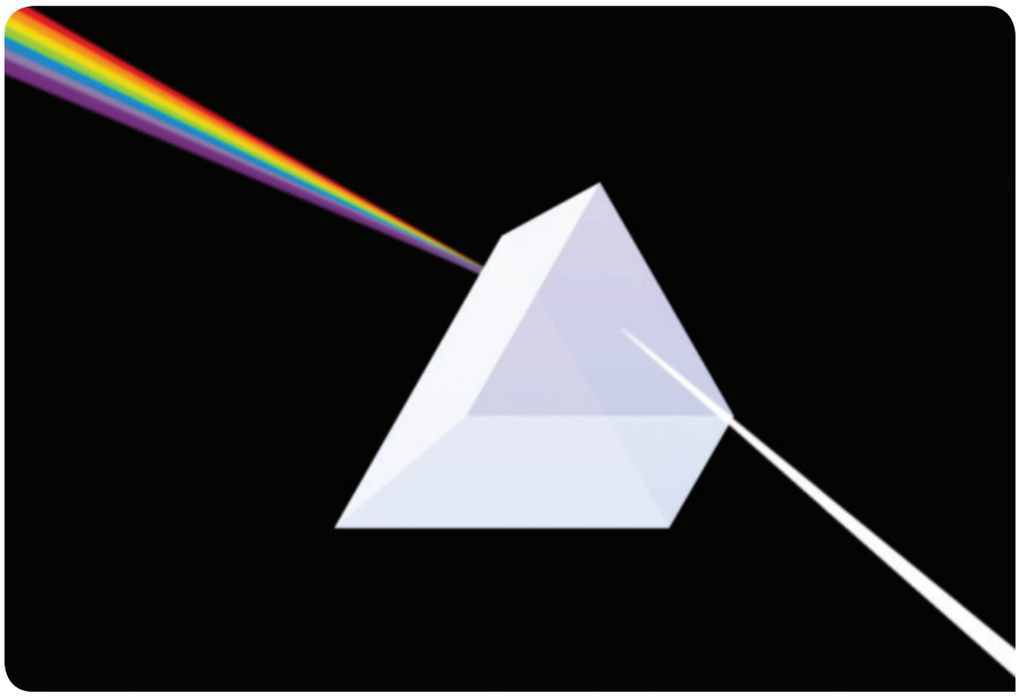


Figura 2: Decomposição da luz branca por um prisma de vidro.

No caso do arco-íris, são as gotículas de água que fazem o papel do prisma. Newton demonstrou que combinando adequadamente dois ou mais prismas, é possível decompor e recompor a luz branca. A separação é possível porque cada cor tem um índice de refração diferente. Isto é, apresenta um desvio diferente quando passa de um meio (ar) para outro (vidro).

Para conhecer melhor as investigações teóricas sobre viagem no tempo, acesso o link

http://www2.uol.com.br/sciam/reportagens/como_construir_uma_maquina_do_tempo_5.html

Já para conhecer melhor o experimento de Newton sobre a decomposição da luz, acesse o link http://www.if.ufrgs.br/historia/newton.html

Então, vamos conhecer melhor cilindros e prismas? Mãos a obra!

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e diferenciar prismas e seus elementos
- Identificar e diferenciar cilindros e seus elementos
- Calcular diagonal do prisma e da face de um prisma.
- Conhecer o princípio de Cavalieri
- Calcular a área lateral, total e o volume de um prisma.
- Calcular a área lateral, total e o volume de um cilindro.

Seção 1
Os elementos

Todos os objetos do dia a dia que apresentamos na Figura 1 são exemplos de prismas ou de cilindros. Assim, começamos nossa aula já com uma atividade, em que convidamos você a tentar apontar as diferenças e semelhanças entre eles – o que é importantíssimo para a identificação de ambos. Para ajudar um pouco, damos uma dica: os dados, a caixa de presente e o edifício são exemplos de prismas. Já os rolos de filme, de feno e de comida japonesa, são exemplos de cilindro. Vamos à atividade?

Veja os objetos representados na Figura 1: os dados, a caixa de presente e o edifício são exemplos de prismas. Os rolos de filme, de feno e de comida japonesa, são exemplos de cilindro. Agora observe atentamente estes objetos e procure identificar as principais semelhanças e diferenças entre cilindros e prismas.

Anote suas respostas em seu caderno

No início da unidade, vimos a experiência de Newton sobre decomposição da luz utilizando um prisma. Agora que já temos uma boa noção das principais características dos prismas, é hora de formalizarmos mais um pouco a nomenclatura dos elementos do prisma, sempre com o intuito de facilitar a identificação destes elementos e a comunicação entre nós.

É importante relembrar que os prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais). Dele, podemos destacar alguns elementos tais como as arestas e a altura. Os prismas podem ser retos ou oblíquos. Quando ele for reto, a altura será igual à aresta lateral. Veja na figura seguinte o exemplo de um prisma reto:

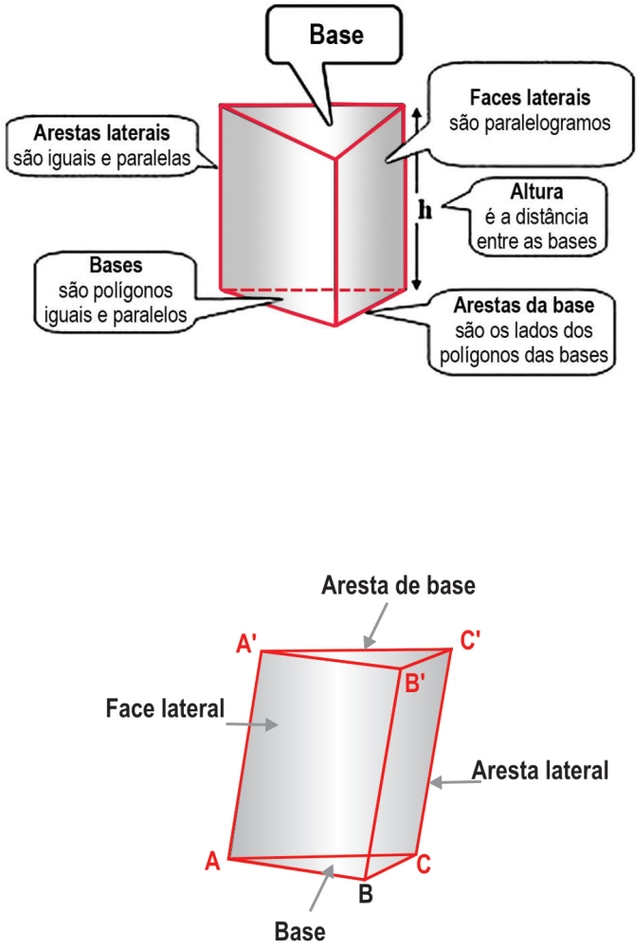
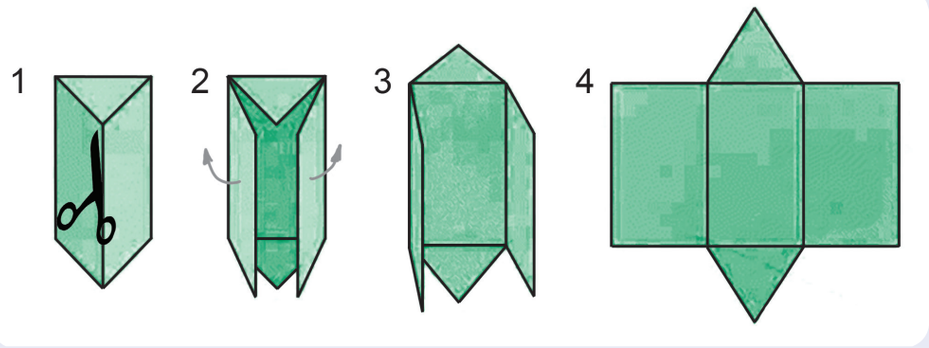


Figura 3: Prismas reto e obliquo de base triangular com principais elementos destacados.

Atividade 2

Podemos, mais informalmente, dizer que a planificação de um sólido geométrico consistiria em "passar uma tesoura" por algumas de suas arestas de maneira a produzir uma figura plana. Essa figura plana, uma vez remontada, daria origem novamente ao sólido. Vejam na figura:



Nessa planificação que acabamos de mostrar, identifique as bases, as faces laterais e as arestas do prisma planificado – que, cumpre observar, é similar ao usado no experimento de refração da luz.

Anote suas respostas em seu caderno

Na primeira figura desta aula, vimos três exemplos de objetos que podem ser considerados prismas: o edifício triangular de Berlim, de base triangular, um dado e uma caixa de presente, ambos de base quadrangular. É importante dizer aqui que não há restrições quanto ao número de lados do polígono que serve de base ao prisma: assim, poderemos ter prismas pentagonais (cujas bases são pentágonos), hexagonais (cujas bases são hexágonos), dodecagonais, e assim por diante. É importante também destacar que, entre os prismas quadrangulares, os prismas retos cujas bases

são retângulos recebem o nome de paralelepípedos retângulos. Já os prismas retos que têm bases quadradas e arestas laterais com o mesmo tamanho dos lados da base (o que termina acarretando que todas as suas arestas sejam iguais) são chamados de cubos. Veja na figura.

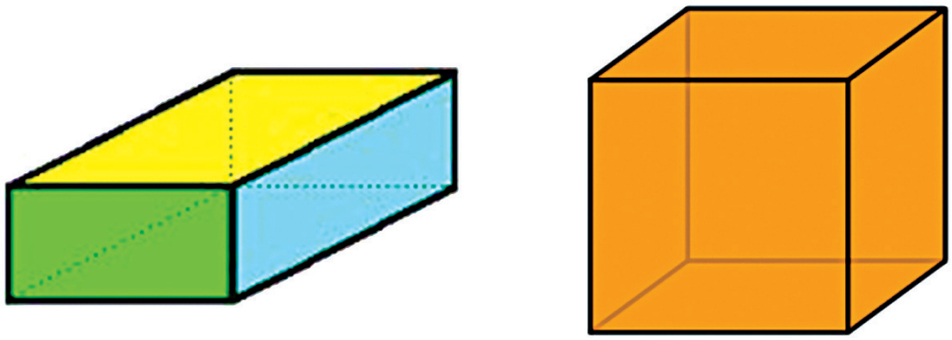
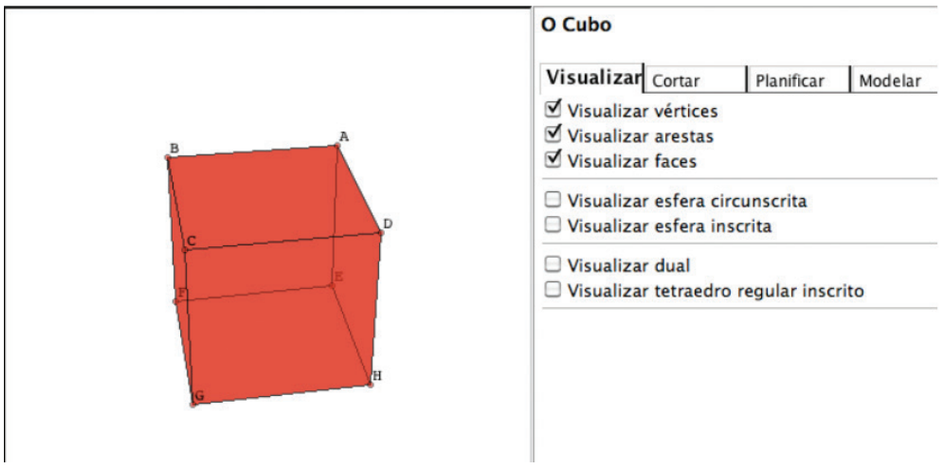


Figura 4: Paralelepípedo (à esquerda) e cubo (à direita).

Outra ideia interessante: como o quadrado é um caso especial de retângulo, podemos dizer que o cubo é um caso particular de paralelepípedo. Muito bem? Então está, vamos em frente!

Que tal explorar mais os cubos? Acessando esse interessante link - http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/cubo-br.html, você pode visualizar os elementos, cortar, planificar e modelar o cubo.



Multimídia

Retomando o assunto da Atividade 1 – ou seja, as diferenças e semelhanças entre prismas e cilindros – hora de falarmos mais formalmente dos cilindros. O cilindro é o sólido obtido por meio da união de todos os segmentos de retas paralelos a reta s que unem um ponto do círculo C (pertencente a α) a um ponto de β.

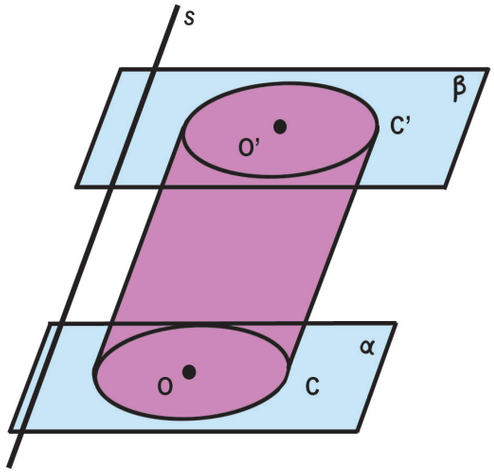


Figura 5: Cilindro.

A altura h do cilindro é dada por meio da distância entre os planos das bases.

A reta r que passa pelo centro das bases (pontos O e O´) é chamada eixo do cilindro. As geratrizes são segmentos paralelos ao eixo cujas extremidades são pontos da circunferência.

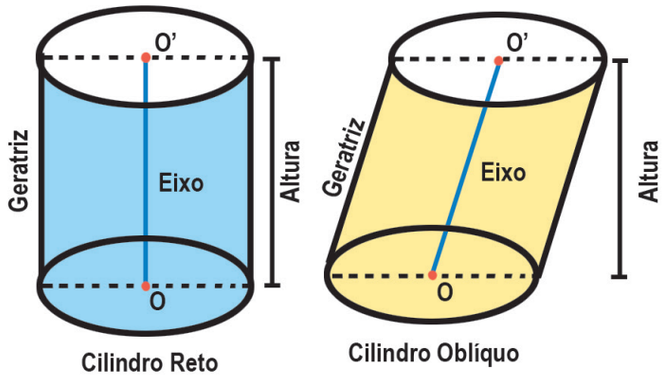


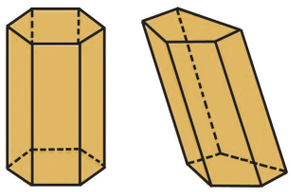
Figura 6: Cilindro cujo eixo é perpendicular ao plano da base (à esquerda) e cilindro cujo eixo não é perpendicular ao plano da base (à direita).

Como podemos observar nos exemplos, no cilindro em que o eixo é perpendicular ao plano da base, a geratriz tem o mesmo tamanho da altura. Já nos cilindros em que o eixo não faz noventa graus com o plano da base, o tamanho da geratriz é maior do que o tamanho da altura.

Saiba Mais

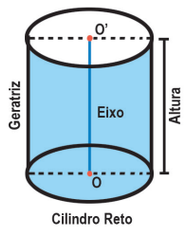
Outro ponto em comum entre prismas e cilindros é a classificação em retos e oblíquos. Prismas retos são aqueles cujas arestas laterais são perpendiculares ao plano da base, enquanto cilindros retos são aqueles em que as geratrizes são perpendiculares aos planos da base.

Já os prismas e cilindros cujas arestas e geratrizes são oblíquas ao plano da base são chamados de prismas e cilindros oblíquos.

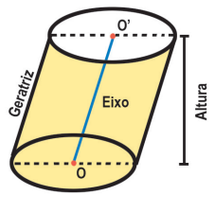


Prisma Reto

Prisma Oblíquo



Cilindro Reto



Cilindro Oblíquo

No que diz respeito à superfície de prismas e cilindros, há novos pontos em comum e divergências. A parte em comum é que a área da superfície total de ambos é a soma das áreas das bases com a da superfície lateral. Como as bases são congruentes, a superfície total é duas vezes a área da base mais a área da superfície lateral. No prisma a base é um polígono, no cilindro a base é um círculo. A diferença está justamente na área lateral: enquanto no prisma a área lateral é formada pelas várias faces (veja a planificação da Atividade 1, por exemplo), no cilindro a área lateral é contínua e tem a forma de um retângulo. Uma maneira simples de ilustrar a área lateral é destacar o rótulo de uma lata de leite. A superfície ocupada pelo rótulo de papel é a área lateral. Veja na planificação a seguir.

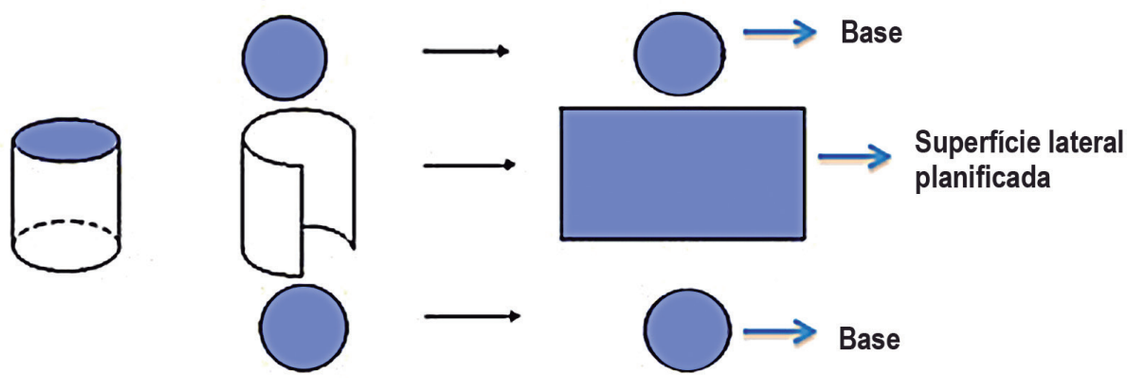


Figura 7: Planificação de um cilindro.

Muito bem, gente! Finalizamos aqui a primeira seção desta aula. Nas seções seguintes estudaremos áreas e volumes dos prismas, o interessante princípio de Cavalieri e áreas e volumes dos cilindros. Vamos lá?

Seção 2
Área e volume do paralelepípedo

Figura 8: Piscina na beira da praia. O cartaz convida os usuários a tomarem banho e tirarem a areia antes de entrar na água.

Vamos tratar os conceitos de área e volume do prisma, a partir de uma situação concreta e bastante agradável: a construção de uma piscina! Vamos supor que o modelo de piscina da Figura 8 foi escolhido por você e pela sua família para ser construído na casa nova para onde estão se mudando. Ela terá 2 metros de profundidade, 4 metros de largura e 6 metros de comprimento.

Para realizar essa empreitada, você vai precisar de duas importantes informações: a primeira é a quantidade de material necessária para a realização da obra. Como por exemplo, quantos metros quadrados de azulejo serão necessários para ladrilhar a piscina. A segunda é a quantidade de água necessária para encher a piscina.

Para descobrir a primeira informação, vamos planificar o modelo da piscina escolhido por vocês. Esse modelo é um prisma de base retangular que, como já vimos anteriormente, é chamado de paralelepípedo.

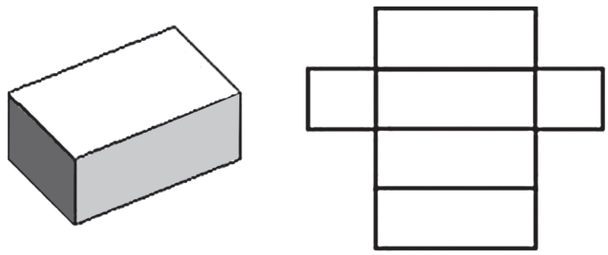


Figura 9: À esquerda, o paralelepípedo que modela a piscina. À direita o mesmo paralelepípedo planificado.

O azulejo será colocado justamente nas faces do paralelepípedo. Para saber quantos metros quadrados de azulejo serão necessários, basta saber a área de cada um dos retângulos. Vale aqui relembrar que a área do retângulo é dada pela multiplicação da medida da base pela medida da altura

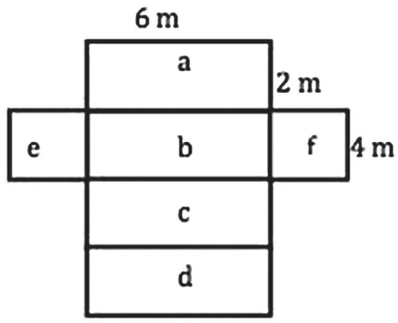


Figura 10: Paralelepípedo planificado e já com as medidas da piscina.

Assim, como podemos perceber da figura 10, os pares de retângulos **a** com **c** e **b** com **d** têm a mesma área.

Os retângulos **a** e **c** têm área 6 x 2 = 12 m^2, enquanto os retângulos **b** e **d** têm área 6 x 4 = 24 m^2. Viram? Muito bem! E os retângulos **e** e **f** têm a mesma área 4 x 2 = 8 m^2. Conseguiram perceber também? Ótimo!

