EDUCAÇÃO
PARA JOVENS
E ADULTOS

MATEMÁTICA II
e suas TECNOLOGIAS

Módulo 2 • Volume Único

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Educação
Antônio José Vieira de Paiva Neto

Chefe de Gabinete
Caio Castro Lima

Subsecretaria Executiva
Amaury Perlingeiro

Subsecretaria de Gestão do Ensino
Patrícia Carvalho Tinoco

Superintendência pedagógica
Carla Bertânia Conceição de Souza

Coordenadora de Educação de Jovens e adulto
Rosana Mendes

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL EJA (CECIERJ)

Diretoria Adjunta de Extensão
Elizabeth Ramalho Soares Bastos

Coordenadora de Formação Continuada
Carmen Granja da Silva

Gerência do Projeto
Michelle Casal Fernandes

Diretoria Adjunta de Material Didático
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela Maria da Fonseca Pinto

Elaboração
Agnaldo da C. Esquincalha
Cléa Rubinstein
Gisela Maria da Fonseca Pinto
Heitor Barbosa
Leonardo Andrade da Silva
Luciane de P. M. Coutinho
Raphael Alcaires de Carvalho

Revisão de Conteúdo
Daniel Portinha Alves
José Roberto Julianelli
Thiago Maciel de Oliveira

Revisão de Língua Portuguesa
Ana Cristina Andrade dos Santos
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Desenvolvimento Instrucional
Bruno José Peixoto
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Desenvolvimento Instrucional
Aroaldo Veneu

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção
Bianca Giacomelli

Projeto Gráfico e Capa
Andreia Villar

Imagem da Capa e Abertura da Unidade
http://www.sxc.hu/photo/475767

Diagramação
Bianca Lima
Bruno Cruz
Carlos Eduardo Vaz
Juliana Vieira
Katy Araújo
Ronaldo d' Aguiar Silva

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernando Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider

M425

Matemática e suas tecnologias. Módulo 2 - Matemática / Cléa Rubinstein - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013.

294 p.; 21 x 28 cm – (Nova EJA)

ISBN: 978-85-7648-920-7

1. Matemática. 2. Conjuntos. 3. Funções. I. 4. Funções. II.

CDD: 510

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT e AACR2.

Sumário

Prezado Aluno,

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação.

Através da educação a pessoa toma a sua história em suas próprias mãos e consegue mudar o rumo de sua vida. Para isso, acreditamos na capacidade dos alunos de aprender, descobrir, criar soluções, desafiar, enfrentar, propor, escolher e assumir suas escolhas.

O material didático que você está recebendo pretende contribuir para o desenvolvimento destas capacidades, além de ajudar no acompanhamento de seus estudos, apresentando as informações necessárias ao seu aprendizado.

Acreditamos que, com ajuda de seus professores, você conseguirá cumprir todas as disciplinas dos quatro módulos da matriz curricular para Educação de Jovens e Adultos da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

E assim, novas histórias acontecerão em sua vida.

Para ajudá-lo no seu percurso, segue abaixo uma tabela que apresenta a grade de disciplinas que irá cursar:

MÓDULO	NOME DISCIPLINA	CH SEMANAL	CARGA HORÁRIA TOTAL
MÓDULO I	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA I	4	80
MÓDULO I	MATEMÁTICA I	4	80
MÓDULO I	HISTÓRIA I	4	80
MÓDULO I	GEOGRAFIA I	4	80
MÓDULO I	FILOSOFIA I	2	40
MÓDULO I	SOCIOLOGIA I	2	40
MÓDULO I	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL DO MÓDULO I		420	
MÓDULO II	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA II	4	80
MÓDULO II	MATEMÁTICA II	4	80
MÓDULO II	FÍSICA I	4	80
MÓDULO II	QUÍMICA I	4	80
MÓDULO II	BIOLOGIA I	4	80
MÓDULO II	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL DO MÓDULO II		420	
MÓDULO III	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA III	4	80
MÓDULO III	MATEMÁTICA III	4	80
MÓDULO III	HISTÓRIA II	3	60
MÓDULO III	GEOGRAFIA II	3	60
MÓDULO III	FILOSOFIA II	2	40
MÓDULO III	SOCIOLOGIA II	2	40
MÓDULO III	EDUCAÇÃO FÍSICA	2	40
MÓDULO III	LÍNGUA ESTRANGEIRA OPTATIVA	2	40
MÓDULO III	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL NO MÓDULO III		460	
MÓDULO IV	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA IV	4	80
MÓDULO IV	MATEMÁTICA IV	3	60
MÓDULO IV	FÍSICA II	3	60
MÓDULO IV	QUÍMICA II	3	60
MÓDULO IV	BIOLOGIA II	3	60
MÓDULO IV	LÍNGUA ESTRANGEIRA	2	40
MÓDULO IV	ARTES	2	40
MÓDULO IV	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL NO MÓDULO IV		420	

Conte conosco.
Equipe da Fundação Cecierj e SEEDUC

“

Nada lhe posso dar que já não exista em você mesmo.

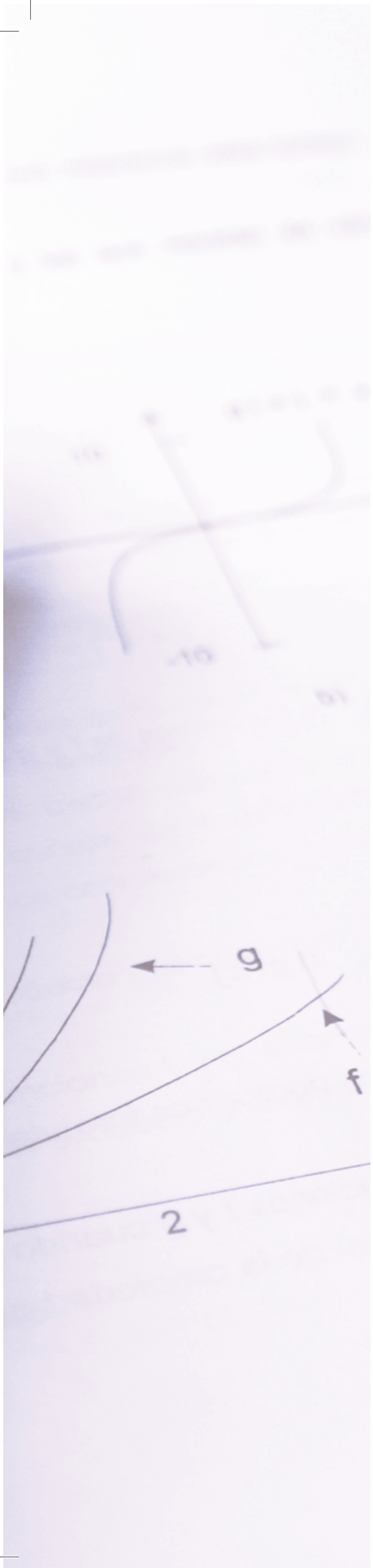
Não posso abrir-lhe outro mundo de imagens, além daquele que há em sua própria alma.

Nada lhe posso dar a não ser a oportunidade, o impulso, a chave.

Eu o ajudarei a tornar visível o seu próprio mundo, e isso é tudo.

Hermann Hesse

”



Conjuntos

Para início de conversa...

Na canção Oração ao tempo, o compositor e cantor baiano Caetano Veloso conversa com o tempo, negociando com ele melhores formas de aproveitamento do tempo e pedindo auxílio para não gastar tempo sem que este gasto retorne em benefícios, alegrias e prazeres. Você conhece essa música? Não? Então aproveite: por ocasião dos seus 70 anos, comemorados em 2012, Caetano Veloso disponibilizou todas as suas canções em seu site oficial, http://www.caetanoveloso.com.br/discografia.php.

Ah, o tempo... Você tem a sensação de que os dias têm passado cada vez mais rápido? Os meses parecem quinzenas, as quinzenas parecem semanas, as semanas passam com uma velocidade assustadora! Hoje é sexta-feira e temos a sensação de que ontem foi... segunda-feira! O que estaria acontecendo? Estariam os relógios realmente acelerando seus ponteiros?

Alguns cientistas estudam e debatem sobre esse tema... No link http://super.abril.com.br/cotidiano/tempo-cada-vez-mais-acelerado-445560.shtml, você vai encontrar alguns comentários muito interessantes sobre isso, se puder, acesse e leia, vale a pena!

Saiba Mais

Bem, provavelmente, esta sensação de aceleração do tempo deve-se à grande quantidade de atribuições e encargos a que temos tido nos últimos tempos. Temos agora de encontrar tempo para gerenciar emprego, família, para retomar os estudos e, é claro, também para algum tipo de lazer. Antigamente, não era assim. Nossos avós dividiam-se unicamente entre um emprego – normalmente suficiente – e a família.

Para sobrevivermos no meio do corre-corre do mundo moderno, em um mar de apetrechos tecnológicos irresistíveis, precisamos aprender a nos organizar, agrupando atividades que possam ser feitas mais ou menos ao mesmo tempo. Um dos segredos para conseguirmos isso, consiste na organização das tarefas, dividindo-as ao longo do nosso dia, por exemplo: tarefas de trabalho, tarefas domésticas, tarefas sociais e tarefas de estudo.

Figura 1: Representação de atividades cotidianas

Analise sua vida diária e observe que muitas atividades podem ser feitas juntas. Por exemplo. Vamos observar a seguinte lista de compras descrita abaixo:

Inicialmente é necessário produzir a lista de produtos. Assim, ordenadamente, verificamos em casa quais produtos são necessários e os ordenamos obedecendo uma sequencia, por exemplo: carnes, cereais, frios, artigos de hortifruti, material de limpeza, material de higiene pessoal, etc.

Lista de compras

Refrigerante

Detergente

Sabão em pó

Atum sólido

Leite em caixa

Inseticida em spray

Óleo de soja

Creolina

Leite em pó

Leite de soja com fruta

Sabão líquido

Iogurte 1l

É fácil perceber que os supermercados disponibilizam os produtos dividindo-os por setor, ou seja, para efetuarmos a compra de maneira ordenada, basta buscar em cada setor o grupo de produtos de uma única vez, isto é, os elementos que são comuns a cada setor. Por exemplo, ao comprarmos iogurte iremos diretamente na sessão de laticínio. Ao finalizarmos as compras, também podemos arrumar os produtos em sacolas de forma a facilitar a arrumação ao chegarmos em casa. Uma bolsa para os produtos de geladeira, outra para bebidas e assim por diante.

Assim como em nosso cotidiano, em Matemática, há muitas coisas para serem estudadas... Para facilitar esse estudo e para organizar os seus objetos, ela também é organizada dessa mesma forma: em categorias e buscando as relações entre elas. Nesta aula, vamos estudar exatamente isso!

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer conjuntos e elementos, e definir relações de pertinência e inclusão.
- Resolver problemas envolvendo propriedades e operações com conjuntos.
- Representar subconjuntos dos números reais e realizar operações com eles.

Seção 1
Conjuntos e elementos

Está ou não está? PERTENCE OU NÃO PERTENCE ?

Figura 2: Situações onde se expressa a presença de conjunto

Alunos em uma sala de aula, as frutas em um cesto, livros em uma biblioteca... Podemos identificar nestas imagens situações onde elementos estão organizados em conjuntos: os alunos são elementos do conjunto turma; as frutas são elementos do conjunto cesto; os livros são elementos do conjunto biblioteca.

Os elementos matemáticos (como números ou figuras) são agrupados, segundo características que eles têm de parecidos uns com os outros, formando também conjuntos.

Mas como podemos identificar esses conjuntos em nossas anotações? Faça isso em seu caderno! Como você organizou esses conjuntos?

Se conversar com os seus companheiros de estudo, você provavelmente vai perceber que cada um representou esses conjuntos de uma forma diferente. Para padronizar estes registros, existem algumas regras que seguimos. Veja!

Importante

Quando vamos dar nome a um conjunto em Matemática, usamos uma letra maiúscula do nosso alfabeto, pois dessa forma torna-se mais simples nos referirmos a ele. Também para representar elementos dos conjuntos, quando estes não são numéricos, utilizamos letras minúsculas do nosso alfabeto.

Agora pode ficar mais fácil. Podemos então, se retomarmos as imagens que iniciam esta seção, falar do conjunto T dos alunos da turma, do conjunto L dos livros de uma biblioteca e do conjunto F das frutas contidas no cesto.

Vamos nos concentrar no conjunto F. Que frutas você vê em F? Há bananas? E abacates? E uvas? Bem, pelo que visualizamos não há abacates em F, mas banana e uva sim. Podemos dizer então que banana pertence ao conjunto F, assim como uva pertence ao conjunto F, mas por outro lado, abacate não pertence ao conjunto F. Na Matemática utilizamos uma linguagem própria para estas representações. Observe a seguir!

Importante

Na Matemática utilizamos o símbolo $\in$ para indicar que um elemento está em um conjunto. Lemos como **pertence**. Se um elemento não está em um conjunto, então dizemos que ele **não pertence** ao conjunto e representamos matematicamente esta ideia com o símbolo $\notin$.

Desta forma, representando a fruta banana pela letra b, podemos escrever que a banana pertence ao conjunto das frutas como $b \in F$, de mesma forma, representando a fruta abacate pela letra a, teremos $a \notin F$.

Se chamarmos de B ao conjunto biblioteca, teremos cada livro como um elemento deste conjunto. Podemos chamar o livro de história de h, assim, $h \in B$.

Vamos aplicar essas ideias ao que conversamos anteriormente? Utilizando os símbolos $\in$ e $\notin$, vamos relacionar os elementos a, b, u e h com os conjuntos F, B, T.

Atividade 1

Vamos reescrever o que dissemos anteriormente, mas agora utilizando os símbolos ∈ e ∉ e a notação matemática de letras maiúsculas para conjuntos e minúsciulas para elementos.

a. a_____F

b. u_____T

c. h_____B

d. b_____F

e. u_____F

f. u _____B

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

Agora vamos fazer o contrário. A partir da linguagem simbólica da matemática, você deve escrever a sentença na linguagem coloquial.

a. $h \in B$

b. $a \notin T$

c. $u \notin T$

d. $b \in F$

Anote suas respostas em seu caderno

Imagine agora que três amigos desejam utilizar as frutas para fazer diferentes tipos de suco. Cada um prefere um sabor diferente e para isso, pode ser feita uma combinação de frutas. Por exemplo, Bianca quer um suco de laranja com morangos, já Guilherme prefere um suco de abacaxi, laranja e maçã; Melissa no entanto, prefere de laranja, morango e banana. É possível atender a todos os pedidos?

Obviamente a resposta é não. Bianca vai conseguir tomar o seu suco, pois as frutas que ela deseja são elementos do conjunto F. Melissa também vai ter o seu desejo atendido, porque laranja e banana também são elementos de F. Entretanto, Guilherme terá de escolher outro sabor, visto que não há abacaxi na cesta!

Podemos pensar nos desejos dos amigos como conjuntos também. Se chamarmos de B o conjunto das frutas desejadas por Bianca em seu suco, G o conjunto das frutas desejadas por Guilherme e M o de Melissa, então ficamos com B = {morango, laranja}, G = {laranja, abacaxi, maça} e M = {banana, laranja, morango}. Como podemos observar, nem todos os elementos dos conjuntos de frutas utilizados para fazer os sucos serão elementos do conjunto frutas.

A seguir, veremos uma forma simples de escrevermos isso...

Importante

O símbolo matemático $\subset$ é usado para indicar que TODOS os elementos de um conjunto também são elementos do outro conjunto. Lemos como **está contido**. Se pelo menos um elemento do primeiro conjunto considerado não está no segundo conjunto, então dizemos que o primeiro conjunto **não está contido** no segundo conjunto, e representamos matematicamente esta ideia com o símbolo $\not\subset$.

Atividade 3

Vamos utilizar os símbolos $\subset$ e $\not\subset$ para dizer se um conjunto tem ou não tem todos os seus elementos pertencentes a outro conjunto.

a. B______F

b. M ______ F

c. G ______ F

d. B_____M

e. G ______ M

f. B ______G

Anote suas respostas em seu caderno

Uma parte ou um subconjunto de um conjunto dado, é outro conjunto que tem todos os seus elementos pertencentes ao primeiro conjunto. Isso significa que quando usamos o símbolos $\subset$ para associar dois conjuntos, estamos afirmando ao mesmo tempo que o primeiro conjunto é subconjunto (ou é uma parte) do segundo conjunto, pois tem todos os seus elementos pertencentes ao segundo.

Importante

Usando estas ideias com os sucos das meninas, podemos dizer que $B \subset F$ e $M \subset F$, mas $G \subset F$. Ou ainda, de outra forma, B e M são subconjuntos de F, mas G não é.

Atividade 4

Na estante de uma biblioteca se encontram livros de História, Matemática, Geografia, Língua Portuguesa, Química e Biologia. Os alunos formam grupos de estudos de acordo com a distribuição.

Grupo A estudará Química , Física e Biologia

Grupo B estudará Língua Portuguesa, Matemática, História

Grupo C estudará Geografia, Matemática

Sendo o conjunto dos livros da Estante da Biblioteca denominado por U, verifique as afirmações a seguir colocando V para Verdadeiro ou F para Falso. Justifique cada decisão:

a. $A \not\subset U$ (   )

b. $B \subset U$ (   )

c. $C \subset B$ (   )

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Em uma lanchonete o painel demonstrativo apresenta 4 tipos de sanduíches, duas opções de bebida e duas de acompanhamento. Construa conjuntos relacionando todos os tipos possíveis de lanches, levando em conta que cada escolha obrigatoriamente terá um sanduíche, uma bebida e uma opção de acompanhamento. Todos os lanches deverão ser formados pelos elementos contidos nas opções apresentadas no painel da lanchonete.

Anote suas respostas em seu caderno

Como escrever conjuntos?

Já conversamos sobre as ideias de conjuntos e sobre alguns símbolos que utilizamos para representar mais facilmente estas ideias. Muitas vezes, precisamos escrever um conjunto. É claro que podemos sempre usar os recursos utilizados até agora nesta aula, entretanto, nem sempre é assim algo tão simples.

Utilizar figuras é um recurso muitas vezes interessante para visualizar, principalmente, as relações entre os conjuntos – que conjuntos estão inteiramente ou parcialmente dentro de outros. Para isto, utilizamos uma representação por diagrama.

Um diagrama representa um conjunto em Matemática, quando ele é uma região fechada simples, delimitada por uma linha, em um plano considerado. Dentro dessa região estão os elementos do conjunto representado; fora dela, estão os elementos que não pertencem a este conjunto.

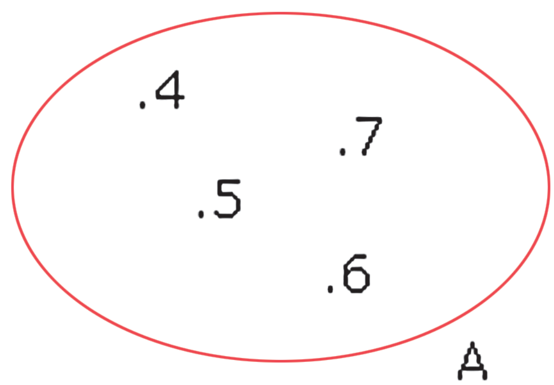
Importante

É comum haver situações em que a utilização de diagramas não seja a forma mais prática de representação. As relações entre conjuntos eventualmente tornam-se mais difíceis de serem representadas por desenhos.

Para auxiliar nessa tarefa, há outras duas formas de representação de conjuntos, que utilizam o símbolo matemático, conhecido como chaves – { }. As chaves trazem entre si todos os elementos do conjunto que representam.

Estes elementos podem vir descritos um a um (ou indicados) ou ainda podemos destacar uma propriedade que seja comum a todos os elementos que pertencem ao conjunto.

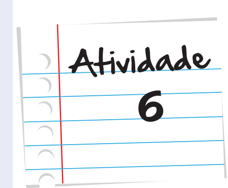
Pense no conjunto A dos números naturais maiores que 3 e menores que 8, podemos representar assim esse conjunto:



A = {4, 5, 6, 7}

A = {Números naturais entre 3 e 8}

Vamos ver outro exemplo?



Vamos representar por chaves, descrevendo os elementos dos conjuntos?

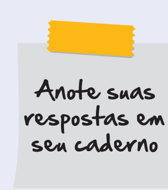
a. Conjunto A das letras da palavra MATE

b. Conjunto B das letras da palavra CONJUNTO

c. Conjunto C dos números naturais menores que 10 e maiores que 1

d. Conjunto D dos números naturais maiores que 10

e. Conjunto E dos números negativos compreendidos entre 2 e 4



Quantos elementos possui cada um dos conjuntos que você escreveu na Atividade 7? Bem, o primeiro conjunto tem 4 elementos, que são as letras m, a, t, e. E o segundo conjunto, quantos elementos tem? Podem surgir dúvidas entre 8 ou 6 elementos... E sabe o que vai nos auxiliar nesta tarefa? A informação de que: Não repetimos elementos iguais em um conjunto.

Importante

Nos conjuntos os elementos iguais não se repetem.

Ah, agora ficou fácil. Isso quer dizer que o conjunto B é formado pelos elementos c, o, n, j, u e t, ou seja, ele tem 6 elementos.

E o conjunto C, quantos elementos tem? Você saberia responder? Sem problemas, são os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, ou seja, são 8 elementos. Entretanto, o conjunto D, quantos elementos tem? Sabemos que ele tem o 11, o 12, o 13, o 200, o 1000... Mas quantos elementos ele tem?

Ah, não foi possível contar, não é mesmo? E sabe por que não conseguimos contar quantos elementos existem no conjunto D? Porque ele é um conjunto que contém uma quantidade infinita de elementos. Os conjuntos que tem esta característica são chamados de **conjuntos infinitos**.

E o conjunto E, quantos elementos ele tem? Responder a essa pergunta significa pensar em quantos são os números negativos que existem entre 2 e 4. Mas... há números negativos entre 2 e 4? Não! Ora, então esse conjunto não tem elementos! Esse conjunto é chamado **de vazio**!

Um conjunto é vazio, quando não possui elementos. Podemos representar o conjunto vazio pela simbologia { }. Isso mesmo, chaves sem elemento algum, ou ainda através do símbol Ø.

Nunca escreva E={Ø}, esse conjunto não é vazio, pois é um conjunto que possui como único elemento um outro conjunto, que por sua vez é vazio.

Importante

Esse conceito (de conjunto infinito) é bastante difícil... Mas para nós, basta sabermos reconhecer quando o conjunto é infinito ou não. Quer ver um exemplo? Pense nos conjuntos M dos números naturais entre 2 e 10000 e o conjunto N dos números naturais maiores que 2. Vamos escrevê-los entre chaves.

M = {3, 4, 5, 6, 7, ..., 9998, 9999}

N = {3, 4, 5, 6, 7, ...}

Vamos pegar um subconjunto de M, por exemplo M1 = {4,5,6,7,...,9999}. Note que se fizermos uma correspondência entre os elementos dos dois conjuntos, teremos M1 com um elemento a menos que M. Isto não acontece com N. Se tomarmos N1 = {4,5,6,7,...}, poderemos relacionar os elementos de ambos os conjuntos e teremos uma correspondência para todos os elementos. Isto caracteriza um conjunto infinito.

Quer saber mais sobre o infinito? Acesse o Youtube e assista ao vídeo "Os Infinitos de Cantor", da série da Unicamp, intitulada Matemática Multimídia. Você poderá encontrá-lo, acessando a Internet com o link http://www.youtube.com/watch?v=f1Ak-6vMVpg em seu navegador. Assista, vale a pena!

Saiba Mais

Falamos bastante em quantidade de elementos de um conjunto. Como fazer esta representação. Bem, podemos utilizar duas formas para isto. Vamos utilizar exemplos da atividade 6.

Conjunto A das letras da palavra MATE. Este conjunto pode ser escrito como A = {m,a,t,e}, logo o número de elementos pode ser representado por #A = 4 ou n(A) = 4

Conjunto B das letras da palavra CONJUNTO. Teremos B={c,o,n,j,u,t}, assim, #B = 6 ou n(B) = 6

Conjunto E dos números negativos compreendidos entre 2 e 4, teremos #E = 0 ou n(E) = 0

No caso do conjunto ser infinito, não é possível definir sua cardinalidade, ou seja, o seu número de elementos.

Ainda sobre os conjuntos, é preciso destacar a ideia de subconjuntos de um conjunto.

O conjunto das partes de um conjunto dado é o conjunto formado por todos os possíveis subconjuntos do conjunto considerado.

Importante

Vamos tomar como exemplo o conjunto A da atividade 6. A={m,a,t,e}. A partir deste conjunto, podemos formar vários subconjuntos. Coloquemos em ordem:

Subconjunto com zero elementos: { }

Subconjuntos com 1 elemento: {m}, {a}, {t}, {e}

Subconjuntos com 2 elementos: (m,a}, {m,t}, {m,e}, {a,t}, {a,e}, {t,e}

Subconjuntos com 3 elementos: (m,a,t}, {m,a,e}, {m,t,e}, {a,t,e}

Subconjunto com 4 elementos: (m,a,t,e}

Se juntarmos todos estes subconjuntos, formaremos um conjunto denominado conjunto das partes de A. Vamos fazer sua representação da seguinte forma:

P(A)={{ }, {m}, {a}, {t}, {e}, (m,a}, {m,t}, {m,e}, {a,t}, {a,e}, {t,e}, (m,a,t}, {m,a,e}, {m,t,e}, {a,t,e}, {m,a,t,e}}

O número de partes de um conjunto é dado por 2^n, onde n é o número de elementos do conjunto.

Observe que nesse exemplo, o conjunto A tem 4 elementos, e o conjunto das partes de A possui $2^4 = 16$ elementos, que são todos os possíveis subconjuntos de A!

Importante

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
Todo conjunto é subconjunto de si próprio.

Atividade 7

No conjunto M das letras da palavra PAI, qual o conjunto das partes de M? Relacione todos os subconjuntos.

Anote suas respostas em seu caderno

Operações com Conjuntos

Você lembra da nossa lista de compras utilizada inicialmente? Vamos usá-la como exemplo para darmos continuidade ao nosso estudo. Vamos aprender sobre as operações que podem ser realizadas entre conjuntos.

Quando arrumamos as compras na despensa é preciso organização. Não podemos guardar alimentos com produtos de limpeza, cada produto tem seu local certo para ser armazenado. É preciso então uma maneira que facilite o trabalho. Fica muito mais fácil encontrar as coisas, quando elas estão bem organizadas...

Pois é, nessa organização podemos agrupar os itens conforme características que eles têm, seja quanto ao tipo de embalagem, seja quanto ao tipo de produto contido nestas embalagens. Por exemplo, quanto ao tipo de embalagem, podemos estabelecer algumas categorias, como latas ou caixas; em relação aos tipos de produtos comprados, podemos organizar em alimentos ou limpeza.

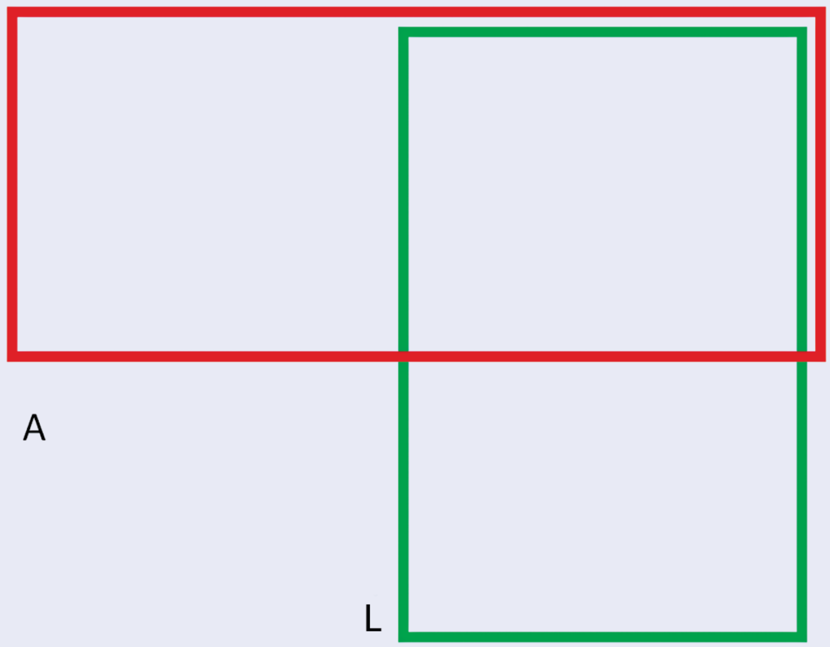
Vamos lembrar os itens das últimas compras:

Lista de compras

Refrigerante 2L
Detergente
Sabão em pó
Atum sólido
Leite em caixa
Inseticida em spray
Óleo de soja
Creolina
Leite em pó
Leite de soja com fruta
Sabão líquido
Iogurte 1L

Atividade 8

A imagem abaixo representa uma prateleira da despensa onde serão colocados os artigos adquiridos na última compra. Na região de cor vermelha (A), vamos colocar apenas os alimentos comprados no supermercado e na região de cor verde, arrumaremos os produtos embalados em lata (T). Reproduza esta figura no seu caderno e arrume os produtos comprados. A seguir, responda às perguntas propostas abaixo, também em seu caderno!



a. Você conseguiu arrumar todas as compras nestas prateleiras?

b. Que produtos ficaram na prateleira A dos alimentos?

c. Que produtos ficaram na prateleira L das latas?

d. Que produtos ficaram nas duas prateleiras juntas?

e. Que produtos ficaram de fora dessas prateleiras?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Vamos organizar as compras da seguinte forma: no conjunto A dos alimentos, L de limpeza, C dos produtos embalados em caixas e T dos produtos embalados em latas. Escreva no seu caderno os conjuntos A, L, C e T, representando seus elementos entre chaves.

Depois de ter feito isso, responda também em seu caderno às perguntas propostas abaixo. Atenção, não escreva neste material!

a. Se juntarmos os produtos dos conjuntos A e C, que produtos teremos?

b. Há produtos que estejam ao mesmo tempo em A e C? Quais são eles?

c. Juntando L e C, que produtos encontramos?

d. Há produtos que estejam ao mesmo tempo em L e T?

e. Juntando A e L, que produtos obtemos?

f. Há produtos que estejam em C e T simultaneamente?

Anote suas respostas em seu caderno

Importante

Usamos o símbolo de $\cup$ (união) para representar o ato de juntar os elementos de dois conjuntos. Assim, se temos dois conjuntos A e B, o conjunto $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que estão em A ou estão em B.

O símbolo $\cap$ (intersecção) é usado para representar os elementos que estão ao mesmo tempo em dois conjuntos. Isso quer dizer que, se temos dois conjuntos A e B, o conjunto $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos que estão em A e também estão em B.

Vamos fazer mais uma atividade envolvendo as operações entre conjuntos em que utilizaremos os símbolos $\cup$ e $\cap$?

Atividade 10

Você se lembra da copa do mundo de 2006? Que países participaram dessa copa? Nossa, não tem muito tempo, mas já ficou tão distante!

A seguir, colocamos uma tabela identificando esses países.

Equipes participantes			
Alemanha	Costa Rica	Irã	República Checa
Angola	Croácia	Itália	Sérvia e Montenegro
Arábia Saudita	Equador	Japão	Suécia
Argentina	Espanha	México	Suíça
Austrália	Estados Unidos	Holanda	Trinidad e Tobago
Brasil	França	Paraguai	Togo
Coreia do Sul	Gana	Polônia	Tunísia
Costa do Marfim	Inglaterra	Portugal	Ucrânia

Figura 5: países participantes da Copa da FIFA 2006

E em 2010? Está mais recente! Vamos ver quais foram os países?

África do Sul	Austrália	Argélia	Dinamarca
Brasil	Japão	Camarões	França
Espanha	Coreia do Norte	Costa do Marfim	Grécia
Países Baixos	Coreia do Sul	Gana	Portugal
Itália	Honduras	Nigéria	Sérvia
Alemanha	México	Chile	Eslováquia
Argentina	Estados Unidos	Paraguai	Eslovénia
Inglaterra	Nova Zelândia	Uruguai	Suíça

Figura 6: países participantes da Copa da FIFA 2010

Atividade 10

Pense em dois conjuntos: o conjunto S (de seis), com as seleções sul-americanas que participaram da copa de 2006 e o conjunto D (de dez) com as seleções sul-americanas, participantes da copa de 2010. Atenção, não escreva neste material!