Agora, existe aqui uma pequena diferença entre o modelo e a piscina: enquanto o paralelepípedo tem duas bases, a piscina é aberta e, por isso, sua parte de cima não será azulejada. Assim, o cálculo da metragem de azulejos será dado pela área lateral e a área de uma base apenas:

Metragem = 2 x 12 + 1 x 24 + 2 x 8

Metragem = 24 + 24 + 16 = 64 m^2

Agora, sempre que formos calcular a área do prisma propriamente dito, devemos calcular sua área lateral total e a área total das suas bases – com duas bases, e não uma, como fizemos no caso da piscina. Um pouco mais matematicamente, teremos:

Área Total Superfície Prisma = Área Lateral + 2 × Área da Base. Vejam só:

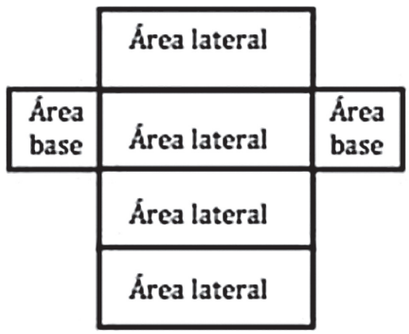


Figura 11: **Paralelepípedo planificado e com indicação das faces que compõem a área lateral e a área da base.**

Lembra qual era a segunda informação importante para a construção da piscina? Exatamente: o volume de água necessário para enchê-la. Para isso, primeiramente temos que entender o que significa volume. Volume nada mais é que o espaço ocupado por um corpo. Logo, calcular o volume da piscina é encontrar o "tamanho" do espaço que a piscina ocupa.

Uma unidade de medida muito utilizada para medir volume é o metro cúbico, que corresponde ao volume de um cubo de um metro de lado. Veja na figura a seguir.

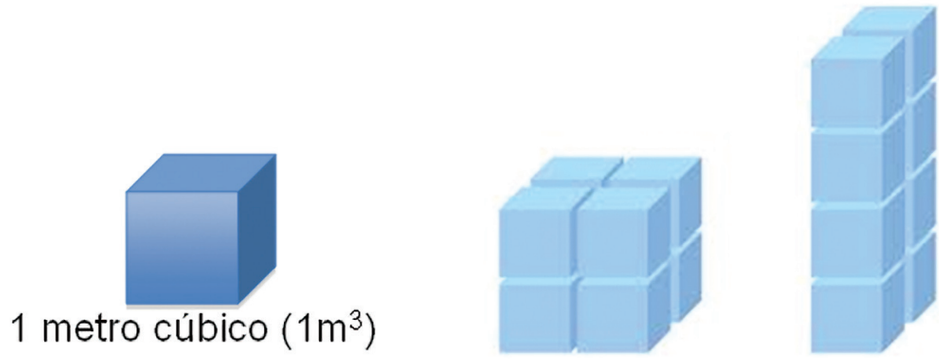


Figura 12: À esquerda, vemos a representação de um cubo com um metro de aresta. Ao centro, um cubo formado por oito cubos de um metro de aresta. À direita, um paralelepípedo formado por oito cubos de um metro de aresta.

O fato interessante é que as duas pilhas da figura, apesar de terem formas diferentes, têm 8 m^3 de volume, uma vez que são formadas oito cubinhos de 1m^3. Assim, para calcular o volume de um cubo ou de um paralelepípedo, precisaríamos contar quantos cubos de 1m^3 de lado cabem dentro desse cubo ou paralelepípedo – o que, dependendo da situação, pode se tornar muito cansativo ou mesmo inviável. Por isso, apresentamos a seguinte sugestão de cálculo:

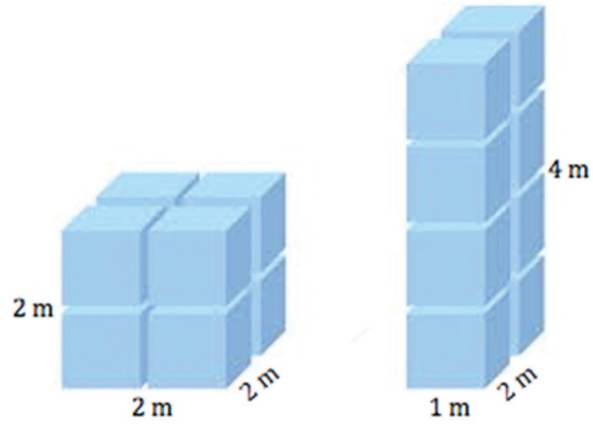


Figura 13: À direita, cubo formado por oito cubos de um metro de lado, com tamanho da aresta indicado. À direita, um paralelepípedo formado por oito cubos de um metro de lado, com tamanho das arestas indicado.

No caso do cubo, temos dois andares com "dois cubos" de comprimento e "dois cubos" de largura, certo? Mais matematicamente, teremos que o volume do cubo = 2 x 2 x 2 = 8m^3. No caso do paralelepípedo, teremos 4 andares de "um cubo" de comprimento e "dois cubos" de largura. Mais matematicamente, teremos que o volume do paralelepípedo é de 2 x 1 x 4 = 8m^3 .

E, a partir desse exemplo, podemos generalizar e propor que o volume de um paralelepípedo é igual ao produto de sua largura pelo seu comprimento (ou seja, sua área da base) pela sua altura. Ou seja,

Volume paralelepípedo = Largura x Comprimento x Altura ou

Volume Paralelepípedo = Área da base x Altura.

Assim, e finalmente, podemos calcular o volume da piscina: $V = 2 \times 4 \times 6 = 48m^3$. Ou seja, a capacidade de água da piscina é de $48m^3$.

Importante

A palavra capacidade, quando utilizada para referência ao volume de um recipiente, na maioria das vezes está ligada a ideia de litro.

O litro é representado pelo l (minúsculo).

Sabemos que $1m^3 = 1000\ dm^3$ e $1\ dm^3 = 1l$, assim, $1m^3 = 1000l$.

Um reservatório (caixa d´água) de água com 1 metro de largura, 1 metro de altura e 1 metro de comprimento, tem capacidade para armazenar 1000 litros.

Ao tomarmos algum medicamento em dosagens de ml, por exemplo, ao ingerir 5 ml de xarope, estamos ingerindo 5 milésimos de 1 litro.

1ml = 1/1000 l ou 1ml = 0,001 l

Antes de finalizarmos a seção, um comentário sobre o volume do cubo. Recordando que ele é um caso particular de paralelepípedo e levando em consideração a fórmula do parágrafo anterior, para calcular o volume de um cubo, basta multiplicar o valor da medida da aresta por ela mesmo 3 vezes. Ou seja,

Volume do cubo: medida da aresta x medida da aresta x medida da aresta.

Assim: Volume do cubo = $(\text{medida da aresta})^3$

Seção 3

Princípio de Cavalieri e volume dos sólidos em geral

Nesse exemplo da piscina foi fácil entender o cálculo do volume do paralelepípedo. Vamos agora entender melhor o cálculo do volume dos sólidos em geral? Muito bem! Nosso ponto de partida são aqueles "montinhos" com moedas e com papéis, que a gente está tão acostumado a fazer. Vejam na figura seguinte

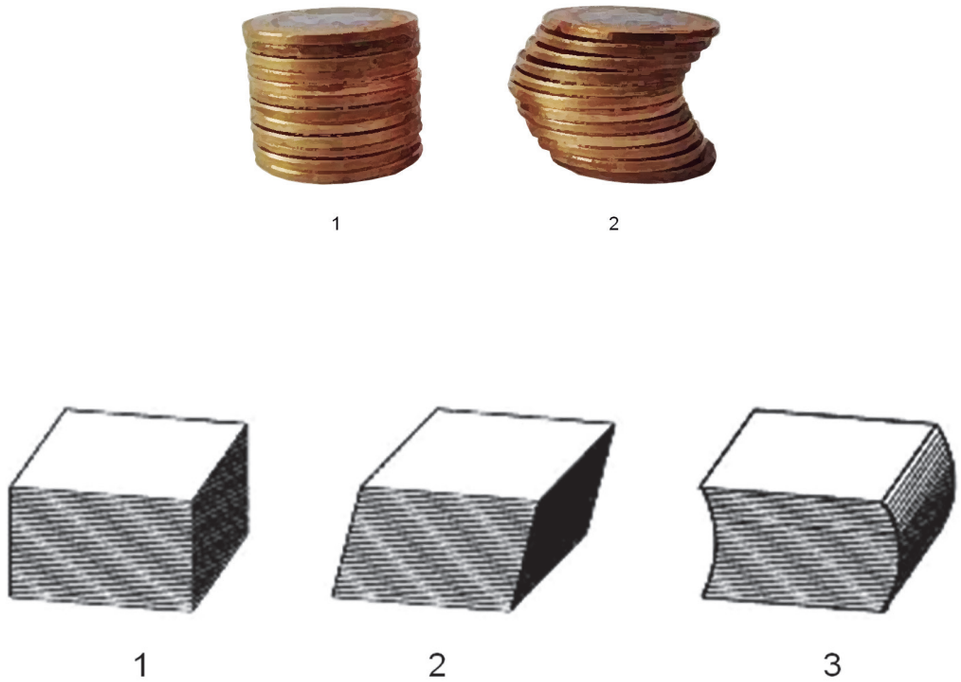


Figura 14: **Montes com moedas (na parte superior da imagem) e montes com papéis (na parte inferior da imagem).**

Observe que as moedas são idênticas e, por isso, a superfície de cada uma delas têm a mesma área. O fato de as moedas serem idênticas também faz com que as pilhas tenham a mesma altura, apesar de terem formatos distintos – afinal, todas as moedas têm a mesma altura. O mesmo acontece com os papéis: eles são idênticos e por consequência a superfície de cada uma das folhas tem a mesma área. As pilhas também têm a mesma altura, apesar de estarem dispostas de maneiras distintas.

Isso nos permite concluir que essa diferença no formato final das pilhas não influencia o espaço ocupado por elas. Assim, lembrando o que volume de um corpo nada mais é do que o espaço que esse corpo ocupa, podemos ver que a pilha de moedas 1 "ocupa o mesmo espaço", ou seja, tem o mesmo volume da pilha 2. Da mesma maneira, as pilhas de papel 1, 2 e 3 "ocupam o mesmo espaço", isto é, têm o mesmo volume.

A conclusão a que acabamos de chegar é o significado do princípio de Cavalieri, que diz o seguinte:

Sejam dois sólidos A e B apoiados em um plano α horizontal. Se qualquer outro plano β paralelo a α que seccionar os dois sólidos, determinar duas regiões planas de mesma área, então podemos concluir que os sólidos A e B têm o mesmo volume. Veja na figura:

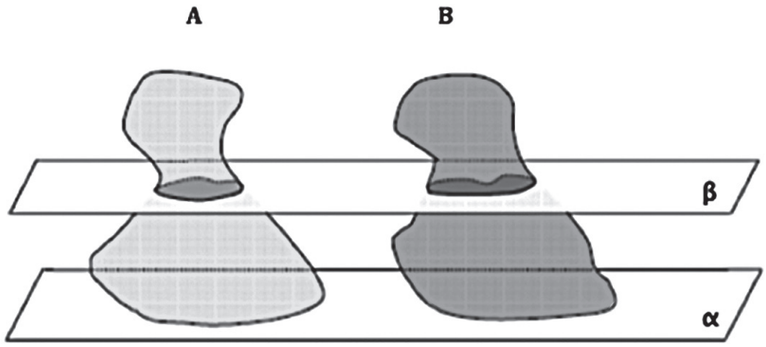


Figura 15: Dois sólidos de formatos diferentes apoiados sobre um plano α e cortados por um plano β, paralelo a α.

Conseguiram acompanhar? Quando passamos pelos dois sólidos um plano paralelo ao plano da base, delimitamos neste plano duas áreas, uma referente ao sólido da esquerda e outra referente ao sólido da direita. Elas estão marcadas em cinza escuro na figura 15. Viram? A ideia é: se estas áreas forem idênticas para todos os planos que forem paralelos à base e passarem pelos sólidos, então os dois sólidos têm o mesmo volume. Pense nas pilhas de moedas:

Saiba Mais

Bonaventura Francesco Cavalieri, nasceu na Itália em 1598. Foi discípulo de Galileu e publicou em 1635 a Teoria do indivisível, que hoje é conhecida como princípio de Cavalieri. Na época, sua teoria foi amplamente criticada mas esse princípio foi uma base importante para o desenvolvimento do cálculo integral.

Determinando o volume do prisma

Vamos agora considerar um paralelepípedo e um prisma pentagonal que possuem a mesma área da base e mesma altura, apoiados em um plano horizontal β. Como qualquer plano horizontal que seccione os prismas vai gerar regiões como áreas iguais, o volume do prisma será o mesmo do paralelepípedo retângulo. Por isso, poderemos calculá-lo da mesma maneira.

Volume prisma = área da base x altura

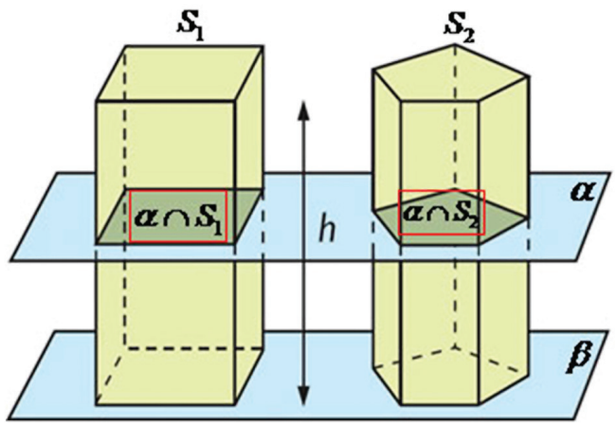
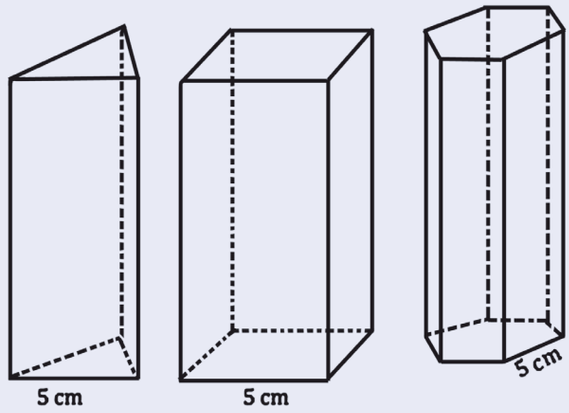


Figura 16: Paralelepípedo e prisma de base pentagonal que, ao serem seccionados pelo plano α, delimitam figuras de mesma área.

Atividade 3

Você está desenvolvendo uma nova embalagem para o produto da empresa que você trabalha. Você desenhou três opções:



Todas têm a mesma altura e as bases são polígonos regulares. Em qual das embalagens cabe mais produto, ou seja, tem maior volume?

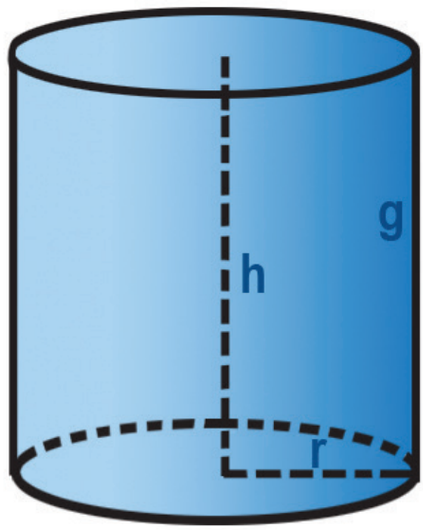
Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Área e volume do cilindro

Todos adoraram a ideia de construir a piscina, mas você ficou pensando se não seria muito melhor construir uma piscina diferente, como a da figura seguinte:

Figura 17: Piscina com borda circular.

O raio da piscina é de 2,75m e sua profundidade de 2m. Como no caso anterior, você quis descobrir a quantidade de azulejo para revestir a piscina e a quantidade de água necessária para enchê-la (o volume). Primeiramente você desenhou um modelo para a piscina - um cilindro, certo?



raio (r) = 2,75 m

altura (h) = geratriz (g) = 2 m

Figura 18: Cilindro utilizado para modelar a piscina.

Na verdade, você concluiu que ambas eram bem similares, a única diferença é que nesse caso as bases da piscina são circulares e não poligonais. Isso fez com que a piscina tivesse o formato de um cilindro, enquanto no modelo anterior, a piscina era um prisma de base retangular.

Para encontrar a metragem necessária de azulejo, será necessário encontrar a área lateral e a área de uma das bases do cilindro.

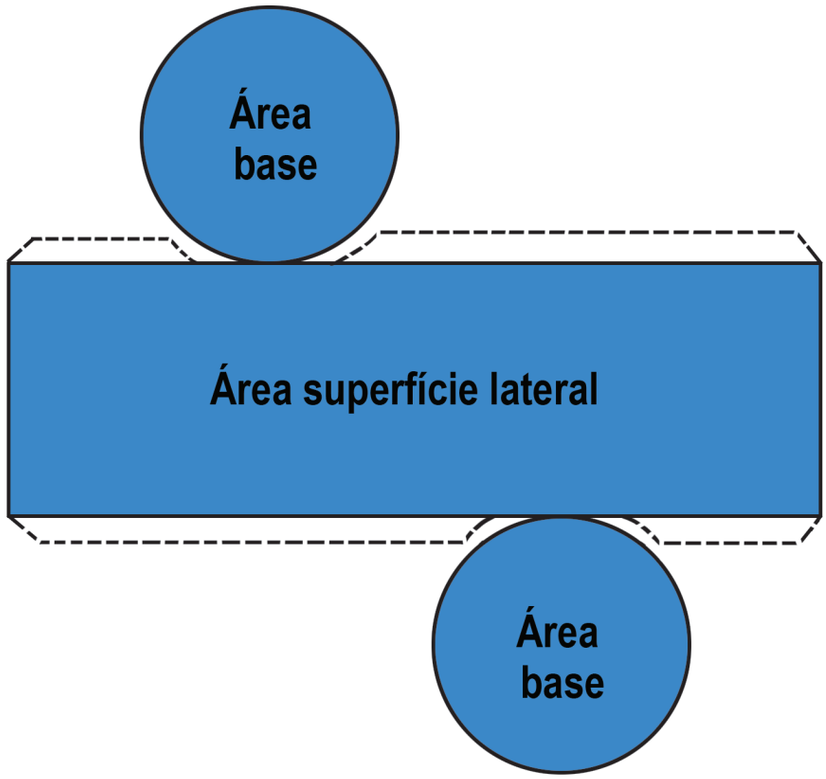


Figura 19: **Cilindro utilizado para modelar a piscina planificado e com indicações da área da base e da área lateral.**

Como a base é um círculo, o calculo de sua área, como já sabemos, é dado por $A = \pi r^2$. Já a superfície lateral é um retângulo e a área é dada pela multiplicação da medida da base desse retângulo pela medida de sua altura. Se analisarmos a planificação do cilindro, vamos perceber que a base do retângulo é o comprimento da circunferência. Você conseguiu ver isso? Olhe para a base do retângulo na figura 19 e se imagine montando o cilindro. (Imagine tirar o rótulo de uma lata de leite) Procure perceber que a base do retângulo vai acompanhar toda a circunferência. Viu essa? Muito bem! Lembre-se ainda que o comprimento de uma circunferência é dado pela fórmula $C = 2\pi r$, em que r é a medida do raio da circunferência. Outra coisa importante a perceber é que a altura h do retângulo será justamente a altura do cilindro. Imaginar a montagem do cilindro a partir da planificação, novamente, ajuda muito a visualizar esta relação.

Então, a área da superfície lateral do cilindro será dada por: $A = 2\pi rh$, onde r é o raio da circunferência da base.

Resgatando nossos conhecimentos de Geometria Plana, lembramos que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi r$.

Importante

Como a parte de cima também não será azulejada, a área da piscina que determina a quantidade de azulejo é

$A = \pi(2,75)^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2,75 \cdot 2$

$A = 7,5625\ \pi + 11\pi$

Considerando $\pi = 3,14$, teremos:

$A = 7,5625 \times 3,14 + 11 \times 3,14$

A metragem de azulejo necessária será de aproximadamente $A \cong 58,29\ m^2$. Vale fazer o mesmo lembrete que fizemos para a piscina em forma de prisma: enquanto o sólido geométrico tem duas bases, a piscina tem uma base só, visto que sua parte superior será aberta. Ou seja, se quisermos calcular a área do cilindro, deveremos contar as duas bases de área πr^2. A área total do cilindro será dada então por:

Área Total = 2 x Área Base + Área Superfície Lateral

$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Para encontrar a quantidade necessária de água, vamos calcular o volume do cilindro que é dado da mesma maneira que o volume do prisma, ok?

Volume Cilindro = Área Base x Altura

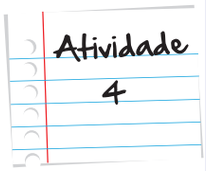
$V = \pi r^2 h$

Desta maneira, o volume dessa nova piscina será de:

$V = \pi \cdot (2,75)^2 \cdot 2$

A quantidade de água necessária para encher a piscina será de aproximadamente:

$V \cong 47,49\ m^3$ o que equivale a $47.490\ dm^3 = 47.490$ litros



Levando em consideração a quantidade de azulejo necessária para revestir a piscina e o volume de cada um dos modelos, qual dos modelos você acha mais vantajoso escolher: a piscina em forma de prisma com base retangular ou de cilindro?

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais faces em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).
- Quando o prisma for reto, a altura é dada pela distância entre as bases.
- As arestas são os lados dos polígonos das bases e das faces laterais.
- Área Superfície Prisma = Área Lateral + 2 × Área da Base
- Volume prisma = área da base × altura
- Princípio de Cavalieri: sejam dois sólidos A e B apoiados em um plano α horizontal. Se qualquer outro plano β paralelo a α que seccionar os dois sólidos, determinar duas regiões planas de mesma área, então podemos concluir que os sólidos A e B têm o mesmo volume.
- Todo objeto tridimensional composto pela sobreposição de infinitos círculos de mesmo diâmetro e com os centros pertencentes a uma mesma reta é denominado cilindro.
- A altura do cilindro é dada por meio da distância entre os planos das bases. A reta que passa pelo centro das bases é chamada eixo do cilindro.
- As geratrizes são segmentos paralelos ao eixo cujas extremidades são pontos da circunferência.
- .A superfície do cilindro é composta pelas bases e pela superfície lateral
- Área Total = 2 X Área Base + Área Lateral

  $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

- Volume Cilindro = Área Base × Altura

  $V = \pi r^2 h$

Conclusão

Partimos dos experimentos da física sobre viagem no tempo e da decomposição da luz para discutir os conceitos, elementos e classificar prismas e cilindros. Em seguida, mergulhamos em uma situação bem prática da construção da piscina para o lazer da sua família para discutir área e volume do prisma e do cilindro. Além disso, vimos algumas semelhanças entre prismas e cilindros, que diferem um do outro pela questão da base. No prisma, as bases são regiões poligonais, enquanto no cilindro as bases são circulares.

É muito importante ressaltar que esses sólidos são amplamente utilizados tanto para questões para modelagem da ciência como para questões do dia a dia.

Referências

Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Ciência e Aplicações 1*. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Temas e Problemas*. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- _____. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1*. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexo e Aplicações Volume 1*. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

Imagens

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=933240

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=194975

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1023311

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1256359

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1357259

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=887805

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=967833

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097480

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=424289

• http://www.sxc.hu/photo/475767

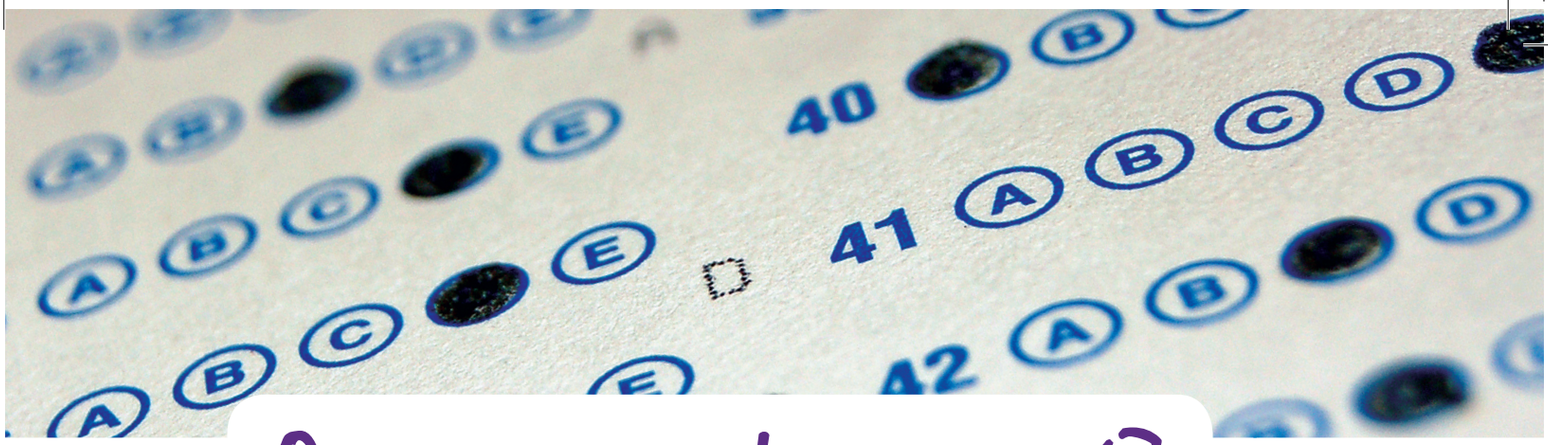
• http://www.sxc.hu/photo/517386

Veja ainda

Assista ao vídeo em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042 e descubra com Caio, assistindo ao programa Animais Curiosos apresentado por James Calafrio, um pouco mais sobre as abelhas e seus alvéolos hexagonais. Não esqueça-se de usar seus conhecimentos matemáticos.

Acessando http://www.cienciamao.usp.br/dados/tex/_volumedesolidos você encontra uma animação em que o líquido de uma esfera de raio r e um cone de raio r e altura 2r serão despejados em um cilindro de raio r e altura 2r. Primeiramente o líquido da esfera será despejado dentro do cilindro. Em seguida, será a vez do líquido do cone. Descubra o que acontece!!!!

Assista ao programa sobre o Princípio de Cavalieri disponível no link http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040 e ajude Carol que recebe misteriosas instruções, juntamente com a estudante de arquitetura Rita, a resolver três enigmas.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UFMG – 2008)

Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de comprimento, 5 m de largura e 120 cm de profundidade. Bombeia-se água para dentro desse reservatório, inicialmente vazio, a uma taxa de 2 litros por segundo. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários.

A) 40 min.

B) 240 min.

C) 400 min.

D) 480 min.

Resposta: Letra C.

Comentários:

Primeiramente vamos transformar as medidas do reservatório em decímetro. Pois como sabemos 1 litro corresponde a 1 decímetro cúbico.

Então:

8 m = 80 dm

5 m = 50 dm

120 cm = 12 dm

O volume do paralelepípedo pode ser calculado da seguinte maneira:

V = altura x largura x comprimento

Assim, temos

$V = 80 \times 50 \times 12$

$V = 48\,000\ dm^3$

$V = 48\,000\ l$

Como bombeia-se água a uma taxa de 2 l por segundo, temos que:

$48\,000 \div 2 = 24\,000\ s$

$24\,000 \div 60 = 400\ min$

Geometria Espacial: pirâmides e cones

Para início de conversa...

A cidade de Gizé, também conhecida como Guizé ou Guiza, está localizada no Egito, na margem oeste do rio Nilo, distante cerca de 20 km a sudoeste da cidade de Cairo, capital do país. Gizé é famosa por abrigar um impressionante complexo monumental que remonta ao antigo Egito, atraindo turistas do mundo inteiro. Em seu território localizam-se as três grandes pirâmides e a esfinge, além de 80 pirâmides menores e vários templos.

Figura 1: Turistas visitando o planalto de Gizé. Em primeiro plano, a esfinge, ao fundo, uma pirâmide.

A esfinge é uma enorme escultura com corpo de leão e rosto humano, e os reais objetivos de sua construção continuam gerando muitas e acaloradas discussões na comunidade arqueológica. Já as pirâmides foram construídas com o objetivo de abrigar os túmulos dos reis, pois os egípcios acreditavam numa vida após a morte e essa vida dependia da conservação do corpo morto. Embalsamavam-se os corpos, e os objetos e valores do dia-a-dia eram colocados no túmulo para uso após a morte.

A maior de todas as pirâmides é a grande pirâmide de Gizé (2.600 a. C.), cuja construção envolveu processos muito desafiadores, tanto na área da matemática quanto da engenharia. Sua estrutura, por exemplo, contém mais de 2000000 de blocos de pedra, cada um com cerca de 2,5 toneladas de peso. Os tetos de certas estruturas internas da pirâmide são feitos de blocos de granito de 54 toneladas, medindo 8,2 m de comprimento por 1,2 m de largura, trazidos de uma pedreira situada a 960 quilômetros de distância e colocados a 60 m do solo.

Saiba Mais

Como trazer de tão longe e elevar pedras tão grandes e pesadas parece, a princípio, humanamente impossível, existem várias teorias de que a construção das pirâmides do Egito foi feita por – e seria prova da existência de – seres de outro planeta. A mesma argumentação se aplica aos monólitos de Stonehenge, na Inglaterra.

No entanto, o mestre de obras americano Wally Wallington afirmou ter conseguido construir sozinho – e usando apenas madeira, pedras e alavancas – um monumento análogo ao de Stonehenge, deslocando e levantando blocos de concreto com o peso na casa das toneladas. O programa "Fact or Faked", que investiga fenômenos pretensamente paranormais e extraterrestres gravou um interessante vídeo pondo à prova a declaração de Wally. O que será que aconteceu? Para descobrir, acesse o link abaixo.

http://www.syfy.com/videos/Fact%20or%20Faked%20Paranormal%20Files/vid:18692994

Porém, o interesse dos egípcios pelas pirâmides não era apenas religioso e arquitetônico: era também matemático. Mas afinal, matematicamente falando, o que é uma pirâmide? Quais são seus elementos principais? Como calcular a área e o volume de uma pirâmide? Nas próximas seções iremos responder a estas perguntas.

Objetivos de aprendizagem

- Identificar os principais elementos de uma pirâmide
- Calcular área e volume de uma pirâmide
- Identificar os principais elementos de um cone
- Calcular área e volume de um cone
- Reconhecer troncos de pirâmide e do cone

Seção 1
O que são pirâmides?

Matematicamente falando, uma pirâmide é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono. Ou seja, é a reunião dos segmentos VA, VB, VC, VD, VE, VF,... em que A, B, C, D, E, F,... são pontos pertencentes ao polígono e V o ponto que não pertence ao polígono ABCDEF... Espera aí, para tudo ! ! ! Complexo demais ? OK, concordamos!

Vamos fazer assim: dê uma olhada na figura seguinte e leia novamente o que está escrito nas linhas anteriores, procurando identificar nas figuras todos os elementos indicados. Combinado?

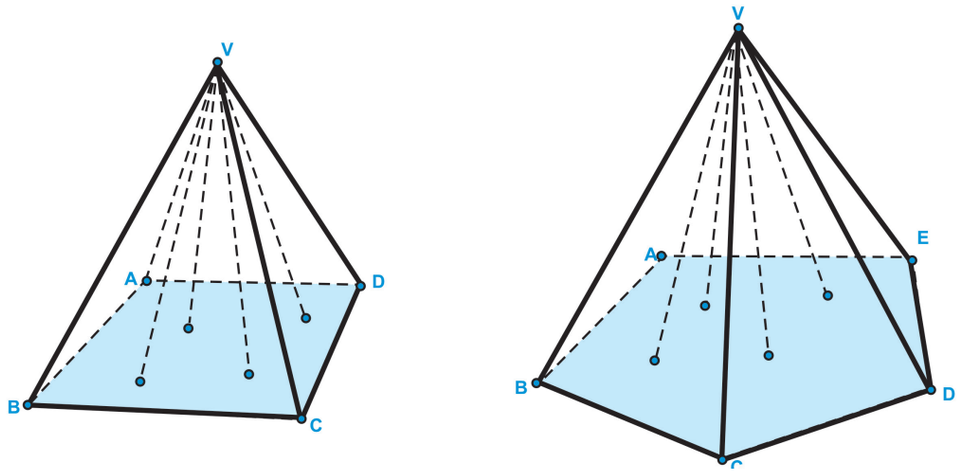


Figura 2: Pirâmides de base quadrangular (à esquerda) e pentagonal (à direita).

Então, primeiramente, conseguiram identificar os polígonos de base? Na pirâmide da esquerda ele é o quadrilátero ABCD e, na da direita, o pentágono ABCDE. E o ponto que é exterior ao polígono, acharam? Nas duas pirâmides ele é o ponto V, para onde convergem os segmentos VA, VB, VC e VD – na pirâmide de base quadrada, da esquerda – e os segmentos VA, VB, VC, VD e VE, na pirâmide de base pentagonal, da direita. A pirâmide é sólida, inteiriça. Assim, os segmentos que vão de pontos interiores ao polígono até o vértice também pertencem à pirâmide. Viram lá? Muito bem. Isto posto, passaremos a um detalhamento dos principais elementos de uma pirâmide.

Os elementos de uma pirâmide

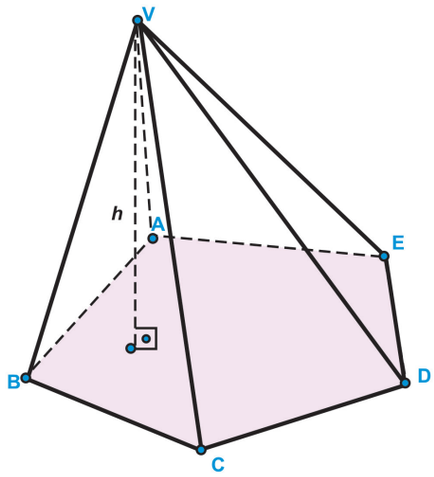


Figura 3: Pirâmide de base pentagonal com a altura destacada.

Para simplificar nosso trabalho na hora de falar das pirâmides, vamos identificar e nomear alguns de seus elementos. O ponto V,fora do polígono, será chamado de vértice da pirâmide.

- O polígono ABCDE será chamado de base da pirâmide.
- Os lados desse polígono (neste exemplo: AB, BC, CD, DE e EA) são as arestas da base
- Os segmentos que têm como uma das extremidades o vértice da pirâmide e cada vértice do polígono (neste exemplo: VA, VB, VC, VD e VE) são as arestas laterais.
- Os triângulos formados pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base (neste exemplo: VAB, VBC, VCD, VDE e VEA) são as faces laterais. Importante: a base é considerada como sendo uma face da pirâmide.
- A distância de V ao plano da base é a altura h da pirâmide e esta altura é perpendicular a base.

Importante

Lembra o que é perpendicularidade?

Quando uma reta, ou semi reta ou segmento de reta se intercepta com um plano fazendo um ângulo de 90º dizemos que esta reta ou semi reta ou segmento é perpendicular ao plano.

As pirâmides podem ser classificadas em relação à sua base. Se o polígono possuir 3 lados teremos uma pirâmide triangular (conhecida também como tetraedro), se possuir 4 lados teremos uma pirâmide quadrangular, se possuir 5 lados teremos uma pirâmide pentagonal e assim por diante. Isto tudo posto, que tal fazermos um problema juntos?

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui 6 faces. A partir deste dado encontre a) a quantidade de faces laterais que ela possui, b) como podemos classificar essa pirâmide em relação à base, c) quantas arestas laterais possui? d) quantas arestas da base possui?

a. Quantas faces laterais possui?

   Devemos notar que toda pirâmide tem uma base e faces laterais. Assim o número de faces laterais é sempre o número de faces menos 1 (base). Logo, o número de faces laterais desta pirâmide é igual a 6 – 1 = 5.

b. Como podemos classificar esta pirâmide em relação à base? (ou seja, qual é a natureza desta pirâmide?)

   O número de faces laterais é igual ao número de arestas da base (veja as figuras anteriores), pois as faces laterais são triângulos que tem sempre uma aresta da base como um lado. Logo, a base é um polígono de 5 lados, ou seja, é uma pirâmide pentagonal.

c. Quantas arestas laterais possui?

   Como já sabemos que é uma pirâmide pentagonal podemos desenhar ou imaginar esta pirâmide e contar o número de arestas laterais. Uma figura que representa esta pirâmide está mostrada a seguir.

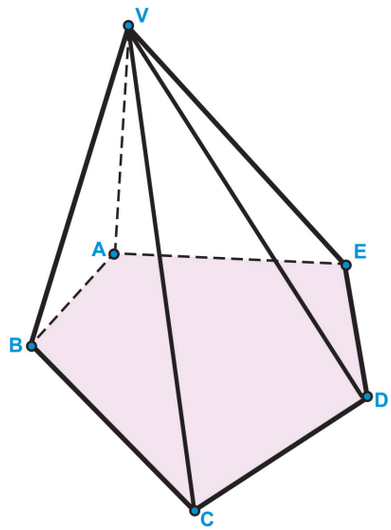


Figura 4: Pirâmide de base pentagonal.

As arestas laterais são VA, VB, VC, VD e VE, portanto são 5 arestas laterais.

É importante percebermos que o número de arestas laterais é sempre igual ao número de lados do polígono da base, pois de cada vértice do polígono "sai" uma aresta lateral.

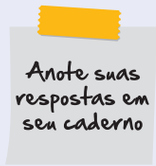
d. Quantas arestas da base possui?

As arestas da base (ver figura) são AB, BC, CD, DE e EA, ou seja, são 5 arestas da base..

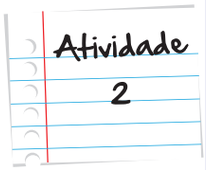
Será que você consegue fazer um problema parecido? Tente não gravar regras e sim fazer o desenho e tirar suas conclusões.

A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui 8 faces. A partir deste dado responda:

a. Quantas faces laterais possui?
b. Como podemos classificar esta pirâmide em relação à base – ou seja, qual é a natureza desta pirâmide?
c. Quantas arestas laterais possui?
d. Quantas arestas da base possui?

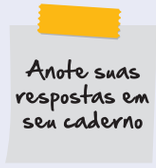


E essa agora? É um pouco mais abstrata, mas tenho certeza de que você vai conseguir!



A única informação que temos de uma determinada pirâmide é que esta possui *n* faces. A partir deste dado responda:

a. Quantas faces laterais possui?
b. Quantas arestas laterais possui?
c. Quantas arestas da base possui?



Pirâmides regulares

Retomando o assunto, vamos falar da pirâmide regular. Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e as arestas laterais são congruentes entre si (isto é, têm a mesma medida!). Polígono regular, não custa lembrar, é aquele que possui todos os lados e todos os ângulos iguais. Uma característica bem interessante das pirâmides regulares é que, se a virmos de cima, o seu vértice parece ficar bem no meio do polígono que forma a sua base. Resulta disso que a altura h da pirâmide, que faz um ângulo de 90º com o plano em que está o polígono da base, passa exatamente pelo centro deste polígono. Veja na figura

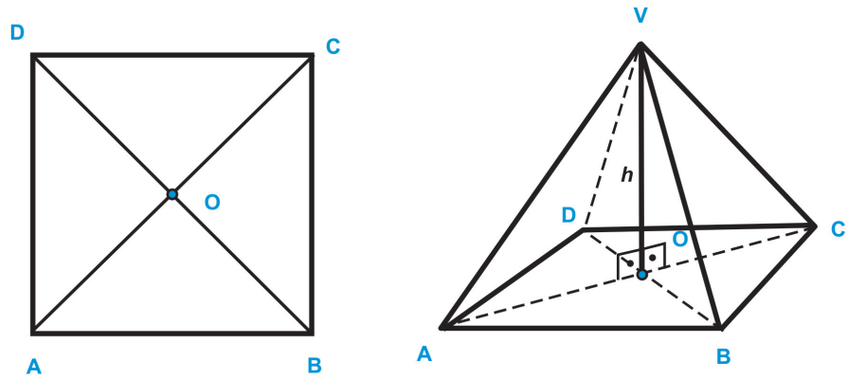


Figura 5: **Pirâmide regular de base quadrangular vista por cima (à esquerda) e de frente (à direita). Como a pirâmide é regular, o polígono da base é um quadrado e todas as arestas laterais são congruentes.**

Atividade inicial: se tiver muita dificuldade, peça ajuda ao seu professor!

Desenhe uma pirâmide de base quadrada, em que as medidas de todas as arestas sejam iguais a 4 cm e depois calcule:

4. A distância do centro da base a qualquer uma das aresta da base;
5. A distância do centro da base a qualquer um dos vértices da base;
6. A altura de cada triângulo – faces laterias – dessa pirâmide;
7. A altura da pirâmide.

E agora, vamos fazer um problema juntos? Muito bem! Lá vai: Um tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as arestas (tanto as da base quanto as laterais) são congruentes.

1. Faça um desenho representando esse tetraedro;
2. Trace a altura de uma face qualquer do tetraedro que você desenhou e tente calcular a sua medida. Lembre do que já estudamos sobre o teorema de Pitágoras;
3. Agora trace a altura desse tetraedro e tente calcular a medida dessa altura.
4. Qual é a altura de um tetraedro regular cuja aresta mede 1 cm?

Muito bem, a primeira providência é desenhar este tetraedro e marcar sua altura. Vejam na figura

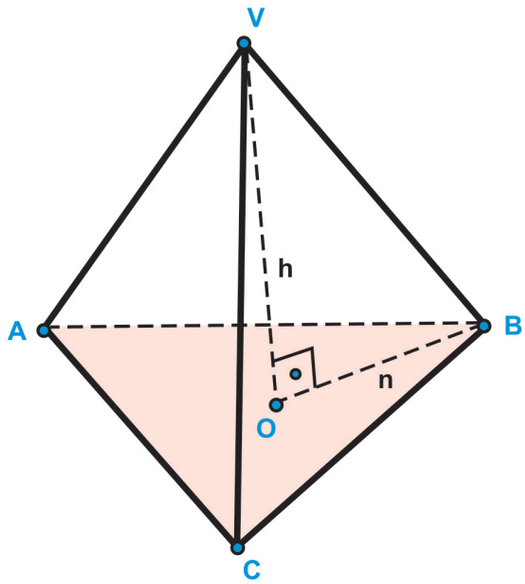


Figura 6: Tetraedro regular.