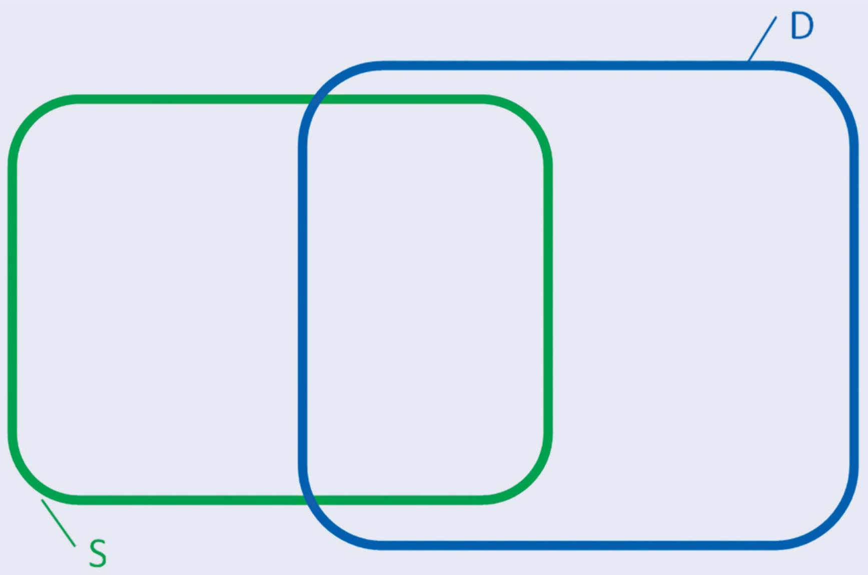
a. Quantas seleções existem no conjunto S? E no conjunto D?

b. Que seleções sul-americanas participaram das duas edições da copa do mundo de 2006 e de 2010? Represente esse conjunto (vamos chamá-lo de E) como uma operação entre os conjuntos S e D. Quantos elementos existem em E?

c. Quando listarmos as seleções sul-americanas que participaram de pelo menos uma das duas últimas copas do mundo, que seleções seriam estas? Escreva-as no conjunto T.

d. Represente T como uma operação entre os conjuntos S e D. Quantos elementos há em T?

e. Agora, copie o diagrama abaixo em seu caderno e represente essas seleções no seu diagrama.



Anote suas respostas em seu caderno

Importante

A diferença entre dois conjuntos é a operação que resulta nos elementos que pertencem ao primeiro conjunto e não pertencem ao segundo conjunto. Representaremos a diferença entre dois conjuntos utilizando o sinal de menos (-). Assim, se tomarmos dois conjuntos A e B, A-B será o conjunto dos elementos que estão em A e não estão em B.

Atividade 11

Vamos retomar a atividade 11 e responder alguns itens adicionais! Anote as respostas em seu caderno.

a. Quais seriam as seleções que integrariam o conjunto S - D?

b. Que seleções estão no conjunto D – S?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 12

Vamos usar novamente os conjuntos A dos alimentos, L de limpeza, C dos produtos embalados em caixas e T dos produtos embalados em latas que vimos na atividade 9? Com base no que você fez naquela atividade, responda em seu caderno aos itens propostos abaixo!

a. Que elementos estão no conjunto resultante de A – L?

b. Que elementos estão no conjunto resultante de L – A?

c. Que elementos estão no conjunto resultante de C – A?

d. Usando a operação diferença entre conjuntos, represente o conjunto que contém os produtos de limpeza que não estão acondicionados em latas.

e. Novamente, usando a operação diferença entre conjuntos, represente o conjunto que contém os produtos acondicionados em caixas que não podem ser ingeridos como alimentos.

Anote suas respostas em seu caderno

Vamos praticar mais um pouco?

Atividade 13

Foi feita uma entrevista com alunos de uma determinada escola. Descobriu-se que o número de alunos que leem jornal é 40 e que 45 alunos leem revistas, sendo que 25 leem jornal e revista. Sabe-se ainda que 24 alunos não leem nem jornal e nem revista. Qual o total de alunos entrevistados?

Anote suas respostas em seu caderno

Conjuntos Numéricos

Quantos números você conhece? Pra que a gente estuda Matemática? Números só existem pra complicar a vida do aluno na escola? Quem foi que inventou a Matemática? Não tinha nada melhor pra fazer?

Quantas vezes você já pensou nisso? Aposto que muitas... Mas você quer ter uma ideia da importância dos números na nossa vida cotidiana? Sua carteira de identidade é um número, seu título de eleitor é um número. Para ser motorista é necessária uma carteira com número – e carro tem chapa, que é número, também! Sua casa, seu prédio, seu apartamento, seu celular, sua certidão de nascimento, seu CPF, seu registro no Imposto de Renda – e, se for empresário, vai pelo mesmo caminho: o CNPJ, o alvará de localização, o faturamento - tudo é número! Estas situações – e muitas outras – foram retiradas da crônica "Você é um número", (disponível em http://matematicacalculoetc.blogspot.com.br/2012/03/voce-e-um-numero-voce-e-um-numero.html) uma das muitas que a escritora Clarice Lispector escreveu para o Jornal do Brasil, entre os anos de 1967 e 1973. Estas crônicas foram reunidas e publicadas no livro "A descoberta do mundo", publicado em 1984 pela editora Rocco. O argumento da autora é que os números estão tão presentes na nossa vida que se você não tomar cuidado, vira um número até para si mesmo.

Importante

Clarice Lispector é uma das escritoras de maior expressão em nosso país. Autora de obras variadas, como A Hora da Estrela ou Felicidade Clandestina, dedicou-se à escrita e à publicação de obras literárias também voltadas para o público infantil e adolescente. Quer saber mais? Acesse

http://matematicacalculoetc.blogspot.com.br/2012/03/voce-e-um-numero-voce-e-um-numero.html

Você concorda com a sua afirmação de que somos números? Como você se posiciona em relação a isso? Isso é bom ou ruim? Por que os números são usados para rotular pessoas, como a autora afirma?

Tente pensar em sua vida sem os números. Seu dia a dia ficaria mais simples? Como você compraria pão, por exemplo? Como você pediria ao atendente na padaria? E como o padeiro poderia fazer sempre o mesmo pão, fresquinho, crocante por fora e macio por dentro, ficando o mesmo tempo no forno para não queimar... Isso é difícil!

A organização em conjuntos também foi proposta aos números para que pudessem ser agrupados segundo propriedades que pudessem atender às operações de adição e de multiplicação, realizadas entre eles. As categorias de números são nossas velhas conhecidas: naturais, inteiros, racionais e irracionais e, englobando todos, os números reais e os complexos, que somente ao final deste curso você irá estudar.

Números Naturais

Os números naturais são aqueles que representam quantidades, atendendo a uma necessidade humana de contar objetos. Especificamente, os números naturais são os que resultam de um processo de contagem: 1, 2, 3... E esse é um processo que nunca acaba e sobre o qual desde crianças sempre refletimos, quando fazemos o questionamento: qual é o maior de todos os números?

Muitas vezes, para as crianças, esta é uma pergunta cuja resposta é simples: 100, 100000 ou ainda 10000000000 seriam possivelmente algumas das respostas dadas por elas. Mas não é difícil convencer mesmo uma criança de que "o maior de todos os números" na verdade não existe. Mesmo o 10000000000, quando somamos a ele 1 unidade, obtemos 10000000001, que é maior que 10000000000... Não conseguimos então pensar ou responder qual é o maior de todos os números.

Atividade 14

O conjunto dos números naturais tem infinitos elementos, que é o que chamamos de infinito contável. Dentro do conjunto dos números naturais, podemos encontrar vários subconjuntos infinitos também. Observe a tabela abaixo. Ela mostra alguns desses subconjuntos.

Tabela: Subconjuntos infinitos dos números naturais

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
2n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	...
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	...
n^n	1	4	27	256	3125	46656	823543	16777216	387420489	10000000000	285311670611	...

Agora responda em seu caderno às seguintes questões:

a. Que elementos estão representados na primeira linha da tabela? E na segunda linha? E na terceira? E na quarta?

b. Se prosseguirmos na primeira linha desta tabela infinitamente, seguindo todos os números naturais, ela terá mais ou menos elementos que as linhas que estão abaixo dela?

c. Qual das linhas terá, seguindo-as infinitamente, mais elementos?

Anote suas respostas em seu caderno

Importante

O conjunto dos Números Naturais é representado pela letra N. Veja:

$\mathbb{N}$={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,..., 12528, 12529, 12530, ..., 9547258, 9547259, ...}

Números Inteiros

Com o passar dos anos, após o surgimento das relações comerciais e bancárias, o homem viu a necessidade de representar valores monetários de forma oposta, ou seja, o lucro e o prejuízo. Por exemplo, não bastava escrever 5 moedas de ouro, é necessário saber se o comerciante receberia as 5 moedas, ou faria o oposto, pagaria estas 5 moedas. Essa e outras situações dão origem a um novo número: o número negativo.

O conjunto dos números inteiros é uma expansão dos números naturais e englobam todos os números naturais e os **simétricos** ou opostos a eles.

Simétricos

Números simétricos ou opostos são números que têm o mesmo valor absoluto, mas sinais opostos. Por exemplo, -4 e +4 são números simétricos ou opostos.

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra Z e compreende os números naturais, os seus simétricos e o zero. Veja:

$\mathbb{Z}$ = {..., -12547, -12546, ..., -108, -107, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 107, 108, ... 12546, 12547, ...}

Uma coisa interessante que vale a pena observarmos aqui é que o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números inteiros. Ou ainda, simbolicamente, podemos representar isso por $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Importante

A presença do símbolo * (asterisco) ao lado superior direito da letra que simboliza o conjunto, representa que o elemento zero não pertence ao conjunto.

Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z}^*$ não tem o elemento zero.

Números racionais

Os números racionais são todos os números que podem ser escritos na forma de fração. Vamos ver que números são esses?

• Todos os números inteiros podem ser escritos como fração, basta pensarmos em $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = ... = \frac{36}{12} = ...$ ou em $-7 = \frac{-7}{1} = \frac{-14}{2} = \frac{-21}{3} = ... = \frac{-63}{9} = ...$

• Todos os números decimais com quantidade finita de casas decimais (chamados também de decimais exatos) podem ser escritos como fração. Veja: $0,56 = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$ ou então $13,2 = \frac{132}{10} = \frac{66}{5}$ ou ainda $-0,0053 = -\frac{53}{10000}$

• Todos os decimais com quantidade infinita de casas decimais, mas periódicos (também conhecidos como dízimas periódicas). Vamos lembrar?

a) $0,\overline{2} = 0,22222... = \frac{2}{9}$

b) $-0,\overline{45} = -0,454545... = -\frac{45}{99} = -\frac{5}{11}$

c) $-0,43\overline{2} = -0,43222... = -\frac{389}{90}$

d) $3,2\overline{91} = 3,2919191... = 3 + 0,2919191... = 3 + \frac{289}{990} = \frac{3259}{990}$

O conjunto dos números racionais é representado pela letra $\mathbb{Q}$ e contém todos os números que podem ser escritos como fração. Simbolicamente, esse conjunto pode ser representado dessa forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Vamos compreender isso?

Bem, $\mathbb{Q}$ é a representação para o conjunto dos números racionais. $\frac{a}{b}$ representa uma fração qualquer, com numerador *a* e denominador *b*, portanto, $a \in \mathbb{Z}$ indica que a, ou seja, o numerador da fração, pode ser qualquer número inteiro. Entretanto, $b \in \mathbb{Z}^*$ destaca o fato de que b também pode assumir o valor de qualquer número inteiro que não seja zero.

É interessante ver que todos os naturais e todos os inteiros também são números racionais. Isso pode ser escrito assim:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$$

Mas será que todos os números podem ser escritos como fração? A resposta é não. E o conjunto dos números que não podem ser escritos como fração, ou seja, dos números que não são racionais, é chamado de conjunto dos números irracionais, que é o que vamos ver no item abaixo.

Números Irracionais

O conjunto dos números irracionais é o conjunto formado por todos os números que não podem ser escritos sob a forma de fração. Sabemos então dizer quais números não são irracionais:

- Nenhum inteiro ou natural é irracional;
- Nenhum decimal exato é irracional;
- Nenhum decimal infinito periódico (dízimas periódicas) é irracional.

Os números irracionais são então números decimais com uma quantidade infinita de casas decimais e sem caráter periódico.

Alguns números irracionais que são muito conhecidos por nós são o π e as raízes não exatas, como $\sqrt{2}$, $-\sqrt[3]{5}$ ou $\sqrt[5]{-10}$. Mas existem outros, por exemplo: 1,01001000100001...; 2,321432517000018526...

Importante

O conjunto dos números irracionais é representado por $\overline{Q}$ (em alguns livros, o conjunto dos irracionais é representado por **I**) e pode ser escrito simbolicamente como

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{x,\ x \notin \mathbb{Q}\}$$

Essa notação quer dizer exatamente o que escrevemos acima: é irracional o número que não é racional.

Observe que, diferente dos naturais, inteiros e racionais que mantêm entre si uma relação de um estar dentro do outro, para os irracionais isso não acontece. E sabe por quê? Porque $\mathbb{N} \not\subset \overline{Q}$, $\mathbb{Z} \not\subset \overline{Q}$ e $\mathbb{Q} \not\subset \overline{Q}$.

Mas o que significa essa barrinha acima do Q que colocamos para representar os irracionais? Vamos entender isso melhor? Para isso, vamos ver os números reais!

Números Reais

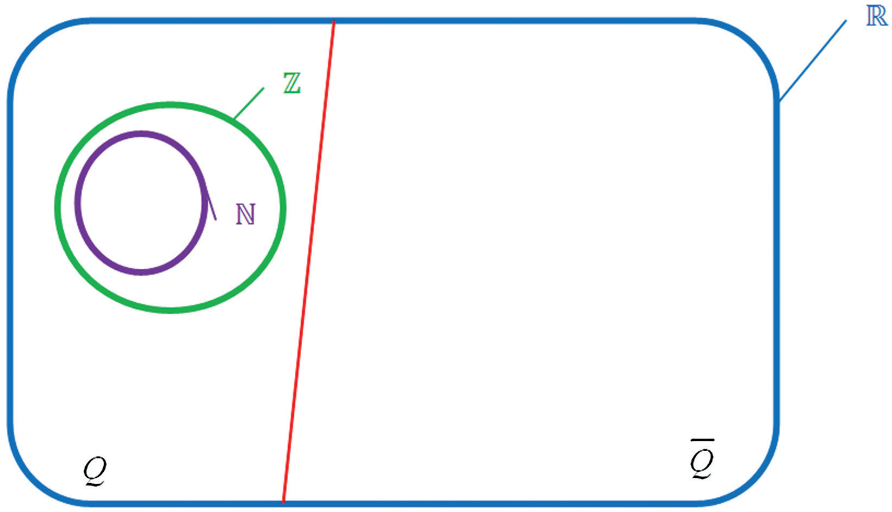
O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é o conjunto que reúne todos os conjuntos que vimos até agora: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Ele não lança exatamente um tipo diferente de número: na verdade, ele cria uma categoria de números, que são os números que são racionais ou irracionais.

Simbolicamente então, representamos o conjunto dos números reais assim:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$$

A barrinha que fica acima do $\mathbb{Q}$ quando vamos indicar o conjunto dos números irracionais significa que o conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ é o que falta ao conjunto $\mathbb{Q}$ para se tornar igual ao conjunto $\mathbb{R}$. O conjunto que contém a barrinha é conhecido como conjunto complementar. No nosso caso, podemos dizer que $\overline{\mathbb{Q}}$ é o complementar de $\mathbb{Q}$ em relação a $\mathbb{R}$.

A representação em diagramas dos números reais é bem interessante. Veja!



Vamos compreender bem o que esse diagrama representa? Todos os números que você já estudou até agora são números reais e estão dentro da linha azul no diagrama acima. O conjunto dos números reais, delimitado pela linha azul, está organizado em dois grandes grupos: o dos números racionais e o dos números irracionais. Por sua vez, há alguns tipos interessantes de números racionais que são os números inteiros. Os números inteiros que não são negativos são chamados de números naturais.

E você sabe que números não são reais? Os números que resultariam de contas que não têm resposta, ou seja, que são impossíveis de serem realizadas, como as divisões por zero ou as raízes de índice par, para radicandos negativos (como $\sqrt{-4}$ ou $\sqrt[8]{-1}$, por exemplo).

Uma forma interessante de apresentar os números é a reta numérica. Você já a conhece! Vamos retomá-la?

As atividades que apresentamos a seguir abordam os números, de todos os tipos que vimos acima. Atenção: responda sempre em seu caderno, não escreva nesse material!

Atividade 15

Você conhece o papel quadriculado? Pegue uma folha desse papel e trace um segmento de reta de tamanho igual a 30 lados de quadrado e marque os números 0 e 1 em seus extremos. Agora , marque neste segmento as frações:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{12}{18}, \frac{6}{8}$$

a. Dentre as frações listadas, há mais do que uma associada a um mesmo ponto na reta? Quais são elas?

b. Por que isso aconteceu?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 16

Defina abaixo, entre quais valores inteiros consecutivos se localiza cada fração:

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{-4}{5}$

d. $\frac{7}{2}$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 17

Usando uma calculadora simples, realize as seguintes atividades:

Digite a sequência de teclas 1+ = = = ... e observe os resultados.

a. Que número apareceu no visor da calculadora após o 8º sinal = pressionado? E após o 9º ? E depois do 10º ?

b. Reinicie o mesmo processo a partir de 0,1 e não de 1, digitando na calculadora 0.1 + = = = ... e observando o resultado. Prossiga, registrando os números mostrados no visor, até o sétimo sinal = pressionado. Sem continuar a pressionar a tecla = , escreva quais os três próximos resultados, indo a seguir na calculadora. Por que isso aconteceu?

c. Agora, sem usar a calculadora: se você começar no 0,01, qual o resultado que deverá aparecer no visor da calculadora depois do 9º pressionar da tecla =?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 18

Vamos pensar no número decimal 3,004.

a. Este número está mais próximo de 3 ou de 4? Por quê?

b. Está mais próximo de 3 ou de 3,1? Por quê?

c. Está mais próximo de 3 ou de 3,01? Por quê?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 19

Dê exemplos de 10 números racionais entre $\frac{17}{3}$ e $\frac{41}{5}$.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 20

Quem é o maior? Vamos arrumar em ordem crescente? Você pode usar uma calculadora para facilitar seus cálculos se quiser.

a. $\frac{23}{9}; 3,6; \frac{17}{6}$

b. Raiz quadrada de 3; 1,732; 1,733

c. $\frac{-5}{12}$; raiz quadrada de 4; menos raiz cúbica de 8

d. $1\frac{3}{5}; 1,4; \frac{4}{5}; 1,333...; 1,334$

Anote suas respostas em seu caderno

Subconjuntos da reta real: os intervalos

O conjunto dos números reais é infinito também, assim como o conjunto dos naturais também é. Mas são tipos de infinito diferentes, é como se o conjunto dos reais fosse "mais infinito" que o conjunto dos números naturais. Vamos ver por quê?

Quantos números naturais existem entre 2 e 4? Apenas o 3, concorda? E quantos números inteiros existem entre 2 e 4? Também só o 3. Agora, pense mais um pouco e responda: quantos números racionais existem entre 2 e 4? Será também só o 3?

A resposta é NÃO! Por exemplo, 2,1 é um número racional e está entre 2 e 4. A fração $\frac{19}{5}$ também é um número racional e está entre 2 e 4. 2,000001; 3,8703; 3,44444..., entre infinitos outros, também são números racionais existentes entre 2 e 4. Mesmo que tomemos intervalos bem pequenos, sempre conseguimos encontrar outros racionais entre os extremos do intervalo. Quer ver mais um exemplo?

Que racionais podem existir entre 2 e 3? Bom, podemos pensar em 2,1; 2,2; 2,3; etc. E entre 2,2 e 2,3 temos o 2,21; 2,22; 2,23; entre 2,21 e 2,22 temos o 2,211, 2,212, 2,213 etc. e isso num processo infinito! Nunca acaba! A quantidade de racionais existentes entre dois racionais quaisquer é infinita!

Quer saber mais sobre isso? Acesse o link http://www.uff.br/cdme/edn/edn-html/edn-pos-br.html, nele você vai encontrar uma atividade interativa muito interessante e que o ajudará muito a visualizar o que estamos falando agora.

Saiba Mais

E com os irracionais, será que ocorre o mesmo que com os racionais? Novamente a resposta é SIM! Há infinitos irracionais entre dois irracionais quaisquer! Quer ver um exemplo? Entre $\sqrt{2}$ e π, por exemplo, podemos destacar $2\sqrt{2}$, $\sqrt{\ }$, $\frac{\pi}{2}$ (lembre-se que 1,41 e 3,14 são aproximações decimais para $\sqrt{2}$ e π), entre infinitos outros.

Esse tipo de infinito que também diferencia os números naturais e inteiros dos racionais, irracionais e reais, podem complicar bastante para escrever subconjuntos dos números reais. Por exemplo, se quisermos escrever o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 < x < 5\}$, podemos escrever A = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, ou ainda, o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x < 5\}$, ele poderá ser escrito assim: B = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}. Entretanto, se o conjunto for $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 < x < 5\}$, ou seja, o conjunto formado por todos os números reais entre -3 e 5, como poderíamos escrever esse conjunto? Ou o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 5\}$, que engloba todos os números reais menores que 5, como ficaria? Difícil isso, concorda?

A solução para esse problema é usar o que conhecemos como intervalos reais.

Um intervalo real é um segmento de reta na reta numérica, ou seja, é um subconjunto sem interrupções intermediárias do conjunto dos números reais.

Importante

Já vimos que não conseguiremos escrever todos os seus elementos... A saída é usarmos um instrumento poderoso: a reta numérica! Quer ver como fazemos isso?

Como exemplo, vamos representar o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 < x < 5\}$?

Prático, não? O uso da reta numérica indica que, no trecho em vermelho, estão todos os números entre -3 e 5.

Mas há ainda um problema aqui...Quer ver qual é? Observe o seguinte intervalo:

$C_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 \leq x < 5\}$. Vamos representá-lo na reta?

Qual a diferença entre a representação na reta numérica de C e de C_1? Somente olhando a representação na reta, você consegue perceber qual a diferença entre os intervalos C e C_1?

Bem, olhando para os intervalos representados na reta numérica, não há diferença alguma! Mas quando olhamos para a representação na notação de conjunto, vemos que $-3 \in C_1$ mas $-3 \notin C$, uma vez que em C temos $-3 < x < 5$ e em C_1 temos $-3 \leq x < 5$.

Nosso problema agora é pensar em uma maneira que nos permita, simplesmente olhando a representação do intervalo na reta numérica, fazer a distinção entre C e C1. A estratégia que utilizaremos para resolver essa questão é associar uma bolinha fechada (•) ao elemento que queremos incluir na representação na reta numérica ou uma bolinha aberta (O) ao elemento que não pertence ao intervalo, mas apenas o limita. Veja abaixo como essa estratégia mostra-se excelente para resolver esta questão!

Prático, concorda?

Veja agora, no geral, como representamos os intervalos reais!

Representação Geométrica	Representação por Notação de Conjunto	Representação por Notação de Intervalo
	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	$]a,b]$ ou $(a,b]$
	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	$[a,b[$ ou $[a,b)$
	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$
	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	$]a,b[$ ou (a,b)
	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	$]-\infty,a]$ ou $(-\infty,a]$
	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	$]-\infty,a[$ ou $(-\infty,a)$
	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	$[a,+\infty[$ ou $[a,+\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	$]a,+\infty[$ ou $(a,+\infty)$

Algumas associações que podemos fazer são as seguintes:

a. Em um intervalo com extremo pertencente ao conjunto, usamos os sinais de desigualdade com o igual $\leq$ ou $\geq$ na notação de conjunto. Na reta numérica, a inclusão do extremo é feita por meio de uma bolinha fechada •. Na notação de intervalo, os colchetes voltados para dentro indicam a inclusão do extremo ao qual estão associados [ou].

b. Em um intervalo com extremo não pertencente ao conjunto, usamos os sinais de desigualdade sem o igual < ou > na notação de conjunto. Na reta numérica, a inclusão do extremo é feita por meio de uma bolinha aberta o. Na notação de intervalo, os colchetes voltados para fora] , [ou os parênteses (,) indicam que o extremo ao qual estão associados não pertencem ao conjunto.

c. Um símbolo novo também está sendo apresentado a você agora: o símbolo do infinito, que é um 8 deitado: ∞ . Este símbolo pode ser associado ao sinal +, gerando $+\infty$, que representa o infinito positivo, no sentido para a direita na reta real, ou ao sinal de -, gerando $-\infty$. representando o infinito negativo, no sentido para a esquerda na reta real. O símbolo ∞ é usado na representação dos intervalos por notação de intervalo, que podemos visualizar na terceira coluna da tabela acima.

Vamos ver alguns exemplos?

1. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre 1 e 3, incluindo o 3. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x \leq 3\}$, usando notação de conjunto, ou $]1;3]$ ou ainda $(1;3]$, usando notação de intervalo.

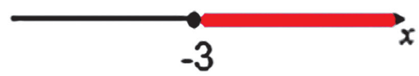
2. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -3 e 0, incluindo o -3. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 \leq x < 0\}$, usando notação de conjunto, ou $[-3,0[$ ou ainda $[-3,0)$, usando notação de intervalo.

3. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -1 e 2, incluindo os dois extremos. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq x \leq 2\}$, usando notação de conjunto, ou $[-1;2]$, usando notação de intervalo.

4. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais compreendidos entre -6 e -1, mas sem incluir nenhum dos dois extremos. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -6 < x < -1\}$, usando notação de conjunto, ou $]-6;-1[$ ou ainda $(-6;-1)$, usando notação de intervalo.

5. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são menores que -2, incluindo o -2. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -2\}$, usando notação de conjunto, ou $]-\infty; -2]$ ou ainda $(-\infty; -2]$, usando notação de intervalo.

6. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são maiores que -3, incluindo o -3. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -3\}$, usando notação de conjunto, ou $[-3; +\infty[$ ou ainda $[-3; +\infty)$, usando notação de intervalo.



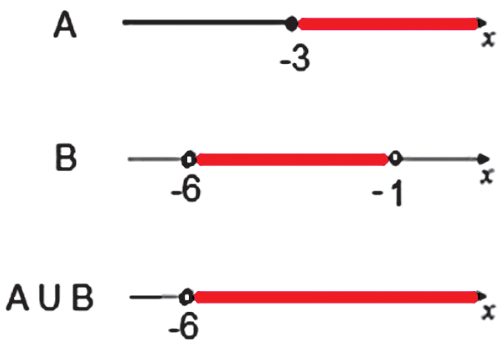
7. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são menores que 4, sem incluir o 4. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 4\}$, usando notação de conjunto, ou $]-\infty; 4[$ ou ainda $(-\infty; 4)$, usando notação de intervalo.

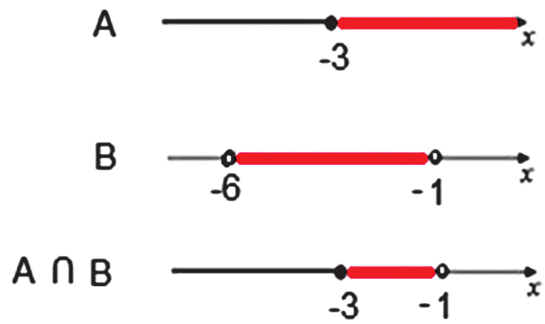
8. O intervalo, representado abaixo, contém todos os números reais que são maiores que 10, sem incluir o 10. Podemos escrevê-lo como $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 10\}$, usando notação de conjunto, ou $]10; +\infty[$ ou ainda $(10; +\infty)$, usando notação de intervalo.

Operações com Intervalos Reais

Como os intervalos numéricos são conjuntos, as operações de união (∪) e interseção (∩) podem ser realizadas entre eles. A lógica é exatamente a mesma: quando unimos dois intervalos, juntamos todos os elementos dos dois intervalos em um só; quando fazemos a interseção entre dois intervalos, buscamos o que há de comum nos dois. Vamos ver como isso funciona?

Vamos fazer juntos, como exemplo, a união e a interseção dos intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -3\}$ e $B =]-6; -1[$. Uma sugestão que ajuda muito é fazer a representação na reta numérica para visualizar melhor as operações.





A ideia, na união, é de juntar os dois intervalos em um só, como se as duas representações na reta numérica se sobrepusessem e demarcássemos na união tudo que ficou pintado em um só dos conjuntos ou nos dois. Para a interseção, a ideia é a mesma, a de sobreposição, mas aí vamos marcar apenas o "pedaço" que ficou pintado nos dois intervalos ao mesmo tempo. E como respondemos então? Simples, retomando a representação em notação de conjunto e/ou em notação de intervalo para A ∪ B e para A ∩ B. Veja!

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -6\}$ ou $A \cup B = \,]-6;+\infty[\, = (-6;+\infty)$

$A \cap B = \{\mathbb{R} \in \mathbb{R} \,/\, -3 \leq \mathbb{R} < 1\}$ ou $A \cap B = [-3;-1\{= \{-3;-1)$ ou $A \cap B = [-3;-1[= [-3;-1)$

Vamos praticar isso um pouco para finalizar esta aula? Agora é com você!

Atividade 21

Vamos fazer a união e a interseção dos intervalos A e B, apresentados em cada item que se segue? Use o seu caderno!

a. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x \leq 5\}$ e $B =]-\infty, 0[$

b. $A = [3, 5[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 10\}$

c. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -5\}$ e $B = [-6; 0[$

d. $A =]-\infty, 1[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -1\}$

e. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -4\}$ e $B = [2; +\infty)$

Anote suas respostas em seu caderno

Nesta aula, nós estudamos alguns conceitos que são fundamentais para o prosseguimento nos estudos do Ensino Médio. Toda a Matemática está estruturada, tomando como suporte o Estudo dos Conjuntos, que é o que permite dar à Matemática o seu caráter filosófico de precisão. Por essa razão, damos início ao estudo de Matemática no Ensino Médio, justamente estudando os Conjuntos.

Além da estrutura de conjuntos, vimos também os conjuntos numéricos – este é um momento em que podemos amadurecer tudo que já estudamos até hoje sobre números e operações com números. A organização dos números em conjuntos que os agrupam por suas semelhanças é primordial para que possamos estruturar as operações que realizamos entre eles. Este estudo também nos permite visualizar um pouco de alguns ramos extremamente importantes em Matemática, que são a Teoria dos Números e a Álgebra, além de nos apresentar uma nova estrutura de representação de subconjuntos contínuos dos números reais, que são os intervalos reais. Particularmente, a representação e as operações com Intervalos ainda serão muito usadas nas aulas seguintes. Então, não se permita concluir esta aula com dúvidas, retome o estudo, consulte seu professor e a Internet, certo?

Um abraço e até a próxima!

Resumo

- Conjuntos são objetos matemáticos que relacionam elementos de acordo com o que eles têm de semelhança ou de regularidade.
- Um elemento pode pertencer ($\in$) ou não pertencer ($\notin$) a um conjunto.
- Um conjunto pode estar contido ($\subset$) ou não estar contido ($\not\subset$) em outro conjunto.
- Uma parte ou um subconjunto de um conjunto dado é outro conjunto que tem todos os seus elementos pertencentes ao primeiro conjunto.
- A União ($\cup$) entre dois conjuntos é o conjunto formado por todos os elementos que estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo ou em apenas um deles.
- A intersecção ($\cap$) entre dois conjuntos é o conjunto formado por todos os elementos que estão nos dois conjuntos simultaneamente.
- O conjunto dos números naturais (N) é formado pelos números que resultam de contagem, como 1, 2, 3, 4, 5, etc.
- O conjunto dos números inteiros (Z) é formado por todos os números naturais e os seus simétricos -1, -2, -3, etc.
- O conjunto dos números racionais (Q) é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, ou seja, todos os naturais, os inteiros, os decimais exatos ou periódicos e as frações propriamente ditas.