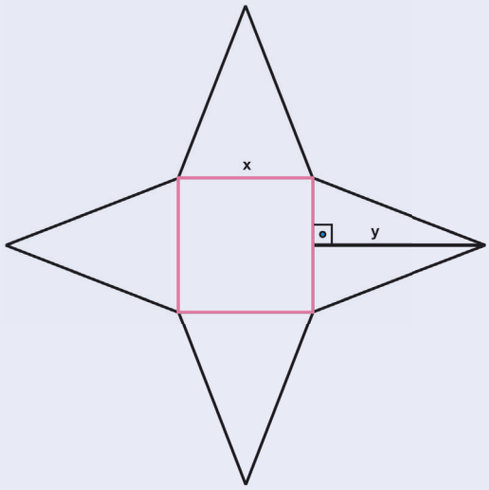
Acompanhe, então: temos que as arestas VA, VB, VC, AB, AC e BC são todas iguais entre si e de tamanho 1, confere? Muito bem! Isso faz com que as 4 faces do tetraedro sejam triângulos equiláteros, e também de lado 1, OK? Ótimo. Estão vendo o ponto O, no triângulo da base? Então, como o triângulo da base é equilátero e a pirâmide é regular, a altura *h* toca o plano justamente no centro do triângulo equilátero, o tal ponto O. E, relembrando nossa geometria plana, veremos que o centro de um triângulo equilátero está no ponto de encontro entre as alturas dos 3 lados. A distância desse ponto ao vértice vale 2/3 do valor da altura. Revirando mais um pouco o baú da geometria plana, encontramos que a altura de um triângulo equilátero é igual $l\frac{\sqrt{3}}{2}$, onde l é o lado do triângulo. Com tudo isto em mãos, partimos para aplicar um teorema de Pitágoras no triângulo VOB. Encontraram o dito cujo na figura? Então,

em frente: $(VO)^2 + (BO)^2 = (VB)^2$. VO é justamente o que queremos calcular, ou seja, o valor de h, e VB é 1, justamente porque todas as arestas tem comprimento 1. Teremos assim que $h^2 + (OB)^2 = 1^2$. Faltaria calcular o valor de OB. A partir do que resgatamos da geometria plana, o valor de OB é justamente 2/3 da altura, que vale $l\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, $OB = l\,\frac{\sqrt{3}}{3}$. Como $l = 1$, $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Aí teremos $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1^2$, $h^2 + \frac{1}{3} = 1$, $h^2 = \frac{2}{3}$, $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

E que tal uma atividade por conta própria agora?

Vilma resolveu construir uma pirâmide regular de madeira. Para tal, ela cortou uma tábua de madeira com o formato da figura mostrada a seguir. Sabendo que x = 80 cm e y = 50 cm, calcule a altura da pirâmide formada.

Atividade 3



Anote suas respostas em seu caderno

Existe, nas pirâmides regulares, um elemento bastante importante: o apótema. Chamamos de apótema de uma pirâmide regular a altura de qualquer um dos triângulos que compõem as faces laterais da pirâmide. Geralmente atribuímos a ele a letra *g*.

Chamamos de apótema da base de uma pirâmide regular o segmento m que equivale à menor distância do centro da base até a cada um dos lados do polígono da base, ou seja, a menor distância entre o centro da base (projeção ortogonal do vértice sobre a base) e a aresta da base.

A figura seguinte nos mostra esses elementos.

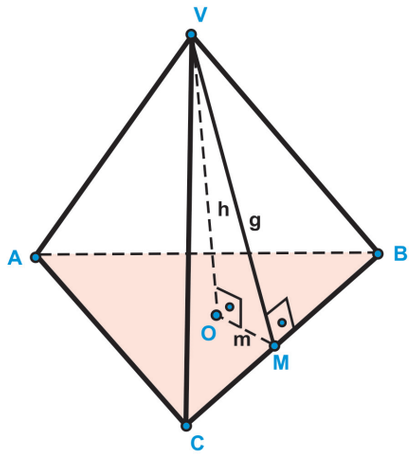


Figura 7: Tetraedro regular com apótema da base (*m*) e apótema lateral (*g*) destacados.

Observe que o triângulo VOM é um triângulo retângulo de catetos h e m, sendo g a hipotenusa. Com alguma contribuição do Teorema de Pitágoras, podemos tirar a seguinte relação: $g^2 = h^2 + m^2$

Importante

O teorema a seguir é atribuído ao matemático grego Pitágoras de Samos. Este teorema relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

$a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a hipotenusa (lado maior). b e c são os catetos.

Ou seja, o quadrado do apótema da pirâmide regular é igual a soma do quadrado da altura com o quadrado do apótema da base.

Seção 2
Como calcular área e volume de pirâmides?

Figura 8: Acampamento nos montes Pirineus, entre a França e a Espanha. Barracas de acampamento podem ter o formato de sólidos geométricos.

Um grupo de amigos foi acampar e levou uma barraca de lona que, depois de montada tinha um formato de pirâmide regular hexagonal. Um dos amigos decidiu medir a aresta da base e a altura chegando aos valores de 2 m e 3 m, respectivamente. A barraca também cobre o chão. A partir destas informações – e daquilo que já trabalhamos nesta aula – seria possível calcular quantos metros quadrados de lona possui esta barraca? A resposta, você já deve ter imaginado, é sim! Vamos às contas?

Muito bem, a primeira coisa importante a notar é que a pirâmide é regular. Isto significa que as arestas da base são iguais e as arestas laterais são iguais entre si. Vejamos a figura.

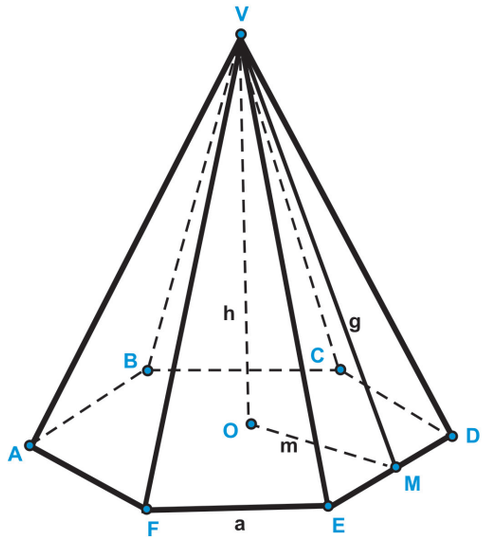


Figura 9: **Pirâmide de base hexagonal com altura *h*, apótema da base *m* e apótema da face *g* destacados.**

Na figura, ***h*** é altura da pirâmide, ***g*** é o apótema da pirâmide, ***m*** é o apótema da base e ***a*** é o lado do hexágono – que também serve de base aos triângulos da face. A área total da barraca seria, então, a soma da área da base com a área lateral. Para calcular a área da base precisaremos calcular a área do hexágono regular de lado a. Como as faces laterais são 6 triângulos isósceles congruentes, a área lateral será seis vezes o valor da área do triângulo de uma das faces. Acompanharam? Muito bem! Então vamos por partes, começando pela área lateral.

Para calcular a área de um triângulo, tomaremos o triângulo VED, veja na figura! Sua área é igual ao produto entre as medidas da base e da altura, tudo isso dividido por dois, lembra-se?, ou seja, $\frac{a \cdot g}{2}$, confere? Assim, a área lateral é igual a $6\frac{a \cdot g}{2} = 3 \cdot a \cdot g$ como $a = 2$, substituindo temos: $Al = 6g$. Falta agora calcular o valor de g. Usando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos $g^2 = h^2 + m^2$ (*). Para calcular g precisamos calcular m. Para isto vamos destacar a base da pirâmide ABCDEF, veja a figura a seguir:

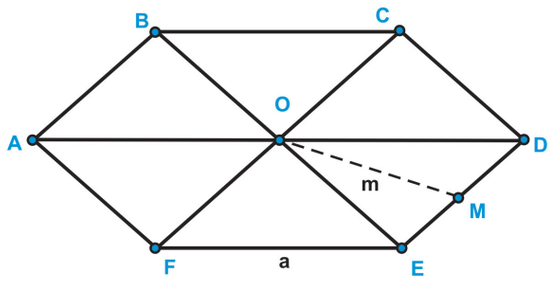


Figura 10: Hexágono que serve de base à pirâmide, com lado *a* e apótema *m* destacados.

Notemos que o hexágono regular é decomposto em 6 triângulos equiláteros, então m é a altura de um triângulo equilátero de lado a , ou seja, $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, substituindo a por 2, temos $m = \sqrt{3}$ (**). Sabemos também que $h = 3$ (***). Substituindo (**) e (***) em (*), temos: $g^2 = 3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$, isto é, $g = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Como a área que queremos calcular é $Al = 6g$ então $Al = 12\sqrt{3}$ m² . O que nos fornece 20,4 m² aproximadamente de lona.

Para calcular a área da base, vamos aproveitar as considerações e contas do parágrafo anterior: o hexágono regular que serve de base à pirâmide é composto de seis triângulos equiláteros de lado a. Como a área do triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura – que, no parágrafo anterior, já vimos ser igual a $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – teremos que a área de um dos seis triângulos que compõem o hexágono é $At = \frac{\frac{a.\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$. Multiplicado por 6, teremos $\frac{6\,.\,a^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3\,a^2.\sqrt{3}}{2} = \frac{3.4\,\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Se lembrarmos que a área lateral era de $12\sqrt{3}$ m² e equivalia a, aproximadamente, 20,4 m² de lona, teremos que a área da base, por ser igual a $6\sqrt{3}$ (metade da área lateral), equivalerá a, aproximadamente, 10,2 m² de lona. A quantidade total de lona na barraca seria, então, de 20,4 + 10,2 = 30,6 m². Acompanharam tudo? Excelente!

Vamos agora formalizar um pouco mais, dando os nomes matematicamente mais precisos aos elementos que vocês acabaram de conhecer:

A área da base A_b é a área do polígono da base – no nosso exemplo, o hexágono.

A área lateral *Al* é a área da superfície lateral (união das faces laterais) da pirâmide. Assim a área lateral é a soma das áreas dos triângulos correspondentes à faces laterais. No caso que abordamos, era igual à soma das áreas do seis triângulos.

A área total *At* é a soma da área da base com a área lateral. $At = Ab + Al$

Conseguiram associar? Ótimo! Vamos em frente.

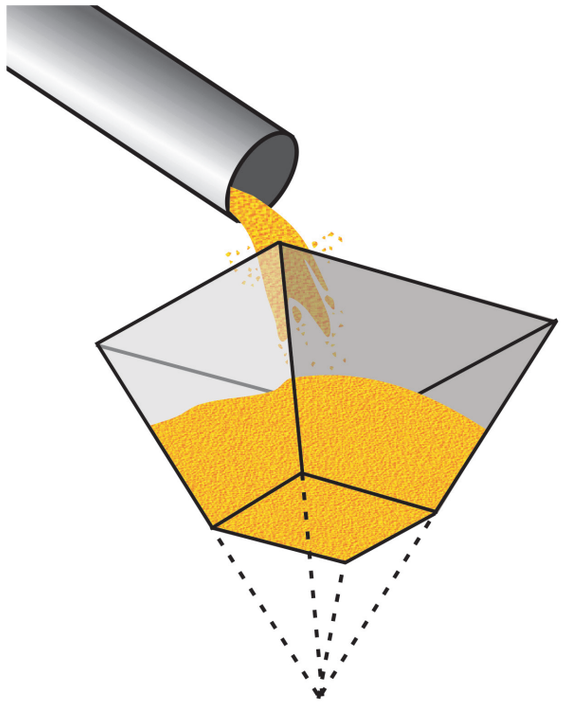


Figura 11: Um tronco de pirâmide que, se invertido como na figura, pode servir como estrutura para armazenamento de líquidos e grãos.

O fato é que os egípcios não usavam as pirâmides apenas para enterrar seus mortos. Em 1893, o egiptólogo russo V. S. Golenishchev comprou um papiro no Egito. O papiro, escrito por volta de 1850 a. C. e hoje conhecido como papiro de Moscou, contém 25 problemas resolvidos de Matemática, mas devido ao seu estado de degradação, era impossível interpretar muitos deles. No entanto, o problema 14, completamente legível, dizia respeito ao cálculo do volume de um tronco de pirâmide usado para armazenar grãos! O tronco de pirâmide é o sólido que obtemos quando "cortamos" o topo de uma pirâmide passando um plano paralelamente a sua base – veja na figura anterior.

Apesar de não apresentarem uma fórmula analítica para o volume do sólido – que só seria criada 3.300 anos depois – o problema no papiro deixa claro que os egípcios se interessavam e sabiam calcular corretamente o volume de um tronco de pirâmide de base quadrada.

Abordar as demonstrações das fórmulas do volume da pirâmide e do tronco da pirâmide seria muito interessante – mas faria com que nossa aula perdesse inevitavelmente seu rumo. Assim, combinamos da seguinte maneira: no que diz ao presente assunto, interessará o fato de o volume de uma pirâmide ser 1/3 do volume do prisma de mesma base e altura, ou seja,

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

onde *Ab* é a área da base e *h* é a altura da pirâmide. A demonstração dessa fórmula e da fórmula do volume do tronco de pirâmide estarão nos links do box seguinte.

A demonstração de que o volume de uma pirâmide é 1/3 do volume de um prisma de mesma base e altura pode ser feita sem recorrer à matemática avançada. Uma saída bem engenhosa está neste link, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS. http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ_wingeo2/volpiramide.html

Já a fórmula do volume de um tronco de pirâmide é o assunto do interessante vídeo "A maldição da pirâmide" da coleção Matemática Multimidia, da Unicamp: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1132

Importante

Que tal agora fazermos uma atividade juntos? Então vamos lá: a água da chuva é recolhida em um recipiente em forma de pirâmide quadrangular regular. Sabendo que a água alcança uma altura de 9 cm e forma uma pequena pirâmide de 15 cm de aresta lateral, queremos saber quantos mililitros de água tem nesse recipiente. (dica: 1 dm^3 = 1l)

Bom, o primeiro passo é fazer a figura

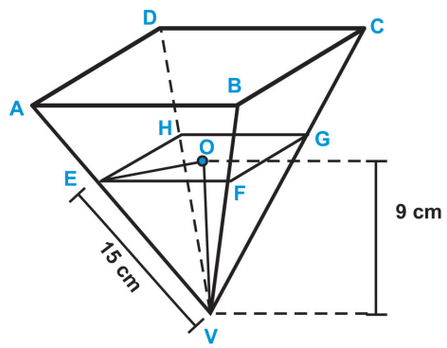


Figura 12: Recipiente para armazenamento de água da chuva em forma de pirâmide quadrangular regular. Água armazenada atinge a altura de 9cm e forma uma pirâmide de aresta lateral igual a 15 cm.

Desenhada a figura, podemos perceber que a água armazenada toma a forma de uma pirâmide invertida, cuja altura tem 9 cm e aresta lateral tem 15 cm. Viram? Muito bem! Como o volume de uma pirâmide é igual a 1/3 do produto da área da base pela altura – e já temos a altura – fica faltando só calcular a área da base, no caso, o quadrado EFGH. A área do quadrado, lembremos, é igual ao quadrado do valor do lado. Assim, se acharmos o tamanho do lado, bastará elevar este valor ao quadrado para acharmos o valor da área. Mas como faremos para achar o lado deste quadrado? Bom, a idéia aqui é perceber duas coisas: a primeira é que existe um triângulo retângulo EOV com dois

lados conhecidos – OV é a altura da pirâmide, de 9 cm, e EV é a aresta lateral, de 15 cm. A segunda coisa a perceber é que o terceiro lado, OE, é justamente metade da diagonal do quadrado da base. Dê uma olhada na figura anterior e na seguinte, e veja se consegue enxergar isso.

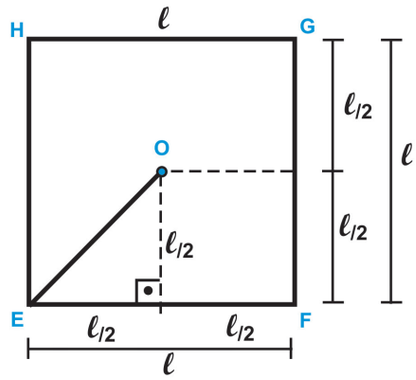


Figura 13: Quadrado EFGH, de lado l, que é a base da pirâmide formada pela água da chuva no recipiente. O segmento OE, do triângulo retângulo VOE (ver figura 12), está destacado.

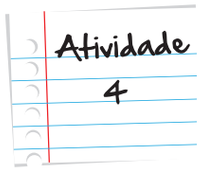
Assim, faremos primeiramente um teorema de Pitágoras para achar o tamanho do segmento OE. Depois, a partir de OE, acharemos o valor do lado do quadrado da base da pirâmide – e, a partir do lado, calcularemos a área da base. Depois é só multiplicar essa área pela altura e dividir por 3. Vamos lá? Coragem, então! O teorema de Pitágoras para o triângulo VOE – veja lá na figura 12 – fica $OE^2 = OV^2 = VE^2$, $OE^2 + 9^2 = 15^2$, $OE^2 = 225 - 81$, $OE^2 = 144$, $OE = 12$. Sabendo o tamanho de OE, vamos à segunda parte.

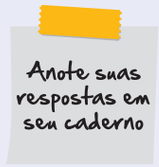
O segmento OE é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem os dois catetos iguais a $l/2$ – veja lá na figura 13! Mas por que? Porque o ponto O é o centro do quadrado, o ponto E é um dos vértices e as perpendiculares baixadas do ponto O a cada um dos lados vai dividir esses lados, de tamanho l, no meio – daí o $l/2$. Viram? Aqui, o teorema de Pitágoras fica assim: $\left(\frac{\iota}{2}\right)^2 + \left(\frac{\iota}{2}\right)^2 = OE^2$, $\frac{\iota^2}{2} + \frac{\iota^2}{2} = 12^2$, $2\frac{\iota^2}{2} = 144$, $l^2 = 288$ – e aqui paramos! Mas por que parou? Parou por quê? Paramos justamente porque lembramos que o valor da área de um quadrado de lado l é igual ao quadrado do valor do seu lado, l^2 – e que é exatamente esse o valor que encontramos na última etapa, vejam lá. Por isso, em vez de tirar a raiz quadrada para encontrar o lado e, em seguida, elevar ao quadrado para achar a área, vamos direto com o l^2, que é o que nos interessa!

Assim, fechamos o cálculo relembrando a expressão para o volume da pirâmide – $V = \frac{1}{3} . Ab . h$ – e entrando com os valores: $V \quad - . Ab . h \quad \frac{1}{3} . \iota^2 . 9 = \frac{1}{3} . 288.9 = 288.3 = 846\ cm^3$. Muito bem – mas e os tais mililitros, como ficam? Bom, aqui lembramos que $1dm^3 = 1000cm^3$ e que o mesmo $1dm^3 = 1l = 1000ml$. Assim temos que $1000cm^3 = 1000ml$ e, por conseguinte, $1cm^3 = 1ml$. Logo, 864 cm^3 = 864 ml.

Que tal agora fazerem uma atividade por conta própria?

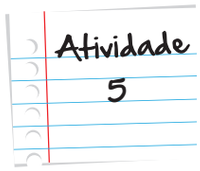
Um peso maciço para papel é feito de vidro e tem a forma de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm. Sabendo que a densidade do vidro é igual a 2,60 g/cm^3, qual é a massa desse peso de papel? (use $\sqrt{2} = 1,4$)

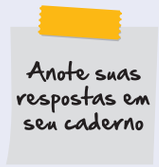




E que tal mais essa?

João vende em sua loja enfeites que possuem formato de uma pirâmide quadrangular cujas arestas laterais são congruentes entre si e as arestas da base medem 18 cm e 32 cm. A altura da pirâmide é de 12 cm. Em um dia João vendeu 100 enfeites deste. Quantos metros quadrado de papel de embrulho João precisou para embrulhar todos os 100 enfeites? (desconsidere as perdas de papel)





Muito bem, pessoal, fechamos mais uma seção ! Esperamos que vocês tenham aprendido a calcular a área e volume de uma pirâmide – e que tenham aproveitado ao máximo o percurso que escolhemos. Tenham certeza que tentamos fazê-lo o mais agradável e interessante possível.

Seção 3
O que é um cone?

Imagine agora que a gente vai fazer uma “pirâmide diferente”, substituindo o polígono da base por um círculo. Você consegue visualizar como ela seria? Veja a figura a seguir

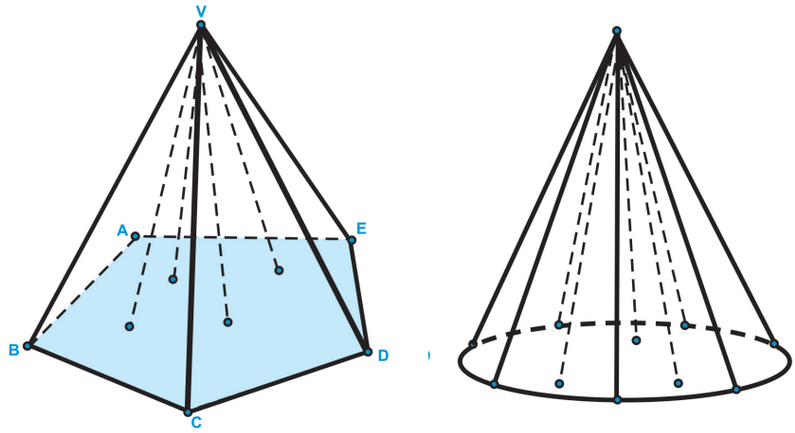


Figura 14: Substituição da base da pirâmide: sai o polígono, entra um círculo.

Conseguiram? Muito bem! Então, quando trocamos a base da pirâmide por um círculo, o sólido que obtemos é chamado de cone.

Elementos do cone

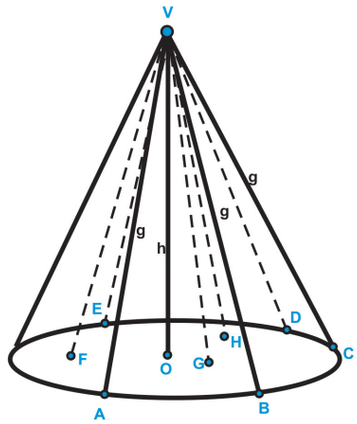


Figura 15: Cone.