- O conjunto dos números irracionais (I ou $\overline{\mathbb{Q}}$) é formado por todos os números que não podem ser escritos como fração. Estes números têm a forma de números decimais que são infinitos e não são periódicos, como o número π ou os resultados de raízes não exatas.
- O conjunto dos números reais (R) é o conjunto que representa a união entre racionais e irracionais.

Veja Ainda

- Procure na Internet sobre a vida e a obra de Georg Cantor, onde nasceu, período em que viveu. Ele teve uma importância enorme no estudo dos conjuntos. Algumas sugestões de sites na Internet onde você pode saber mais sobre Cantor seguem abaixo:
    - http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/vidacantor.htm
    - http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_02.PDF
    - http://www.seara.ufc.br/especiais/matematica/transfinitos/transfinitos5.htm
- Existem outras constantes matemáticas também incomensuráveis com a unidade. Aqui falamos do π. Procure saber do *e* e do φ. O número *e*, em homenagem a Euler, aparecerá no estudo das funções exponenciais e logarítmicas. Já o número φ é conhecido como número de ouro. O site http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html apresenta algumas atividades muito boas sobre o número de ouro e o retângulo áureo.
- O Laboratório Virtual de Matemática da UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – localizada em Ijuí, RS, oferece algumas atividades muito interessantes sobre os temas que estudamos nessa aula. Vale a pena experimentar! Acesse os links:
    - Operações com Conjuntos:

      http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/medio/conj_func/encomendas/opera_conjuntos/index.html
    - Conjuntos Numéricos

      http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/medio/conj_func/encomendas/conj_num.htm
    - Operações com Intervalos Reais

      http://projetos.unijui.edu.br/matematica/medio/index.html

- Há alguns vídeos no Youtube que podem ser bastante interessantes para aprofundar e ampliar o conhecimento sobre os números. Um deles é http://www.youtube.com/watch?v=f1Ak-6vMVpg, que trata do infinito. Vale a pena conferir!

Referências

Livros

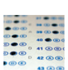
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Georgetown: Edgard Blucher, 1991. 479 páginas.
- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar 1 – Conjuntos e funções**. São Paulo: Atual Editora Ltda, 1977. 316 páginas.
- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio** – Volume 1. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1999. 237 páginas.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Anexo:Lista_de_sele%C3%A7%C3%B5es_participantes_da_Copa_do_Mundo_FIFA_de_2006

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Copa_do_Mundo_FIFA_de_2010



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

Ainda refletindo sobre o que comentamos na correção da atividade 3, vemos que:

a. ($\notin$) Abacate não pertence ao conjunto de frutas representado pela cesta

b. ($\notin$) uva não pertence ao conjunto T representado pela turma.

c. ($\in$) O livro de história pertence ao conjunto B de Biblioteca.

d. ($\in$) A fruta banana pertence ao conjunto F de frutas representado pela cesta.

e. ($\in$) A fruta uva pertence ao conjunto F de frutas representado pela cesta

f. ($\notin$) A fruta uva não pertence ao conjunto B de Biblioteca.

Atividade 2

a. O livro de história pertence ao conjunto Biblioteca

b. Abacate não pertence ao conjunto Turma

c. Uva não pertence ao conjunto Turma

d. Banana pertence ao conjunto Frutas

Atividade 3

a. $B \subset F$

b. $M \subset F$

c. $G \not\subset F$

d. $B \subset M$

e. $G \not\subset M$

f. $B \not\subset G$

Atividade 4

a. V, pois o elemento f (física) não pertence a U

b. V, todos os elementos de B pertencem a U

c. F, o livro de geografia não pertence ao conjunto B

Atividade 5

Vamos associar os sanduíches aos símbolos s1, s2, s3 e s4

Vamos associar as bebidas aos símbolos b1 e b2

Vamos associar os acompanhamentos com a1 e a2. Teremos:

{s1,r1,a1}; {s1,r1,a2}; {s1,r2,a1}; {s1,r2, a2}

{s2,r1,a1}; {s2,r1,a2}; {s2,r2,a1}; {s2,r2, a2}

{s3,r1,a1}; {s3,r1,a2}; {s3,r2,a1}; {s3,r2, a2}

Atividade 6

a. {M, A, T, E}

b. {C, O, N, J, U, T} – observe que não colocamos as letras repetidas no conjunto B.

c. {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

d. {11, 12, 13, 14, 15, ...} – esse é um conjunto que tem infinitos elementos.

e. { } ou E = Ø - não há números negativos entre 2 e 4. Isso quer dizer que esse é um conjunto vazio!

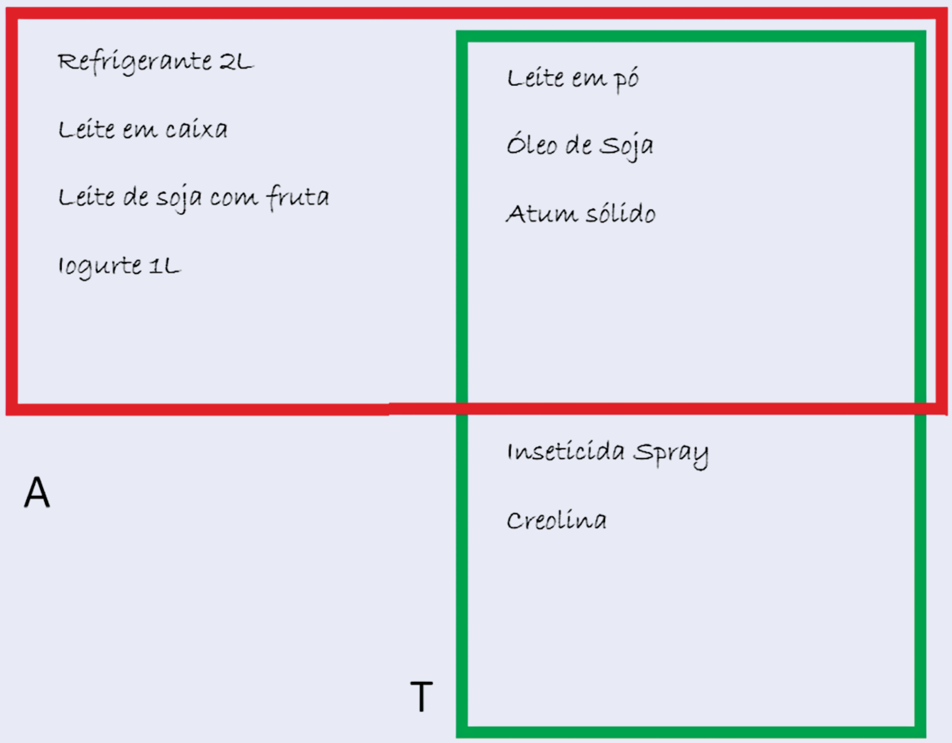
Atividade 7

P(M)={{ }, {p}, {a}, {i}, {p,a}, (p,i}, {a, i}, {p,a,i}}

Respostas das Atividades

Atividade 8

Refrigerante 2L	*Detergente*	*Sabão em pó*	*Atum sólido*
Leite em caixa	*Inseticida em Spray*	*Óleo de Soja*	*Creolina*
Leite em pó	*Leite de soja com fruta*	*Sabão líquido*	*Iogurte 1L*



a. Não.

b. Ver na figura acima. (refrigerante 2L, Leite em caixa, leite de soja com fruta, iogurte 1L, leite em pó, óleo de soja e atum sólido)

c. Ver na figura acima. (leite em pó, óleo de soja, atum sólido, inseticida em spray e creolina)

d. Ver na figura acima – leite em pó, óleo de soja, atum sólido.

e. Sabão líquido, sabão em pó e o detergente.

Respostas das Atividades

Atividade 9

A={refrigerante 2L, Leite em caixa, leite em pó, leite de soja com fruta, óleo de soja, atum sólido, iogurte 1L}

C={leite em caixa, leite de soja com fruta, sabão em pó}

T={leite em pó, inseticida spray, óleo de soja, atum sólido, creolina}

L={detergente, inseticida spray, sabão em pó, sabão líquido, creolina}

a. Os produtos alimentícios ou produtos que são embalados em caixas. Podemos representar como $A \cup C$.

b. São somente os alimentos que são embalados em caixas. Podemos representar como $A \cap C$.

c. Produtos de limpeza ou produtos que são acondicionados em caixas. Podemos representar como $L \cup C$.

d. Não, pois não há produtos de limpeza que sejam comestíveis. Podemos representar como $L \cap T = \emptyset$.

e. Produtos alimentícios ou produtos de limpeza, ou seja, a lista toda de D. Sônia. Podemos representar como $A \cup L$.

f. Sim, são os produtos de limpeza que são embalados em caixas. Podemos representar como $C \cup T$.

Atividade 10

S = {Argentina, Brasil, Equador, México, Paraguai, Trinidad e Tobago}

D = {Brasil, Argentina, Honduras, México, Chile, Paraguai, Uruguai}

a. O conjunto S tem 6 elementos e o conjunto D tem 7 elementos.

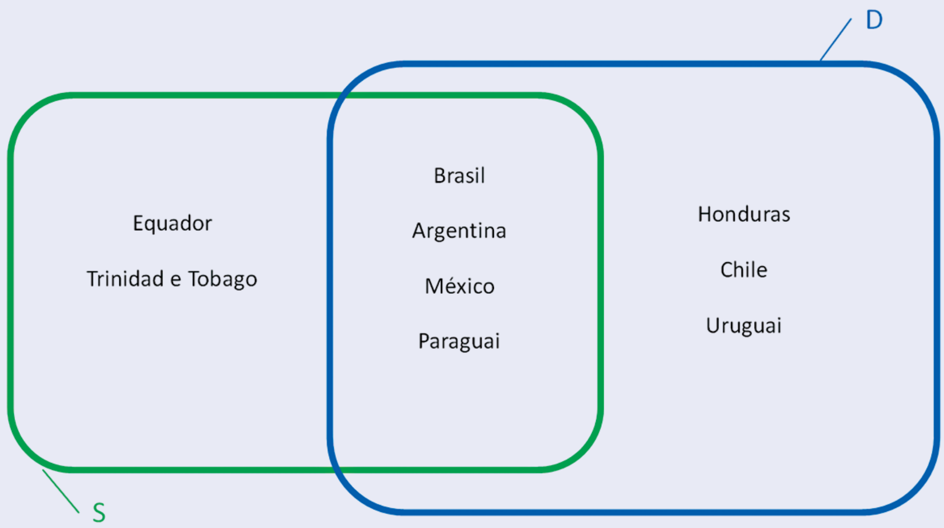
b. $E = S \cap D$ = { Brasil, Argentina, México, Paraguai}. O conjunto E tem 4 elementos.

c. $T = S \cup D$ = {Argentina, Brasil, Equador, México, Paraguai, Trinidad e Tobago, Honduras, Uruguai}.

Respostas das Atividades

d. A operação é de união entre S e D. O conjunto T tem 8 elementos.

e. Veja no diagrama abaixo:



Atividade 11

a. S – D {Equador, Trinidad e Tobago}

b. D – S = {Honduras, Chile, Uruguai}

Atividade 12

a. A – L= A, pois não há produtos alimentícios que possam estar no conjunto dos produtos de Limpeza;

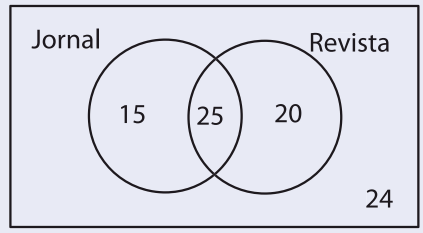
b. L – A = L, pois não há produtos de limpeza que possam estar no conjunto dos produtos alimentícios.

c. São os produtos que são embalados em caixas, mas não são alimentícios. C – A = {sabão em pó}

d. L - T

e. C - A

Atividade 13



Leem jornal – 40

Leem revista - 45

Leem os dois – 25

Note que estes 25 alunos são contados duas vezes (para os que leem jornal e para os que leem revista), logo teremos:

40 – 25 = 15

45 – 25 = 20

Podemos concluir que o total de entrevistados é: 15 (jornal) + 20 (revista) + 25 (jornal e revista) + 24 (nenhum) = 84 alunos entrevistados

Atividade 14

a. Na primeira linha da tabela, estão todos os números naturais não nulos; na segunda linha, os números pares; na terceira linha, todos os resultados das potências de base 2 para expoente não nulo e na quarta linha encontramos os resultados de todas as potências de naturais do tipo n^n, para n não nulo.

b. Terá nem mais nem menos elementos, porque as linhas 2, 3 e 4 são determinadas a partir dos elementos escritos na primeira linha. Logo, para cada elemento da linha 1 há um elemento correspondente em cada uma das outras linhas.

c. Todas as linhas terão a mesma quantidade de elementos.

Atividade 15

a. Neste exercício, a localização dos números será:

15 quadradinhos – ½, 5/10

22,5 quadradinhos – ¾ , 6/8

20 quadradinhos - 2/3, 4/6, 12/18

12 quadradinhos – 2/5

9 quadradinhos – 3/10

b. As frações que ficam no mesmo lugar são as frações equivalentes

Atividade 16

a. Entre 0 e 1

b. Entre 0 e 1

c. Entre 0 e -1

d. Entre 3 e 4

Atividade 17

a. Na 8ª vez que pressionarmos a tecla =, obtemos 9; na 9ª vez, 10 e na 10ª vez 11.

b. 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8. Os próximos serão 0.9; 1.0 e 1.1

c. Vai aparecer 0.1, porque quando pressionamos 9 vezes o sinal =, acumulamos 10 vezes o número 0.01 e 10 vezes 0.01 resulta em 0.1.

Atividade 18

a. 3,004 está mais próximo de 3 que de 4, pois se dividirmos o espaço de 3 a 4 (na reta numérica) em 1000 partes iguais, o 3,004 vai estar na 4ª marcação após o 3, o que é antes da metade do total das marcas.

b. 3,004 está mais próximo de 3 que de 3,01, porque se dividirmos o espaço de 3 a 3,1 em 100 partes iguais, o 3,004 estará na 4ª marcação após o 3, o que é antes da metade do total de marcas.

c. 3,004 está mais próximo de 3, porque se dividirmos o espaço de e a 3,01 em 10 partes iguais, o 3,004 estará na 4ª posição após o três, o que é antes da metade do total das marcas.

Atividade 19

Vamos tomar uma aproximação decimal para estes racionais? 17/3 é aproximadamente igual a 5,7 e 41/5 é aproximadamente igual a 8,2. Podemos então escrever os decimais 5,8; 5,9; 6; 6,1; 6,2; 6,3; 6,4; 6,5; 6,6 e 6,7, por exemplo. Há infinitas possibilidades de resposta, essas são apenas algumas delas. O importante é que todos os números que você escrever estejam entre 5,7 e 8,2.

Atividade 20

Basta tomarmos uma aproximação decimal para cada um deles.

a. $\frac{23}{9}; \frac{17}{6}; 3,6$

b. $1,732$; raiz quadrada de $3; 1,733...$

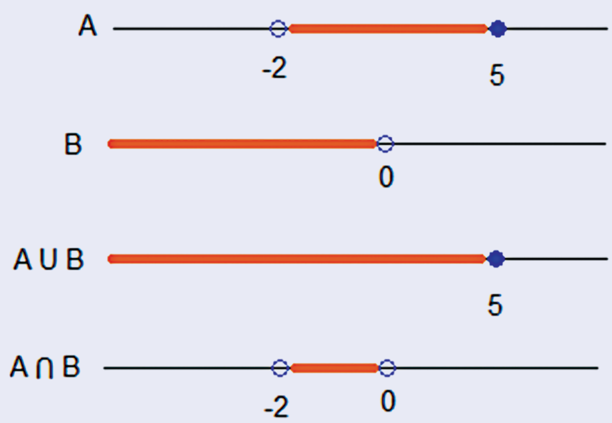
c. Menos raiz cúbica de oito; $\frac{-5}{12}$; raiz quadrada de 4

d. $\frac{4}{5}; 1,333...; 1,334; 1,4; 1\frac{3}{5}$

Respostas das Atividades

Atividade 21

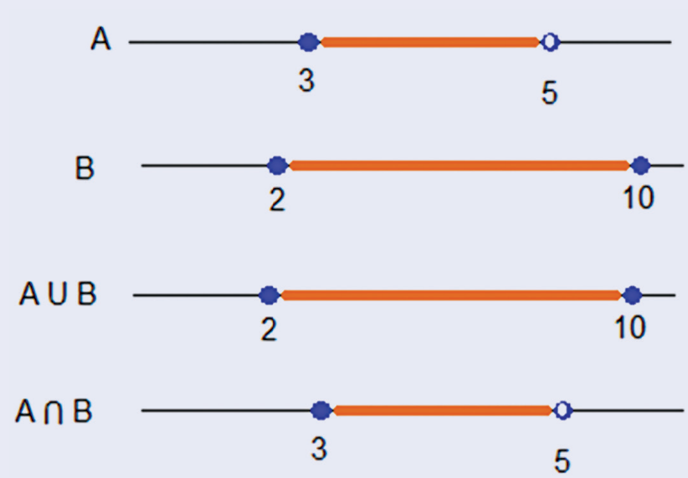
a. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x \leq 5\}$ e $B =]-\infty, 0[$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -5\} =]-\infty, -5]$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x < 0\} =]-2, 0[$

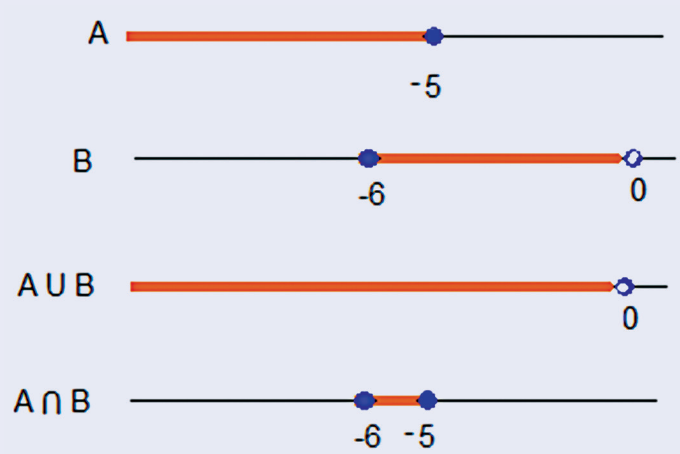
b. $A = [3, 5[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 10\}$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 10\}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 \leq x < 5\}$

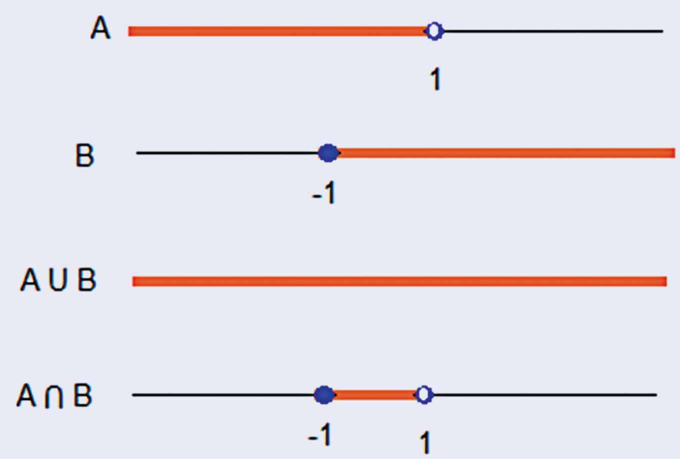
c. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \le -5\}$ e $B = [-6; 0[$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0\} =]-\infty, 0[$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -6 \le x < -5\} = [-6, 5[$

d. $A =]-\infty, 1[$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \ge -1\}$

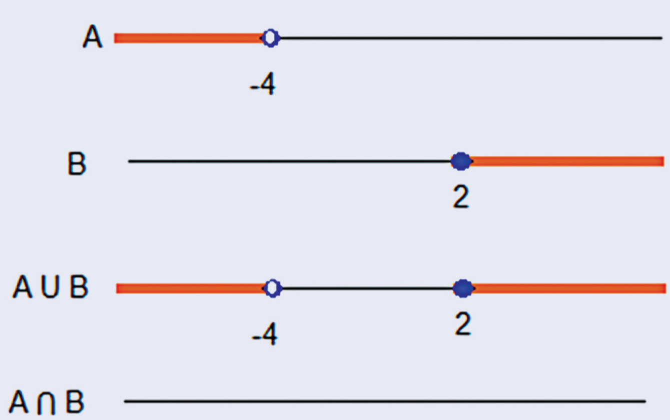


$A \cup B =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \le x < 1\} = [-1, 1[$

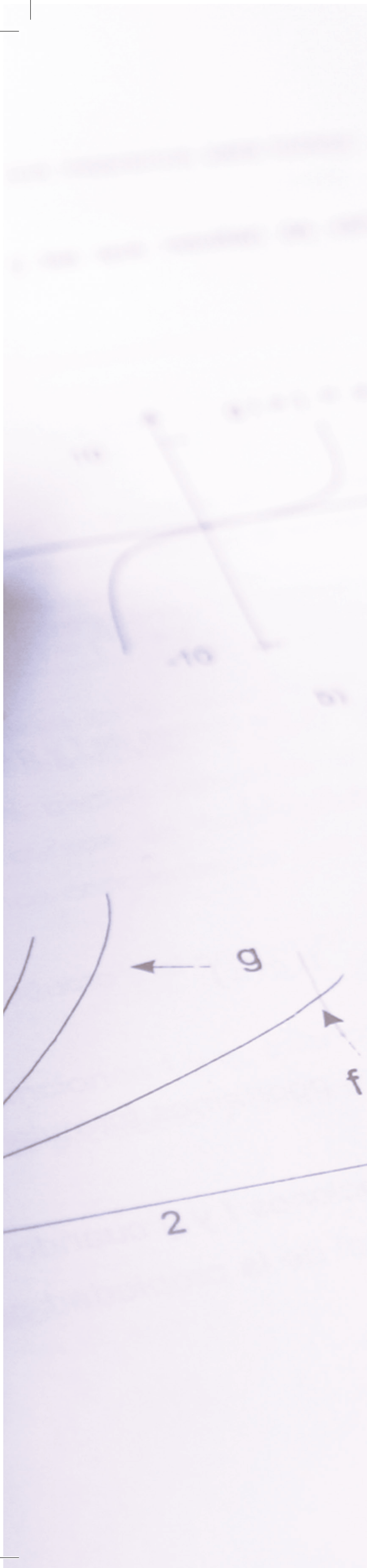
Respostas das Atividades

e. $A = \{x \in \mathbb{R} / x < -4\}$ e $B = [2; +\infty)$



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x < -4 \text{ ou } x \geq 2\} =]-\infty, -4[\cup[2, +\infty[$

$A \cap B = \varnothing$



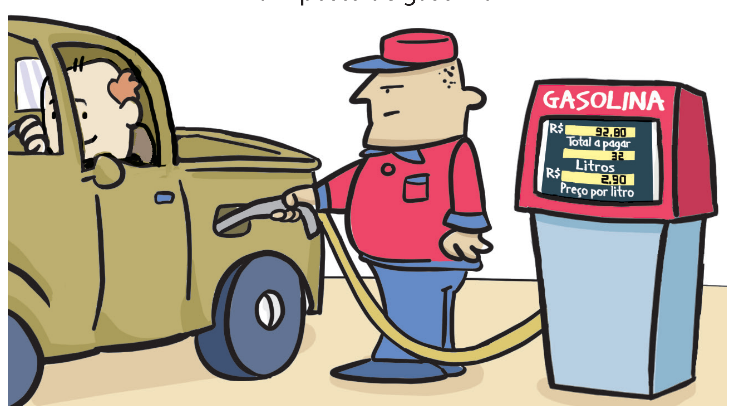
Estudo de funções – Parte 1

Para início de conversa...

A ideia de função é muito utilizada na Matemática e em outras áreas como Biologia, Física, Química, assim como em diferentes situações do nosso dia a dia.

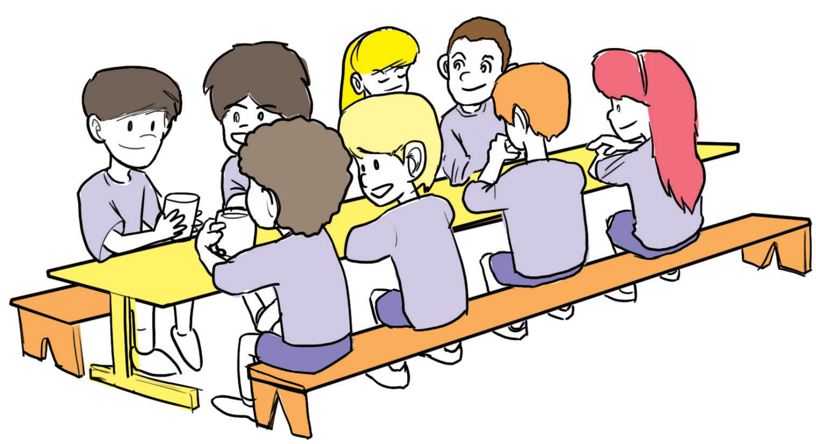
Veja alguns exemplos:

Num posto de gasolina



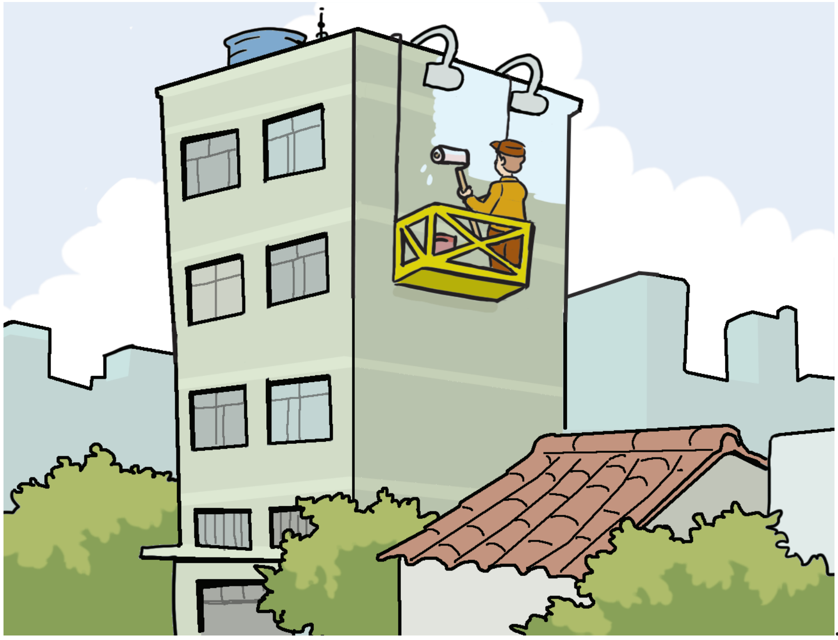
O preço a pagar depende da quantidade de gasolina colocada.

Numa Escola



A quantidade de merenda depende da quantidade de crianças.

Numa Escola



A quantidade de tinta consumida depende da área a ser pintada.

Em cada um destes exemplos foram destacadas duas grandezas que variam, de maneira que a variação de uma depende da variação da outra.

Este fato é importante para a compreensão do conceito de **função** que vamos estudar a seguir.

Numa função há duas variáveis: a variável **independente**, que pode assumir qualquer valor em um conjunto determinado e a variável **dependente**, cujos valores são calculados a partir da 1ª variável.

Objetivos de aprendizagem

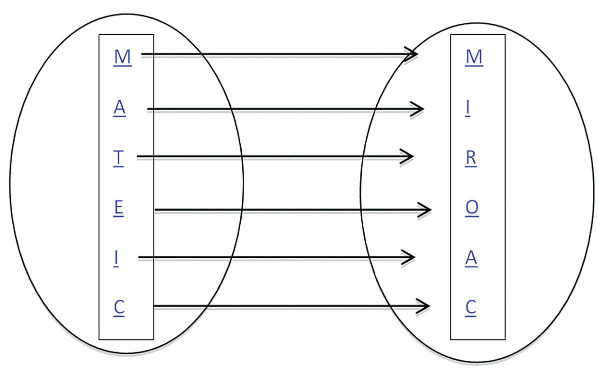
- Construir a ideia de função utilizando situações-problema da aritmética, geometria e álgebra.
- Reconhecer as noções de variáveis, dependência, regularidade.
- Escrever a expressão algébrica que representa uma relação entre duas grandezas que apresenta regularidade, ou seja, um padrão de comportamento.
- Reconhecer que, toda vez que duas grandezas variam proporcionalmente, a relação entre elas é uma função.

Seção 1
Relações e funções

No decorrer das guerras, os códigos para a transmissão de mensagens secretas foram fator importante nas conquistas de várias batalhas.

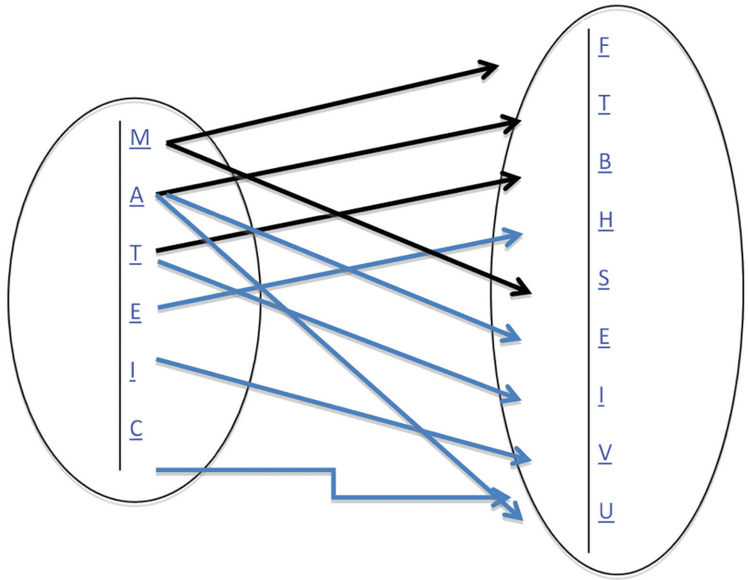
Um código muito conhecido é o chamado sistema “ZENIT-POLAR”, que consiste, basicamente, em substituir as letras das palavras a serem cifradas de acordo com a regra estabelecída no nome do sistema: trocamos todos os Zs por Ps– e vice versa, todos os Es por Os – e vice versa, todos os Ns por Ls – e vice-versa, e assim até o final. As letras que não constam do nome do sistema, como o M, J, K, etc permaneceriam inalteradas.

Baseado neste código, a querida Matemática resulta em uma criptografia transformada em Miromiraci. Lembrando a aula de teoria dos conjuntos, a gente poderia representar a transformação de Matemática em Miromiraci assim:



No conjunto à esquerda estão as letras da palavra matemática e no conjunto da direita as letras da palavra miromiraci. O sistema de criptografia Zenit-Polar faria justamente essa ponte, estabeleceria essa relação entre os elementos de um conjunto e os de outro.

Durante a Segunda Guerra Mundial, os militares alemães, por exemplo, usavam uma sofisticada máquina chamada Enigma para encriptar suas mensagens. A máquina continha até oito tambores articulados e que se moviam durante a digitação – o que, a muito grosso modo, fazia com que a tabela de correspondência mudasse a cada letra digitada. Assim, uma palavra seria codificada de uma quantidade gigantesca de maneiras diferentes, mesmo quando digitada repetidas vezes numa mesma mensagem! Quer experimentar? Dê um pulo em http://enigmaco.de/enigma/enigma.html, para acessar a versão online da máquina Enigma de três tambores. Foi nessa mesma máquina que entramos com a palavra matemática e obtivemos ftbhseivvu. Vamos representar essa relação no diagrama?



E aqui, apontamos uma diferença significativa entre essa relação e anterior: enquanto na relação do Zenit-Polar cada elemento do conjunto da esquerda estava relacionado a um único elemento do conjunto da direita, na relação da máquina Enigma há elementos do conjunto da esquerda que estão associados a mais de um elemento do conjunto da direita: o M está associado a dois elementos (o F e o S), o A está associado a três elementos (o T, o E e o U) e o T está associado dois elementos (o B e o I). Por isso, repetindo, quando cada elemento do conjunto da esquerda está associado a um único elemento do conjunto da direita, como no primeiro caso, dizemos que a relação do Zenit-Polar é uma função. E, como na relação da Enigma há pelo menos um elemento do conjunto da esquerda associado a mais de um elemento do conjunto da direita, dizemos que essa relação não é uma função. Veja: a relação existe – tanto que a mensagem podia ser decodificada – e é determinada pela combinação das inúmeras chaves e tambores da máquina. Ela só não é uma função.