Da mesma forma que fizemos com as pirâmides,

- O ponto **V** que está fora do plano da base é chamado de vértice.
- O círculo de centro **O** é a base do cone
- Cada segmento cujas extremidades são o vértice e um ponto da circunferência (não confundir com o círculo) é uma geratriz g do cone. VA, VB, VC, VD e VE são geratrizes. VF, VG, VH e VO não são geratrizes.
- A distância do vértice ao plano da base é chamada de altura h do cone. Na figura, ela é representada pelo segmento VO. Ela incide sobre o centro O do círculo que serve de base ao cone e faz um ângulo de 90º com o plano em que se encontra este círculo.

Um cone pode ser classificado como cone oblíquo ou cone reto. Cone oblíquo é aquele em que a reta que contém o vértice e o centro do círculo não forma um ângulo reto com a base. Cone reto é aquele em que a reta que contém o vértice e o centro do círculo forma um ângulo reto com a base. Veja na figura seguinte.

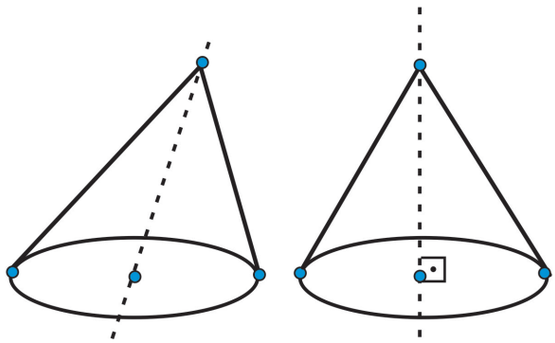


Figura 16: Um cone oblíquo (à esquerda) e um cone reto (à direita).

Seção 4
Como calcular a área e o volume do cone?

Para trabalhar estes conceitos, traremos, novamente, um problema concreto. Prontos? Então vamos lá. Durante as décadas de 1980 e 1990, um doce foi extremamente popular entre as crianças: o guarda chuva de chocolate!!! Ele consistia basicamente num cone de chocolate de aproximadamente 10 cm de altura, embrulhado num papel colorido e com uma pequena alça de plástico em sua base, simulando o cabo do guarda chuva.

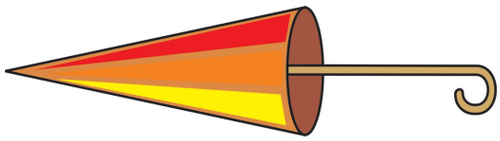


Figura 17: Guarda chuva de chocolate.

Um empresário deseja fazer uma versão atualizada destes doces, sofisticando o produto, tanto em termos de gosto – alterando os sabores do chocolate, fazendo modelos com licor, etc – quanto em termos de embalagem, usando um papel "ecologicamente amigável", mas que ainda mantenha as cores vibrantes das embalagens originais. Como em todo bom plano de negócios, ele precisa saber os custos de produção. Mais precisamente, ele precisa conhecer quantidade de papel necessária para embalar uma unidade e a quantidade de chocolate necessária para fazer uma unidade. Matematicamente, isso se converte em conhecer a área do cone – e, a partir do custo por unidade de área conhecer o gasto para embalar uma unidade – e em conhecer o volume do cone – e, a partir do custo por unidade de volume, geralmente em litros, conhecer o custo da quantidade de chocolate necessária para fazer uma unidade. O cone que será produzido tem altura de 6,5cm e raio da base de 2,5cm.

Pensando na área, o papel deverá cobrir tanto a base do cone quanto a sua superfície lateral, certo? Bom, a base do cone é um círculo, cuja área já conhecemos: $A_{base} = \pi r^2 = \pi(2,5)^2 = 6,25\,\pi$ cm^2. Mas e a área da superfície lateral, como faremos?

Vejam na figura seguinte:

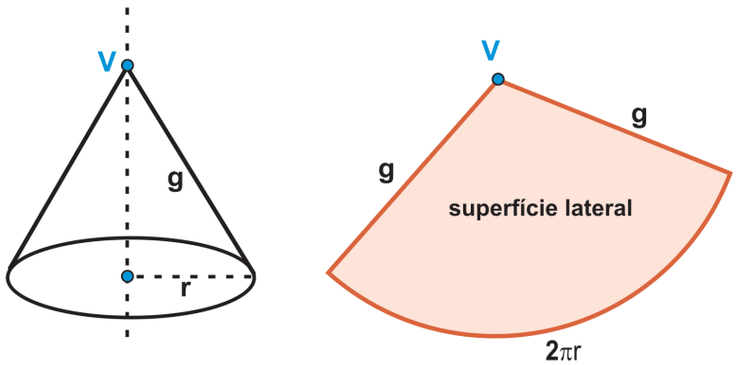


Figura 18: Cone e superfície lateral do cone. Geratriz *g* e raio *r* destacados.

A ideia é fazer um corte no cone seguindo justamente a geratriz ***g***, destacada no cone que está à esquerda da figura anterior. Depois desse corte, a superfície lateral terá o formato do setor circular, mostrado à direita da figura anterior. Nele, é importante observar duas coisas. A primeira delas é que o comprimento do arco subentendido por

este setor circular é justamente o perímetro do círculo que serve de base ao cone. Como esse círculo tem raio *r*, o comprimento do arco é de $C = 2\pi r$. Acompanhem na figura anterior.

Outro ponto a perceber é que o raio deste setor circular formado é igual á geratriz *g* do cone. Viram? Ótimo! Não viram? Voltem lá e releiam as linhas anteriores até visualizar esta relação. Ela é importante para avançar na compreensão deste conceito. Pronto? Muito bom! Então, recapitulando e olhando para o setor circular: o comprimento do arco subentendido pelo setor é $C = 2\pi r$ e o raio desse setor é *g*. Isto posto, faremos uma regra de 3: um círculo de raio *g* subentende um arco de comprimento $C = 2\pi g$ e área $A = \pi g^2$. Já nosso setor circular tem comprimento $C = 2\pi r$ e terá uma área A_l – que é justamente o que nós queremos saber. Vejam só:

Área do setor – Comprimento do arco

πg^2 ––––– $2\pi g$

A_l ––––––– $2\pi r$

Assim, teremos $A_l = 2\pi r \,.\, g = 2\pi r \,.\, \pi g^2$, $A_l = \pi r h$

Assim, para calcular a área lateral, precisaremos conhecer o valor *r*, – que já conhecemos: 2,5 cm – e o valor de *g*, ainda desconhecido. Para calcular o valor de *g*, aplicaremos um teorema de Pitágoras envolvendo a geratriz, o raio da base, *r*, e a altura do cone, *h*. Veja na figura:

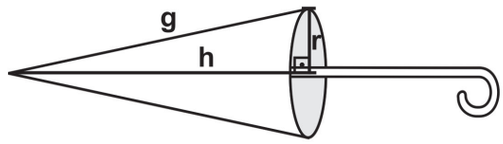


Figura 19: **Cone do guarda chuva de chocolate, com geratriz, raio da base e altura destacados.**

O teorema fica assim: $r^2 + h^2 = g^2$, confere? Substituindo os valores, teremos $(2,5)^2 + 6^2 = g^2$, $6,25 + 36 = g^2$, $42,25 = g^2$, $g = 6,5$ cm. Voltando à fórmula da área do setor circular – que, para lembrar, é área lateral do cone – teremos $A\iota = \pi r g = \pi\ 2,5.6,5 = 16,25\ \pi$ cm². E, resgatando o que dissemos no início do problema, em cada guarda chuva de chocolate a embalagem irá cobrir a base e a área lateral. A área da base, já calculamos, é $A_{base} = 6,25\ \pi$ cm². A área lateral, acabamos de calcular, é $A\iota = 16,25\ \pi$ cm². Assim, a área total será de $A_{total} = A_{base} + A\iota = 6,25\ \pi + 16,25\ \pi$ cm². Se consideramos $\pi \cong 3,14$ teremos uma área total de aproximadamente 70,65 cm² . De posse desse valor e do custo por centímetro quadrado de papel, o empresário poderá calcular o custo da embalagem de cada guarda chuva de chocolate.

Finda esta parte do problema, vamos para a parte seguinte: calcular o volume de cada um dos guarda chuvas de chocolate.

Aqui, poderíamos fazer uma analogia: como i) o volume da pirâmide é igual a 1/3 do volume do prisma que tem a mesma base e altura e ii) estamos considerando um cone como uma "pirâmide" de base circular, então o volume do cone também será 1/3 do volume do prisma de mesma base e altura. Logo,

$$V_{cone} = \frac{1}{3} . A_{base} . h$$

onde A_{base} é a área da base e *h* é a altura.

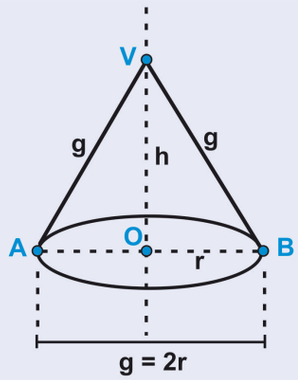
No entanto, é muito importante fazer uma ressalva matemática a este tipo de raciocínio: por mais que uma analogia como essas pareça certa – e, como é o caso, até dê resultados certos – ela não é um método considerado confiável, justamente pela quantidade de vezes que nos leva a conclusões aparentemente verdadeiras mas que, ao fim, podem estar completamente erradas. Assim, matematicamente, valem mesmo as demonstrações – e repetimos aqui o que dissemos anteriormente: como tratar das demonstrações nos faria gastar muito tempo, ficamos com a fórmula e recomendamos aos interessados nos detalhes da demonstração que deem uma olhada no que indicamos no boxe a seguir.

Uma maneira de chegar à fórmula do volume do cone é usando o cálculo diferencial e integral, recurso matemático ensino superior. Outra é estabelecendo uma interessante proporção entre os volumes do cilindro, da semi-esfera e do cone, que remonta ao século III antes de Cristo. O vídeo, da coleção Matemática Multimidia, da Unicamp, está disponível no link: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040

Isto posto, a solução da segunda parte do problema – a saber, calcular o volume do cone do guarda chuva de chocolate – fica bem tranquila. Temos que $V_{cone} = \frac{1}{3} . A_{base} . h$, onde A_{base} é a área da base e h é a altura. A altura, já sabemos, é de 6 cm. A área da base também foi calculada anteriormente e vale $V_{base} = 6{,}25\ \pi\ cm^2$. Assim, o volume do cone de chocolate é de $V_{cone} = \frac{1}{3} . 6{,}25 . \pi . 6 = 12{,}5\ \pi\ cm^3$. Se consideramos $\pi \cong 3{,}14$, teremos que o volume de um cone de chocolate é de aproximadamente 39,25 cm^3. Se lembrarmos que um centímetro cúbico é igual a um mililitro e tivermos o custo por litro de chocolate, poderemos calcular o custo de um cone.

E que tal algumas atividades?

Cone equilátero é um cone reto cuja seção meridiana (plano que contém a reta que passa pelo vértice e pelo centro do círculo) é um triângulo equilátero, conforme mostra a figura a seguir.



Sabendo que o raio deste cone é de 1 cm determine:

a. A área da base do cone,

b. A área lateral do cone

c. A área total do cone

d. o volume do cone

Atividade 6

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, gente! Finalizamos mais uma aula. Desta vez, conversamos sobre os principais elementos, as áreas e os volumes de cones e pirâmides, assunto que tem interessado à humanidade desde o Egito antigo e da Grécia antiga – e olha que isso faz tempo!

Resumo

- Uma pirâmide é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um polígono e a outra pertence a um ponto V exterior ao polígono.
- O polígono é chamado de base da pirâmide e o ponto externo V de vértice da pirâmide.
- A área de uma pirâmide é dada pela soma da área da base com a área lateral: $A_{total} = A_{base} + A\text{ı}$.
- A área da base é a área do polígono e a área lateral é a soma das áreas dos triângulos que se formam conectando cada lado do polígono ao vértice.
- O volume de uma pirâmide é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3} . A_{base} . h$.
- Um cone é um sólido formado pelo conjunto de segmentos em que uma das extremidades pertence a um círculo e a outra pertence a um ponto V exterior ao círculo.
- O círculo é chamado de base do cone e o ponto externo V de vértice da pirâmide.

- A área de um cone é dada pela soma da área da base com a área lateral: $A_{total} = A_{base} + A\iota$
- A área da base é a área do círculo de raio r : $A_{base} = \pi r^2$
- A área lateral é calculada via regra de três:

  Área do setor – Comprimento do arco

  $\pi g^2 - 2\pi g$

  $A_l - 2\pi r$

  Onde *g* é a geratriz do cone.
- O volume de um cone é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3} . A_{base} . h$

Veja ainda

Para saciar sua curiosidade indicamos os seguintes endereços:

Em http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf podemos ver a reprodução do argumento original de Arquimedes para mostrar as relações entre o volume do cilindro, o do cone e o da esfera. É muito interessante, vale a visita

E em http://www.telecurso.org.br/matematica/?Ypage=2 – no site oficial do Telecurso 2000 – podemos encontrar as aulas de matemática do ensino médio. A aula 65 é exatamente sobre o volume de pirâmides, esferas e cones.

Referências

Livros

- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N., *Matemática ciência e aplicações*, vol.1, Ed Saraiva.
- Boyer, Carl B. *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher.
- Eves, Howard, *Introdução a história da matemática*, Ed. Unicamp.

Imagens

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=787442

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1114076

Atividades 1

a. 7

b. pirâmide hepatagonal

c. 7

d. 7

Respostas das Atividades

Atividade 2

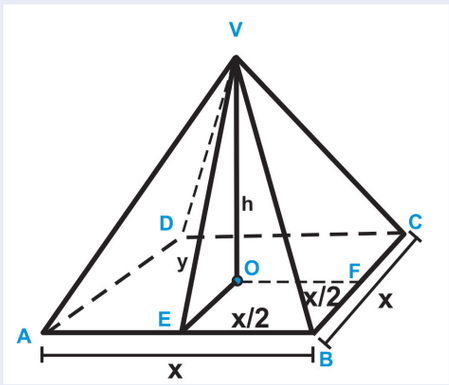
a. n – 1

b. n – 1

c. n – 1

Atividade 3

O segredo aqui está em montar e visualizar a pirâmide a partir do esquema. Vocês conseguiram? Esperamos que sim! Vejam aí:

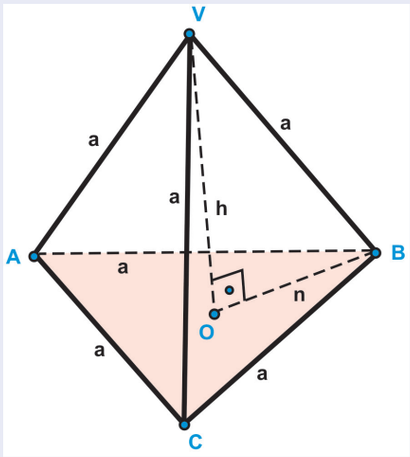


Como a pirâmide é regular, i) o polígono ABCD é um quadrado e O é seu centro ii) a altura h da pirâmide (segmento VO) passa justamente pelo centro O do quadrado e iii) a altura y do triângulo VAB (segmento VE) passa pelo meio do lado AB (ponto E). Segue daí que o triângulo VOE é retângulo. O tamanho do segmento VE é justamente o valor y, 50 cm. Já o tamanho do segmento OE é justamente x/2, ou seja, 40 cm (EOFB é um quadrado e BE é a metade do lado do quadrado da base, que vale x). Assim, aplicamos o teorema de Pitágoras e calculamos: $(VO)^2 + (OE)^2 = (VE)^2$; $h^2 + 40^2 = 50^2$; $h^2 + 1600 = 2500$; $h^2 = 2500 - 1600$; $h = \sqrt[2]{900}$; $h = 30$ cm.

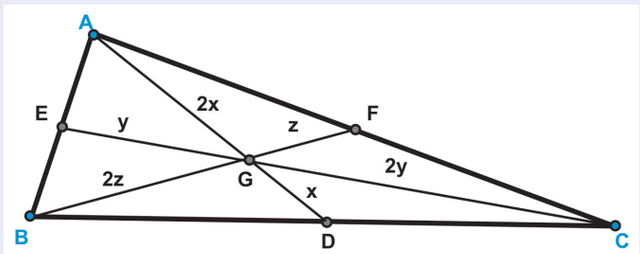
Respostas das Atividades

Atividade 4

Lembrando que um tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as arestas (tanto as da base quanto as laterais) são congruentes. Como foi dada a densidade para determinarmos a massa precisamos saber o valor do volume, lembrando que $d = \frac{m}{v}$, onde d é a densidade, m a massa e v o volume. Calculemos então o volume do tetraedro $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$ (*), vejamos a figura:



Aqui, para o cálculo de *n*, uma pequena lembrança da Geometria Plana: em qualquer triângulo as medianas (segmento com um extremo em um vértice e o outro no ponto médio do lado oposto) cortam-se na razão de 1 para 2. Por exemplo, seja ABC um triângulo qualquer e AD, BF e CE suas medianas e G a interseção destas medianas.



A distância de G aos pontos médios é sempre um terço das respectivas medianas e a distância de G aos vértices é sempre dois terços das respectivas medianas. No caso particular do triângulo equilátero as medianas serão as alturas também.

Respostas das Atividades

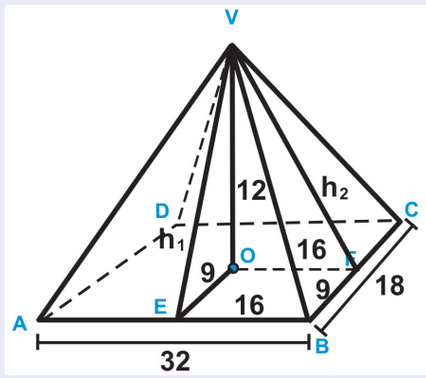
Como o triângulo ABC é equilátero, já vimos que $n = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (dois terços da altura de um triângulo equilátero.

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo VOB, temos: $a^2 = h^2 + n^2$, substituindo o valor de n temos:

$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$, ou seja, $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}$. Assim $h^2 = \frac{2a^2}{3}$, isto é, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (aliás, esta é a fórmula da altura de um tetraedro regular de aresta a). Como $a = 6$ cm então $h = 2\sqrt{6}$ cm (**). A área da base é a área de um triângulo equilátero de lado a, então $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, substituindo o valor de a, temos: $A_b = 9\sqrt{3}$ cm² (***). Substituindo (**) e (***) em (*), temos: $V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}$, ou seja, $V = 18\sqrt{2}$, substituindo $\sqrt{2} = 1{,}4$, chegamos ao resultado V = 25,2 cm³. Para determinarmos a massa devemos multiplicar a densidade pelo volume, assim $m = 2{,}60 \cdot 25{,}2$. Logo, $m = 65{,}62$ g.

Atividade 5

Começamos com a figura



Sabemos que a área total da pirâmide é $A_{total} = A_{base} + A_{\iota}$

A área da base é justamente o a área de um retângulo de 18 cm por 32 cm: A_{base} = 18*x*32 = 576 cm^2. Como a base é retangular, a área lateral é a soma das áreas de dos triângulos VAB, VBC, VCD, VDA, iguais dois a dois. Os triângulos VAB e VCD têm base 32 e altura h_1. Já os triângulos VBC e VDA têm base 18 e altura h_2. Como a área de um triângulo é a metade do produto da sua base pela sua altura e já conhecemos os valor de todas as bases, precisamos agora conhecer os valores das alturas, h_1 e h_2. Para isso, aplicaremos o teorema de Pitágoras nos triângulos VOE e VOF. O triângulo VOE tem como hipotenusa h_1 – confira na figura – e como catetos a altura da pirâmide, 12 cm, e o segmento OE. Como as arestas laterais são congruentes, o segmento VO incide justamente sobre o centro do retângulo, e os segmentos OE e OF têm, respectivamente, metade do tamanho dos lados BC (idêntico a AD) e AB (idêntico a CD). Assim OE= 9 e OF = 16. Assim, para o triângulo VOE o teorema de Pitágoras se escreve

$OE^2 + VO^2 = h_1^2$, $9^2 + 12^2 = h_1^2$, $81 + 144 = h_1^2$, $h_1 = \sqrt{255}$ 15. Já para o triângulo VOF o teorema de Pitágoras se escreve $OF^2 + VO^2 = h_2^2$, $16^2 + 12^2 = h_2^2$, $256 + 144 = h_2^2$, $h_2 = \sqrt{400} = 20$

Assim, o triângulo VAB tem área de ½ x 32 x 15 = 240 cm^2. Mesma coisa para o triângulo VDC. Já o triângulo VBC tem área de ½ x 18 x 20 = 180. Mesma coisa para o triângulo VAD. Somando os quatro, teremos que $A_{lateral}$ = 2 x 240 + 2 x 180 = 480 + 360 = 840. Como $A_{total} = A_{base} + A_l$, teremos A_{total} = 576 + 840 = 1416 cm^2. Multiplicado pelos 100 enfeites, teremos 141600 cm^2 = 14,16 m^2.