Seção 2
Mais sobre a noção de função

Exemplos de funções

Na seção anterior você observou exemplos de relações entre dois conjuntos. No exemplo do sistema criptográfico Zenit-Polar, a relação estabelece uma correspondência entre os elementos dos dois conjuntos de letras em que a cada letra do 1º conjunto corresponde apenas a uma letra no 2º conjunto. Esta relação é uma função. Já no outro sistema criptográfico, mais complexo, isto não acontece. Nesse caso a relação não é uma função.

Vamos apresentar agora alguns exemplos de funções determinando, quando possível, a expressão matemática que representa cada uma. No entanto, é preciso ter em mente que para determinar a expressão Matemática é necessário identificar o padrão de comportamento ou regularidade.

1º) Um litro de gasolina está custando R$ 2,83 em um posto de combustível da minha cidade. Veja a tabela que mostra os valores a pagar para se colocar gasolina no tanque de um carro.

Litros	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**	**30**
Preço a pagar (R$)	2,83	5,66	8,49	11,32	14,15	16,98	...	84,90

O que mostra essa tabela?

O preço (**VARIÁVEL DEPENDENTE**) a pagar depende da quantidade de litros de gasolina (**VARIÁVEL INDEPENDENTE**) que forem colocados no tanque, ou seja, o preço será igual à quantidade de litros multiplicada pelo preço de 1 litro de gasolina que é R$ 2,83. Neste caso, dizemos que o preço a pagar é função da quantidade de litros colocados no tanque. Será que você consegue escrever uma expressão matemática que represente essa função?

2º) Um professor resolveu brincar com a turma de "adivinhe a regra". Ele dizia um número para um aluno e ele respondia outro número de acordo com uma regra previamente combinada. Vamos adivinhar qual é essa regra?

Veja a tabela com alguns números escolhidos pelo professor e os números que o aluno respondeu.

Número escolhido	1	3	4	6	8
Número respondido	1	5	7	11	15

Conseguiu descobrir a regra? Parabéns! Mas se não conseguiu, não tem problema, vamos contar para você: os números respondidos pelo colega são iguais ao dobro do número escolhido pelo professor menos 1. Neste caso, também dizemos que o número respondido é função do número escolhido. Será que você consegue escrever uma expressão matemática que represente essa função? Veja nossa resposta logo depois do terceiro exemplo.

3º) Na bula de um remédio pediátrico está indicado a posologia (modo de usar) da seguinte maneira: *2 gotas a cada kg de peso*

Peso em kg (P)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº de gotas (G)	2	4	6	8	10	12	14	16	18

O número de gotas de remédio (**VARIÁVEL DEPENDENTE**) a serem administradas, depende do peso da criança (**VARIÁVEL INDEPENDENTE**) e podemos escrever a seguinte expressão matemática: G = 2 P.

Dizemos que **G é função de P**.

Vamos ver agora como ficam as expressões matemáticas dos outros exemplos.

No caso do exemplo 1, se representarmos por P o valor a ser pago e por L a quantidade de litros colocados, podemos escrever que $P = 2{,}83 \times L$. Como o preço a pagar é função da quantidade de litros colocados no tanque,dizemos que **P é função de L**.

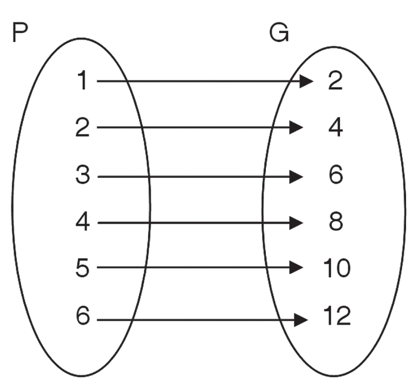
No exemplo 2, se chamarmos de R o número respondido pelo aluno e n é o número escolhido pelo professor, podemos dizer que a expressão que representa essa regra é: R = 2n -1. Como o número respondido é função do número escolhido, dizemos que **R é função de n**.

Representação de uma função por diagrama

Além da representação por tabela, podemos também representar uma função por diagramas usando conjuntos e flechas para indicar a relação de correspondência entre as grandezas.

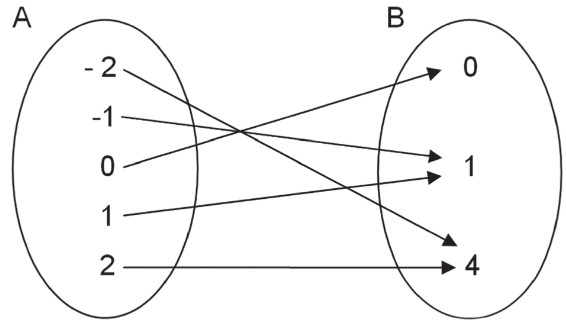
1º) Veja a representação da função do 3º exemplo.

Chamamos de P o conjunto de alguns valores que indicam os pesos e G o conjunto dos valores que indicam a quantidade de gotas correspondentes.



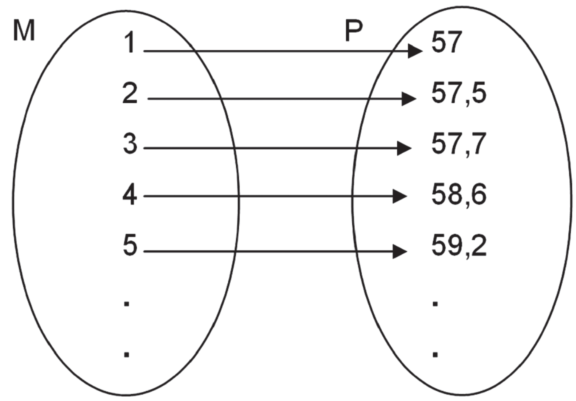
Podemos observar que **a cada valor que indica o peso**, corresponde **um único valor** que indica a quantidade de gotas do remédio

2º) Temos A = {-2, -1, 0,1,2} e B = {0, 1 4} e a expressão matemática que representa essa correspondência é $y = x^2$, onde x é elemento de A e y é elemento de B.

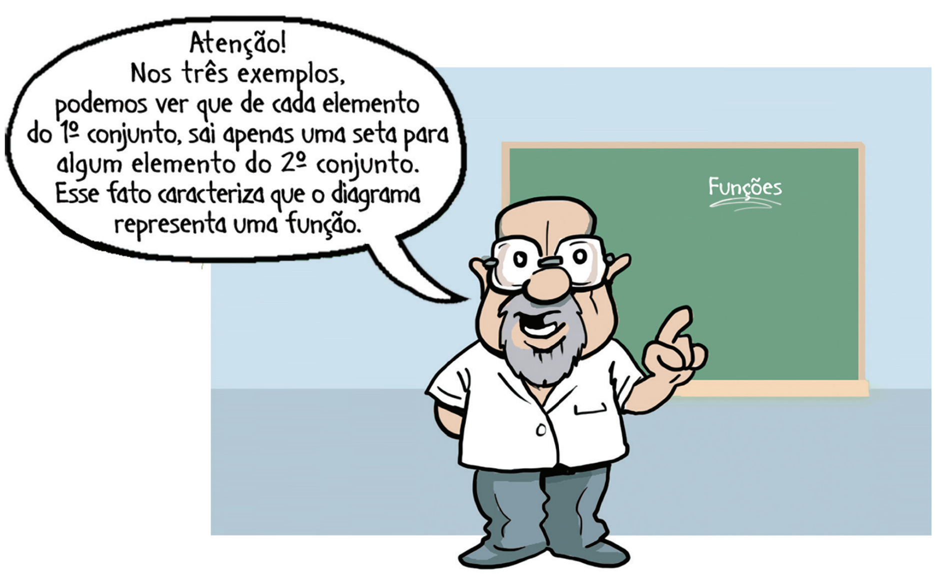


Neste diagrama, vemos que cada valor do conjunto A tem **um único** valor correspondente no conjunto B, portanto o diagrama está representando uma função de A em B.

3º) Observe o diagrama que mostra a relação entre tempo de gravidez M (em meses) e o peso de uma gestante P (em kg).



O peso da gestante é **função** do tempo de gestação, pois a cada mês a gestante terá apenas um peso. No entanto, neste caso não é possível determinar uma expressão matemática para indicar esta dependência. Além da variação do peso não seguir nenhum padrão, ela também muda de acordo com a gestante.



Situação Problema 1

Manuel e Solange resolveram brincar de “adivinhe a regra”. Solange dizia um número e Manuel respondia outro. O objetivo do jogo é, depois de alguns exemplos, descobrir qual regra Manuel estava aplicando. Para ajudar a descobrir, Solange construiu uma tabela com os números que ela disse em uma coluna e o número que Manuel respondeu, em cada caso, em outra coluna. Veja como ficou a tabela:

Número dito por Solange (s)	Número respondido por Manuel (m)
0	-1
2	3
-1	-3
1	1
4	7

a. Descubra a regra que Manuel usou.

b. O número respondido por Manuel depende do número dito por Solange?

c. Podemos dizer que o número respondido por Manuel (m) é função do número dito por Solange(s)? Por quê?

Situação Problema 2

Uma pessoa está dirigindo em uma estrada, com uma velocidade constante de 80km/h.

a. Construa uma tabela usando t para representar o tempo (em horas) que a pessoa dirigiu, e d para representar a distância percorrida (em km).

b. Existe uma função entre essas duas grandezas? Por quê?

c. Escreva a sentença matemática que representa essa função.

Situação Problema 3

Temos A = { 0, 1, 4, 9} e B = { 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3} e a expressão matemática que representa uma correspondência entre A e B é $y = \sqrt{x}$, onde x é elemento de A e y é elemento de B.

Faça um diagrama que represente essa correspondência e verifique se ela é uma função de A em B, justificando a resposta. Todos os elementos de B recebem flechas vindas de A?

Importante

Raiz quadrada de um número real não negativo (x) é um valor também real e não negativo que, se multiplicado por si mesmo, é igual a x.

Por exemplo: A raiz quadrada de 9 é 3, porque 3 . 3 = 9. Observe que definimos a raiz quadrada de um número real não negativo como sendo um número real não negativo. Portanto, mesmo sabendo que (- 3) . (- 3) = 9, não podemos dizer que – 3 também seja uma raiz quadrada de 9.

Situação Problema 4

Em um estacionamento, são cobradas as seguintes tarifas:

1 hora: R$3,00

Após a 1ª hora: R$2,00 por hora excedente.

a. Faça uma tabela apresentando o número de horas que um carro permaneceu no estacionamento (h) e o valor a pagar em reais(r).

b. O valor a pagar é função do número de horas que o carro permanecerá no estacionamento? Explique.

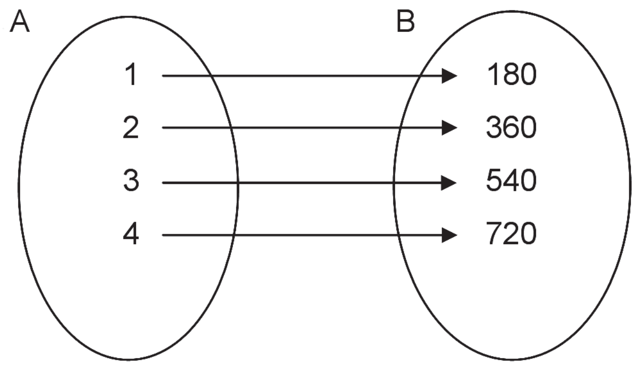
c. Escreva uma expressão matemática que represente o valor a pagar.

Notação de uma função

Como já foi visto nos exemplos anteriores, usamos letras para representar grandezas variáveis. Também já vimos que numa função há duas variáveis: a variável **independente**, que pode assumir qualquer valor em um conjunto determinado e a variável **dependente**, cujos valores são calculados a partir da 1ª variável.

Veja o seguinte exemplo:

O valor que um pintor vai cobrar para pintar as casas de um conjunto habitacional vai depender do número de cômodos da casa. Para cada cômodo ele cobrará R$ 180,00. Usando a representação com conjuntos e setas que vimos anteriormente, chegamos no diagrama a seguir:



Como o preço do trabalho depende do número de cômodos a serem pintados, podemos dizer que a variável preço é dependente da variável número de cômodos. Assim, a variável preço seria a variável dependente e o número de cômodos a variável independente. Matematicamente falando, se representarmos o número de cômodos pela variável x e o preço do trabalho pela variável y, a variável x será a variável independente, a variável y será a variável dependente.

$$y = f(x)\text{, que se lê: } y \text{ é função de } x$$

Se lembrarmos que todos os valores do número de cômodos – a variável x, ok? – são elementos do conjunto A e que todos os preços – a variável y – são elementos de B, podemos escrever, ainda, que:

$$f: A \longrightarrow B$$

$$y = 180.x$$

Ou, em linguagem corrente, f é uma função definida de A em B, representada pela expressão

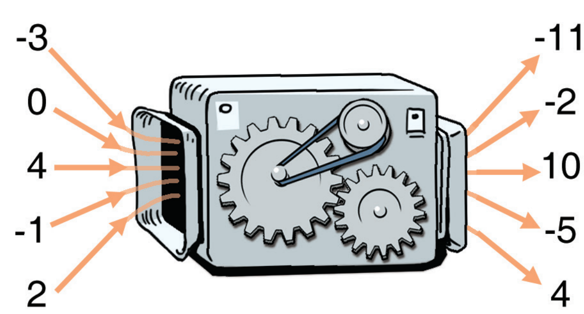
$$y = 180.x \text{ ou ainda } f(x) = 180.x$$

Domínio e Imagem

No exemplo anterior, o conjunto A cujos elementos são os números de cômodos de cada casa é chamado **Domínio da função(D)** e o conjunto B cujos elementos são os valores da pintura é chamado **Imagem da função (Im).**

Exemplo:

Veja a “máquina de números” que faz o seguinte: para cada número que entra na máquina, ela triplica e subtrai 2 do resultado. A cada número que entra, sai apenas um número da máquina, portanto essa relação obtida pela máquina é uma função.



A função dessa máquina é representada pela expressão y = 3x -2, sendo **y** o número que sai da máquina e **x** é o número que entra.

O domínio dessa função é D = {-3, 0, 4, -1,2} e a Imagem é Im= {-11, -2, 10, -5, 4}

Situação Problema 5

Atividade

O salário mensal de um vendedor é composto de duas partes: uma é fixa no valor de R$ 700,00 e a outra é variável sendo igual a 1% do total que ele vende no mês.

Chamando de **v** o total de vendas e de **s** o salário final do vendedor, podemos escrever que s = f(v) é a função que associa o total de vendas com o salário do vendedor.

Escreva a expressão algébrica que representa essa situação.

Importante

Lembre-se que para calcular 1% de uma quantia basta dividi-la por 100 ou ainda multiplicá-la por 0,01.

Desafio 1:

Se aquele vendedor recebeu de salário R$ 735,20, quanto vendeu neste mês?

Anote suas respostas em seu caderno

Proporcionalidade e função

A proporcionalidade é um exemplo importante de função matemática que está presente no dia a dia das pessoas em diferentes situações, vejamos alguns exemplos:

- Determinar o preço de 6 lápis conhecendo o preço de 1 lápis.
- Calcular a quantidade de carne necessária para um churrasco sabendo-se que, em média, cada convidado come 200g de carne.
- Determinar o preço de um imóvel em certa região, conhecendo o preço de $1m^2$ de construção naquele local.

Exemplos:

1º) Em locais onde se faz cópias xerox, é comum haver uma tabela, para facilitar o trabalho, que relaciona o número de cópias tiradas com o total a pagar.

Número de cópias	Total a pagar
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
5	1,25
:	:

Observando a tabela, vemos que quando multiplicamos por 2 o número de cópias, o total a pagar também fica multiplicado por 2; e quando multiplicamos por 3 o número de cópias, o total a pagar também fica multiplicado por 3, e assim por diante. Portanto, podemos concluir que o valor a pagar é **diretamente proporcional** ao número de cópias tiradas.

Por outro lado, o valor a pagar **é função** da quantidade de cópias tiradas, pois a cada quantidade de cópias há apenas um valor a pagar.

Considerando x a quantidade de cópias tiradas e y o valor a pagar, podemos escrever:

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{0,25}=\frac{2}{0,50}=\frac{3}{0,75}=\frac{4}{1}=\ldots\ldots$$

Logo, a expressão matemática que representa esta função é

$$y=0,25\cdot x$$

2º) Para fazer um passeio à uma cidade histórica um grupo de amigos resolveu alugar um ônibus. A despesa será rateada entre os participantes do passeio, de acordo com a tabela a seguir:

Número de participantes	Quantia a pagar(R$)
10	54,00
36	15,00
20	27,00
25	21,60
30	18,00
18	30,00

Observando a tabela, vemos que ao **multiplicar por 2** o número de participantes, por exemplo $10 \times 2 = 20$, a quantia correspondente **fica dividida por 2** ($54 \div 2 = 27$). Neste caso, a quantia a pagar é **inversamente proporcional** ao número de participantes do passeio.

Por outro lado, a quantia a pagar é **função** do número de participantes e a expressão que representa esta função pode ser escrita assim:

$y = \dfrac{540}{x}$, onde x é o número de participantes e y é a quantia a pagar.

Sempre que duas grandezas são proporcionais, DIRETAMENTE OU INVERSAMENTE, existe uma função entre elas. No entanto, nem toda função é uma proporção, pois as grandezas podem aumentar ou diminuir ao mesmo tempo sem que haja uma proporcionalidade entre seus valores.

Importante

Desafio 2:

Dê um exemplo de uma função entre duas grandezas sem que essas grandezas sejam proporcionais. Pode utilizar uma tabela ou um diagrama.

1. Uma companhia telefônica oferece aos consumidores dois tipos de contrato:

1º tipo: Assinatura mensal: R$ 45,00

Tarifa por minuto: R$ 0,38

2º tipo: Assinatura mensal: isenta

Tarifa por minuto: R$ 1,80

Responda:

a. Quais são as sentenças matemáticas que expressam o total a ser pago no final do mês em cada um dos dois tipos de contrato?

b. As opções de contrato apresentam proporcionalidade entre as grandezas envolvidas? Justifique.

2. Um carro consome 1 litro de combustível em média a cada 9km.

a. Faça uma tabela relacionando as grandezas distância (D) em km e consumo (L) em litros.

b. O consumo do carro é função da distância percorrida? Por quê?

c. O consumo do carro é proporcional à distância percorrida? Explique.

d. Escreva uma expressão matemática que represente a relação entre o consumo do carro e a distância percorrida pelo carro.

Importante

O consumo de um carro é medido pelo número de quilômetros que ele percorre gastando 1 litro de combustível. Este consumo depende, entre outros fatores, da velocidade com que ele anda.

3. Um pintor foi contratado para pintar uma parede cuja área é de 240m^2.

A tabela a seguir mostra o quanto ainda falta ser pintado no final de cada dia.

Dia	Área a ser pintada (m^2)
0	240
1	200
2	150
3	120
4	60
5	60
6	30
7	0

Responda:

a. A área (y) da parede a ser pintada é função do dia (x)?

b. Quando o valor de x (dia) cresce o que acontece com o valor de y (área a ser pintada)?

c. A relação entre a área a ser pintada e o dia trabalhado apresenta proporcionalidade? Por quê?

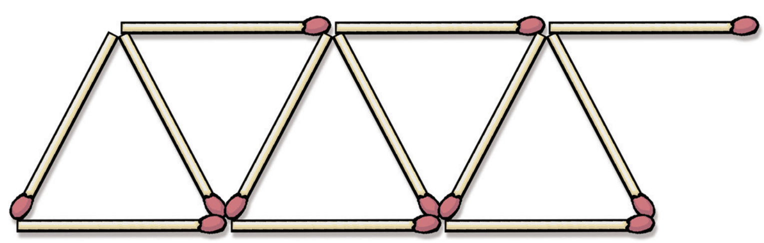
d. Quantos dias o pintor levou para terminar o serviço?

e. O que pode ter acontecido no 5º dia, que a área a ser pintada permaneceu a mesma que a do dia anterior?

4. Considere a função $f: x \longrightarrow y$ definida por $y = 4x + 1$.

Se $D = \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; 0{,}15\}$ Determine o conjunto Imagem da função.

5. Daniel arrumou palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir:



Se Daniel continuar formando triângulos seguindo esse modelo, quantos palitos Daniel usará para formar:

a. 4 triângulos?

b. 40 triângulos?

c. *t* triângulos?

d. Escreva a expressão que representa o total de palitos (p) em função do número de triângulos (*t*).

6. A bandeirada na corrida de táxi em uma cidade é R$ 4,30 e o valor por quilômetro rodado é R$ 1,40 durante o dia.

a. Escreva uma expressão que indica o valor total de uma corrida (C) em função do número de quilômetros rodados (km).

b. Qual o valor de uma corrida de 9,5km?

Conclusão

A noção de função é muito importante em Matemática, pois ela é aplicada em vários campos de estudo da própria Matemática e também em outras áreas do conhecimento.

O estudo de funções não se esgota nessa unidade e terá uma continuação em várias outras unidades, aprofundando o estudo e apresentando diferentes funções em diferentes campos da Matemática. É importante que você termine esta unidade dominando a linguagem e o simbolismo utilizado no tratamento das funções.

Na próxima aula continuaremos trabalhando a noção de função, aprofundando a representação por meio de gráficos, sua interpretação e sua construção.

Resumo

- A noção de função é muito utilizada em diferentes áreas do conhecimento e também no nosso dia a dia.
- É importante reconhecer que quando dois conjuntos apresentam uma correspondência tal que cada elemento do 1º conjunto está associado a apenas um elemento do 2º conjunto, esta correspondência é uma função.
- Uma função pode ser apresentada utilizando-se tabelas e diagramas. É importante fazer uma articulação entre as diferentes formas de apresentar uma função que foram trabalhadas nesta unidade: a tabela, o diagrama e a expressão matemática que representa a função, além dos gráficos.
- O conjunto cujos elementos são valores da variável independente é o Domínio da função, enquanto o conjunto cujos elementos são os valores da variável dependente é a Imagem da função. Simplificando, podemos dizer que o Domínio da função é o conjunto de onde partem as setas no diagrama e a Imagem é o conjunto formado pelos elementos onde chegam as setas. Observemos que pode haver casos em que sobrem elementos nesse conjunto.

  OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Caso sobrem elementos no conjunto onde chegam as flechas, esse conjunto será chamado de contra-domínio da função, e a imagem da função será um subconjunto desse contra-domínio, ou seja, será o conjunto formado apenas pelos elementos que recebem as flechas.
- A notação matemática de função usualmente é $f: A \longrightarrow B$

  $y = f(x)$

  Onde A é o domínio da função, B é o contra-domínio da função e f(x) é a expressão matemática que representa a função. Podemos ler, usando a notação assim:
  f de A em B sendo $y = f(x)$.
- Uma função que destacamos pela sua importância tanto na Matemática como no cotidiano é a proporcionalidade. Toda proporção, seja direta ou inversa, é uma função, no entanto nem toda função apresenta proporcionalidade.

Veja Ainda

No site a seguir você irá encontrar atividades interativas em forma de jogo utilizando a noção de função e desenvolvendo a capacidade de descobrir a "regra" ou lei de formação das variáveis de uma função de maneira curiosa e divertida: http://www.uff.br/cdme/c1d/c1d-html/c1d-br.

Referências

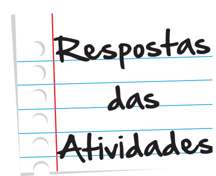
Livros

- Multicurso – Ensino médio –1ª série – Fundação Roberto Marinho – 2ª edição, 2005.
- BORDEAUX , Ana Lucia e outros. **Conexão Matemática**. Editora do Brasil – 9º ano, 2012.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/517386



Situação Problema 1

a. A regra é: multiplica o número por 2 e subtrai 1 do resultado. Podemos escrever uma sentença matemática indicando essa regra da seguinte maneira: $m = 2s - 1$, sendo M o número que Manuel respondeu e s o número que Solange falou.

b. Sim, Manuel só pode responder dependendo do número que Solange disser.

c. Sim, é função porque para cada número que Solange diz, Manuel só responde um número.

Situação Problema 2

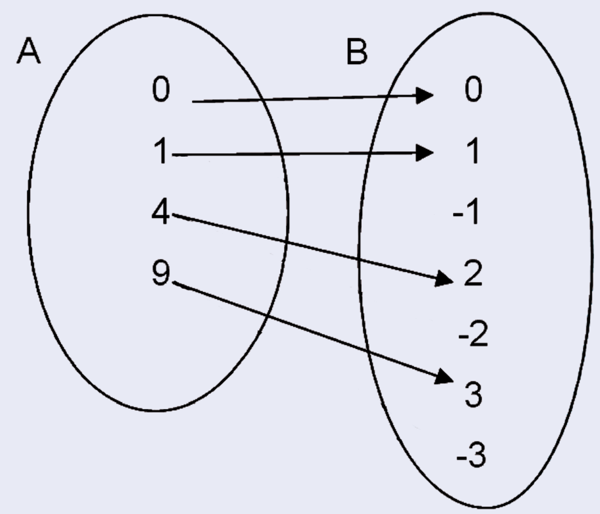
a.

t (horas)	d (km)
1	80
2	160
3	240
4	320
5	400

b. A cada hora corresponde um valor para a distância percorrida em quilômetros.

c. $d = 80t$, sendo d a distância percorrida em km e t o tempo gasto no percurso em horas.

Situação Problema 3



A relação é uma função, pois todos os elementos do conjunto A têm um único correspondente no conjunto B e ainda, não sobram elementos no conjunto A.

Nesse caso, sobram elementos no conjunto B. A imagem dessa função não corresponde ao conjunto B todo. Assim, B é o contra-domínio da função, enquanto Im(f) = {0, 1, 2, 3}.

Situação Problema 4

a.

h	r
1	3
2	5
3	7
4	9

b. Sim, pois a cada valor para o tempo em horas corresponde apenas um valor total a pagar em reais.

c. $r = 3 + 2h$, sendo h o número de horas excedentes que o carro permaneceu no estacionamento e r o valor total a pagar.

Respostas das Atividades

Situação Problema 5

s = 700 + 0,01.v

Desafio 1

Como o vendedor recebeu R$ 35,20 a mais que R$ 700,00 e este valor é 1% do que ele vendeu, basta multiplicar por 100 e concluímos que ele vendeu R$ 3.520,00 neste mês.

Desafio 2

Exemplo de resposta: A função que relaciona o peso de uma pessoa a cada mês.

1.

a. 1º) 45 + 0,38.t

2º) 1,80.t

b. Só o 2º tipo de contrato apresenta proporcionalidade entre as grandezas, pois dobrando o tempo de uso do telefone, por exemplo, dobrará também o valor da conta.

2.

a.

L (litros)	D (em km)
1	9
2	18
3	27
4	36

b. Sim, a cada quantidade de litros gastos está associada apenas a uma distância percorrida em km.

c. A relação entre as grandezas apresenta proporcionalidade. Ao dobrar a quantidade de combustível, por exemplo, a distância percorrida também dobra.

d. D=9L

3.

a. Sim, a cada dia de pintura corresponde um único valor para a área que falta pintar.

Respostas das Atividades

b. Decresce ou fica constante (no 5º dia).

c. Não. Quando se duplica o número de dias a área a ser pintada não fica reduzida à metade, por exemplo.

d. 7 dias

e. Há várias possibilidades para que a parede não fosse pintada nesse dia. O pintor pode ter faltado, a tinta pode ter acabado, a pintura pode não ter secado devido ao mau tempo. Esses são alguns exemplos.

4. $Im = \left\{2; \frac{7}{3}; 1,60\right\}$

5.

a. 9 palitos.

b. 81 palitos.

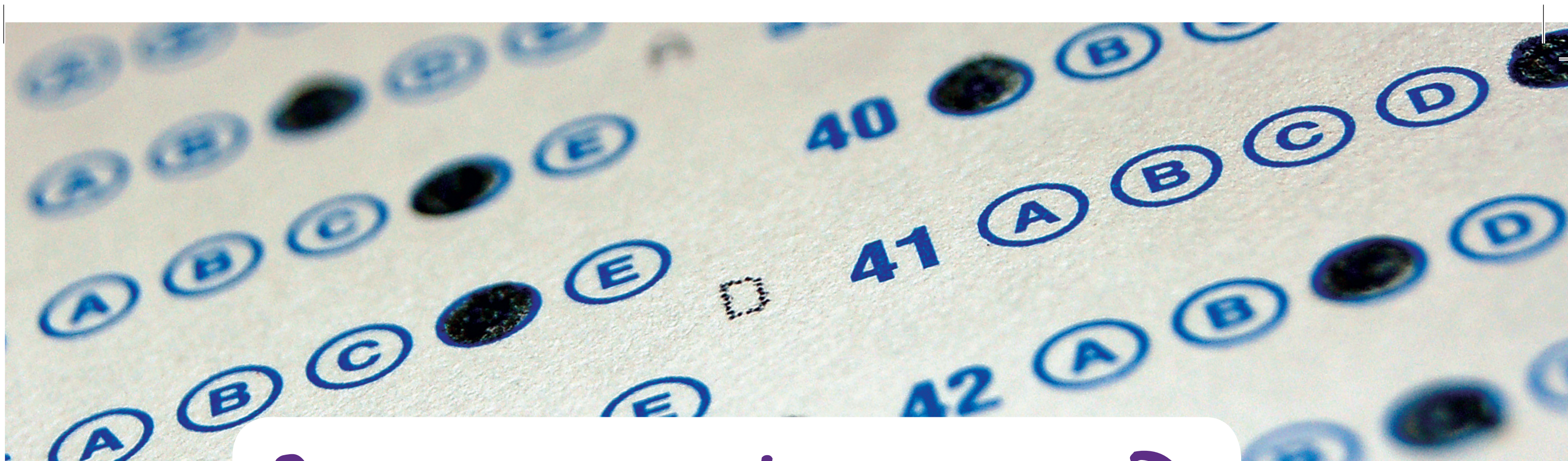
c. p = 3 + 2(t-1) = 2t +1

d. p = 3 + 2(t - 1) = 2t + 1, onde t é o número de triângulos e p o número de palitos de fósforos usados.

6.

a. C= 4,30 + 1,40k

b. R$ 17,60



O que perguntam por aí?

Atividade 1

QUESTÃO 155

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

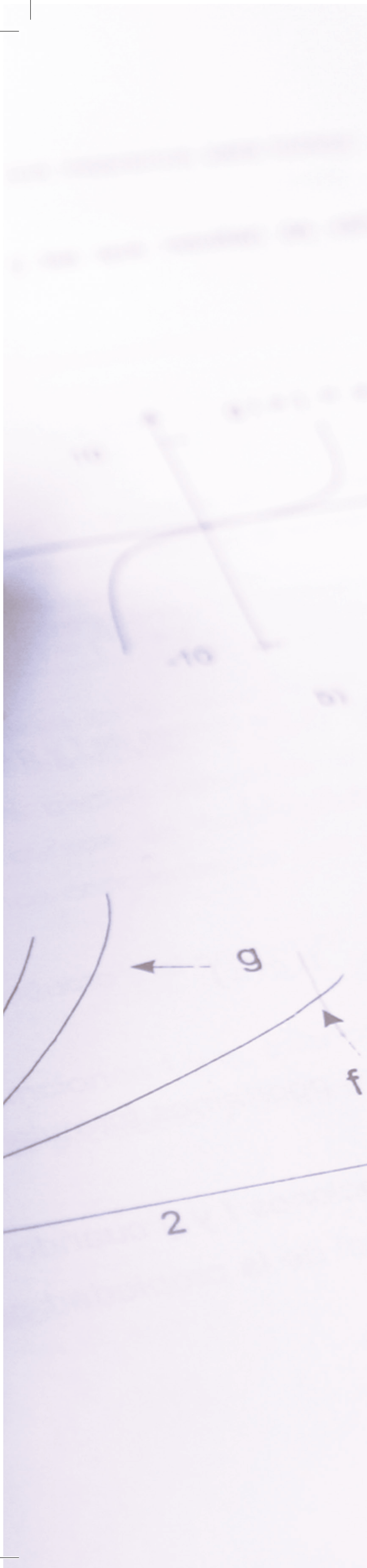
Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

- A) $y = 4\,300x$
- B) $y = 884\,905x$
- C) $y = 872\,005 + 4\,300x$
- D) $y = 876\,305 + 4\,300x$
- E) $y = 880\,605 + 4\,300x$

Resposta: Letra C

Comentário: O total de trabalhadores com carteira assinada nesses dois meses (janeiro e fevereiro) foi de 880.605. Subtraindo-se desse total 2 vezes o incremento havido no setor, ou seja, 2 vezes 4.300 vagas encontramos 872.005 que é a quantidade de trabalhadores antes de Janeiro. Como há um incremento de 4.300 vagas a cada mês, a expressão que relaciona as quantidades nesses meses será a expressão do item C.



Estudo de funções – Parte 2

Para início de conversa...

Taxa de desemprego no Brasil cai a 5,8% em maio

A taxa de desempregados no Brasil caiu para 5,8% em maio, depois de registrar 6% em abril, segundo informações do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), divulgadas nesta quinta-feira. Trata-se da menor taxa para meses de maio desde 2002, quando iniciou a série histórica.

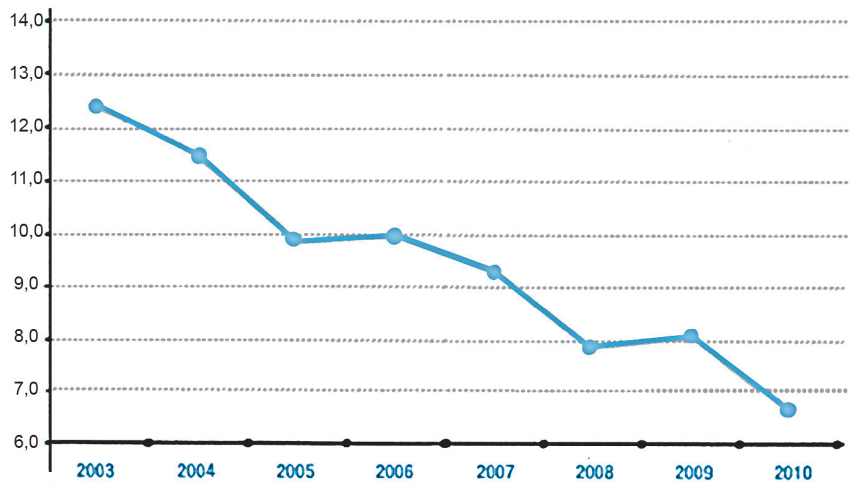
“O resultado do rendimento veio de uma estabilidade ocorrida por conta de movimentos em Porto Alegre e Salvador. São primeiros sinais e temos de ver os próximos meses”, destacou o gerente da pesquisa, Cimar Azeredo.

Em comparação com maio do ano passado, a taxa recuou 0,6 pontos percentuais, já que estava a 6,4%. As expectativas de analistas giravam em torno de 5,9% a 6,2% para o índice.

http://veja.abril.com.br/noticia/economia/taxa-de-desemprego-no-brasil-cai-a-5-8-em-maio. 21/06/2012 - 09:06

A taxa de desemprego no Brasil, descrita na reportagem que você acabou de ler, é analisada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), através da Pesquisa Mensal do Emprego.

O gráfico ao lado apresenta a variação da taxa de desemprego no Brasil em porcentagens nos anos de 2003 a 2010. Podemos observá-lo e tirar conclusões sobre a variação da taxa de desemprego no país nesse período, mesmo sem conhecer exatamente os valores dessa taxa, já que nem todos estão assinalados no gráfico. Por exemplo, que grandezas estão relacionadas no gráfico? Em que ano o percentual de desemprego foi o mais baixo? E o mais alto? Há algum período em que a taxa aumentou? Qual?



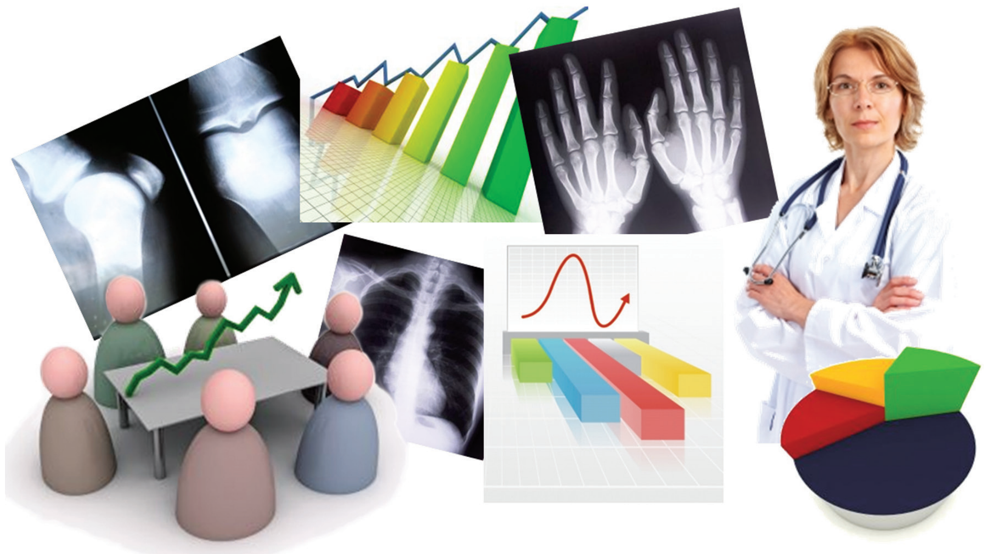
Perguntas como estas mostram a importância do estudo de gráficos. Os meios de comunicação (revistas, jornais, televisão) utilizam frequentemente este recurso para veicular de maneira clara, simples e objetiva vários tipos de informação.

Nesta unidade, você conhecerá um instrumento importante em Matemática que é o gráfico de uma função. Aprenderá a construir um gráfico e terá oportunidade para praticar formas de ler, interpretar e analisar as informações, utilizando os dados do gráfico para resolver problemas.

Objetivos de Aprendizagem

- Ler e interpretar gráficos
- Construir gráficos de funções, utilizando tabelas de pares ordenados;
- Reconhecer se um gráfico representa uma função;
- Determinar o Domínio e Imagem de uma função pela análise de um gráfico;
- Ler e interpretar gráficos de função.

Seção 1
Gráficos: O uso de gráficos



Mesmo uma simples tarefa diária como a leitura de um jornal ou revista nos remete a visualização de gráficos. Seja a evolução da moeda, estatísticas sobre moda masculina ou feminina, esportes ou também dados referentes a eleições, todas estas informações podem ser apresentadas através de representações gráficas.

Quer sejam em barras, colunas, em forma de disco ou revestidos de desenhos, todos os gráficos são utilizados no intuito de apresentar informações que não seriam tão claras se fossem apresentadas simplesmente na forma escrita.

Nesta seção mostraremos como construir e interpretar o gráfico de uma função. Mãos à obra!

Seção 2
Construção de um gráfico cartesiano

Considere a função de A em B

a. $f: A \rightarrow B$

sendo $A = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 4, 6\}$ e $y = 2x$ a sentença que define essa função.

1º) Construção da tabela de pares ordenados.

Construa uma tabela com os valores de x na 1ª coluna, os valores correspondentes de y numa 2ª coluna e na 3ª coluna os pares ordenados que foram encontrados.

Lembre-se que os valores de x são os elementos do conjunto A e que os valores de y precisam ser calculados, usando a sentença matemática que define a função (y = 2x)

Observe que cada valor de x corresponde a um único valor de y.

X	Y= 2x	(x, y)
-2	y = - 2.2 = - 4	(-2, -4)
-1	y = -1.2= - 2	(-1, -2)
0	y = 0.2= 0	(0, 0)
2	y = 2.2 = 4	(2,4)
3	Y = 2.3 = 6	(3, 6)

Quando dizemos que f(x) é uma função de A em B, podemos também dizer que para cada valor do conjunto A existe um único valor no conjunto B que corresponde a ele.

2º) Construção do gráfico

Marque em um plano cartesiano os pares ordenados encontrados na tabela.

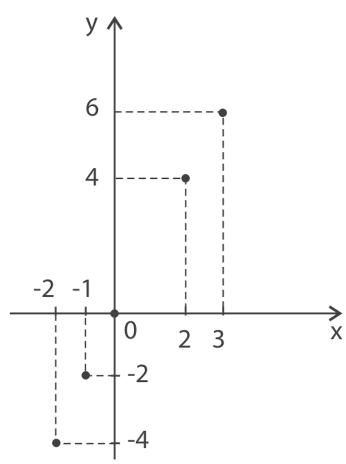


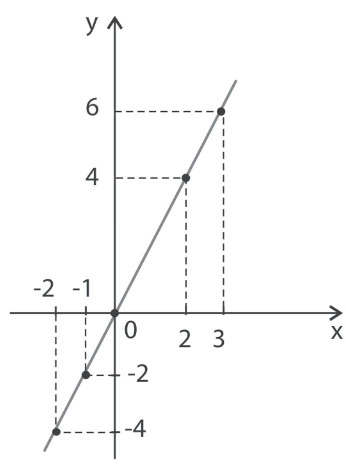
Figura 1: Gráfico da função de A em B.

O gráfico tem apenas 5 pontos que correspondem aos 5 pares ordenados encontrados.

O que acontece, quando o domínio e a Imagem da mesma função mudam?

Para responder a essa pergunta,, vamos construir o gráfico da *mesma função* do exemplo anterior, porém agora considerando o A = $\mathbb{R}$ e B= $\mathbb{R}$.

Nesse caso, podemos usar os mesmos valores da tabela anterior, porém observando que muitos outros valores poderiam ser usados para a variável x, inclusive números racionais, e até mesmo irracionais. Desta forma, o gráfico ficará assim:



Lembre-se: O conjunto dos números reais é o conjunto que contém todos os outros conjuntos numéricos: números naturais, números inteiros, números racionais e números irracionais.

Importante

O gráfico da função será uma linha reta, ligando todos os pontos que representam os pares ordenados encontrados na tabela, pois entre dois desses pontos existe uma infinidade de outros pontos, também pertencentes ao gráfico da função.

Atividade 1

Seja a função de A= {-2, -1, 0, 1, 2} em $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros). A expressão que representa essa função é y = 2x + 3. Construa o gráfico da função.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

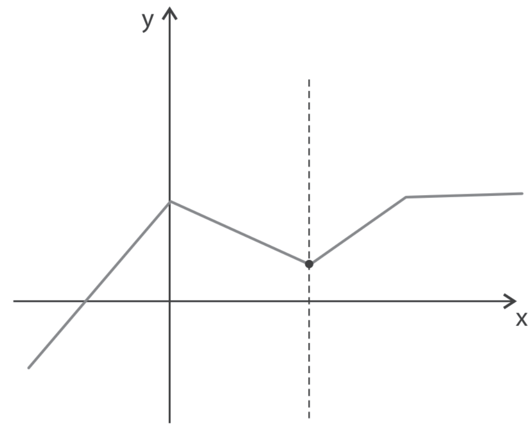
Dado L o lado de um de um quadrado, escreva a função de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$ que representa o perímetro desse quadrado. Em seguida, faça o gráfico da função.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Reconhecer uma função pelo seu gráfico cartesiano

Para reconhecer se um gráfico representa uma função, é importante lembrar que em uma função cada elemento x do domínio deve estar ,associado a um único elemento y do Conjunto Imagem

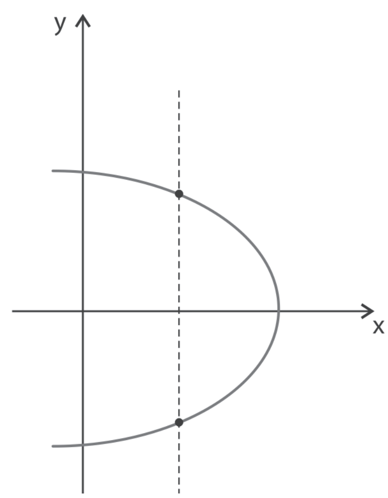
O gráfico a seguir, por exemplo, representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois cada x do conjunto dos números reais tem um único valor de y, correspondente no conjunto dos números reais. Veja:



A linha pontilhada vertical mostra que para um determinado valor de x do domínio da função só existe um valor correspondente para y. O mesmo poderá ser observado com qualquer outro valor de x.

Você pode traçar outras retas verticais para verificar este fato.

O gráfico a seguir não representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois existem valores de x que possuem mais de um valor correspondente y. Veja:



Aqui, neste gráfico, a reta pontilhada vertical mostra-nos que um determinado valor de x possui mais de um correspondente y.

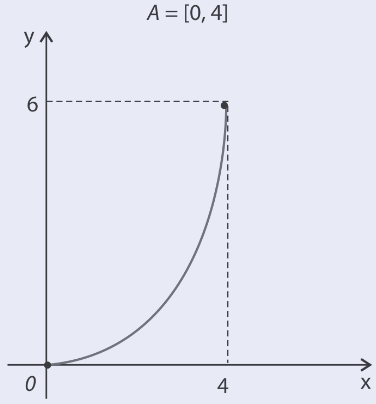
O mesmo poderá ser observado com outros valores de x.

Experimente traçar outra reta vertical diferente desta e verifique o que acontece.

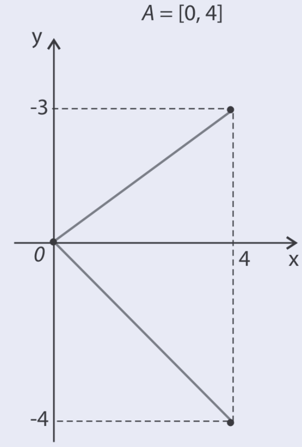
Atividade 3

Verifique quais dos gráficos a seguir representam funções de A em $\mathbb{R}$, justificando a resposta.

a) $A = [0, 4]$



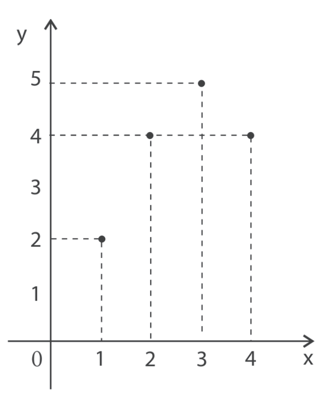
b) $A = [0, 4]$



Anote suas respostas em seu caderno

Uma vez que já sabemos quando um gráfico representa uma função, como fazer para determinar seu Domínio e Imagem? É simples! Vamos observar os valores assinalados no eixo horizontal (eixo das abscissas) para determinar o Domínio da função e, em seguida, verificar quais os valores assinalados no eixo vertical (eixo das ordenadas), para determinar a Imagem da função.

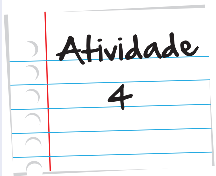
Exemplo:



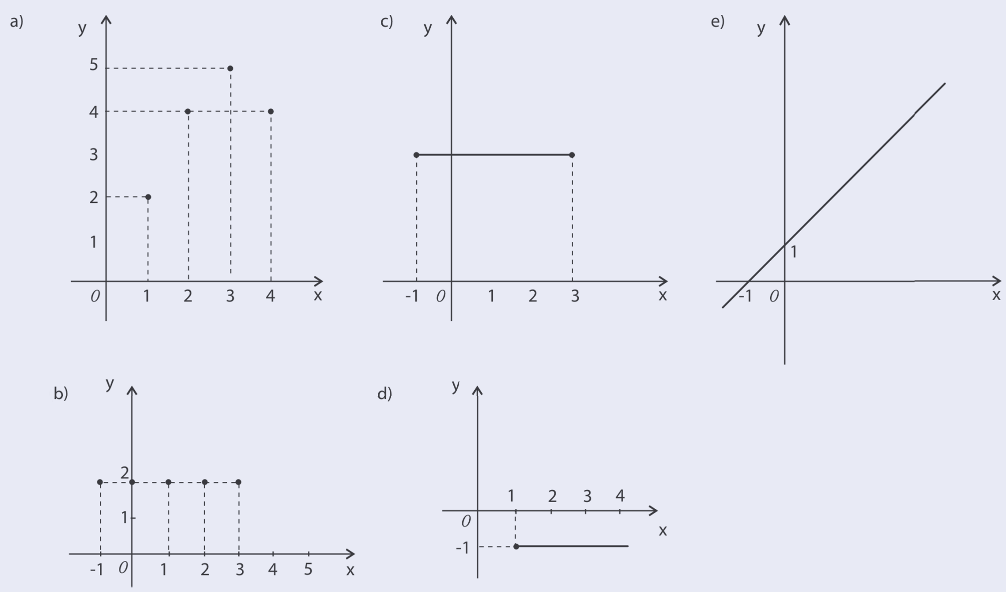
Neste exemplo, o Domínio da função é o conjunto {1, 2, 3, 4}, pois são esses os valores de x que estão assinalados no eixo das abscissas (horizontal).

O conjunto Imagem da função {2, 4, 5}, pois são esses os valores de y que estão assinalados no eixo das ordenadas(vertical). Podemos escrever assim:

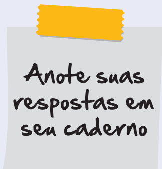
F(1) = 2; f(2) = 4 f(3)=5; f(4) = 4



Os gráficos a seguir representam funções de A em B. Em cada caso, determine o conjunto A (que será domínio da função):



Ao olharmos um gráfico, é importante que seja feita, sua leitura e interpretação, para que possamos compreender e utilizar os resultados apresentados.



Seção 4
Interpretação de um gráfico

O gráfico a seguir representa a variação das médias mensais de uma turma em Matemática

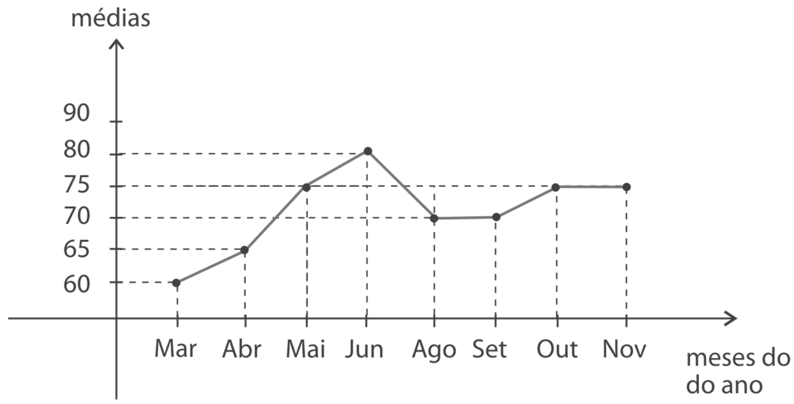


Figura 2: O gráfico mostra a flutuação das médias dos alunos ao longo do ano.

Neste gráfico, os pontos foram ligados por segmentos de reta, apesar de o domínio ser um conjunto com um número finito de elementos (os meses do ano). Isso se faz, quando se pretende ter uma melhor visualização dos dados da situação. Assim, podemos ver melhor como foi a variação das médias de um mês para outro.

É possível definir em qual mês houve maior média? E menor média? Ao observar esse gráfico, a que conclusões você chega?

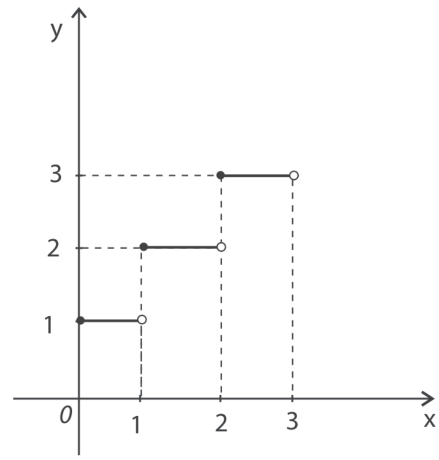
Podemos retirar desse gráfico três importantes conclusões:

1. Do mês de março até o mês de junho, as médias aumentaram. Dizemos que nesse intervalo de tempo a função é *crescente*.

2. Do mês de junho para o mês de agosto, a média diminuiu. A função nesse intervalo é *decrescente*.

3. De agosto a setembro, inclusive, as médias permaneceram iguais, assim como de outubro a novembro. Nesses casos, dizemos que a função é *constante* nesses dois intervalos.

Veja outro exemplo:



Podemos concluir que

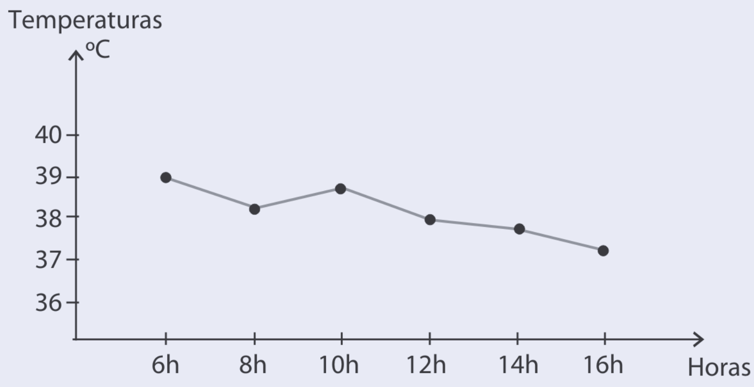
- quando x = 0 o valor correspondente é y= 1, isto é, f(0)=1
- Para valores de x entre 0 e 1 o valor de y permanece igual (constante).
- Quando x = 1 o valor correspondente é y = 2, ou seja, f(1) = 2
- Para valores de x entre 1 e 2 o valor correspondente é y = 2, também constante.

E assim por diante. Ou seja, essa função é constante para determinados intervalos de x.

Note que o domínio desta função está no intervalo [0,3[e que entre dois inteiros dentro deste intervalo, a função é sempre constante. Ou seja, no intervalo [0,1[o valor da imagem é sempre 1. No intervalo [1,2[a imagem é sempre 2 e no intervalo [2,3[a imagem sempre será 3.

Atividade 5

Lucas está adoentado e com febre. Ele mediu e anotou a sua temperatura a cada duas horas e fez o seguinte gráfico:



Responda:

a. Ao final do dia, sua temperatura diminuiu ou aumentou?

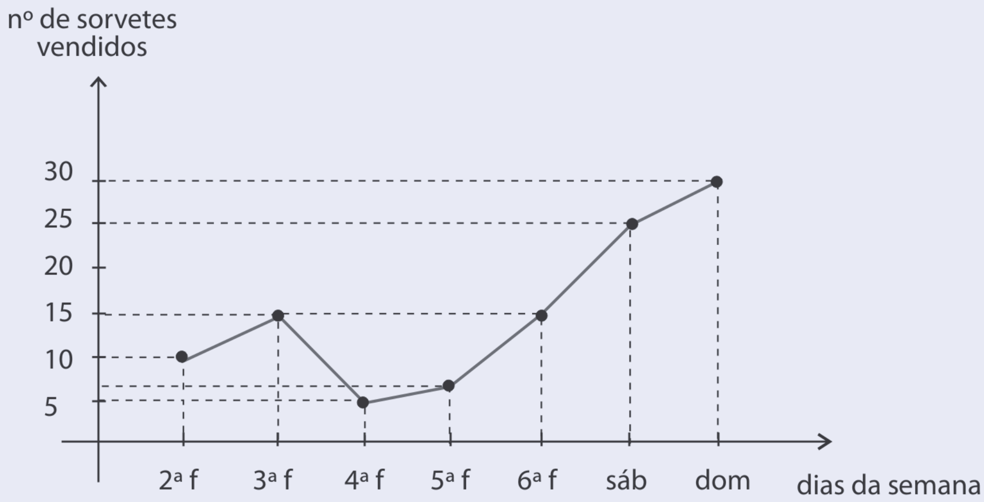
b. Entre que horas, a temperatura permaneceu a mesma?

c. De quanto era a sua temperatura às 12h?

Anote suas respostas em seu caderno

Seu José resolveu registrar em um gráfico a quantidade de sorvetes vendidos em sua lanchonete, durante uma semana.

Atividade 6



a. Em qual dia, ele vendeu mais sorvetes?

b. Em qual dia, ele vendeu menos?

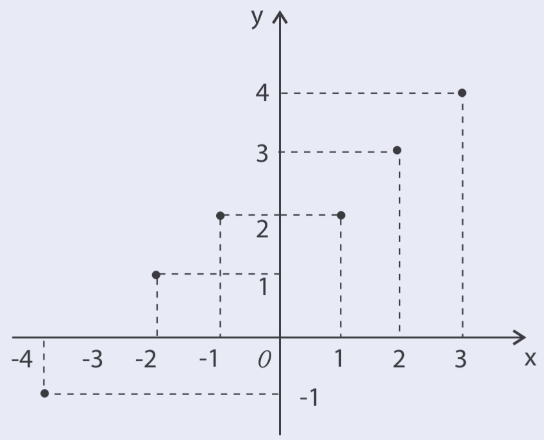
c. Quantos sorvetes ele vendeu no sábado?

d. Em quais dias, ele vendeu a mesma quantidade?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Dada a função f , representada no gráfico abaixo, responda:



a. Quais são os pares ordenados de f?

b. Qual é o Domínio de f?

c. Qual o valor de x para f(x) = 2?

d. 2 é imagem de que valores de x?

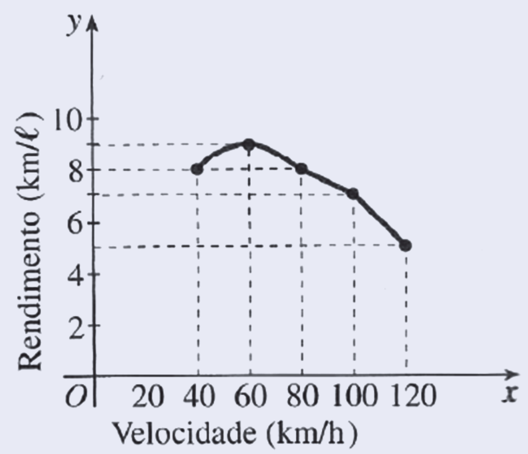
e. Qual é o conjunto Imagem de f?

f. Para que valores de x, teremos valores de y menores que zero?

Atividade 8

Observe o gráfico que representa o consumo de um automóvel.

Vamos supor que o consumo foi registrado instante a instante, ou seja, a cada pequena variação de velocidade o consumo de gasolina foi observado.



a. Quando a velocidade é constante e igual a 80km/h, qual o rendimento desse automóvel, em quilômetros por litro?

b. E se a velocidade for constante e igual a 100 km/h?

c. Qual é a velocidade mais econômica?

d. Entre quais valores do Domínio da função o rendimento aumenta?

e. Entre quais valores do Domínio da função há decrescimento nos rendimentos?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Dada a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$, ache quatro pares dessa função:

a. Faça o gráfico cartesiano dessa função.

b. Complete os pares seguintes de forma que eles pertençam a *f*: (..., 0), $\left(\frac{3}{2}, \quad\right)$

c. O par (150, 299) pertence a *f*?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 10

Sendo f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$, calcule:

a. $f(-2)$.

b. O valor de x para que $f(x) = 3$.

c. A imagem de $\frac{2}{3}$.

d. O número cuja imagem é 7.

e. O valor de x que é igual à sua imagem.

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

Iniciamos a unidade, apresentando um gráfico cartesiano que mostra a diminuição da taxa de desemprego no Brasil, entre os anos de 2003 e 2010. A taxa está representada em porcentagem e não indica os valores exatos a cada ano, no entanto, é possível verificar e concluir quais são os períodos de decréscimo da taxa e os períodos de taxas constantes.

Em seguida, é mostrado o passo a passo da construção de um gráfico cartesiano, levando em conta que já são conhecidos os eixos cartesianos e a representação de pontos no gráfico, a partir dos pares ordenados correspondentes.

A identificação de uma função pelo seu gráfico é mostrada, utilizando-se de uma reta vertical auxiliar que facilita a visualização dos pares de uma função. Essa identificação já foi feita em aula anterior por meio de diagrama.

Utilizando-se exemplos de gráficos, foram apresentados casos de funções crescentes, decrescentes e constantes em um determinado intervalo.

Veja ainda

Site uff – objetos educacionais: função.

Este *site* apresenta diversos objetos educacionais interativos que estimulam o aprendizado de forma interessante e lúdica.

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/

Este *site* oferece mais exemplos contextualizados de função, permitindo que você aprenda mais sobre o tema. Apresenta também exercícios e questões para serem resolvidos e assim enriquecer o aprendizado.

Referências

Livros

- Telecurso 2000 2º grau – **Matemática** – Fundação Roberto Marinho.
- Multicurso Ensino Médio - Fundação Roberto Marinho.
- Marcondes, Gentil Sérgio.. **Matemática – Novo Ensino Médio**. volume único - Editora Ática.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

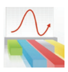
- Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1046511

- http://www.sxc.hu/photo/293217

- http://www.sxc.hu/photo/262066

- http://www.sxc.hu/photo/262068

- http://www.sxc.hu/photo/1314903

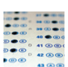


- http://www.sxc.hu/photo/1392340

- http://www.sxc.hu/photo/1239216

- http://www.sxc.hu/photo/1189105

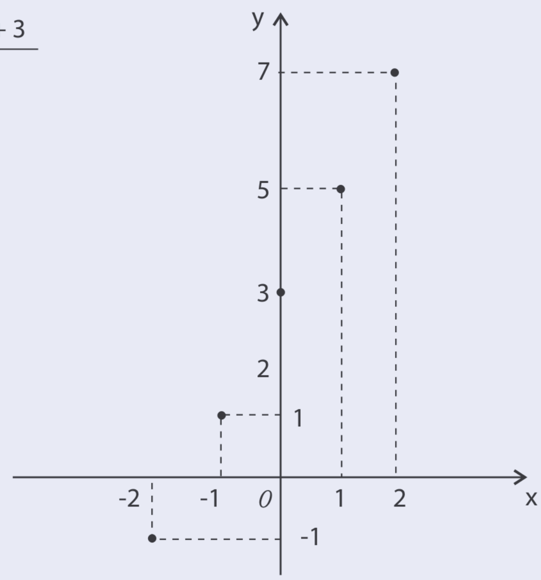
- http://www.sxc.hu/photo/1131288



- http://www.sxc.hu/photo/517386

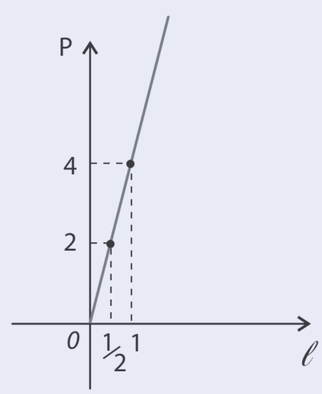
1.

x	$y = 2x + 3$
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7



2. $P = 4\ell$

ℓ	$P = 4\ell$
1	4
2	8
$1/2$	2



3.

a. Este gráfico representa uma função, pois a cada valor de x do eixo das abscissas corresponde apenas um valor de y do eixo das ordenadas.

Traçando uma reta vertical qualquer cortando o gráfico, podemos ver que ela só intercepta o gráfico em um único ponto.

b. Este gráfico não representa uma função, pois existem elementos do eixo horizontal que corresponde a mais de um valor do eixo vertical. Traçando uma reta vertical podemos verificar que ela intercepta o gráfico em mais de um ponto.

Respostas das Atividades

4.

a. $A=\{1,2,3,4\}$, o gráfico é um conjunto de pontos, portanto o Domínio é um conjunto finito de pontos.

b. $A=[-1,3]$,o gráfico é um segmento de reta, portanto seu Domínio é um subconjunto dos números reais compreendidos entre 1 e 3 inclusive os extremos.

c. $A = \mathbb{R}$ O gráfico é uma reta; portanto, o Domínio é o conjunto dos números reais.

d. $A=\{-1,0,1,2,3\}$

e. $A=[1,\infty[$, o gráfico é uma semirreta, portanto o Domínio é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 1 e podemos representá-lo na forma de intervalo.