Atividade 6

a. A área da base do cone

Como a base é um círculo, sua área é $A_b = \pi \cdot r^2$, ou seja, $A_b = \pi \cdot 1^2$. Portanto, $A_b = \pi$ cm^2

b. A área lateral do cone

Usando a regra de três, sabendo que g = 2·1=2 cm, temos:

Área do setor	Comprimento do arco
$\pi \cdot 2^2$	$2 \cdot \pi \cdot 2$
A_l	$2 \cdot \pi \cdot 1$

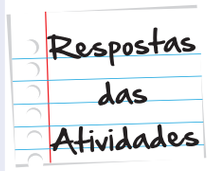
Assim $A_l = \frac{4\pi \cdot 2\pi}{4\pi}$, logo $A_l = 2\pi$ cm^2

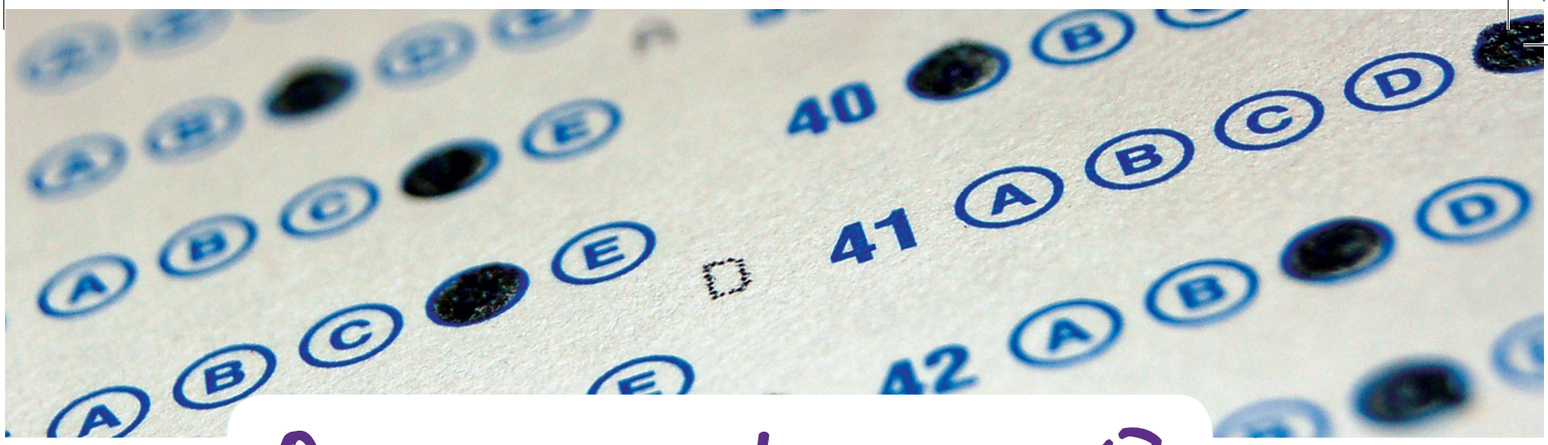
c. A área total do cone

A área total é $A_t = A_b + A_l$, ou seja, $A_t = \pi + 2\pi$. Logo, $A_t = 3\pi$ cm^2.

d. o volume do cone

O volume é calculado pela fórmula $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$. A área da base já foi calculada, temos que calcular h, ou seja, a altura do cone. Como o cone é reto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOB, temos: $h^2 = g^2 - r^2$. Substituindo os valores: $h^2 = 2^2 - 1$, ou seja, $h = \sqrt{3}$ cm. Temos o volume: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{3}$. Logo o volume do cone é $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3.





O que perguntam por aí?

Questão 1 (Unirio – RJ)

Um engenheiro está construindo um obelisco de forma piramidal regular, onde cada aresta da base quadrangular mede 4 m e cada aresta lateral mede 6 m. A inclinação entre cada face lateral e a base do obelisco é um ângulo α, tal que:

Dicas:

I. O ângulo α é o ângulo entre o apótema da base e o apótema da pirâmide)

II. Quando aumentos os valores de um ângulo a tangente deste ângulo (entre 0° e 90°) sempre aumenta.)

a. $60° < \alpha < 90°$

b. $45° < \alpha < 60°$

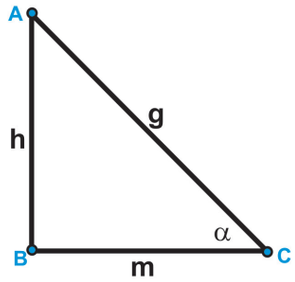
c. $30° < \alpha < 45°$

d. $15° < \alpha < 30°$

e. $0° < \alpha < 15°$

Resposta: Letra A.

Comentário: O ângulo α é o ângulo formado pelo apótema da pirâmide com o apótema da base, destacamos assim o triângulo que contém este ângulo.



Calculando h obtemos, $h = 2\sqrt{7}$, o apótema da base é m = 2, então $tg\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$, como a tangente de um ângulo que está entre 0° e 90° sempre aumenta e como $tg60° = \sqrt{3}$ então α > 60°, alternativa A.

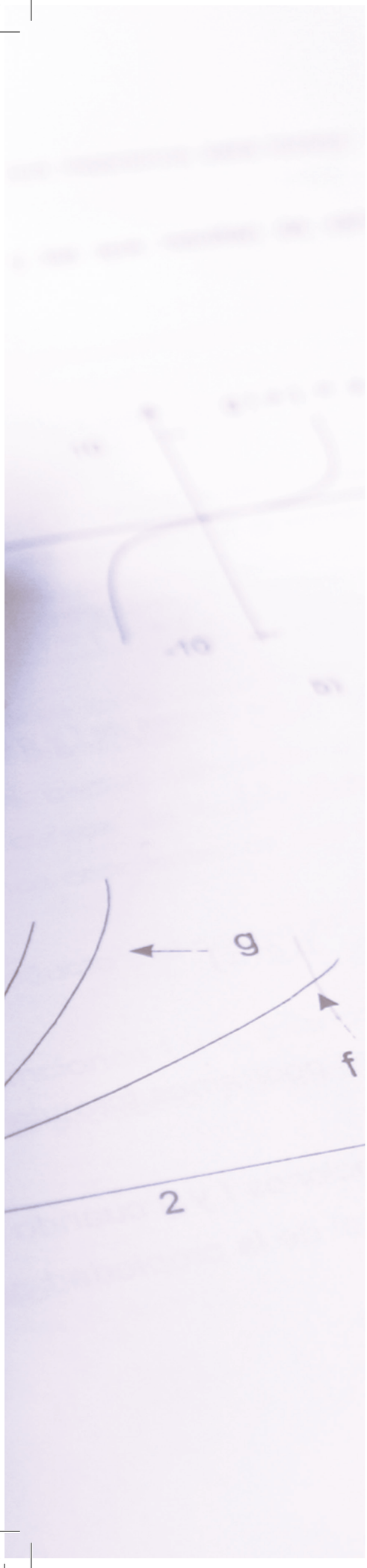
Questão 2 (Cesgranrio – RJ)

Uma folha de papel colorido, com a forma de um quadrado de 20 cm de lado, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm e apótema da base medindo 5 cm. Após ter concluído essa tarefa, e levando-se em conta que não houve desperdício de papel, a fração percentual que sobrará dessa folha de papel corresponde a:

a. 20%
b. 16%
c. 15%
d. 12%
e. 10%

Resposta: Letra E.

Comentário: Usando a fórmula $g^2 = h^2 + m^2$, obtemos g = 13 cm. A área da base é 100 cm^2 e a área lateral é 260 cm^2 assim temos que a área total é de 360 cm^2, sobrou portanto 40 cm^2 de papel o que corresponde a 40/400, ou seja 10/100, 10%, alternativa E.



Geometria Espacial: esferas

Para início de conversa...

Um dos mais populares esportes do mundo é o Futebol. Apesar de sua prática ter sido introduzida em nosso país por Charles Miller em 1894, existem registros da prática de atividades similares ao futebol moderno desde 3000 anos aC.

Conta-se que na China os soldados após as batalhas disputavam partidas utilizando as cabeças dos adversários mortos como bolas. Com o passar do tempo utilizaram bolas de couro revestidas de cabelo.

Você deve torcer para algum time, e vibra quando o atacante do seu time consegue fazer a bola transpor a meta adversária. Este ato, no futebol, se chama gol.

Como você deve saber, o maior jogador de todo os tempos é um brasileiro. Edson Arantes do Nascimento, o Pelé. Um mineiro nascido na cidade de Três Corações. Ele foi campeão do mundo aos 17 anos e é reconhecido como o atleta do século, o mais vitorioso e competente esportista de todos os tempos.

Certa, vez, em uma entrevista ele disse: "Se eu pudesse me chamaria Edson Arantes do Nascimento Bola. Seria a única maneira de agradecer o que ela fez por mim..." Mas por que ele enaltece tanto a bola? Bem, se você já viu uma partida de futebol, este esporte, capaz de mover milhões de pessoas, apaziguar nações e também provocar brigas acirradas, gira em torno de um único objeto. A bola.

Figura 1: Uma bola de futebol.

Agora imagine, o atacante de seu time, nos acréscimos do segundo tempo quando a partida está zero a zero. Corre livre de marcação para receber a bola e a bola não pode ser passada porque... ela não gira. Que tristeza. Ainda bem que não é assim.

A bola de futebol precisa ter uma característica fundamental. Ela deve girar sobre seu próprio eixo. Conseguem imaginar uma bola que não seja esférica.

Objetivos desta unidade:

- Reconhecer os elementos de uma esfera
- Calcular a área da superfície esférica e o volume da esfera.
- Calcular a área de um fuso esférico e o volume de uma cunha esférica

Seção 1
O que é uma esfera?

Você já ouviu o termo "esfera"? Sabe dizer exatamente ou, pelo menos, com mais precisão, o que é uma esfera? As figuras seguintes representam objetos muito comuns em nosso cotidiano cuja forma se assemelha ao que chamamos de esferas. Você sabe dizer o que eles têm em comum?

Figura 2: Um limão, uma lima e uma laranja; bolas de natal; bolas de boliche e bola de futebol.

E então, conseguiu descrever precisamente o que é uma esfera? Conseguiu identificar seus elementos principais? Aliás, você sabe como calcular a área e o volume de uma esfera? Nas próximas seções iremos responder a estas perguntas!

Vendo esferas onde não podia ver...

Vamos agora refletir um pouco sobre os objetos que vimos representados pelas figuras das páginas anteriores? O que eles têm em comum uns com os outros?

Bom, imagine se cortássemos ao meio todos estes "objetos". O que veríamos na parte cortada? Um círculo, concordam? Vejam na figura seguinte.

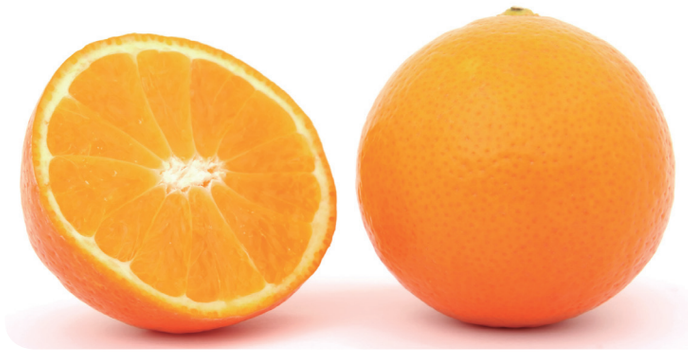


Figura 3: À direita, uma laranja inteira. À esquerda, a laranja cortada exatamente ao meio.

E se não cortarmos ao meio, se cortarmos em qualquer outra parte, o que veremos na seção cortada? São círculos também, só que menores que os que podemos ver quando imaginamos os cortes pelo meio. Vejam na figura seguinte:

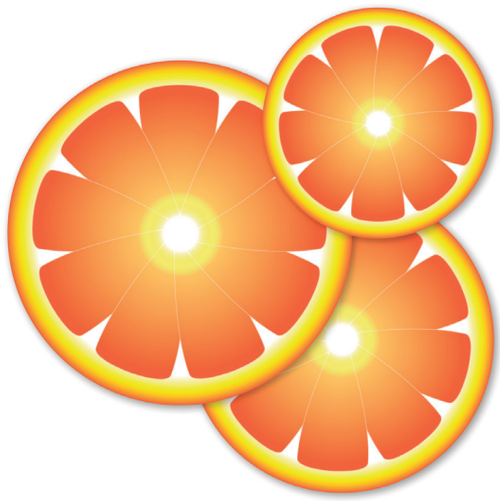


Figura 4: Seções produzidas quando cortamos uma laranja sem passar exatamente pelo seu centro.

Pois é isso o que todos têm em comum! Quando os cortamos com um plano em qualquer lugar, o que vemos são círculos!

Agora, vamos voltar ao assunto que é paixão nacional. O futebol. Abaixo, segue a imagem da bola de futebol que nos referimos no inicio. Assim, poderemos entender mais algumas coisas sobre a definição de esfera.

No passado a bola de futebol era construída com couro animal. Atualmente existem materiais diversos com os quais é possível fazer este objeto, o principal deles é o couro sintético. Elas são cheias de ar para que possam se manter infladas

Figura 5: Outra bola de futebol, nos mesmos moldes da primeira: uma esfera de vidro contendo gás com baixa pressão e um eletrodo no centro.

A capa de couro sintético constitui numa superfície curva, no formato de uma bola. Esta superfície recebe o nome de casca esférica. Sua função é a de limitar o ar necessário para manter o objeto inflado que vimos na figura anterior.

Se adicionarmos a capa de couro – que, repetimos, é apenas uma borda, uma casca – tudo aquilo que está em seu interior, teremos o que chamamos de esfera.

Importante

Casca esférica é apenas a borda – em nosso caso, a superfície curva de couro que tem o formato de uma bola. Esfera é o conjunto que contem a casca esférica e tudo que está em seu interior – em nosso caso, capa de couro mais o ar.

Podemos fazer uma analogia com uma laranja com formato redondo, esférico. A casca da laranja é a superfície esférica enquanto toda a laranja (casca mais gomos) é a esfera.

Uma propriedade muito importante é que, em toda a esfera, há sempre um ponto central, sua distância até a cada ponto da casca esférica (capa de couro) é constante.

Podemos formalizar um pouco os conceitos até agora discutidos da seguinte forma:

Dado um ponto O e uma distância r, chamamos de esfera ao conjunto de pontos cuja distância até o ponto O é menor ou igual ao raio r. Se essa distância for exatamente igual a r, chamamos o conjunto de pontos de superfície da esfera, pois, neste caso, estaremos tomando somente a "casca" da esfera (em cinza escuro). Se a distância for menor do que r, teremos apenas o "miolo" da esfera (em cinza claro). Vejam na figura seguinte

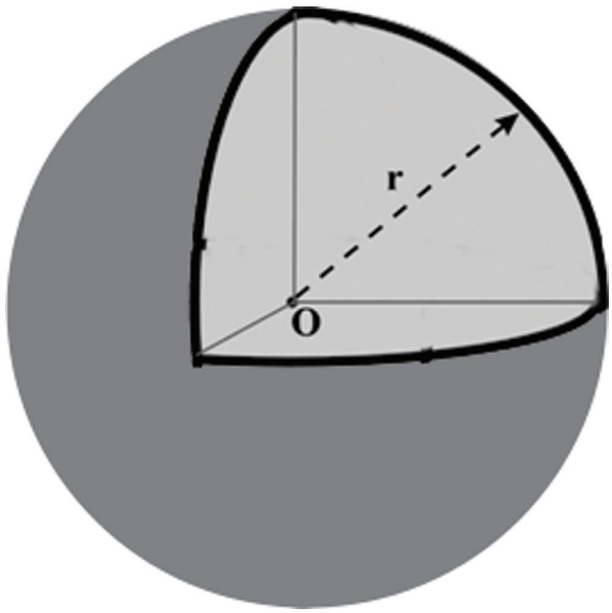
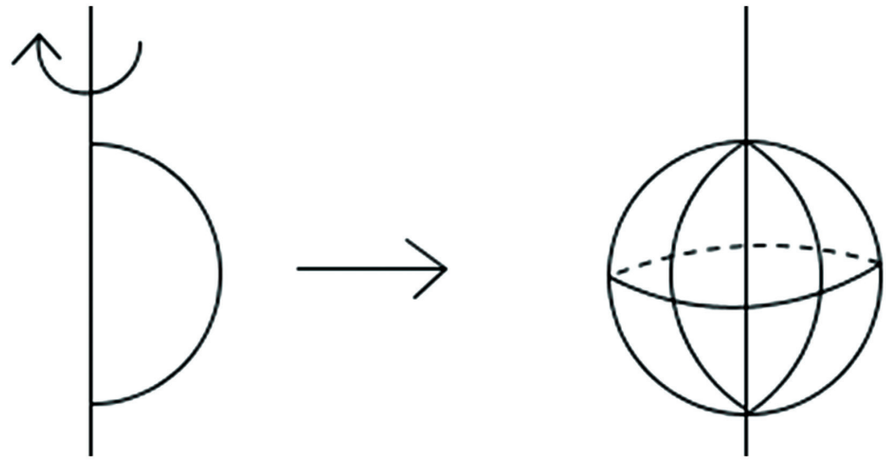


Figura 6: Esfera, com centro *O* e raio *r* destacados.

A superfície esférica e a esfera podem ser definidas também como superfície ou sólido de revolução, respectivamente. Se girarmos uma semicircunferência completamente – ou seja, 360º – em torno de um eixo que contém seu diâmetro obtemos uma superfície esférica.



semicircunferência superfície esférica

Figura 7: Superfície esférica gerada por rotação da semicircunferência em torno do eixo.

Vale relembrar aqui que a circunferência é, por assim dizer, apenas a borda do círculo – e que semicircunferência é metade de uma circunferência. Agora, se girarmos um semicírculo completamente – ou seja, 360º – em torno de um eixo que contém o seu diâmetro, obteremos uma esfera. Lembramos aqui que um semicírculo é a metade de um círculo – que é a figura completa, miolo mais borda.

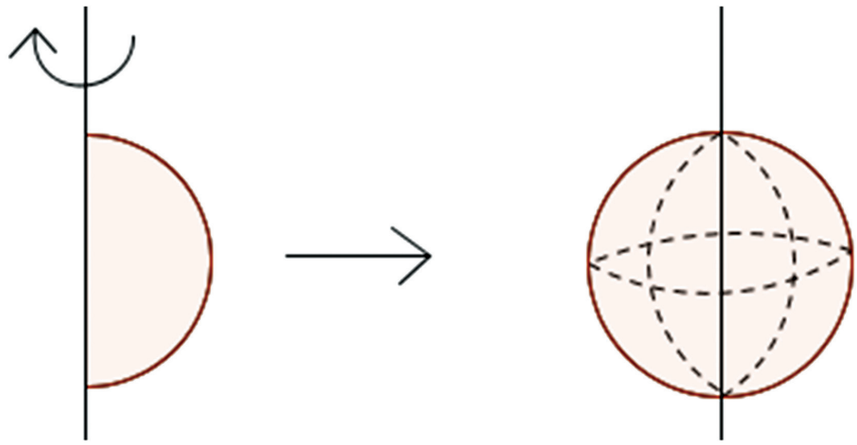


Figura 8: Esfera gerada por rotação do semicírculo em torno do eixo.

Dê exemplos de objetos reais que podem ser considerados superfícies esféricas e outros que podem ser considerados esferas.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção de uma esfera

Alguém quer um coco aí?

Figura 9: Também podemos considerar que um coco tem uma forma que se assemelha à de uma esfera.

O coco é uma fruta muito apreciada pelos frequentadores das praias de todo o nosso estado. Os vendedores de coco têm uma habilidade incrível para cortá-lo e deixa-lo tal como na imagem anterior

Se considerarmos um coco como uma esfera, o tampo retirado pelo vendedor para que a gente possa beber sua água é chamado de seção da esfera. Como havíamos comentado no início desta unidade, esta seção (sendo plana) deixa uma marca circular no coco. Será que a gente consegue saber mais informações sobre essa seção circular?

Vamos dar uma olhada no esquema a seguir:

Se tomarmos o coco como uma esfera de raio R e centro O e fizermos um corte (com o facão do vendedor, para abrir o coco), como mostra a figura abaixo, então a interseção deste plano com a esfera será um círculo de raio R' e centro O'.

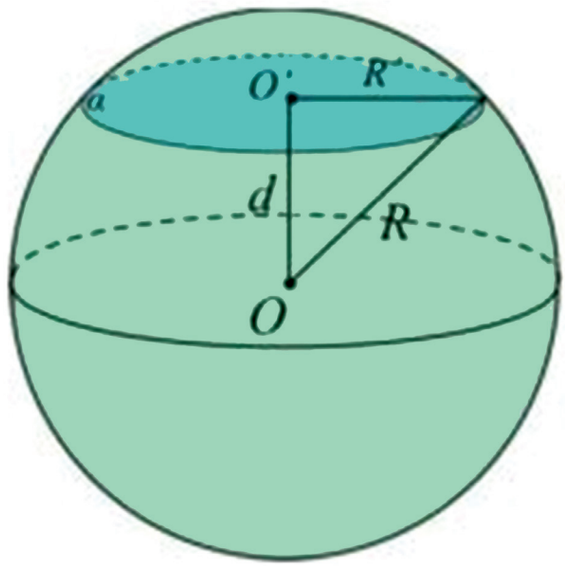
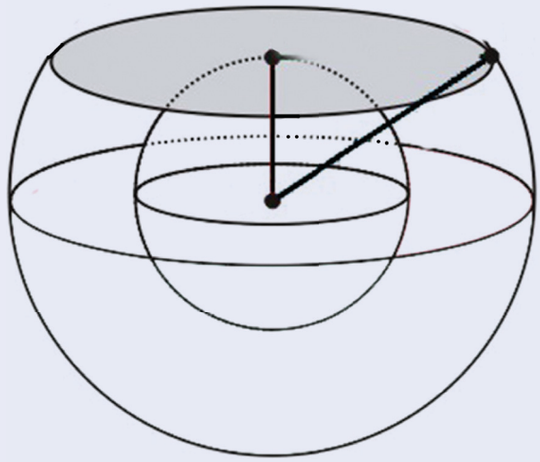


Figura 10: Esfera com centro *O*, raio R e seção *α*, com centro *O'* e raio *R'* destacados.