5.

a. Diminui.

b. Não permaneceu a mesma em nenhum intervalo de tempo.

c. 38 graus.

6.

a. Domingo.

b. quarta-feira.

c. 25.

d. terça-feira e sexta-feira.

7.

a. (-4,-1), (-2,1), (-1,2),(1.2),(2,3),(3,4)

b. $D=\{-4,-2,-1,1,2,3\}$

c. $x = -1$ e $x = 1$

d. $x = -1$ e $x = 1$

e. $Im = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$

f. Quando $x = -4$, temos $y = -1$

Respostas das Atividades

8.

a. 8 quilômetros por litro.

b. 7 quilômetros por litro

c. 60 km\ h

d. Crescente de 40km\h a 60km\h.

e. Decrescente de 60km\h a 120km\h.

9. (0,1); (-1,1);(-2,-3); (2,5).

a. Gráfico da função

b. $-\frac{1}{2};4$

c. não.

10.

a. f(-2) = -6 + 1 = -5

b. $3x + 1 = 3$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

c. $3.\ \frac{2}{3} = 2$

d. $3x + 1 = 7$

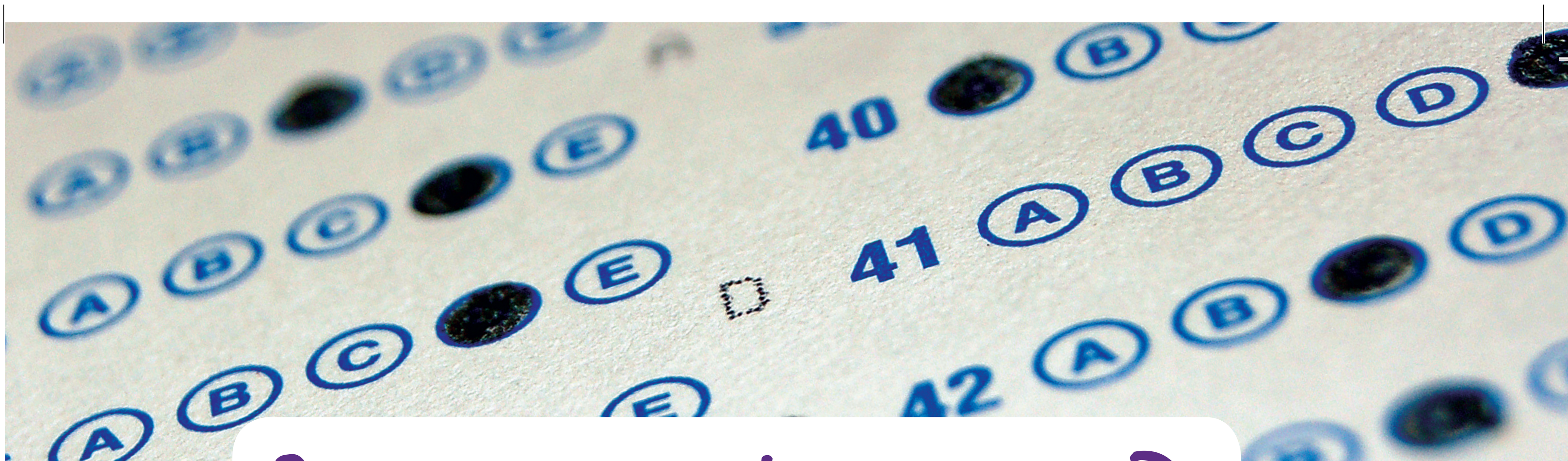
$3x = 6$

$x = 2$

e. $3x + 1 = x$

$2x = -1$

$x = \frac{1}{2}$

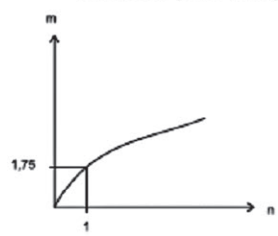


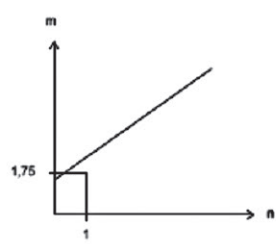
O que perguntam por aí?

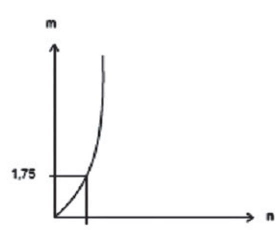
QUESTÃO 151

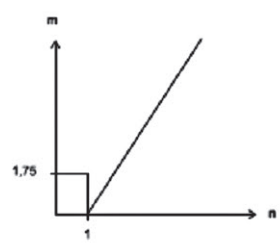
As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

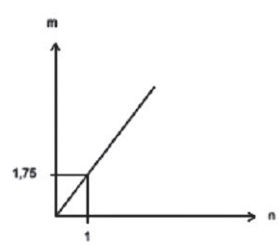
Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é

A


B


C


D


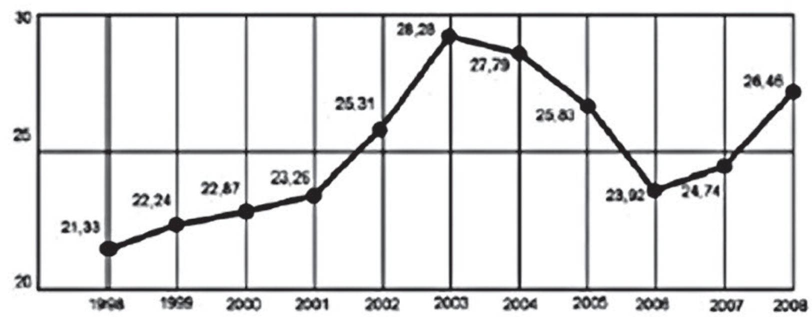
E


MT - 2º dia | Caderno 5 - AMARELO - Página 23

QUESTÃO 176

O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). **Almanaque abril 2010.** São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

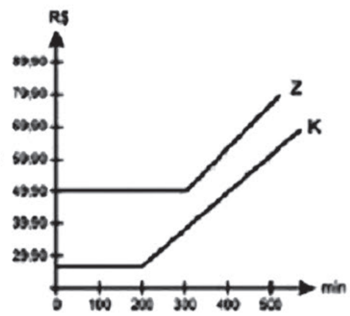
Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

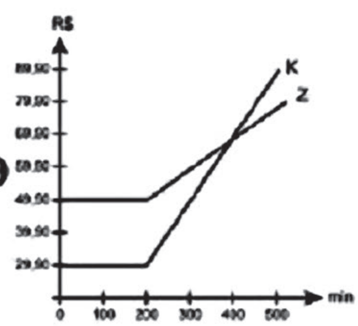
- A) 1998 e 2001.
- B) 2001 e 2003.
- C) 2003 e 2006.
- D) 2003 e 2007.
- E) 2003 e 2008.

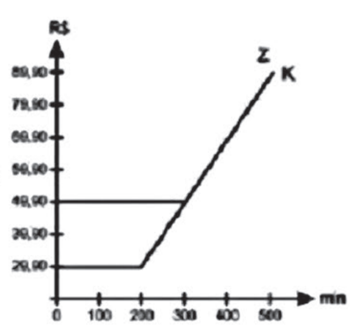
QUESTÃO 180

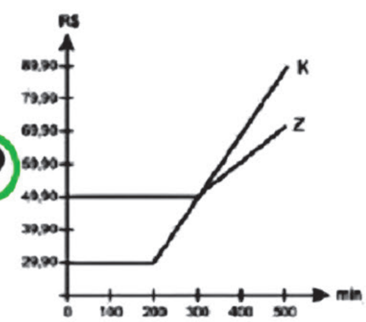
Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

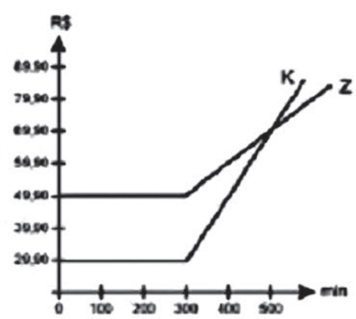
O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é

A


B


C


D


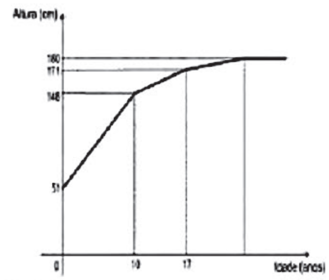
E


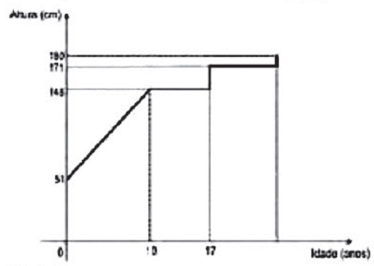
MT - 2º dia | Caderno 5 - AMARELO - Página 30

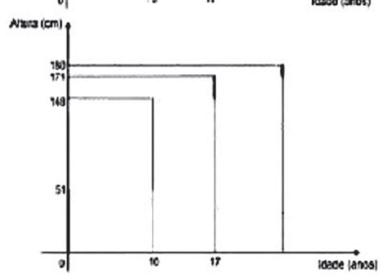
Questão 142

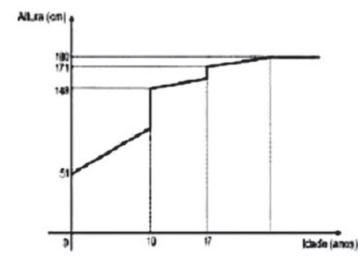
Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

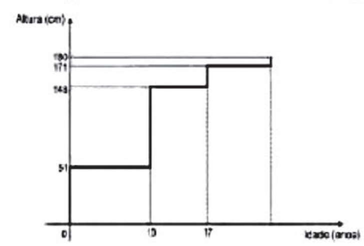
Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

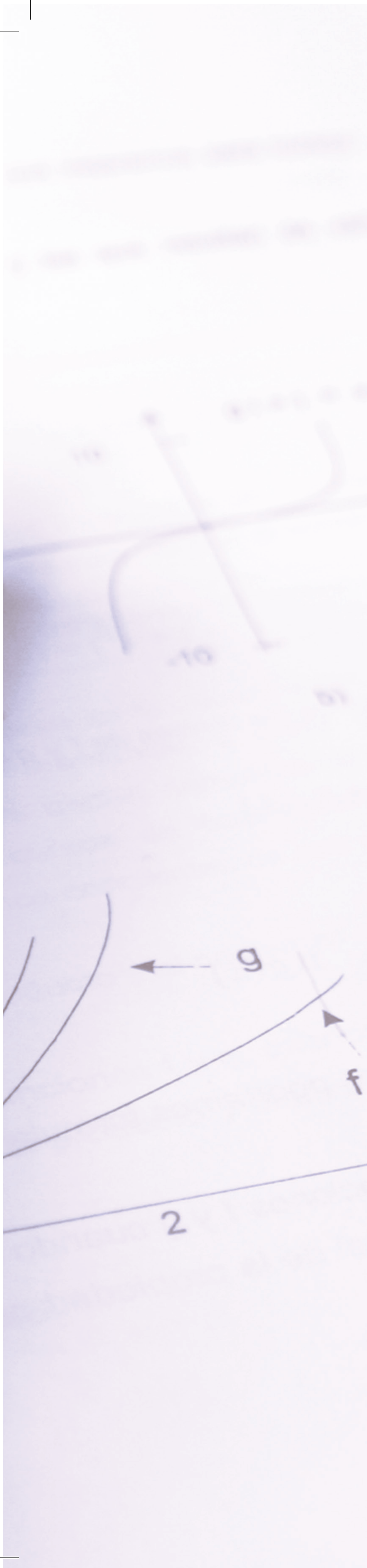
A


B


C


D


E




Função Polinomial do 1º grau – Parte 1

Para início de conversa...

Você sabe que, rotineiramente, usa conceitos matemáticos, mesmo que de forma intuitiva? Pois é isso mesmo! Conhecimentos formais da Matemática podem ajudar você a lidar com muitas situações com as quais se depara comumente. Quer ver alguns exemplos?

Você acha que é possível prever quanto gastarei para encher o tanque do meu carro sem precisar, de fato, enchê-lo? E será que o dinheiro que tenho é suficiente para contratar um *buffet* que cobra pela quantidade de convidados? Se eu sei o valor da **bandeirada** e a distância até o meu destino, será possível saber quanto custará a "corrida de táxi" até lá? E quantas unidades de um produto um vendedor precisa vender para que o salário recebido dê conta das suas despesas mensais?

Apesar de parecerem, à primeira vista, bastante distintos, estes problemas têm uma importante característica em comum: podem ser modelados e resolvidos mais facilmente por intermédio do conceito matemático de função afim, ou função polinomial do 1º grau. Vamos conhecê-lo?

Bandeirada

Valor fixo que se paga em uma corrida de táxi independente da distância percorrida.

Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer uma função polinomial do 1º grau;
- Calcular um valor da função polinomial do 1º grau;
- Encontrar o zero ou a raiz da função afim;
- Reconhecer situações problemas que envolvam função afim.
- Modelar problemas do dia a dia através da função afim;
- Resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais.

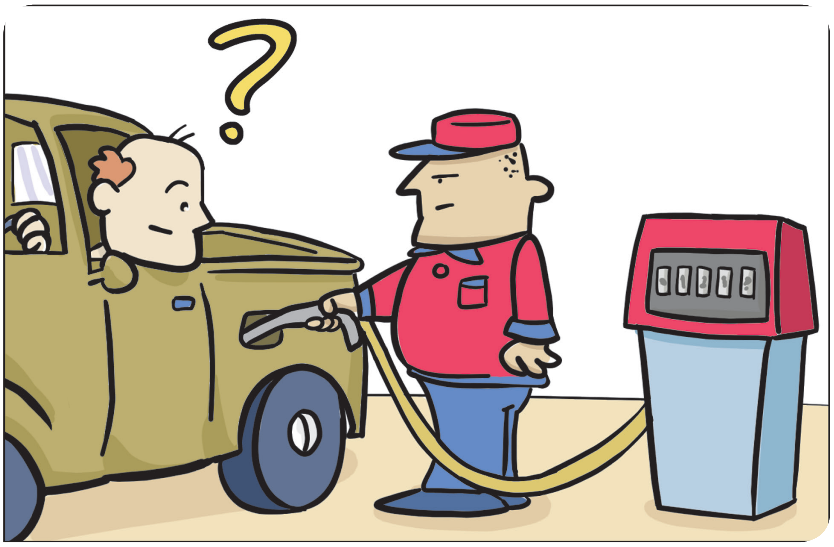
Seção 1
Reconhecendo a função afim

Vamos apresentar a seguir quatro problemas. É muito importante para o bom desenrolar desta aula que você tente resolvê-los do seu jeito – e quando falamos do seu jeito, realmente queremos dizer isso: procure encontrar a resposta para os problemas da mesma maneira que você faria, se tivesse de resolvê-los numa situação cotidiana. Convidamos você a só fazer a leitura da nossa solução depois de pensar bem direitinho em como faria a sua, ok?

São Leopoldo – Ontem, dependendo do posto de combustível selecionado para abastecer, alguns motoristas conseguiram economizar. No centro, em um posto localizado na BR-116, o preço da gasolina comum caiu de 2,65 para 2,59 reais, mesmo valor registrado por um outro posto da rodovia federal, na altura do bairro Rio dos Sinos.

(Retirado em: http://www.jornalvs.com.br/economia/379025/com-gasolina-em-queda-encher-o-tanque-fica-mais-barato.html)

Por exemplo, imagine que o litro da gasolina custe R$ 2,59. Será que é possível prever quanto custa encher o tanque de combustível completamente vazio do seu carro, sem precisar de fato enchê-lo? E, se for possível, como fazer para descobrir esse valor?



Pensou em como resolveria o problema do seu jeito? Pensou mesmo? Ótimo! Dê agora uma olhada nas nossas soluções. Esperamos que alguma delas - ou uma combinação delas – seja muito parecida com a sua.

Então, muito bem, a primeira coisa a saber seria a capacidade total, em litros, desse tanque. Desse ponto para frente, existem muitas soluções. Uma delas seria a multiplicação direta: se um litro custa R$ 2,59, o número de litros do tanque cheio vai custar 2,59 vezes esse número; então, se a capacidade total do tanque for de 30 litros, o custo total do tanque cheio vai ser 2,59 x 30; se tiver 40 litros, o custo total vai ser 2,59 x 40, e assim por diante desde que esse tanque esteja vazio.

É comum também abastecer o veículo, não a partir do número de litros de combustível, mas do valor a ser pago. É comum pedir ao frentista que "coloque 20 reais de combustível" ou "que complete o tanque". Enquanto no primeiro caso o valor em reais já estaria dado por você, a *priori*, no segundo caso você também poderia alegar – e aí com bastante razão – que 2,59 é um número bem desagradável de multiplicar, ainda mais nas situações em que você estivesse colocando 17 litros de gasolina, sem uma calculadora por perto. Vem daqui, então, uma outra solução para a questão: fazer uma tabela com os valores. Ela seria mais ou menos como a que está abaixo e iria de 1 litro até o valor do tanque cheio.

Litros	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
Valor em reais	2,59	5,18 (2x2,59)	7,77 (3x2,59)	10,36 (4x2,59)	12,95 (5x2,59)	15,54 (6x2,59)	18,13 (7x2,59)	

Esse tipo de tabela é bastante comum em locais que trabalham com grande volume de vendas de uma mesma unidade – como lojas em que se fazem cópias xerox. Da próxima vez em que for a uma loja dessas, veja se encontra uma tabela dessas por lá. De qualquer forma, é importante destacar o processo de formação dessa tabela: um litro custa uma vez o valor do litro, dois litros custam duas vezes o valor do litro, três litros custam três vezes o valor do litro – e assim por diante. Mantenha isso em mente ao longo desta nossa conversa, ok?

Muito bem, vamos agora ao problema seguinte: Ana quer comemorar o aniversário de sua filha com um *buffet* que cobra por uma festa infantil R$ 500,00 fixos + R$ 30,00 por pessoa. Ana tem 80 convidados e fez uma reserva de R$ 3.200,00 para gastar com o buffet. Ana pode contratar esse *buffet*? Aliás, com esse valor, qual a quantidade máxima de pessoas que ela pode convidar? Novamente, vale aquela recomendação: faça do seu jeito, como se estivesse lidando com esse problema no seu dia-a-dia. Só depois dê uma olhada no que propomos como solução.

Podemos apresentar a solução? Muito bem! Uma maneira bastante comum de fazer o problema é simplesmente ir somando: como cada convidado custa 30 reais, 80 convidados custarão 80x30 = 2400 reais. Como o custo total é a soma do custo fixo (500 reais) com o custo dos convidados, teremos que o custo total da festa para os 80 convidados é de 500 + 2400 = 2900 reais. Como Ana tem 3200 reais guardados, poderá contratar o *buffet* e ainda sobrarão 300 reais.

Para responder à segunda parte da pergunta, poderíamos proceder de duas maneiras: a primeira seria descontar, do que ela tem reservado, os 500 reais do custo fixo (3200 – 500 = 2700) e, em seguida, dividir os 2700 reais que resultaram dessa operação pelo custo de cada convidado, 30 reais. Neste caso, teríamos 2700/30 = 90 convidados. A outra maneira seria ver que os 300 reais que sobrariam, caso Ana contratasse festa para 80 convidados, poderiam ser usados para contratar festa para mais convidados. Como cada convidado custa 30 reais, 300 reais seriam suficientes para chamar mais 10 convidados – além dos 80 contratados na primeira leva. Assim, seria possível contratar um máximo de 90 convidados.

Podemos expressar o valor P pago por Ana em função do número x de convidados: P = 30.x + 500.

Aqui, temos algumas ideias a destacar. A primeira delas é a de que o dinheiro guardado por Ana deu para contratar o *buffet* – o que teria acontecido, se Ana tivesse guardado, digamos, R$ 3210? Vá pensando nisso, que responderemos mais adiante. A outra ideia é a de que este problema tem algo muito importante em comum com o anterior: o custo total varia em função de uma determinada quantidade – e da mesma maneira. No caso do tanque, um litro custa R$ 2,59; dois litros custam duas vezes R$ 2,59, etc. No caso no *buffet*, um convidado custa R$ 30,00, dois convidados custam duas vezes R$ 30,00 etc. A diferença entre os exemplo está no fato de haver um custo fixo inicial para a festa e não haver um custo fixo inicial para o preenchimento do tanque. Uma festa para zero convidado custaria R$ 500, enquanto um tanque vazio custaria zero reais. Vá prestando atenção nisso ao longo da leitura dos próximos problemas, ok?

Agora observe os exemplos de Paulo e Sílvio e tente resolvê-los da sua maneira. Caso tenha dificuldades, uma boa dica é reler com atenção os exemplos anteriores.

Na cidade em que a irmã de Paulo, Patrícia, mora, a corrida de táxi é calculada da seguinte maneira: R$ 5,20 de bandeirada e R$ 1,05 por quilômetro rodado. Paulo chegou hoje à cidade para visitar sua irmã e desembarcou na rodoviária, que fica a 35 km da casa de Patrícia. Se Paulo pegar um táxi da rodoviária à casa de sua irmã, quanto ele vai gastar?

Você consegue ajudar Paulo a saber quanto ele vai gastar nesse trajeto? Pensou? Veja então se sua ideia foi mais ou menos como esta:

Como cada quilômetro custa R$ 1,05, temos que: 1 km custa R$ 1,05; 2 km custam R$ 2,10 (2x1,05); 3 km custam R$ 3,15 (3x1,05) e assim por diante. Como o trajeto de Paulo tem 35 km, temos que multiplicar 1,05 por 35 e encontraremos 36,75 (1,05x 35 = 36,75). Não podemos esquecer que ao entrar no táxi o passageiro paga, independente dos quilômetros rodados, um valor fixo, chamado bandeirada, nesse caso, no valor de R$ 5,20. Assim, o valor total do trajeto será de 36,75 (pelos quilômetros rodados) mais 5,20 (da bandeirada), que resulta em R$ 41,95.

Como expressar o valor V a ser pago em função da distância x percorrida em quilômetros? V = 1,05.x + 5,20.

Um outro problema é o Silvio que trabalha em uma loja, vendendo colchões. Todo mês, Silvio tem de fazer a seguinte conta para calcular seu salário: uma parte fixa de R$ 1.000,00 e R$ 60,00 por cada colchão vendido.

Nesse mês, a despesa mensal prevista por Sílvio será de R$ 3840,00. Quantos colchões, no mínimo, Sílvio deverá vender para que seu salário do mês cubra sua previsão de despesas?

E aí, descobriu qual a quantidade de colchões? Sim? Então observe como pensamos:

A despesa de Silvio, prevista nesse mês é de R$ 3840,00. Sabemos que ele ganha um salário fixo de R$ 1000,00. Assim, ainda faltam R$ 2840,00 (3840 – 1000) para que ele cubra suas despesas. Como ele ganha R$ 60,00 por colchão, uma maneira de descobrir quantos colchões ele deve vender para cobrir essa despesa é dividir o valor restante da despesa de R$2840 por 60 e encontraremos 47,333... (2480:60 = 47,333...). Como não é possível vender essa quantidade de colchão, podemos concluir que Silvio deverá vender, no mínimo, 48 colchões.

O salário S de Sílvio pode ser expresso em função da quantidade x de colchões vendidas por ele: $S = 60.x + 1000$.

Na próxima unidade, veremos como podemos representar esses problemas por meio de gráficos.

Será que você conseguiu perceber o que estes quatro problemas têm em comum? Ficou claro para você que um valor está sempre relacionado com outro? Ou melhor, que um valor varia sempre em função de outro?

Vamos relembrar: o valor gasto no posto ocorre em função da quantidade de combustível colocado, o valor do *buffet* varia em função do número de convidados, o valor a pagar na corrida do táxi se modifica em função dos quilômetros percorridos e o salário de Silvio varia em função da quantidade de colchões vendidos. Além disso, você percebeu que, em alguns casos, essa função pode ser composta de uma parte fixa mais um valor que varia sempre multiplicado por um número fixo?

Os exemplos apresentados podem ser modelados por expressões do tipo

$f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e o coeficiente a deve ser diferente de zero. Uma função desse tipo é chamada de *função polinomial do 1º grau ou função afim.*

Não esqueça que os chamados coeficientes são números reais; portanto, os exemplos abaixo representam funções polinomiais do 1º grau.

$f(x) = -3x - 8$ onde $a= -3$ e $b=-8$

$g(t) = 6t$ onde $a = 6$ e $b = 0$

$h(x) = \frac{3x}{8} -7,5$ onde $a = \frac{3}{8}$ e $b = -7,5$

$v(s) = s + \sqrt{3}$ onde $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$

O coeficiente de x (nessa explicação, representado por *a*) é chamado de taxa de variação da função polinomial do 1º grau. Nos exemplos anteriores é fácil perceber que o coeficiente *a* determina como variam os valores da função: para cada novo convidado da festa de Ana, o valor do buffet aumenta R$30,00; para cada quilômetro rodado de táxi, o valor a ser pago aumenta R$1,05; para cada colchão vendido, o salário de Silvio aumenta R$60,00.

Saiba Mais

Atividade 1

Identificando funções afim.

Analise se as funções abaixo são afins (do tipo $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$) e, em caso afirmativo, se os coeficientes estão nomeados corretamente.

a) $f(x) = -1 + 6x$ $\quad a = -1 \quad b = 6$

b) $f(x) = \frac{-4\times}{7} -8$ $\quad a = \frac{-4}{7} \quad b = -8$

c) $f(x) = 9$ $\quad a = 9 \quad b = 0$

d) $f(x) = 0{,}25x$ $\quad a = 0{,}25 \quad b = 0$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Modelando e encontrando os valores da função afim

Você já conseguiu perceber como essa Matemática mais formal se aplica aos problemas da primeira seção? Se já conseguiu perceber, ótimo! Leia as próximas páginas atentamente para verificar se sua percepção coincide com a nossa. Se não conseguiu perceber, não tem problema! Explicamos tudo nas páginas seguintes. Vamos lá?

Vamos começar pelo problema da Ana, que queria contratar o *buffet*, lembra?

Ana quer comemorar o aniversário de sua filha com um *buffet* que cobra por uma festa infantil R$ 500,00 fixos e R$ 30,00 por pessoa. Ana tem 80 convidados e fez uma reserva de R$ 3 200,00 para gastar com o *buffet*. Ana pode contratar esse *buffet*?

Vejamos:

f(x): valor cobrado

x: número de convidados

Como, por cada convidado, ela paga R$ 30, devemos multiplicar x por 30, então, *a* por ser o número que multiplica x, deve ser substituído por 30.

$a = 30$

Além de cobrar por pessoa, o *buffet* cobra um valor que não varia, ou seja, constante de R$ 500. Então, devemos substituir o valor constante, nesse caso b, por 500.

$b = 500$

Assim:

$f(x) = \quad 30 \quad . \quad x \quad + \quad 500$

$f(x) = \quad a \quad . \quad x \quad + \quad b$

O valor cobrado vai variar em função do número de convidados. Essa relação será uma função do tipo $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Como Ana tem 80 convidados, substituiremos x por 80; logo:

$f(80) = 30 . 80 + 500$

$f(80) = 2400 + 500$

$f(80) = 2900$

Após realizar essas contas, você descobre que, se contratar esse buffet, Ana vai gastar R$ 2.900,00. Como Ana reservou R$ 3 200,00 para gastos com o *buffet*, ela poderá contratar esse serviço com tranquilidade.

Voltando ao problema do posto, vamos representar:

V(c) = valor a pagar (em Reais)

c = quantidade de combustível (em litros)

Como cada litro de combustível custa R$2,59, devemos multiplicar por 2,59 a quantidade de combustível, representada por c.

a = 2,59

Como não há um valor fixo, ou seja, só há cobrança se você colocar alguma quantidade de gasolina significa que não há um valor constante, sendo assim, o valor de b é zero.

b = 0

Desta maneira, nosso problema pode ser representado pela seguinte função:

V(c) =	2,59	.	c	+	0
f(x) =	a	.	x	+	b

Isto é, V(c) = 2,59.c

Lembra o problema do Paulo que tem de pegar o táxi da rodoviária até a casa da sua irmã? Então vamos modelá-lo:

Modelando:

O valor da corrida vai variar em função dos quilômetros rodados.

q: número de quilômetros rodados

V(q): valor da corrida

Como cada quilômetro custa R$1,05, devemos multiplicar **q** por 1,05.

Além de cobrar por quilômetro, o taxista cobra um valor que não varia, chamado bandeirada, que custa R$ 5,20.

Assim:

V(q) =	1,05	.	q	+	5,20
f(x) =	a	.	x	+	b

Após fazer essa correspondência, é possível perceber que essa situação pode ser modelada por uma função afim.

Como a distância da rodoviária a casa é de 35 km, substituiremos **q** por 35; logo:

V(35) = 1,05 . 35 + 5,20

V(35) = 36,75 + 5,20

V(35) = 41,95

Então, Paulo vai gastar R$ 41,95 no trajeto de táxi da rodoviária até a casa de sua irmã.

Vamos retomar o problema do Silvio para modelá-lo:

Modelando:

O salário de Sílvio varia em função da quantidade de colchões vendidos.

c: o número de colchões vendidos

S(c): salário de Sílvio

Como Sílvio ganha R$ 60 por colchão vendido, devemos multiplicar **c** por 60.

Além da comissão com a venda dos colchões, Sílvio ganha 1000 reais fixos.

Logo:

S(c) =	60	.	c	+	1000
⇓	⇓		⇓		⇓
f(x) =	a	.	x	+	b

Após fazer essa correspondência, é possível perceber que essa situação também pode ser modelada por uma função afim.

Como Sílvio precisa de R$ 3.840 para cobrir suas despesas, substituiremos *S(c)* por 3840; logo:

S(c) = 1000 + 60c

3840 = 1000 + 60c

3840 - 1000 = 60 c

2840 = 60c

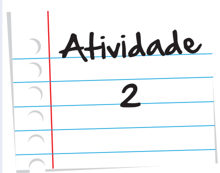
$c = \frac{2840}{60}$

c = 47,333...

Uma vez que não é possível vender 47,333... colchões, Sílvio precisa então vender, pelo menos, 48 colchões.

E aqui já respondemos à pergunta que fizemos quando falamos do problema da Ana. Lembra qual era? Constatamos que o valor que ela tinha guardado, R$ 3200, era o valor exato para contratar uma festa para 90 pessoas. Perguntamos o que aconteceria se ela tivesse guardado 3210 reais. Com esse valor, ela poderia contratar uma quantidade fracionária de pessoas – o que não existe no mundo real. Assim, com 3210 reais, ela continuaria podendo contratar uma festa para, no máximo, 90 pessoas. A diferença é que sobrariam 10 reais. Se ela juntasse mais 20 reais a estes 10 que sobraram, poderia convidar mais uma pessoa – a de número 91 - para a festa.

Temperatura e função afim



A temperatura é normalmente medida em duas escalas: graus Celsius (º C), como no Brasil, por exemplo, e graus Fahrenheit (º F), como nos países de língua inglesa.

Observe a reportagem a seguir:

Então, você saberia dizer em quantos graus Celsius ficou a temperatura em Nova Iorque, na madrugada passada?

Atividade 2

Importante

Você sabia que a relação entre as duas escalas também pode ser dada através da função afim?

$F = 1{,}8C + 32$, onde F é a medida da temperatura em graus Fahrenheit e C em graus Celsius.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Alugando Carros com função afim

Em uma cidade turística, duas empresas de aluguel de carros praticam as seguintes taxas:

Empresa A – R$ 35,00 fixos e R$ 3,40 por quilômetro rodado

Empresa B – R$ 55,00 fixos e R$ 2,70 por quilômetro rodado

a. Encontre a função que representa o valor do aluguel da empresa A.

b. Encontre a função que representa o valor do aluguel da empresa B.

c. Se um cliente rodar 45 quilômetros, em qual das duas empresas ele vai pagar mais barato pelo aluguel do carro?

d. Existe alguma quilometragem em que é indiferente utilizar o serviço da empresa A ou da empresa B?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Zero ou Raiz da função afim

Há alguns meses, Carla abriu seu próprio negócio para vender salgadinhos. Logo no início, Carla vendeu uma média de 1200 salgadinhos por mês. Empolgada com o sucesso do negócio, pediu para seu irmão, Antônio, descobrir quantos salgadinhos ela deveria vender por mês para continuar tendo **lucro**.