Desta figura podemos obter a seguinte relação: $R^2 = d^2 + R'^2$ (teorema de Pitágoras), onde d é a distância do ponto O ao ponto O'.

Atividade 2



Observe o coco representado na figura. Note que ele é constituído de uma parte exterior, uma parte interior e, bem no centro, há uma outra esfera onde fica a água. Vamos considerar que as duas esferas são concêntricas (têm o mesmo centro) e que a menor tem raio igual a 6 cm. Um vendedor passa um facão de forma plana e tangente à esfera menor. Na esfera maior, fica determinada uma seção – marcada em cinza – cuja área é igual a $64\pi cm^2$. Determine o raio *r* da esfera maior.

Anote suas respostas em seu caderno

Os elementos de uma esfera

Na seção 1.1, falamos um pouco sobre os elementos principais de uma esfera, a partir da bola de futebol que encanta tantos brasileiros. Agora, vamos dar uma olhada de uma maneira mais formal nestes elementos e aproveitar o ensejo para apresentar outros. Acompanhe na figura a seguir!

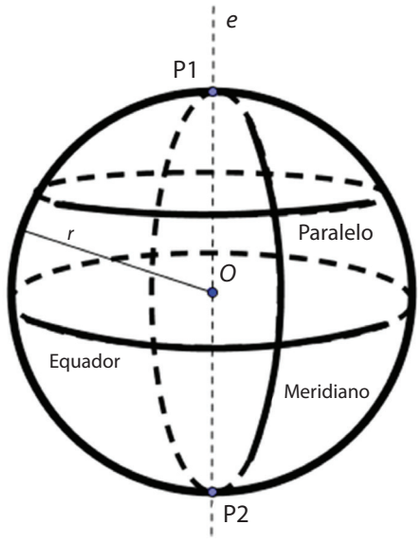


Figura 11: Esfera com os principais elementos destacados.

Considerando a esfera acima temos os seguintes elementos:

- O ponto **O** é o centro da esfera
- O raio ***r*** é a distância do ponto da superfície da esfera até o centro
- O eixo ***e*** é a reta que contém o diâmetro
- Pólos **P1** e **P2** são as interseções da superfície com o eixo
- Equador é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo e que contém o centro da esfera.
- Paralelo é uma seção (circunferência) perpendicular ao eixo e que não contém o centro da esfera.
- Meridiano é uma seção (circunferência) que contém o eixo.

Seção 2
Como calcular área e volume de esferas?

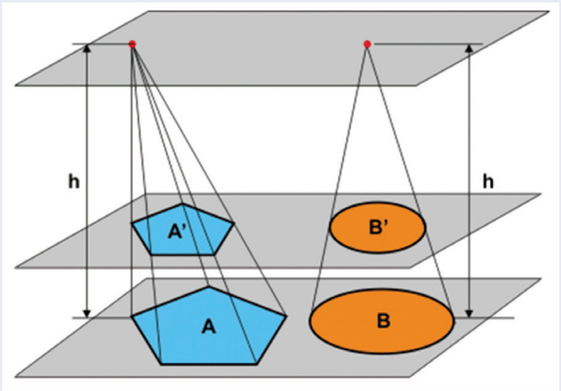
Volume da esfera

Qual seria a quantidade necessária de ar para que a bola de futebol fique inflada? Como podemos saber o quanto de gás pode ser colocado dentro da bola de futebol para mantê-la em condições de uso? Qual é essa capacidade? Para responder a essas perguntas, precisamos calcular o volume de uma esfera. Volume, convém lembrar, é a capacidade interna de um objeto, seja ele de que formato for.

Como a esfera é um corpo redondo, não podemos fazer aproximações por cubos como fazemos em um paralelepípedo. Então como podemos calcular seu volume? Uma forma de realizarmos este cálculo é usarmos o princípio de **Cavalieri** estudado anteriormente e compararmos as seções de uma esfera com as de uma anticlépsidra.

Cavalieri

O princípio de Cavalieri foi estabelecido no século XVII pelo matemático Italiano Bonaventura Cavalieri e, até os dias de hoje, serve como base para uma grande quantidade de estratégias de cálculo de volumes de sólidos. De acordo com esse princípio, sólidos que 1) tenham a mesma altura e 2) tenham a mesma área de seção transversal para todas as alturas intermediárias terão o mesmo volume. Na figura acima, como os dois sólidos têm a mesma altura h, basta que as áreas das seções A´e B´ sejam sempre iguais para que os sólidos tenham o mesmo volume.



Uma anticlépsidra, antes que você pergunte, é um sólido geométrico obtido retirando uma clépsidra de dentro de cilindro equilátero. E, antes que você diga que a explicação mais atrapalhou do que ajudou, lembramos a você que uma clépsidra é o sólido obtido com a união de dois cones invertidos. Lembramos também que um cilindro equilátero é aquele cujo diâmetro da base é igual à altura. Veja na figura

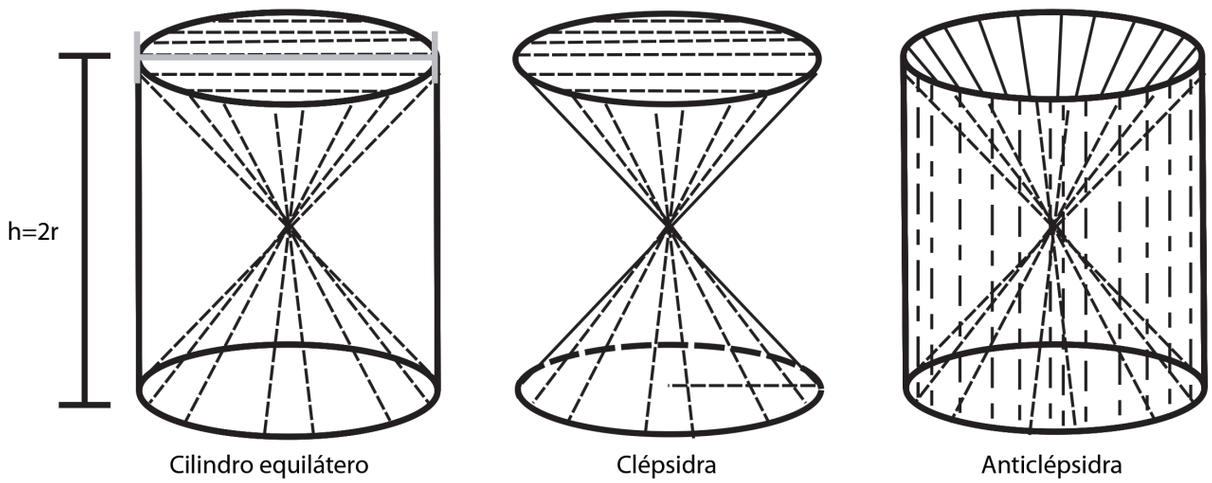


Figura 12: Cilindro equilátero, clepsidra e anticlépsidra.

Então vamos lá: o sólido à esquerda é um cilindro equilátero, cuja altura h é igual ao diâmetro 2r da circunferência da base. O sólido do centro é a clepsidra, união de dois cones invertidos, cujas bases coincidem com as do cilindro. E, se fizéssemos uma espécie de escultura no cilindro, removendo exatamente a parte da clepsidra, o sólido resultante seria a anticlépsidra, representada na direita da figura. Entenderam? Ótimo!

Agora, você pode estar se perguntando, e muito justamente, como é que nós vamos fazer para juntar uma esfera com uma anticlépsidra para usar o princípio de Cavalieri – afinal, são sólidos a princípio bem diferentes! Nossa resposta é franca: a forma de relacionar a esfera com a anticlépsidra nem é assim tão complexa, mas envolve umas contas que fariam com que nossa aula perdesse seu rumo.

Assim, vamos combinar o seguinte: para efeito da nossa aula, o importante é entender que, após alguns cálculos, podemos demonstrar que o volume de uma esfera é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Caso você tenha curiosidade acerca da demonstração desta fórmula, consulte o boxe a seguir.

A interessante demonstração da fórmula do volume da esfera via princípio de Cavalieri tem por base o fato de que a área da seção transversal da anticlépsidra é sempre idêntica à área da seção transversal de uma esfera de mesma altura. Ela está bem detalhada no livro "Fundamentos da Matemática elementar, volume 10", escrito por Oswaldo Dolce e José Nicolau Pompeo e publicado pela Editora Atual. Outra boa dica é procurar o site http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1601.htm#GEO160102.

Saiba Mais

Vamos dar uma olhada nesta fórmula: o volume V da esfera vale 4/3 (uma constante) multiplicado por π (outra constante), multiplicado pelo valor do raio elevado ao cubo. Assim, podemos afirmar o volume de uma esfera depende exclusivamente da medida do seu raio. Isto é muito simples, não acham?! Vamos aqui pensar uns dois problemas e fazer umas contas para conferir.

O primeiro problema é o seguinte: se duplicarmos o raio de uma esfera, seu volume fica duplicado também? O que você acha? A resposta é sim?

Bom, a verdade é que a resposta é não. Acompanhe a gente aqui: se uma esfera tem raio R então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$, ok? Então se duplicarmos o raio desta esfera teremos um novo volume $V' = \frac{4}{3}\pi \cdot (2R)^3$, ou seja, $V' = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

Isto significa que o volume desta esfera fica multiplicado por 8.

O segundo problema é assim: três esferas de gelo, todas de raio 2cm, são derretidas. Julião comprou um recipiente com raio três vezes maior que as esferas de gelo para que, ao final da fusão, toda a água fosse despejada nele preenchendo-o completamente. Julião conseguiu o que pretendia?

Figura 13: Cuba de gelo.

Bom, acompanhe as contas aqui: o volume de cada esfera de gelo é $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, ou seja, $v = \frac{32}{3} \cdot \pi$. Como temos 3 esferas de gelo então o volume total de água produzido foi de $v = 32\pi\ cm^3$. Por outro lado, o volume do recipiente comprado por Julião é $v = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3$, ou seja, $v = \frac{216}{3} \cdot \pi = 72.\pi$ cm^3. Assim, o recipiente comprado por Julião não foi completamente preenchido – e, se lembramos que a metade de 72 é 36, poderíamos ainda dizer que a água resultante do derretimento das 3 esferas, de volume total igual a 32 π cm^3, não foi suficiente para preencher nem a metade dos 72 π cm^3 do recipiente comprado por Julião. Para calcular o raio do recipiente que seria completamente preenchido pela água advinda do derretimento das esferas, fazemos assim: para ser completamente preenchido, o recipiente precisaria ter 32π cm^3, certo? Então teríamos que $32\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, onde R é o raio do recipiente esférico. E, desenvolvendo, teríamos que $R = \sqrt[3]{24}$, ou seja,. $R \cong 2{,}89\ cm$

É importante ressaltarmos neste exemplo que ao juntarmos 3 esferas de raio 2 cm não obtemos uma esfera de raio 6cm, mas sim uma nova esfera de raio aproximadamente 2,89 cm. O que mostra que devemos tomar muito cuidado com as deduções precipitadas!

Área da esfera

E como poderíamos calcular a quantidade de couro, mesmo que de uma camada muito fina, necessário para fazer a bola de futebol? É como se quiséssemos calcular a área de toda a casca de uma laranja cortada. Em outras palavras, estamos querendo discutir sobre como podemos calcular a área de uma superfície esférica.

Aqui, seguiremos o mesmo caminho da seção sobre volume: apresentaremos uma ideia básica dessa demonstração, a fórmula – que nos interessa mais diretamente – e um box para os que se interessarem na demonstração em mais detalhes.

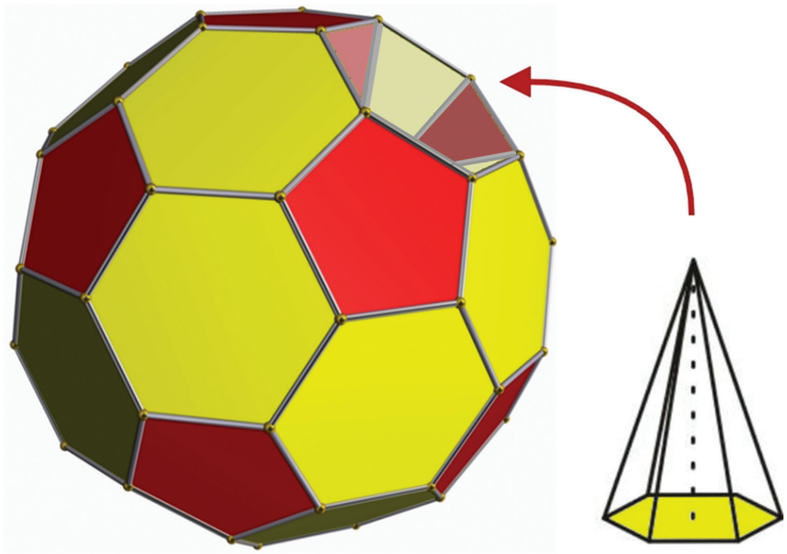


Figura 14: O icosaedro da figura pode representar uma das etapas da aproximação do volume de uma esfera pela soma dos volumes de pirâmides cujo vértice coincide com o centro da esfera e cuja base coincide com a superfície da esfera.

Muito basicamente, a ideia é tentar aproximar o volume da esfera pela soma do volume de várias pirâmides cujos vértices coincidam com o centro da esfera e cujas bases coincidam com a superfície da esfera. Evidente que, como a superfície da esfera é curva e a base da pirâmide é plana, sempre haverá uma diferença de volume. No entanto, na medida em que a quantidade de pirâmides for aumentando e sua base diminuindo, essa diferença de volume irá diminuindo. Quando a base de cada pirâmide for muito pequena – e eis o que nos interessa aqui – a área da esfera será $A = 4\pi \cdot r^2$. Curiosos em relação aos detalhes da demonstração? Vejam no boxe seguinte:

A dedução completa da fórmula da área da esfera a partir da aproximação com as pirâmides pode ser encontrada no livro "Matemática" do autor Luiz Roberto Dante, da editora Ática, volume único, na página 394 da 1ª edição. Caso queira conhece-la online, a sugestão é o site http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/09/area-da-superficie-esferica-partir-de.html.

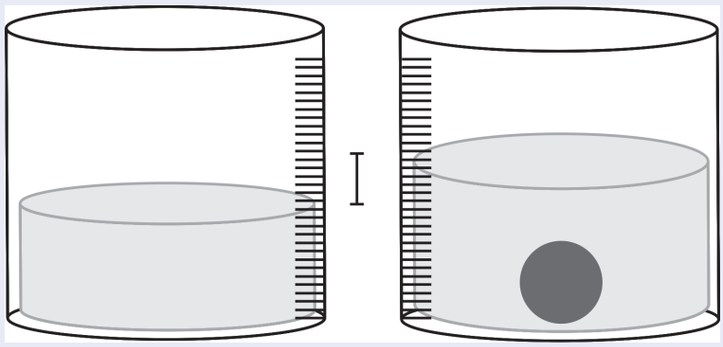
Importante

Vamos fazer juntos um exemplo? Pois bem, a situação é a seguinte. Márcio está numa festa e deseja encher uma bola com água. Para isso precisa saber aproximadamente seu volume. No entanto, ele não consegue encontrar essa informação. A única coisa que ele sabe é o diâmetro da bola: 18 cm. Será que ele tem como calcular o volume a partir do diâmetro?

Bom, como você já deve estar imaginando a resposta é sim – afinal, não usaríamos como exemplo um problema sem solução! Então veja lá: como a bola possui 18 cm de diâmetro então seu raio mede 9 cm. Usando a fórmula de volume temos: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3$. Logo $V = 972$. p. Logo, o volume é de 972.π cm^3. Se tomarmos o valor de π como aproximadamente 3,14, teremos que o volume total da bola é algo em torno de 3052 cm^3. Como 1000 cm^3 equivalem a 1 litro, a bola teria capacidade para aproximadamente 3 litros de líquido.

Entenderam? Ótimo! Que tal tentarem fazer uma atividade sozinhos agora?

Atividade 3



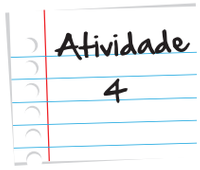
João deseja determinar o volume de um objeto de formato esférico, mas não sabe a medida do raio deste objeto e não possui nenhum instrumento para medi-lo. No entanto, ele possui um recipiente em formato cilíndrico que possui marcações de 1 em 1cm. Ele então teve a seguinte ideia: colocou água até que ela atingisse uma altura maior do que a do objeto. Depois, colocou o objeto dentro do recipiente e percebeu que, nesse instante, a superfície da água havia se deslocado 4 cm para cima. Sabendo que tal recipiente tem formato cilíndrico com raio igual a 4 cm, determine o raio do objeto esférico.

Anote suas respostas em seu caderno

Agora, imagine que em vez de saber o volume da bola, quisesse embrulhá-la? Seria possível saber a quantidade mínima de papel de que precisa? Bom, novamente a resposta é sim: se usarmos a fórmula de área temos: $A = 4 \cdot \pi \cdot 9^2$, ou seja, $V = 324\ \pi\ cm^2$, aproximadamente. Se tomarmos novamente o valor de π como 3,14, teremos que a área da superfície da esfera é de aproximadamente 1017 cm^2. Para termos uma ordem de grandeza da quantidade de papel que essa área representa, basta lembrar que a área de um quadrado com 32 cm de lado seria de 1024 cm^2. Assim, os 1017 cm^2 seriam equivalentes à área de um quadrado com um pouco menos de 32 cm de lado.

Para fechar a seção, convidamos vocês a fazerem a atividade 4.

Ao encher uma bola de aniversário, uma pessoa percebeu que esta tomou um formato esférico e, medindo com um determinado instrumento chegou a conclusão que o diâmetro da bola era de 20 cm. Determine a área da superfície desta bola.



Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Fuso e cunha

Os assuntos desta seção, trataremos a partir de uma suposição – a saber, a existência de melancias perfeitamente esféricas – e de um problema bastante concreto – a saber, os custos de um feirante. Prontos? Então vamos.

Figura 15: Melancias inteiras e cortadas.

Um problema prático

Vamos imaginar que um feirante vende melancias perfeitamente esféricas e dividiu uma delas em 10 partes rigorosamente iguais, como sugere a figura anterior. Suponha que essa melancia tem 40 cm de diâmetro. O feirante precisa saber o volume de cada parte e a quantidade aproximada de plástico necessária para embalar essa parte – mas não tem muita ideia de como fazer para encontrar estes valores. Quando soube que você está estudando matemática, veio pedir sua ajuda.

Enquanto você, educadamente, agradece, vai pensando numa maneira de sair da sinuca. Bom, a quantidade de plástico deve ser a área do sólido formado. Mas o volume...Hummm...Já sei, vou fazer uma regra de três! Aí pede papel, lápis e mais uns instantes ao amigo feirante. Diz, confiante, que já tem a solução e só vai organizar as ideias.

Para a regra de três, você lembra da rotação do semicírculo em torno do eixo, que vimos no início dessa aula. Se uma rotação de 360º vai dar um volume de $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$, então uma rotação de metade disso (180º) vai dar um volume que é justamente a metade desses $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$. Se a rotação for de um quarto do total (90°, que é um quarto dos 360°), o volume final será de um quarto do volume total (um quarto dos $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$) – e por aí vai!

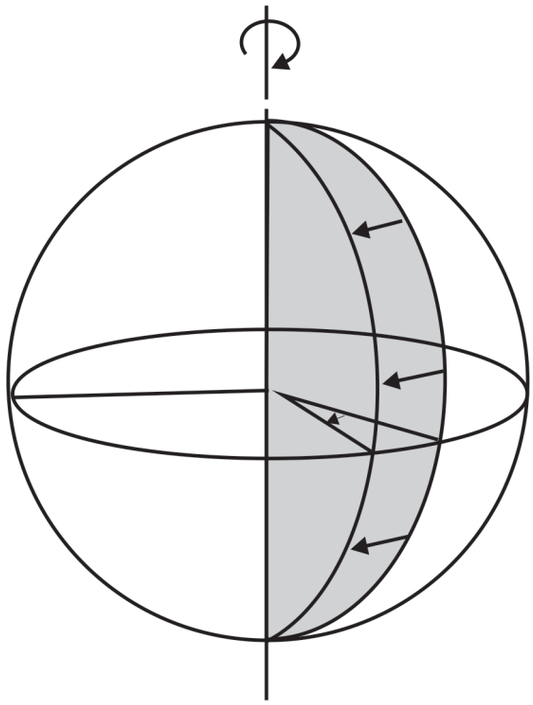


Figura 16: sólido gerado por rotação de α graus de um semicírculo em torno de um eixo que passa pelo seu diâmetro.

Assim, de uma maneira geral, para um ângulo α – veja na figura ! – teremos

Ângulo (em graus) ---------- Volume

360° ---------- $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$

α ---------- V

Neste caso, como a melancia tem 40 cm de diâmetro então R = 20 cm, e como foi dividida em 10 partes iguais então α = 36°.