Para resolver o problema, Antônio modelou o lucro da venda de salgados da sua irmã e obteve a função $L(s) = 4s - 2340$, onde $L(s)$ é o valor do lucro e s é a quantidade de salgadinho vendida.

Com a função que Antônio obteve, você consegue ajudar Carla a descobrir essa informação?

Lucro
Ganho, vantagem ou benefício que se obtém de alguma coisa,ou com uma atividade qualquer.

Antônio explicou à sua irmã as contas feitas para resolver o problema. Acompanhe a resolução e veja se seus pensamentos foram parecidos com os dele.

Ele explicou à Carla que ao descobrir a quantidade necessária que ela deve vender para cobrir seus custos, ou seja, não ter lucro nem **prejuízo**, toda venda a partir dessa quantidade será lucrativa. Lembrando que para não ter lucro nem prejuízo, o valor de L deve ser de zero Real. Assim, descobrindo a quantidade s de salgadinhos que precisam ser vendidos para que o "lucro" seja zero, L(s) = 0, ao vender qualquer quantidade maior que essa encontrada, ela terá lucro.

Prejuízo
Ato ou efeito de prejudicar, dano.

Retomando a função encontrada por ele: L(s) = 4s – 2340 e com a informação que L(s) deve ser zero, teremos:

$L(s) = 4s - 2340$

$0 = 4s - 2340$

$4s = 2340$

$s = \dfrac{2340}{4}$

$s = 585$

Dessa maneira, se Carla vender 585 salgadinhos, seu "lucro" é de 0 real. Sendo assim, se Carla vender qualquer quantidade superior a 585 salgadinhos, ela terá lucro.

Em linguagem Matemática, dizemos que nessa função $L(s) = 4s - 2340$, $s = 585$ é o zero ou a raiz da função, pois quando s é substituído por 585, L(s) = 0

Importante

O valor da variável que torna o valor da função f(x) igual a zero, é chamado de zero ou raiz da função.

Atividade 4

Encontrando a raiz

Determine os zeros das seguintes funções afins:

a. $f(r) = 5r - 9$

b. $g(x) = \frac{3}{4}x$

c. $h(t) = 6 + 4t$

d. $f(n) = \frac{n-1}{2}$

Anote suas respostas em seu caderno

Física e função afim

Em uma experiência, a posição (S) de uma partícula varia em função do tempo (t) e é expressa pela lei:

$S(t) = 20 + 5t$

a. Encontre o valor de t para que se tenha $S(t) = 0$.

b. Analise o resultado encontrado no item a e a situação problema proposta e veja se são compatíveis.

Atividade 5

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Função linear, um caso particular

Celso é motorista de caminhão. Suponha que, em uma rodovia bem conservada, Celso consegue manter a velocidade constante de 85 km/h. Em quanto tempo Celso percorrerá os 510 km dessa rodovia?

Como a velocidade é constante, é possível montar a seguinte tabela:

Tempo (horas)	1	2	3	4	5	6
Distância (quilômetros)	85	170	255	340	425	510

Nesse caso, com o auxílio da tabela, você pode rapidamente identificar que Celso levará 6 horas para percorrer os 510 km da rodovia, a uma velocidade de 85 km/h. Mas, nem sempre esse resultado vem de maneira tão rápida.

Então, uma maneira de encontrar esse tempo sem o auxílio da tabela é modelar esse caso como uma função linear.

Importante

Função linear é um caso particular de função afim.

Função Linear $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b = 0$, ou seja, $f(x) = ax$

No exemplo de Celso, o problema pode ser modelado da seguinte maneira:

A distância, em quilômetros, está em função do tempo decorrido: $f(x)$

Tempo, em horas, decorrido: x

Como a velocidade foi constante, de 85 km/h, significa que, a cada hora, Celso percorrerá 85 km.

Assim, podemos obter a função

$f(x) = 85x$

Como a distância é de 510 km, então $f(x) = 510$

$510 = 85x$

$x = \frac{510}{85}$

$x = 6$ h

Assim como na tabela, o tempo para que Celso percorra 510 km, a essa velocidade constante, é de 6 h.

Note que esse problema poderia ser resolvido de outra forma. Nesse caso, por se tratarem de grandezas diretamente proporcionais, a regra de 3 constituiria uma ferramenta para a solução do problema:

1 hora $\rightarrow$ 85 km

x horas $\rightarrow$ 510 km

Desse modo, $1/x = 85/510$, donde teremos que $x = 510/85 = 6$ horas.

Saiba Mais

Dizemos que a proporcionalidade é:

. Direta: enquanto uma grandeza é multiplicada por um fator k, a outra também é multiplicada pelo mesmo fator k;

. Inversa: enquanto uma grandeza é multiplicada por um fator k, a outra é multiplicada pelo inverso de k (ou seja, $1/k$).

Quando temos situações que envolvem proporcionalidade direta, é sempre possível resolvê-las, modelando-as como função linear.

Um bom exemplo de modelagem por função linear é o nosso problema do posto. Veja só:

V(c) = 2,59 . c

onde:

V(c) = valor a pagar (em Reais)

c = quantidade de combustível (em litros)

Em geral, os tanques dos carros têm capacidade para 50 litros de combustível. Vamos supor que o tanque está vazio.

Assim, temos:

c = 50 litros

logo:

V(50) = 2,59 . 50

V(50) = 129,50 Reais

Para encher um tanque vazio com capacidade de 50 litros, com cada litro custando R$ 2,59, você vai precisar de R$ 129,50.

Atividade 6

No salão de beleza

Ana é cabeleireira. Para realizar um tratamento em 5 clientes, com cabelos médios, ela gasta 3 potes de creme. Quantos potes desse mesmo creme ela vai gastar para fazer o tratamento em 8 clientes com cabelos médios?

Anote suas respostas em seu caderno

Conclusão

- Como foi possível observar ao longo dessa unidade, tanto função afim como a função linear (caso particular de função afim) são grandes aliadas na modelagem de situações para resolução de inúmeros problemas do dia a dia. Após esse estudo, estamos prontos para calcular valores, muitas vezes encontrados de maneira intuitiva, de uma função afim o que nos permite de uma maneira mais formal encontrar e prever resultados importantes em diversas situações. Também vimos exemplos da utilização do zero da função afim e desta maneira foi possível entender sua aplicabilidade.
- Outros campos, além da Matemática, fazem uso da função afim, como a Física, a Economia, etc. Ou seja, esse é um tema interdisciplinar.
- Portanto, aproveite todas as ferramentas e os conhecimentos adquiridos nessa unidade para facilitar seu cotidiano e para, quem sabe, elaborar teorias ousadas.

Resumo

- Definição de função afim

  $y = ax + b$ ou $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

- Função linear

  Caso particular da função afim em que o coeficiente linear é zero (b=0).

  $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b = 0$

- Valor da função

Basta substituir na função o valor da variável desejado (nesse caso, o x que está sendo utilizado como a letra que representa a variável, como definido no tópico acima)

- Zero ou Raiz da Função afim

  Basta encontrar o valor de x, no qual $f(x) = 0$, ou seja:

  $ax + b = 0$ $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Veja Ainda

Uma opção interessante de atividade, envolvendo função afim, é essa sugestão de bingo dada por Ariana Costa Silva e Ana Paula Florencio Ferreira, em um artigo publicado no VI Encontro Paraibano de Educação Matemática, realizado em 2010. Você pode encontrar o passo a passo, as regras e os objetivos desse bingo diferente, acessando:

http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/re-17498113.pdf

Se você se interessa por matemática e física você pode acessar o site

http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/funcao-afim-aplicada-cinematica.htm e acompanhar um exemplo de aplicação de função afim (Matemática) na cinemática (Física).

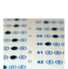
Referências

Livros

- ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. **Matemática Ciência e Aplicações 1**. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Temas e Problemas**. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p.
- ________________________. **A Matemática do Ensino Médio Volume 1**. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexo e Aplicações Volume 1**. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa**. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

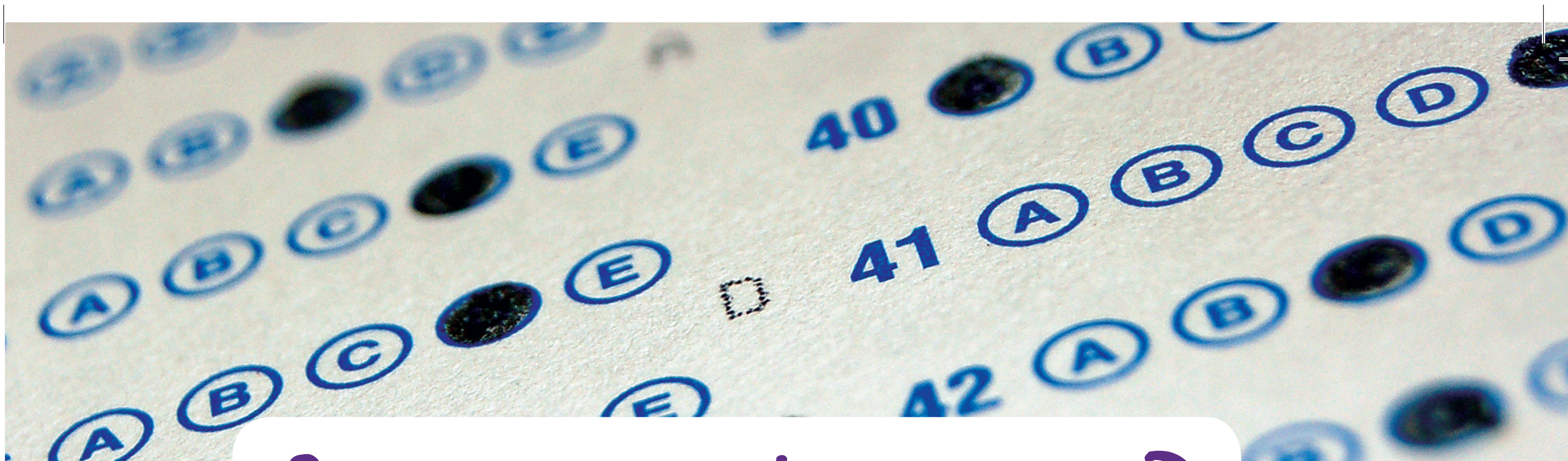
Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528



O que perguntam por aí?

(Enem 2004)

VENDEDORES JOVENS
Fábrica de LONAS - Vendas no Atacado
10 vagas para estudantes, 18 a 20 anos, sem experiência.
Salário: R$ 300,00 fixo + comissão de R$ 0,50 por m^2 vendido.
Contato: 0xx97-43421167 ou atacadista@lonaboa.com.br

Na seleção para as vagas deste anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem 500m de tecido, com largura de 1,40 m, e, no segundo mês, se vendessem o dobro. Foram bem sucedidos os jovens que responderam, respectivamente,

a) R$ 300,00 e R$ 500,00.

b) R$ 550,00 e R$ 850,00.

c) R$ 650,00 e R$ 1000,00.

d) R$ 650,00 e R$ 1300,00.

e) R$ 950,00 e R$ 1900,00.

Resposta: Letra c

Comentários:

Para calcular quantos metros quadrados foram vendidos, devemos multiplicar a largura pelo comprimento:

500. 1,4 = 700

1º mês: venda -700 m^2

Salário: 300 + 0,5.700

Salário: 300 + 350

Salário: 650

2º mês: dobro de venda – 2 . 700 = 1400 m^2

Salário: 300 + 0,5.1400

Salário: 300 + 700

Salário: 1000

Saiba Mais

Observe que, dobrando a venda, não dobramos o salário. Qual deveria ser a venda, então, para dobrar o salário do 1º mês?

Respostas das Atividades

Atividade 1

a) É função afim, contudo os coeficientes são a = 6 e b = -1

b) É função afim e coeficientes estão corretos.

c) Não é função afim, pois nesse caso a= 0.

d) É função afim e coeficientes estão corretos.

Respostas das Atividades

Atividade 2

Como a relação é

$F = 1{,}8C + 32$

e a temperatura em Nova Iorque foi de 8º F, temos:

$8 = 1{,}8C + 32$

$1{,}8C = 8 - 32$

$1{,}8C = -24$

$C = -13{,}333...$

Logo, a temperatura foi de aproximadamente -13,3º C.

Atividade 3

a) Modelando:

Valor cobrado pela empresa A:

$A(q) = 3{,}40q + 35$

b) Modelando:

Valor cobrado pela empresa B:

$B(q) = 2{,}70q + 55$

c) Calculando

$A(45) = 3{,}4.45 + 35$

$A(45) = 153 + 35$

$A(45) = 188$

$B(45) = 2{,}7.45 + 55$

$B(45) = 121{,}5 + 55$

B(45) 176,50

Ele pagará mais barato se contratar a empresa B.

d) Devemos procurar um valor q tal que A(q) = B(q). Temos

$3,40q + 35 = 2,70q + 55$

$0,70q = 20$

$q = 20/0,70 = 28,57$ (aproximadamente)

Atividade 4

a) $5r - 9 = 0$

$5r = 9$

$r = \frac{9}{5}$

b) $\frac{3}{4}x = 0$

$x = 0$

c)$6 + 4t = 0$

$4t = -6$

$t = \frac{-6}{4}$

e) $\frac{n-1}{2} = 0$

$n - 1 = 0.2$

$n - 1 = 0$

$n = 1$

Atividade 5

a) $20 + 5t = 0$

$5t = -20$

$t = -20/5$

$t = -4$

b) Como o zero da função é negativo, ele não é compatível com a situação problema, pois não é possível tempo negativo em situações cotidianas.

Atividade 6

Modelando o problema

$P(c) = \dfrac{3c}{5}$

p - representa o número de potes de creme

c - representa a quantidade de clientes

como são 8 clientes, temos:

$P(8) = \dfrac{3 \cdot 8}{5}$

$P(8) = 24/5$

$P(8) = 4{,}8$

Ou seja, Ana vai precisar de um pouco menos de 5 potes de creme.

Função Polinomial do 2° grau – Parte 1

Para início de conversa...

A função é um grande instrumento de modelagem de fenômenos físicos e situações cotidianas como foi visto em unidades anteriores. Um tipo de função muito usada é a função polinomial do 2° grau com a qual trabalharemos nesta unidade.

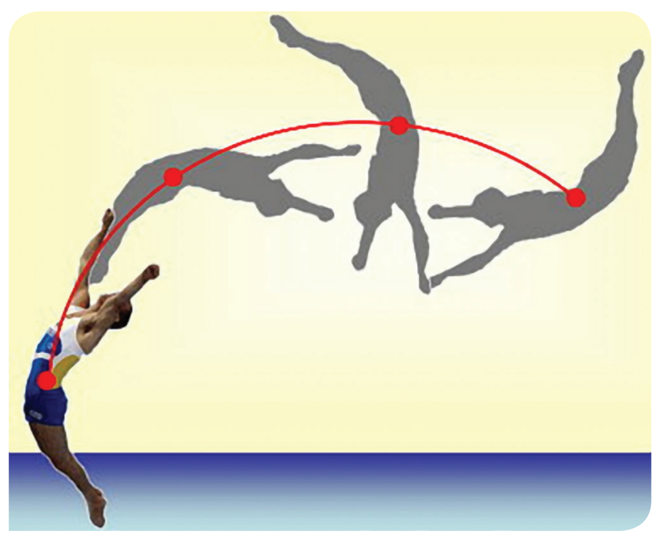


Figura 1: Em muitos movimentos da ginástica de solo, o atleta descreve uma trajetória parabólica.

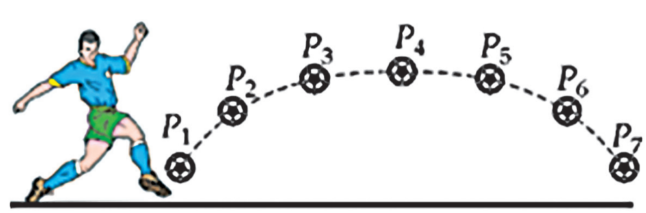


Figura 2: Em vários lances de uma partida de futebol, a trajetória do movimento da bola é uma parábola.

Figura 3: A antena parabólica possui um formato de um paraboloide de revolução, este obtido pela rotação de uma **parábola** em torno de seu eixo.

Objetivos de aprendizagem

- Consolidar conhecimentos obtidos no Ensino Fundamental II, como resolver equações do 2° grau.
- Conceituar função polinomial do 2° grau.
- Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2° grau.
- Determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2° grau
- Utilizar a função polinomial do 2° grau para resolver problemas
- Avaliar proposta de intervenção na realidade, utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Seção 1
Modelando um problema

É importante para uma indústria, empresa, fábrica etc. saber modelar alguns problemas que lhes informem sobre custo mínimo, receita máxima, lucro máximo, formato de objetos que devem ser produzidos, dentre outras questões. Vejamos um exemplo de situação-problema que envolve cálculo de áreas.

Situação Problema

Marlise possui uma fábrica que produz molduras para várias lojas. Após uma análise, descobriu-se que para utilizar o máximo das ripas de madeira, sem ter cortes desnecessários, era melhor fazer quadros de formatos quadrados. Ela precisa dessas ripas para fazer molduras para quadros de medidas iguais a: 10x10 cm, 15x15 cm, 20x20 cm, 25x25 cm, 30x30 cm e 35x35 cm. Além disso, ela deseja que as molduras tenham 2 cm de largura, ou seja, quer que as ripas de madeira tenham 2 cm de largura. Quais devem ser os comprimentos destas ripas? Após alguns cálculos, Marlise chegou a seguinte conclusão: "As ripas de madeira devem ter os seguintes comprimentos: 50 cm, 70 cm, 90 cm, 110 cm, 130 cm e 150 cm, respectivamente".

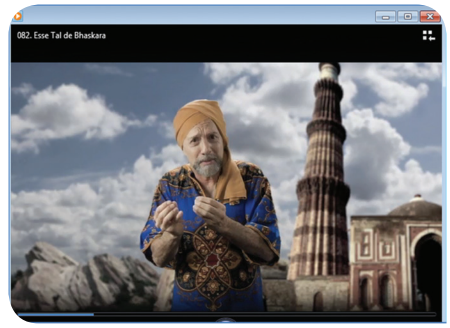
Mas como Marlise chegou a esta conclusão? Ficou curioso? Resolveremos este problema mais tarde. Antes precisamos trabalhar alguns conceitos importantes.

Seção 2
Revendo equações do 2° grau

É importante lembrarmos como se determinam as raízes de uma equação do 2° grau, ou seja, uma equação do tipo $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$.

Está confuso com tantas letras? Vamos dar um exemplo, para você entender.

Geralmente, usamos a fórmula de determinação das raízes de uma equação do 2° grau, conhecida pelo nome de Fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.



Exemplo 2.1: $x^2 - 8x + 15 = 0$

Como $a = 1$, $b = -8$ e $c = 15$, temos $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, substituindo estes valores na Fórmula de Bhaskara, temos:

$x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2}$, ou seja, as raízes são $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$.

Exemplo 2.2: $x^2 + 3x + 1 = 0$

Como $a = 1$, $b = 3$ e $c = 1$, temos $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$, substituindo estes valores na Fórmula de Bhaskara, temos:

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, ou seja, as raízes são $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

As equações anteriores, que apresentam os coeficientes *b* e *c* diferentes de zero são chamadas de equações do 2º grau completas.

No entanto, algumas equações do 2° grau são da forma incompleta, ou seja, apresentam o coeficiente $b = 0$ ou o coeficiente $c = 0$. Neste caso, podemos resolver estas equações sem utilizar a fórmula descrita anteriormente. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.3: $x^2 - 5x = 0$

Colocando *x* em evidência, temos:

$x\,(x - 5) = 0$

Repare que conseguimos reescrever o primeiro membro como produto de dois fatores (o fator *x* está multiplicando o fator $x-5$). Como este produto é igual a zero, isto significa que o 1° fator é zero ou o 2° fator é zero. Assim temos:

$x = 0$ ou $x - 5 = 0$

Logo, as raízes são $x_1=0$ ou $x_2=5$.

Observação: Devemos tomar muito cuidado ao resolver esta equação, pois não podemos proceder da seguinte forma:

$x^2=5x$ ("isolar o termo x^2");

$x=5$ ("dividir ambos os membros da equação por *x*").

Ao dividirmos os membros por x, estamos dividindo os membros dessa equação por zero (já que zero é uma das soluções), o que não é possível.

Exemplo 2.4: $x^2-4=0$

Notemos que neste caso o que queremos descobrir é um número x tal que seu quadrado menos quatro unidades é igual a zero. Primeiro, qual é o número x^2 que subtraído de quatro unidades é igual a zero? Este número é quatro, ou seja, $x^2=4$. Agora devemos encontrar o número x que elevado ao quadrado é igual a quatro. Temos duas possibilidades para x, são elas: $x_1=2$ ou $x_2=-2$.

Poderíamos resolver de outra forma. A equação $x^2-4=0$ poderia ser escrita da forma $(x-2)(x+2)=0$ (fatoramos o polinômio do 1º membro). Dessa forma, repetindo o raciocínio do exemplo 2.3, chegamos às mesmas raízes $x_1=2$ ou $x_2=-2$.

Vejamos mais alguns exemplos de equações em que não precisamos usar a Fórmula de Bhaskara:

Exemplo 2.5: $(x-5)^2=(2x-3)^2$

Uma pessoa que olhasse apressadamente para esta equação, desenvolveria a diferença de dois quadrados nos dois lados da equação e obteria a equação

$x^2-10x+25=4x^2-12x+9$,

que pode ser reduzida à forma

$3x^2-2x-16=0$.

Dessa forma, poderíamos resolvê-la usando a Fórmula de Bhaskara.

Como $a=3$, $b=-2$ e $c=-16$, temos que $\Delta=4-4\cdot3\cdot(-16)=196$. Assim,

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{196}}{2\cdot3}=\dfrac{2\pm14}{6}$, isto é, as raízes são $x_1=\dfrac{8}{3}$ e $x_2=-2$.

Essa resolução está correta. No entanto, não precisamos de fórmula para resolver esta equação. De maneira geral, os quadrados de dois números são iguais, quando estes dois números são iguais ou quando estes números são simétricos. Veja um exemplo: $(2)^2=(-2)^2$, pois tanto o quadrado de 2 quanto o quadrado de -2 são iguais a 4. Além disso, é evidente que $(2)^2=(2)^2$.

Assim, para resolver a equação $(x-5)^2=(2x-3)^2$, temos que considerar duas possibilidades:

1ª possibilidade: as expressões que estão elevadas ao quadrado representam números que são iguais. Logo:

$x-5=2x-3$

Resolvendo, temos $x=-2$

2ª possibilidade: as expressões que estão elevadas ao quadrado representam números que são simétricos. Assim, escrevemos:

$$x-5=-(2x-3) \Rightarrow x-5=-2x+3 \Rightarrow x+2x=3+5 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3}.$$

Concluímos que as raízes desta equação são $x_1=\frac{8}{3}$ e $x_1=-2$.

Observação: Alguém poderia tentar extrair a raiz quadrada dos dois lados da equação, mas $\sqrt{x^2}=x$ só é verdadeira para $x \geq 0$. Fazendo desta forma (errada) encontraríamos $x - 5 = 2x - 3$, o que resulta em $x = -2$. Ou seja, encontraríamos apenas uma das raízes.

Exemplo 2.6: $(x-3)^2(x-5)=0$

Repare que se desenvolvermos o quadrado da diferença de dois termos e depois aplicarmos a propriedade distributiva, isto resultaria em uma equação de 3° grau. Poderíamos usar o mesmo raciocínio empregado no Exemplo 2.3, isto é, o produto de dois números é zero, quando pelo menos um dos fatores é igual a zero. Assim, temos duas possibilidades:

1ª possibilidade

$(x-3)^2=0$

O único número cujo quadrado é zero é o próprio zero, ou seja

$x-3=0.$

Assim, uma das raízes é $x=3$.

2ª possibilidade:

$x-5=0$

A outra raiz é $x=5$.

Exemplo 2.7: $(3x-5)^2=36$

Neste caso, não precisamos desenvolver o produto notável. Existem dois números cujo quadrado é 36: 6 e -6. Assim, temos que

$$3x-5=6 \quad \text{ou} \quad 3x-5=-6$$

$$x=\frac{11}{3} \qquad\qquad x=-\frac{1}{3}$$

Logo, as raízes são: $x=\frac{11}{3}$ e $x=-\frac{1}{3}$.

Agora é sua vez! Tente resolver os exercícios a seguir.

Atividade 1

Resolva as equações:

a. $(2x-4)^2=(7x+17)^2$

b. $2x^2-3x=0$

c. $(x-7)(3x+6)^2=0$

d. $x^2+4x+1=0$

e. $(7-2x)^2=25$

f. $x^2-6x+10=0$

g. $4x^2-25=0$

h. $(5x+2)^2=9$

i. $x^2+6x+9=0$

j. $x(x+3)(2x-3)^2=0$

k. $3x^2+12=0$

l. $(x+5)^2(3x-4)^2=0$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Fórmulas de função do 2° grau no cotidiano

Num campeonato de futebol, 20 clubes enfrentam-se em turno e returno, ou seja, todos jogam contra todos em dois turnos. Você sabe quantos jogos são realizados neste campeonato? Para respondermos a esta pergunta, podemos pensar da seguinte maneira: sejam C1, C2, ..., C19 e C20 os clubes participantes, para cada par de letras temos 1 jogo. Por exemplo, C1C2 representa o jogo entre estes dois clubes em que o C1 está jogando em casa e C2 é o desafiante. Já C2C1 significa que neste jogo C1 é o visitante e C2 é o clube da casa. Assim, para determinar o número de jogos, temos de decidir quem será o time da casa e quem será o time desafiante. Para o time da casa, temos 20 escolhas possíveis, escolhido o time da casa agora temos de escolher o time visitante, o que podemos fazer de 19 maneiras. Logo, o total de jogos é igual a 20 x 19 = 380.

E se quisermos calcular o número de jogos *y* de um campeonato com *x* clubes em que todos se enfrentam em dois turnos, de que forma podemos fazer isto? Usaremos o mesmo raciocínio utilizado no exemplo anterior. Para determinar o número de jogos, temos de decidir quem será o time da casa e quem será o time desafiante. Para o time da casa, temos x escolhas possíveis. Escolhido o time da casa, agora temos de escolher o time visitante, o que podemos fazer de $(x - 1)$ maneiras. Logo, o total de jogos é $y = x(x - 1)$. Ou seja, o número de jogos é obtido a partir da lei da função do 2° grau $y = x^2 - x$.

De maneira geral, uma função polinomial do 2° grau é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Atividade 2

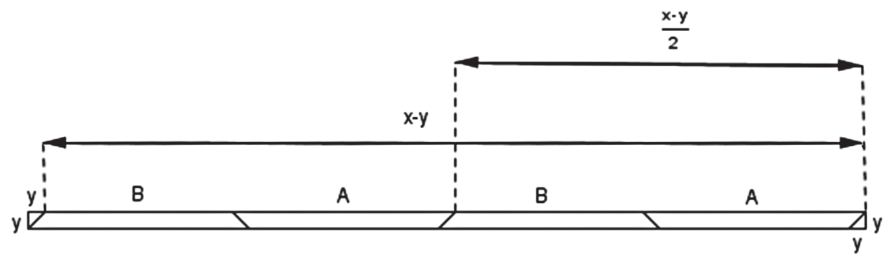
1. Suponha que um campeonato siga as regras dadas no exemplo anterior.
   a. Determine o número de jogos, se o campeonato for disputado por 12 times.
   b. Determine quantos times estão disputando um determinado campeonato (diferente do item a), sabendo que 90 jogos foram realizados.
2. Com uma corda de 100 metros, deseja-se demarcar no chão uma região retangular.
   a. Se uma das dimensões desse retângulo é de 20 metros, qual é a outra?
   b. Quais são as dimensões do retângulo que tem área 600 metros quadrados?
   c. Expresse a área *y* do retângulo em função do seu comprimento *x*.

Anote suas respostas em seu caderno

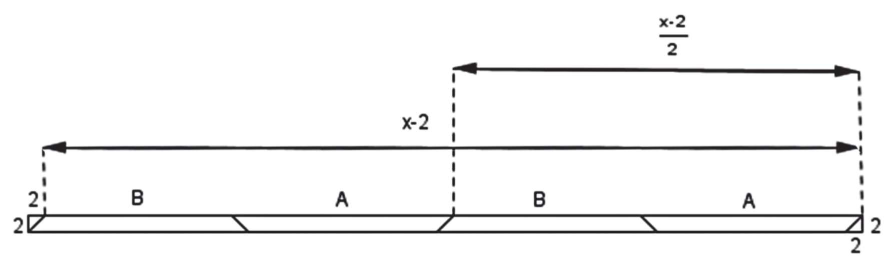
Voltando ao problema da seção 1:

Na seção 1, tínhamos a seguinte situação problema: "Marlise precisa de ripas para fazer molduras para quadros de medidas iguais a: 10x10 cm, 15x15 cm, 20x20 cm, 25x25 cm, 30x30 cm e 35x35 cm. Além disso, ela deseja que as molduras tenham 2 cm de largura, ou seja, quer que as ripas de madeira tenham 2 cm de largura. Quais devem ser os comprimentos das ripas para cada tipo de moldura?

Para resolvermos este problema, primeiro devemos notar que as ripas devem ser cortadas em formas de trapézio (de base maior A e base menor B), e, para que aproveitemos o máximo da madeira, devemos fazer cortes de 45° como mostrado na figura abaixo, onde x é a medida do comprimento de cada ripa e y a medida da largura (2 cm no caso).



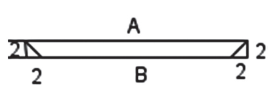
No nosso exemplo, as ripas têm 2 cm de largura, assim temos a seguinte figura:



Desta figura, temos:

$$A + B = \frac{x-2}{2} (*)$$

Destacando um dos trapézios, temos:

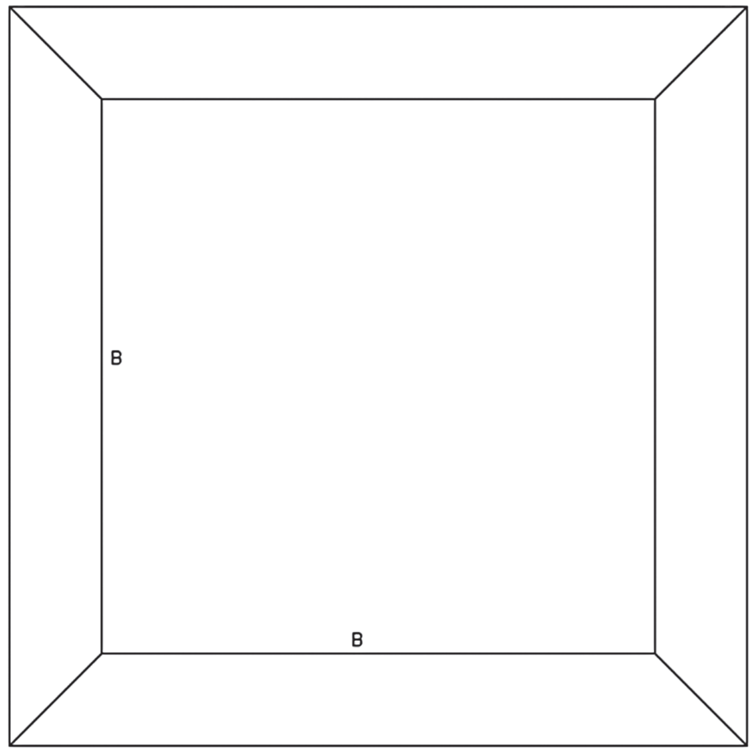


$A - B = 4$ (**)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (*) e (**), chegamos aos seguintes resultados:

$$A = \frac{x+6}{4} \text{ e } B = \frac{x-10}{4}$$

A moldura ficará com formato como mostrado na figura a seguir:



Assim, o quadro de formato quadrado construído com uma ripa de comprimento x possui área igual a:

$$S = \left(\frac{x-10}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4} \quad \text{(função do 2º grau)}$$

Dessa forma, se for pedido à Marlise uma moldura para um quadro 10 cm x 10 cm, ela terá de substituir *S* por 100 na função acima, pois é a área de um quadrado de lado 10. Substituindo, temos:

$$\left(\frac{x-10}{4}\right)^2 = 100$$

Lembra como resolvemos este tipo de equação? Queremos calcular um "número" que elevado ao quadrado dê 100. Que número é este? Os possíveis números são 10 e –10. Assim, temos:

$$\frac{x-10}{4} = 10 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x-10}{4} = -10$$

$$x = 50 \qquad\qquad x = -30 \ \text{(não serve)}$$

Logo, a ripa deve ter 50 cm de comprimento. E aí, o que achou? Tente fazer o mesmo para quadros de tamanhos 15x15 cm, 20x20 cm, 25x25 cm, 30x30 cm e 35x35 cm.