Substituindo estes valores temos: $360\cdot V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 20^3\cdot 36$ ou seja, $V=\frac{3200\pi}{3}$, tomando π como 3,14, temos o volume aproximado de: $V\cong 3349$ cm³

Se lembramos que 1000 cm³ equivalem a 1 litro, teremos um volume de aproximadamente 3,3 litros.

Vencido o desafio do volume, você parte para a questão da área. Para isso, olha mais atentamente para a parte da melancia que o feirante pretende embalar. Identifica, então, três áreas – veja na figura abaixo:

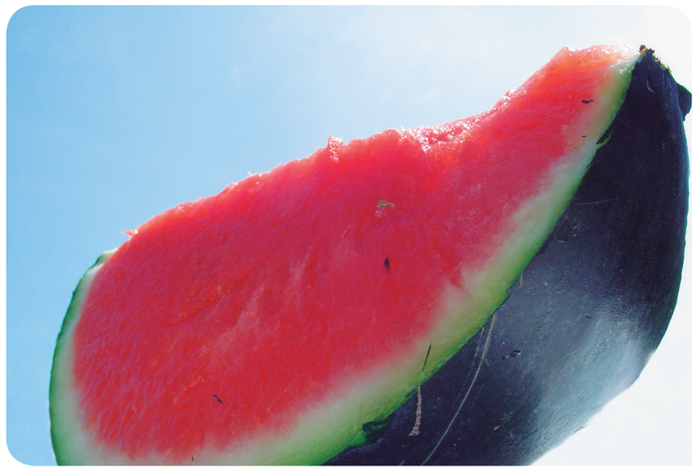


Figura 17: Fatia de melancia a ser embalada.

A primeira área é aquela vermelha e branca, do interior da melancia e que está em destaque na imagem. Fazendo aquela nossa correspondência, ela seria equivalente justamente ao semicírculo. A segunda área é aquela da casca – que, na melancia, é a parte externa, verde e branca. Já a terceira área é rigorosamente igual à primeira – parte interna da melancia, vermelha e branca. Na imagem, corresponderia, por assim dizer à parte de trás da fatia, idêntica à primeira mas oculta pelo ângulo da foto. Essa parte também corresponde a um semicírculo. Na figura seguinte, fizemos uma representação, já usando elementos matemáticos:

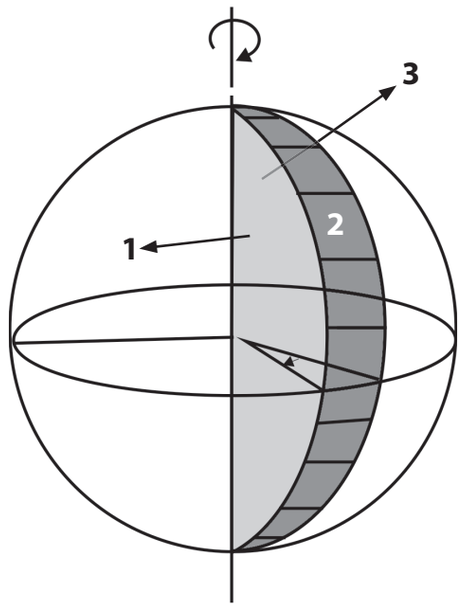


Figura 18: Sólido que representa a melancia a ser embalada: área 1, semicírculo da frente; área 2, parte da superfície da esfera e área 3 semicírculo de trás.

Então muito bem: nossa área total a ser embalada é a soma das áreas 1, 2 e 3 $A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

O primeiro movimento será o seguinte: as áreas A_1 e A_3, são dois semicírculos idênticos. E, portanto, somadas, dão um círculo inteiro, de área total igual a πR^2 – onde R é o raio do círculo. A questão é justamente a área 2. Que fazer com ela? Você pensa mais um pouco e lembra, novamente, do início dessa aula. Só que, desta vez, lembra da rotação de que a casca esférica é obtida pela rotação de 360° de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Novamente, uma regra de três !

Se uma rotação de 360° gera uma superfície de área igual a $4\pi R^2$, então uma rotação de 180° (metade da rotação total) vai gerar uma área de $2\pi R^2$ (metade da área total), uma rotação de 90° (um quarto da rotação total) vai gerar uma área de πR^2 (um quarto da área total) e assim sucessivamente. De uma maneira geral, uma rotação de α vai gerar uma área igual a A. Teremos então:

Ângulo (em graus) ---------- Área

360°- ---------- $4\pi R^2$

α ---------- A

Excelente! Agora é só inserir os valores!

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 + A_{3 =}$ círculo de raio R

Como a melancia tem 40cm de diâmetro, então R=20 cm. A área de um círculo de raio 20cm é $A_{círculo} = \pi \cdot 20^2 = 400. \pi \cdot cm^2$. Maravilha! Vamos à casca da melancia

$A_{2 =}$ área da parte da superfície esférica

Ângulo (em graus) ---------- Área

360° ---------- $4\pi R^2$

α ---------- A

Como já vimos anteriormente, o valor de α é igual a 36° (melancia de 360° dividida em 10 partes iguais) e o valor de R é igual a 20cm (melancia esférica com diâmetro igual a 40 cm). Substituindo os valores, temos:

$360A = 4 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 36$, ou seja, $A = 160\pi\ cm^2$

Assim,

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

$A_{total} = 160\ \pi\ cm^2 + 400. \pi \cdot cm^2$

$A_{total} = 560\ \pi\ cm^2$

Com $\pi = 3{,}14$ teremos que a área total a ser embalada é de aproximadamente 1758,4 cm^2 – área de um quadrado com aproximadamente 42 cm de lado.

Ufa! Quanta conta! Mas tenha certeza de que a informação que você levou ao feirante foi muito útil. Parabéns ! ! !

Conceituando

Vamos agora ver isso sob um ponto de vista mais formal? A ideia aqui é dar nomes e conceituações mais precisas aos elementos que usamos para resolver o problema anterior. O primeiro conceito é o de fuso esférico. Vamos lá?

Fuso esférico é uma parte da superfície esférica cujas extremidades estão nos pólos. Uma definição mais precisa, mais rigorosa, é a superfície obtida pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Veja na figura

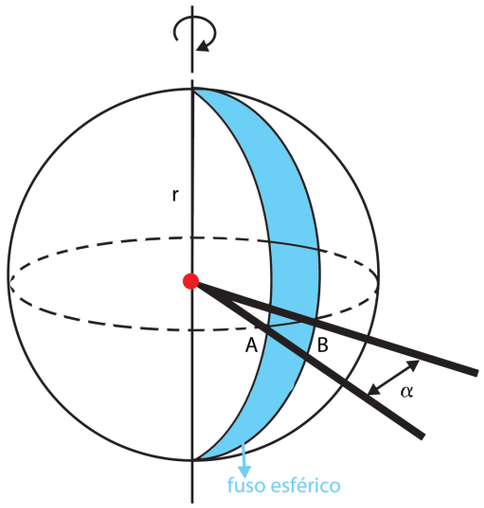


Figura 19: Esfera com fuso esférico destacado.

Para calcularmos a área do fuso esférico, devemos fazer uma regra de três que relaciona a área da superfície esférica com o ângulo da superfície esférica, ou seja, quando temos uma superfície esférica sua área é de $4\pi R^2$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da superfície esférica então teremos um certo ângulo α e portanto uma área A:

Área ---------- Ângulo (em graus)	Área ---------- Ângulo (em radianos)
$4\pi R^2$ ---------- 360°	$4\pi R^2$ ---------- 2π rad
A ---------- α	A ---------- α rad

No exemplo do feirante, o fuso esférico corresponde à casca da fatia de melancia a ser embalada. Conseguiram associar? Se não conseguiram, dêem uma olhadinha com calma nas figuras anteriores. É muito importante que vocês consigam identificar a casca da fatia com o fuso esférico. Pronto? Ótimo, vamos em frente! O próximo conceito é o de cunha esférica

Cunha esférica é uma parte da esfera cujas extremidades estão nos pólos. Percebam aqui a diferença: o fuso é uma parte da superfície, da casca esférica. Já a cunha é parte da esfera, do sólido. Para definirmos de forma mais rigorosa, podemos dizer que cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.

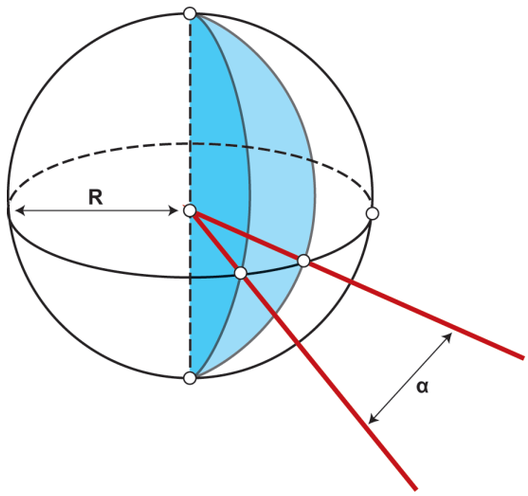


Figura 20: Esfera com cunha esférica destacada.

Para calcularmos o volume da cunha esférica devemos fazer uma regra de três que relaciona o volume da esfera com o ângulo da cunha, ou seja, quando temos uma esfera completa seu volume é de $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da esfera então teremos um certo ângulo α e portanto um volume V:

Volume	Ângulo (em graus)	Volume	Ângulo (em radianos)
$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$	360°	$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$	2π rad
V	α	V	α rad

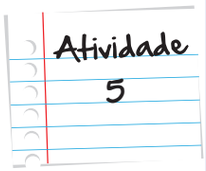
No exemplo do feirante, a cunha era justamente a fatia de melancia inteira e seu o volume era, portanto, o volume da fatia. Conseguiram ver? Muito bem!

No caso da cunha esférica podemos também calcular sua área total. Para isto, primeiramente, devemos notar que uma cunha esférica é composta da união de um fuso esférico com dois semicírculos de raios igual ao raio

da esfera. Portanto, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo: Área(cunha) = Área(fuso) + Área(círculo).

E foi justamente essa área – a área da fatia de melancia (ou, mais formalmente, a da cunha esférica) – que calculamos na segunda parte do exemplo do feirante. Viram lá?

Muito bem! E, para finalizar a aula, deixamos vocês com a Atividade 5. Um abraço e até a próxima!



Uma fruta de formato esférico foi cortada em partes iguais. Tomando uma parte, determine o ângulo da casca desta parte da fruta (fuso), sabendo que a área da superfície desta fruta é de 324π cm^2 e que a área da casca de uma das partes (fuso) é igual a 54π cm^2

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Esfera é o conjunto de pontos que estão a uma distância menor ou igual a uma distância r de um determinado ponto O.
- Superfície esférica é o conjunto de pontos que estão a uma distância igual a uma distância r de um determinado ponto O.
- O volume de uma esfera é dado pela fórmula $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
- A área da superfície esférica é igual a $A = 4\pi \cdot r^2$
- Fuso esférico é a superfície obtida pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro
- Para calcular a área A do fuso de ângulo α, fazemos uma regra de três com a superfície total da esfera:

  Ângulo (em graus) ---------- Área

  360° ---------- $4\pi R^2$

  α ---------- A

- Cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.
- Para calcular o volume V da cunha esférica de ângulo α , fazemos uma regra de três com o volume total da esfera

  Ângulo (em graus) ---------- Volume

  360° ---------- $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

  α ---------- V

- A área total da cunha esférica é igual à soma da área da fuso com a área de dois semicírculos de raios iguais ao raio da esfera.

Veja ainda

Um dos primeiros matemáticos a se interessarem pelo cálculo dos volumes e áreas de sólidos foi ninguém menos que o grande Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C). No link a seguir, você encontra um interessante artigo sobre a forma como ele encontrou a relação entre as áreas e os volumes do cilindro e da esfera. O resultado foi importante a ponto de o próprio Arquimedes pedir para que sua família e amigos o gravassem no seu túmulo, como epitáfio. http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf

Os conteúdos de geometria espacial, por tratarem de objetos tridimensionais, terminam ficando um pouco mais difíceis de enxergar no papel, que é bidimensional. Nessa hora, vídeos e animações podem nos ajudar bastante. O endereço abaixo traz um interessante vídeo sobre o princípio de Cavalieri. http://www.youtube.com/watch?v=mxpwmQaCu7A

Referências

Livros

- Dante, L.R., *Matemática*, volume único. São Paulo: Ática, 2008.
- Dolce, O. Pompeo, J.N. *Fundamentos da Matemática elementar*, Volume 10. 6ª edição. São Paulo: Atual, 1993.
- Eves H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 1995.
- Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R., de Almeida, N. *Matemática, ciência e aplicações*, vol.2. São Paulo: Atual, 2005.

Imagens

• Limão, lima e laranja – http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097243

• Bola de futebol http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1274886

• Bola de natal, http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=299082

• Bola de boliche, http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=304914.

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1097244

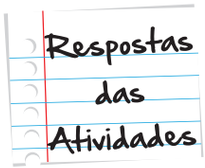
• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1022180

• http://www.t7.com.br/uploads/fotos_produtos/fotos/bola-de-futebol-_4025.jpg

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1212573

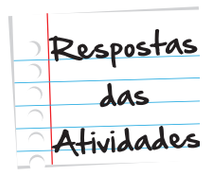
• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=140277

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=231399



Atividades 1

Bom, gente, aqui as respostas são muitas! O importante é que superfície esférica é apenas a "casca", enquanto a esfera consiste no conjunto "casca e interior". Assim, seriam exemplos de superfície esférica a bolha de sabão e a bola de frescobol, ambos vazios por dentro. As bolas de futebol e de basquete (se considerarmos que, no limite, a câmara de ar e a parte de couro praticamente coincidem) além daquelas bolas de natal que são ocas (porque há umas que são inteiriças) também seriam exemplo de superfície esférica. Seriam exemplos de esfera a bolinha de gude e a bola de sinuca, justamente pelo fato de ambas serem completamente sólidas. As bolas de natal inteiriças e as bolas de boliche também seriam exemplos de esferas pelo mesmíssimo motivo. Frutas que não sejam ocas – vocês lembram de alguma outra fruta oca que não seja o coco? – laranja, limão, etc. também são bons exemplos de esferas.



Atividade 2

Bom, começamos a resolução aplicando um teorema de Pitágoras ao triângulo OBC – conseguem vê-lo na figura? Um dos catetos é o raio da esfera pequena, que mede 6cm. Já o outro cateto é o raio do círculo, marcado em cinza na figura, que se forma com o corte da "tampa" do coco. Esse raio chamaremos de R. A hipotenusa é o raio r da esfera maior, que queremos descobrir.

O teorema de Pitágoras fica então $6^2 + R^2 = r^2$. Como temos uma equação e duas incógnitas, precisaríamos do valor de uma para encontrar o valor de outra. Como queremos encontrar o valor de r, precisaremos encontrar o valor de R. Do enunciado, vemos que a área do círculo formado – marcado em cinza na figura – é de 64π cm^2 . Como sabemos que a área do círculo é πR^2, igualamos: $64\pi = \pi R^2$. Segue que $R^2 = 64$ e $R = 8$.

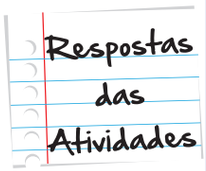
Aí, voltamos ao teorema de Pitágoras com o valor de R: $6^2 + R^2 = r^2$; $36 + 64 = r^2$; $100 = r^2$; $r = 10$. Assim, o raio r da esfera maior é de 10 cm.

Atividade 3

Aqui fazemos assim: o volume da água que "subiu" no recipiente é justamente igual ao volume inserido – ou seja, o volume da esfera. Noutras palavras, $V_{subiu}=V_{esfera.}$ Agora, o volume que do líquido que subiu é justamente o volume de cilindro de raio de base igual a 4 cm e de altura igual a 4 cm. E assim, temos $\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3$. Note aqui que o raio *r* do cilindro é diferente do raio *R* da esfera. Seguimos com $\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3$; $\pi 4^2 . 4 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Dividindo por 4π dos dois lados, teremos $4^2 = \frac{1}{3}R^3$; $16.3 = R^3$; $R^3 = 48$; $R\sqrt[5]{48}$; $R = \sqrt[5]{2^3.6}$; $R = 2\sqrt[5]{6}$. Assim, o raio tem medida igual a $2\sqrt[3]{6} \cong 10,9\ cm$

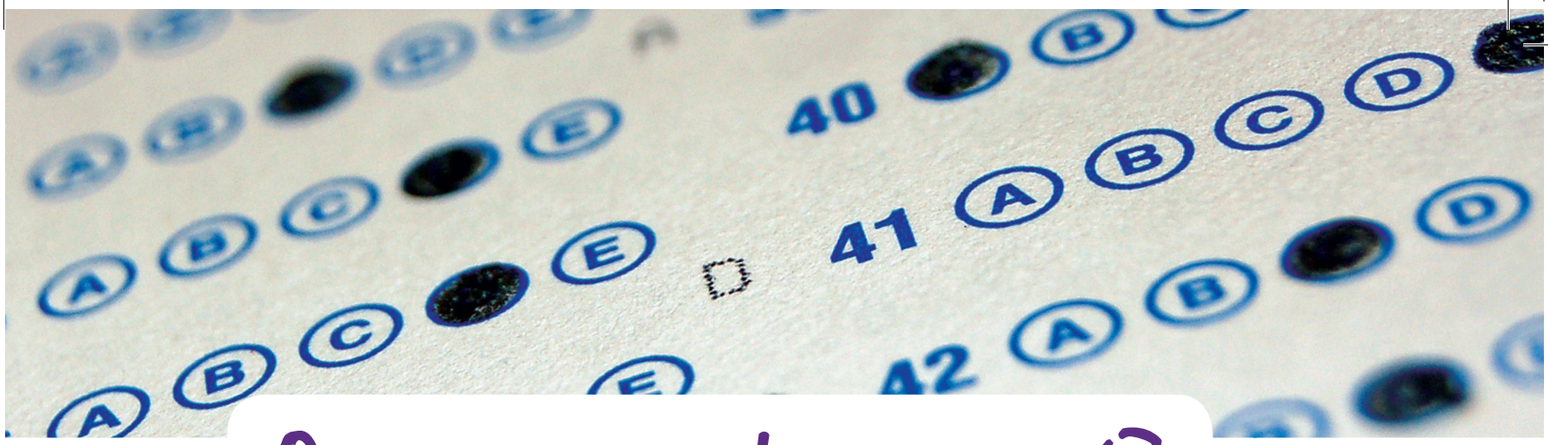
Atividade 4

Como o diâmetro é de 20 cm, então o raio mede 10 cm. Usando a fórmula de área de superfície esférica, temos que $S = 4 \cdot \pi \cdot 10^2$, ou seja, a área da superfície é de 400π cm^2, ou aproximadamente 1256 cm^2.



Atividade 5

Aqui, resolvemos com a regra de três! Se $324\pi cm^2$ correspondem a 360°, $54\pi cm^2$ corresponderão a *x*. Então, $x = \frac{360 \ . \ 54\pi}{324\pi} = 60$. O ângulo então é de 60°.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UFRRJ)

Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5 m, em homenagem ao anti-herói "Zeca Diabo".

O cidadão "Nezinho do Jegue" foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento:

a. menor que 50 mil reais

b. entre 50 e 200 mil reais

c. entre 200 e 300 mil reais

d. entre 300 e 400 mil reais

e. acima de 400 mil reais

Observação: Considere $\pi = 3{,}14$.

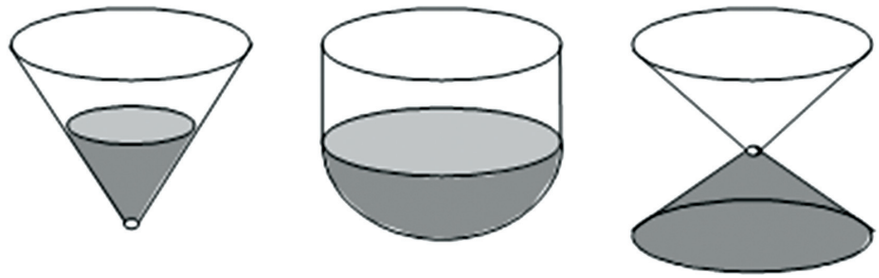
Resposta: Letra D

Comentário: O volume do pedestal é $V = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 125$, ou seja, $V = 523{,}3\ m^3$. Como o m^3 custa 260 reais então $523{,}3\ m^3$ custa R$ 136058,00. Tendo assim um superfaturamento de 500000 – 136058, ou seja, entre 330 e 400 mil reais.

Questão 2

Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. O recipiente V_1 é um cone, a parte

inferior do recipiente V_2 é uma semi esfera e a parte superior cilíndrica, e o recipiente V_3 é (uma clepsidra?). Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:



a. $V_1 = V_2 = V_3$

b. $V_1 < V_3 < V_2$

c. $V_1 = V_3 < V_2$

d. $V_3 < V_1 < V_2$

e. $V_1 < V_2 = V_3$

Resposta: Letra B.

Comentário:

A Letra correta é a B, pois nos três recipientes, a altura é a mesma, mas em V_1, a base é menor do que em V_2 e em V_3. Já comparando V_2 e em V_3, temos que a altura do cone é igual ao raio da semiesfera, as bases são iguais, mas a área de V_2 é calculada por $\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} \cong \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot R^3}{3} \cong 2{,}09 \cdot R^3$.

Já o volume de V_3 é calculado por $\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \cong \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot R^3 \cong 1{,}05 \cdot R^3$.

(altura é igual a R).

Portanto, $V_1 < V_3 < V_2$.