Você sabia que os Antigos Babilônios já sabiam resolver equações do 2° grau há mais de 4 mil anos? É verdade! Eles usavam um sistema sexagesimal e não o nosso sistema atual que é decimal. Eis um exemplo (no nosso sistema decimal) que data de 1800 a.C., aproximadamente, encontrado numa tábula de Strasburgo: "Uma área A, que consiste na soma de dois quadrados, é 1000. O lado de um dos quadrados é 10 a menos que 2/3 do lado do outro quadrado. Quais os lados dos quadrados?" Fica este exercício como desafio para você resolver.

Fonte: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Ed Unicamp.

Saiba Mais

Um grupo deseja fretar um ônibus para fazer uma excursão. O ônibus possui 40 assentos e o preço da passagem para cada pessoa do grupo é de 50 reais acrescidos de 2 reais por assento vazio.

a. Se o grupo possui 30 pessoas, qual o preço da passagem para essa excursão?

b. Expresse o valor V total pago pelo grupo em função da quantidade x de assentos vazios nesse ônibus.

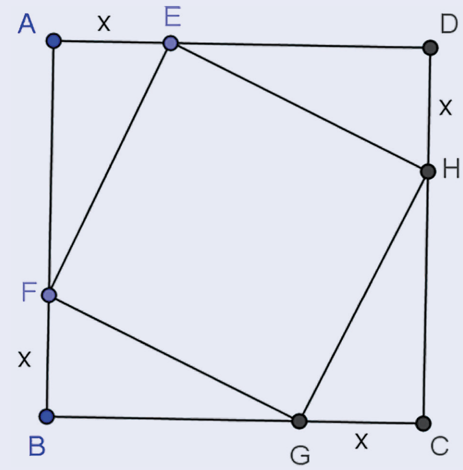
c. Um grupo que pagou 2100 reais pelo passeio deixou quantos lugares vazios no ônibus.

Atividade 3

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Em um quadrado ABCD de lado 10 cm, inscreve-se outro quadrado EFGH como mostra a figura abaixo. Note que os segmentos AE, BF, CG e DH têm comprimento x.



a. Subtraindo-se da área do quadrado ABCD, as áreas dos 4 triângulos retângulos da figura, pode-se determinar a área S do quadrado EFGH. Determine S quando x = 2 cm. (Dica: a área de um triângulo é determinada pela metade do produto entre a medida da base pela medida da altura desse triângulo)

b. Expresse, em função de x, a área y de um dos triângulos da figura e a área Y do quadrado EFGH.

c. Determine o valor de x para que o quadrado EFGH tenha área 50 metros quadrados.

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo

- Função polinomial do 2° grau é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$.
- A forma tradicional de resolver uma equação do segundo grau é usando a Fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Muitas equações do segundo grau podem ser resolvidas sem recorrer a esta fórmula. Como, por exemplo, as equações do segundo grau que têm c=0 ou b = 0.

Veja ainda

Para saciar sua curiosidade, indicamos os seguintes sites:

- http://www.somatematica.com.br
- http://www.passeiospelamatematica.net/dia-a-dia/matdi.htm

Referências

Livros

- Lima, E.L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., Morgado, A.C. **A matemática do Ensino médio**, vol.1, SBM.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., de Almeida, N. **Matemática ciência e aplicações**, vol.1, Ed Saraiva.
- Lozada, Cláudia de Oliveira; Araújo, Mauro Sérgio Teixeira de; Morrone Wagner; Amaral, Luiz Henrique, Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), SP. **A modelagem matemática aplicada ao ensino de Física no Ensino Médio**, Revista Logos, n° 14, 2006.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767.

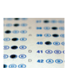
- http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/images/diego_hyp_corpo.jpg.

- http://www.vestibulandoweb.com.br/fisica/teoria/fundamentos-cinematica-8.gif.

- http://www.electrospace.com.br/vitrine/Antenas/slides/Antenas%20Parabolicas%2001.jpg.

- http://www.viladoartesao.com.br/blog/wp-content/uploads/2011/02/corte_ripas.jpg.

- http://www.sxc.hu/photo/1295183.



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1024076

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. $x = -\frac{21}{5}$ e $x = -\frac{13}{9}$

b. $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$

c. $x = 7$ e $x = -2$

d. $x = -2 + \sqrt{3}$ e $x = -2 - \sqrt{3}$

e. $x = 1$ e $x = 6$

f. Não existe raiz real

g. $x = -\frac{5}{2}$ e $x = -\frac{5}{2}$

h. $x = \frac{1}{2}$ e $x = -1$

i. $x = 3$ (raiz dupla)

j. $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ e $x = -3$

k. Não existe raiz real

l. $x = -5$ e $x = \frac{4}{3}$

Atividade 2

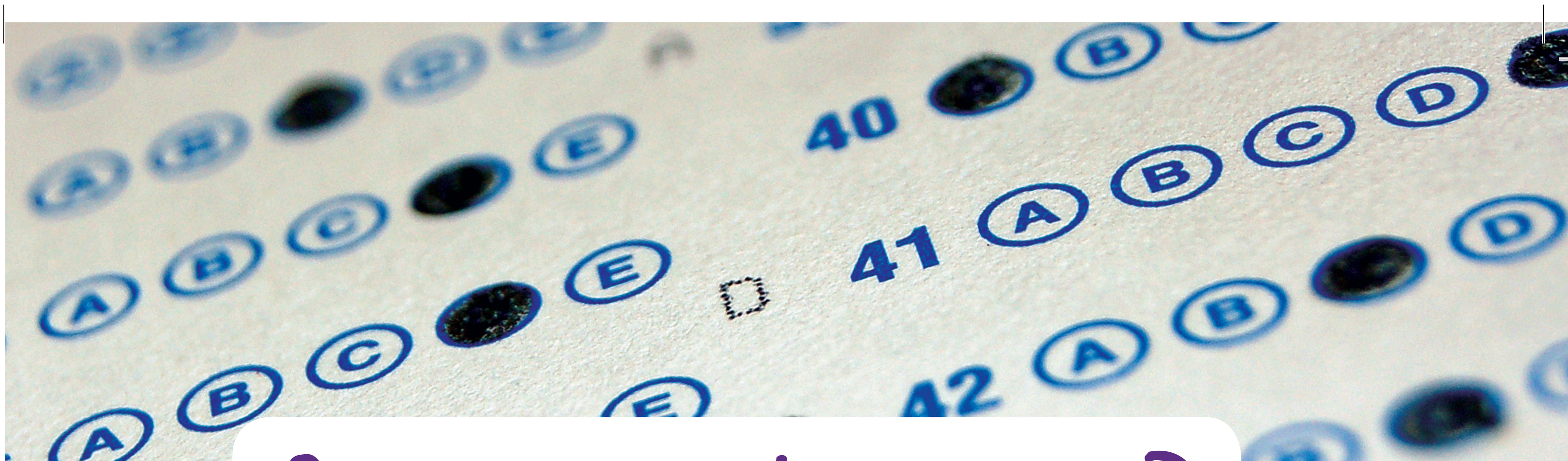
1. a. 132 jogos b. 10 times
2. a. 30 b. 20mx30m c. y=20 . x

Atividade 3

a. 70 reais.

b $V = -\,2x^2 + 30x + 2000$

c. 5 ou 10.



O que perguntam por aí?

(ENEM – 2009)

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a. $V = 10.000 + 50x - x^2$

b. $V = 10.000 + 50x + x^2$

c. $V = 15.000 - 50x - x^2$

d. $V = 15.000 + 50x - x^2$

e. $V = 15.000 - 50x + x^2$

Solução:

Primeiro notemos a tabela a seguir:

Quantidade de álcool (em litros)	10.000	$10.000 + 1 \cdot 100$	$10.000 + 2 \cdot 100$	......	$10.000 + x \cdot 100$
Preço por litro (em reais)	1,50	$1{,}50 - 1 \cdot 0{,}01$	$1{,}50 - 2 \cdot 0{,}01$	......	$1{,}50 - x \cdot 0{,}01$

Assim, temos:

Valor arrecadado/dia = (quantidade de álcool/dia)·(preço do litro de álcool)

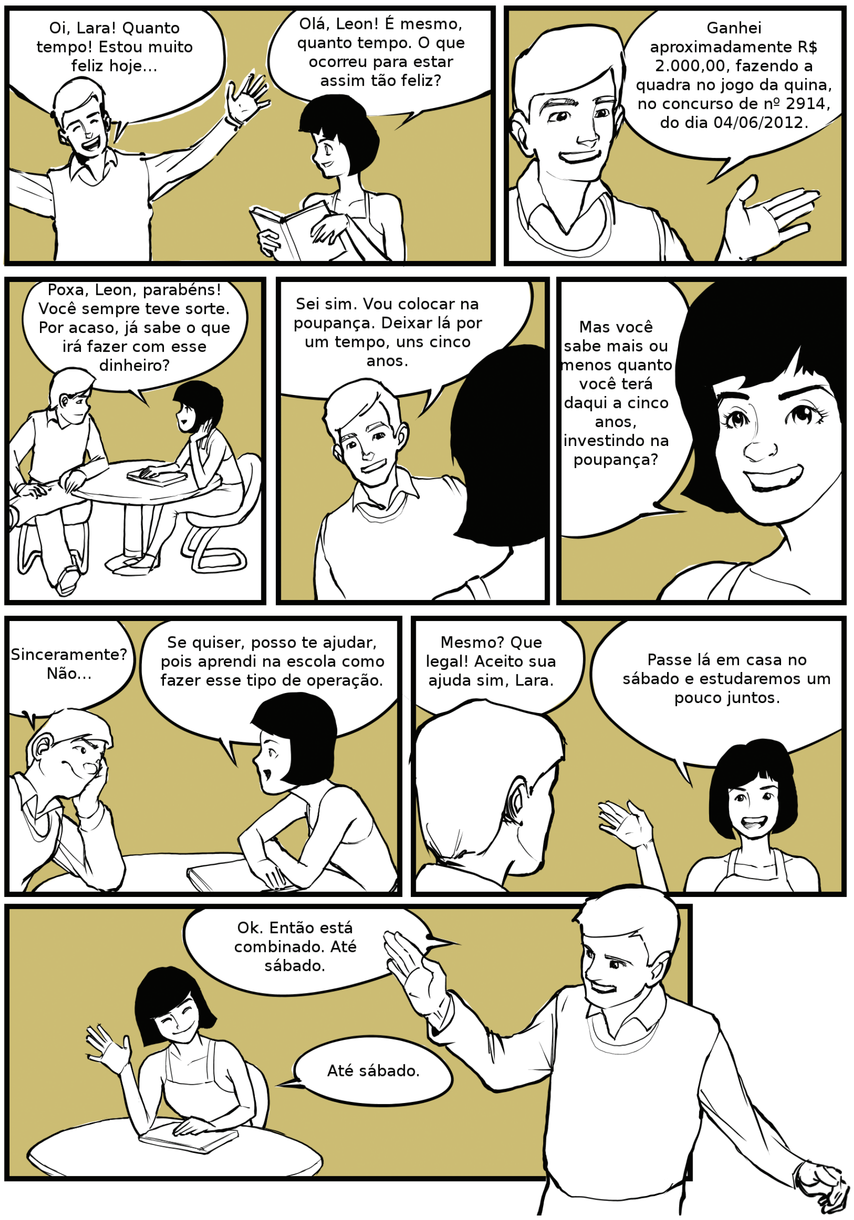
$V = (10000 + 100x) \cdot (1{,}5 - 0{,}01x)$

Logo, a resposta é $V = 15.000 + 50x - x^2$, ou seja, a alternativa D.

Vamos poupar dinheiro!

Para início de conversa...

Observe a história em quadrinho abaixo:



Todos nós sabemos que é muito bom guardar um dinheirinho na poupança, pois lá nosso dinheiro irá render, não é mesmo? Mas será que você saberia calcular o quanto renderá? Se colocarmos dois mil reais hoje, como fez Leon, você saberia dizer quanto teremos daqui a cinco anos? Ou, então, se depositarmos dez mil reais hoje, em quanto tempo, aproximadamente, teremos doze mil reais? Esses são alguns questionamentos que podem tanto auxiliar Leon quanto a nós mesmos.

Nesta unidade, vamos analisar esta e outras situações que envolvem o conhecimento do mesmo conceito matemático: o de função exponencial. Mas não fiquem assustados com esse nome! Esta função caracteriza-se pelo uso das potências. Vocês se lembram delas?

Fiquem tranquilos, pois, caso seja necessário relembrar alguma coisa, vocês verão aqui nesta aula mesmo.

E então, vamos lá?!

Objetivos de aprendizagem

- identificar fenômenos que podem ser modelados por uma função exponencial;
- identificar a representação algébrica, gráfica e as principais propriedades da função exponencial;
- resolver problemas, utilizando a função exponencial;
- resolver equações exponenciais simples.

Atividade

Você deve ter observado que não há números no texto. Em que aspectos você acha que a falta desses dados numéricos prejudicou a compreensão do texto? Você conseguiria apontar onde a falta de números mais prejudicou a compreensão? Por quê?

Registre a seguir suas reflexões.

Questionamentos como esses irão motivar as discussões que faremos nessa unidade.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 1

Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos

Leon foi à casa de Lara, que teve a maior paciência para explicar o que iria acontecer com o dinheiro que seu amigo depositou na poupança. Como Lara fez isso?

Inicialmente, vamos tentar entender como esse processo funciona. Quando depositamos um valor em uma poupança, o valor disponível (saldo) é alterado de mês em mês. O curioso é que este valor é alterado para cima, ou seja, ganhamos dinheiro sem fazer esforço. A taxa de ganho, a partir da qual é calculado o valor que ganhamos a cada mês, é o que chamamos de taxa de juros. Assim, ao encontrar Leon, Lara considerou algumas coisas importantes: o dinheiro que Leon estava investindo (capital) era de R$ 2.000,00 (dois mil reais) e a taxa de **juros** que a poupança praticava era de 6% ao ano. Isso significa que, ao longo de um ano inteirinho, o dinheiro lá depositado aumentará em 6%.

Juros,

Juro é uma noção utilizada na economia e nas finanças para mencionar a utilidade, o ganho, o valor ou o rendimento de algo.

Você se lembra de como se fazem os cálculos para se determinar 6% de um valor?

Vamos mostrar duas formas:

A primeira utiliza lápis e papel:

Seis por cento significam 6 a cada 100, ou seja, $\frac{6}{100}$. Sendo assim, 6% de algum valor é calcular, $\frac{6}{100} \times (\text{esse valor})$.

Exemplo: 6% de 120

$$\frac{6}{100} \text{x} 120 = \frac{720}{100} = 7{,}20$$

A segunda faz uso de uma calculadora:

Digite a quantia considerada (no caso de Leon, serão 2.000 reais), aperte o botão de multiplicação e em seguida o número decimal 0,06 (que representa seis centésimos, ou seja, 6%). Dessa forma, o número que aparecer no visor da calculadora será o valor desta porcentagem.

A seção de economia dos noticiários faz referência quase diária à Taxa Selic. Você sabe que taxa é essa? Para descobrir o que é, quem a define e qual a importância dessa taxa para a economia e o mercado financeiro, visite o *site* http://blog.investmania.com.br/2012/06/08/afinal-o-que-e-a-taxa-selic/.

Saiba Mais

Importante

Existem duas maneiras de se fazer o cálculo de juros. A primeira delas, que mostramos no exemplo da poupança, é chamada de juros compostos, porque o cálculo dos juros de um mês é feito sobre o valor atualizado, que incorpora os juros do mês anterior. Nesse tipo de cálculo, por assim dizer, são aplicados juros sobre juros. Na outra maneira, chamada de juros simples, os juros são calculados sempre sobre o valor inicial, não levando em conta as atualizações referentes aos juros dos meses anteriores.

Agora é com você! Faça as atividades para entender melhor como se calcula a porcentagem de algum número ou valor monetário.

Atividade 1

Uma pessoa pagará uma conta de 400 reais com atraso. Por essa razão, pagará de multa 2% do valor da conta. Qual o valor da multa? Qual o valor total a pagar?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 2

Vamos lembrar do caso de Leon. O valor de R$ 2.000,00 depositado na poupança irá render 6% de juros ao longo de um ano. Qual quantia estará disponível ao final desse período?

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Pelo que percebemos, estamos conseguindo calcular essas porcentagens. Mas, quando se trata de banco e vida financeira, a coisa não fica tão simples assim. O que esta discussão tem a ver com a função exponencial que mencionamos no início? Vamos ver isso logo, logo.

No caso de Leon, vimos que, após um ano, seu saldo na poupança deverá ser de R$ 2.120,00. Porém, se quisermos calcular o valor corrigido ao final do segundo ano, o processo irá se repetir – mas com um detalhe muito importante: não iremos mais calcular 6% de 2.000 reais, pois a taxa da poupança incidirá sobre o saldo corrigido, ou seja, 2.120 reais.

Assim, Leon terá R$ 2.120,00 mais 6% de R$ 2.120,00. Como 6% de R$ 2.120,00 = 0,06x2120= 127,20. Ao final do 2º ano, Leon terá 2120 + 127,20 = R$2247,20. Se quisermos calcular o valor que Leon terá no final do terceiro ano, repetiremos o procedimento, mas desta vez a partir dos R$ 2.247,20 que estavam na caderneta no final do segundo ano. Se quisermos calcular o valor que Leon terá no quarto ano, tomaremos como base o saldo final do terceiro ano, se quisermos calcular o valor do quinto ano, tomaremos como base o saldo do quarto ano e assim por diante.

Poderíamos descobrir o saldo de Leon no ano seguinte, simplesmente multiplicando-se o saldo do ano anterior por 1,06. Veja como isso é equivalente ao que fizemos anteriormente:

Ao final do 1º ano, o saldo era de 2000 acrescido de 6% de 2000, ou seja, 2000 + 0,06x2000. Essa expressão pode ser escrita da forma 2000x(1+0,06), isto é, 2000x1,06, cujo resultado é o mesmo encontrado anteriormente (2120 reais).

A mesma ideia pode ser aplicada para o 2º ano. Para descobrirmos o novo saldo, basta multiplicarmos 2120 por 1,06, obtendo R$2247,20.

Após **n** anos? Qual seria o saldo de Leon? Bastaríamos multiplicar o valor inicial de 2000 reais **n** vezes por 1,06, ou seja, 2000x1,06x1,06x...x1,06 = 2000x1,06n. No caso geral, um valor **C** aplicado por um tempo **n** a uma taxa de juros compostos **i** por unidade de tempo acumulará um montante **M** dado pela fórmula:

$$M = C.(1+i)^n$$

Nesta fórmula, **M** representa o montante (quantia final após a incidência dos juros), **C** é o capital (dinheiro) e a taxa de juros é representada pela letra **i** (vamos sempre utilizar na forma de número decimal). O tempo de investimento é representado pela letra **n**.

Vamos vê-la funcionando?

O capital investido por Leon foi de 2.000 reais e a taxa de juros ao ano foi de 6% = 0,06. O tempo de investimento será de 5 anos.

Dessa forma, temos os seguintes dados:

C = ___________________________

i = ____________________________

n = ___________________________

Aplicando na fórmula, temos:

$$M = 2000 \cdot \left(1 + 0,06\right)^5$$

(Vamos utilizar uma calculadora para facilitar na hora dos cálculos, ok?)

Com isso, temos:

$$\mathrm{M} = 2000\,.\,1,06^5 = 2000\,.\,1,33822 = 2676,44$$

Viu?! Não é tão difícil! Podemos notar que, neste problema, o valor do montante depende claramente da taxa de juros aplicada, porém, mais importante que isso, da forma como essa taxa incide ao longo do tempo. Como o cálculo de juros de um mês leva em consideração o valor que incorpora os juros do mês anterior, acaba acontecendo um aumento do estilo "bola de neve", um acúmulo recursivo, o que, matematicamente, pode ser modelado pela exponenciação. Por isso, na fórmula que apresentamos, o tempo – representado pela variável **n** – é um expoente. É importante destacar que os juros compostos também são usados para calcular dívidas, como as do cartão de crédito e do cheque especial. O crescimento exponencial dessas dívidas, sempre calculadas sobre o valor atualizado e nunca sobre o valor original, termina surpreendendo os usuários que, de um mês para outro, passam a dever mais do que conseguem pagar. Olho vivo, portanto!

No exemplo anterior, vimos uma situação-problema de crescimento exponencial (o saldo de Leon aumentava com o tempo segundo uma lei que apresenta variável no expoente). Porém, existem situações que apresentam decrescimento exponencial. Veja o seguinte exemplo:

Em um campeonato com 64 clubes, em cada rodada, dois times se enfrentam e o perdedor é eliminado. Dessa forma, passam para a próxima etapa sempre a metade do número de clubes. Quantas rodadas são necessárias para que reste um único clube que receberá o troféu de campeão?

Vamos relacionar o número de clubes ao número de rodadas do campeonato através de uma tabela.

Rodada	Número de clubes
Início do campeonato (0 rodadas)	64
após 1 rodada	32
após 2 rodadas	16
após 3 rodadas	8
após 4 rodadas	4
após 5 rodadas	2
após 6 rodadas	1

A tabela nos mostra que após 6 rodadas teríamos definido o campeão desse torneio. Obtemos o número de clubes para a próxima rodada multiplicando o número de clubes da rodada anterior por 1/2.

Outro caso em que podemos aplicar a função exponencial é inspirado em um filme: *A Corrente do Bem* (*Pay It Forward*, 2000). Este filme conta a história de um menino, Trevor McKinney, que, incentivado por um desafio de seu professor de Estudos Sociais, cria um jogo chamado *A Corrente do Bem*.

Veja o pôster do filme:

Para assistir ao trailer do filme *A Corrente do Bem*, acesse http://mais.uol.com.br/view/57032.

Multimídia

A Corrente do Bem relata a história de alguém que ajuda três pessoas a realizar algo muito importante, mas que elas não podem fazer sozinhas. Em gratidão, a pessoa auxiliada deve retribuir a gentileza para outras três pessoas, que, por suas vezes, devem continuar retribuindo da mesma forma, infinitamente...

Vale muito a pena assistir a este filme. Mas também vale muito a pena perceber como essa corrente propaga-se rapidamente! Vejamos:

1ª etapa: Uma pessoa presta auxílio para outras três.

2ª etapa: Cada uma dessas três pessoas auxiliam outras três. Com isso, 3x3 = 9.

3ª etapa: Cada um dos 9 auxiliados da etapa anterior auxilia outras três pessoas. Isto é, 9 x 3 = 27.

E assim por diante.

Resumindo, nós teremos a seguinte configuração:

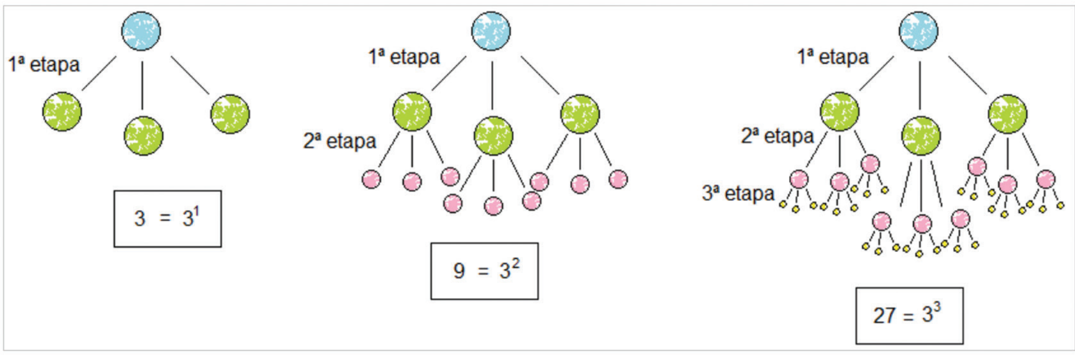


Figura 1: Podemos notar que na Corrente do Bem o número de pessoas auxiliadas a cada etapa aumenta rapidamente. Além disso, a quantidade de pessoas é sempre uma potência de 3.
Fonte: do autor

Vamos verificar essa situação, colocando as informações em uma tabela:

Etapa	Nº de pessoas auxiliadas nesta etapa
1	3
2	$3^2 = 9$
3	$3^3 = 27$
4	$3^4 = 81$
5	...
...	$3^{10} = 59.049$
n	...

Observe que o número de pessoas auxiliadas é igual a 3 elevado ao número da etapa. Dessa forma, numa etapa n qualquer teremos 3^n pessoas ajudadas.

Sendo assim:

Quantas pessoas serão auxiliadas na 7ª etapa da Corrente do Bem?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Atividade 4

Em uma etapa da Corrente do Bem foram auxiliadas 729 pessoas. Em que etapa isso ocorreu? Escreva a equação que representa o problema e resolva-a.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Um casal resolveu encontrar uma maneira de calcular o número de ascendentes que tinham conjuntamente. Então, seguiram esta linha de raciocínio:

	Número de membros da geração
1ª geração: casal	$2 = 2^1$
(2 pais e 2 mães)	$4 = 2^2$
3ª geração: avôs + avós (4 avôs e 4 avós)	$8 = 2^3$

a. Qual o número de membros da 6ª geração?

b. Qual o número de membros da geração de número n?

c. Escreva a função exponencial que descreve o problema.

d. Em qual geração teremos 2.048 membros?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

A atividade anterior nos dá uma dica de como devemos resolver as equações exponenciais, que são equações que apresentam incógnita no expoente. Uma dica para resolver equações desse tipo é tentar escrever ambos os membros da equação como potências de mesma base. Para isso, usamos as propriedades das potências. Veja o seguinte exemplo:

Ex: Resolva, em IR, a equação $3^x = 81$.

Como $81 = 3^4$, temos $3^x = 3^4$. Desse modo, $x = 4$ é a solução dessa equação.

Agora é sua vez, resolva em IR, as seguintes equações:

a. $2^x = 256$

b. $5^x = 125$

c. $5.4^x = 80$

d. $5.2^x - 3.2^x = 32$

Anote suas respostas em seu caderno

Os exemplos apresentados até o momento relacionavam duas grandezas por uma expressão que apresenta variável no expoente. Definimos, então, a função exponencial:

Definição: Chama-se função exponencial toda função *f* de variável real dada por $f(x) = a^x$, em que *a* é um número real dado, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Este número *a* é chamado de base.

Inicialmente, você poderia pensar: Mas por que o *a* tem de ser positivo e diferente de 1? A resposta a esta pergunta seria:

- Primeiro que, se $a < 0$, nem sempre a expressão a^x representaria um número real. Por exemplo, se $a = -5$ e $x = \frac{1}{2}$, o número $(-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$ não é real.
- Se $a = 0$, teríamos:

Quando $x > 0$, $y = 0^x = 0$ – Função constante.

Quando $x < 0$, não se define 0^x (por exemplo, $0^{-6} = \frac{1}{0^6} = \frac{1}{0}$).

Quando $x = 0$, $y = 0^0$. Indeterminado.

- Se $a = 1$, para todo $x \in R$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é uma função constante.

Por estes motivos, apenas utilizamos em nossa definição $a > 0$ e $a \neq 1$. Além disso, a função exponencial só assume valores reais positivos. Dessa forma, o conjunto-imagem dessa função é R*+

Seção 2
Analisando gráficos

Uma parte importante no estudo de funções é o estudo e análise de seus respectivos gráficos. Como no momento estamos trabalhando com funções exponenciais, vamos construir dois gráficos e retirar algumas conclusões?

Construiremos os gráficos a seguir, localizando alguns pontos e ligando-os:

A primeira função cujo gráfico vamos traçar é a função $y = 2^x$. Vamos fazer uns cálculos?

Para $x = -3$, temos $y = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Para $x = -2$, temos $y = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Para $x = -1$, temos $y = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

Para $x = 0$, temos $y = 2^0 = 1$

Para $x = 1$, temos $y = 2^1 = 2$

Para $x = 2$, temos $y = 2^2 = 4$

Para $x = 3$, temos $y = 2^3 = 8$

E, ligando os pontos, temos o seguinte gráfico:

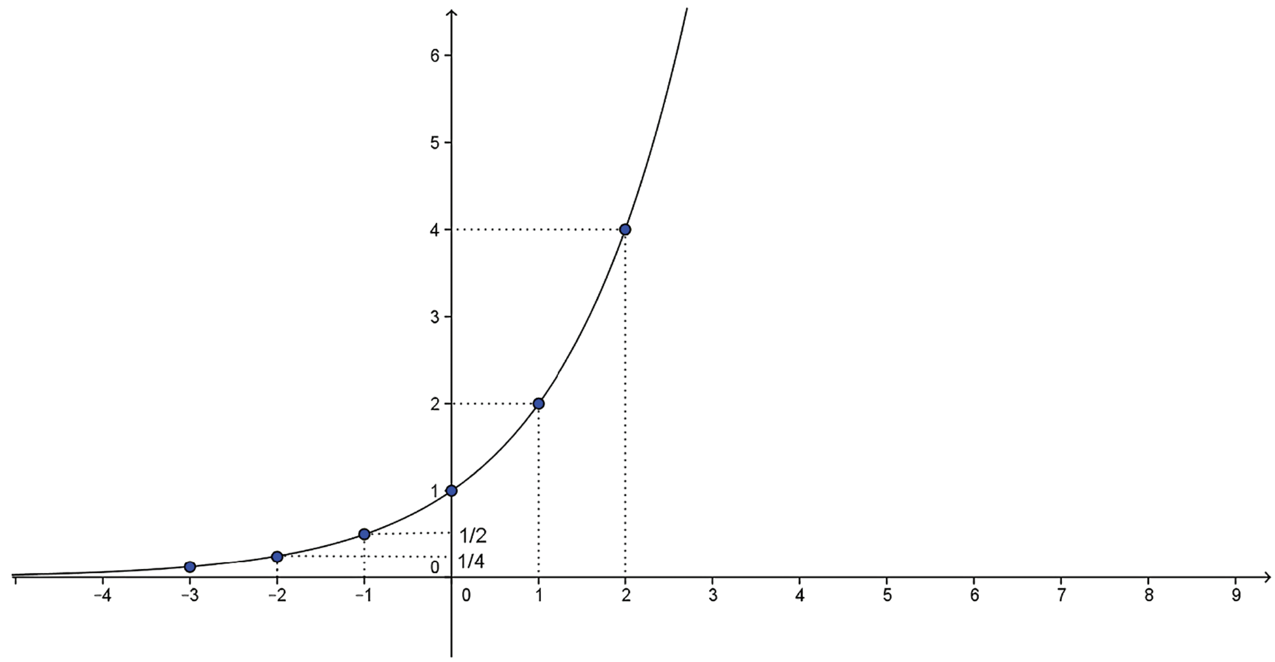


Gráfico 1: $y = 2^x$. Este gráfico foi feito por um computador. Podemos perceber que, à medida que os valores de x vão crescendo, o valor de y também cresce rapidamente. Essa função é crescente!

Vamos desenhar o gráfico de uma outra função, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Faremos mais uns cálculos!

Para $x = -3$, temos $y = 2^3 = 8$

Para $x = -2$, temos $y = 2^2 = 4$

Para $x = -1$, temos $y = 2$

Para $x = 0$, temos $y = 1$

Para $x = 1$, temos $y = \frac{1}{2}$

Para $x = 2$, temos $y = \frac{1}{4}$

Para $x = 3$, temos $y = \frac{1}{8}$

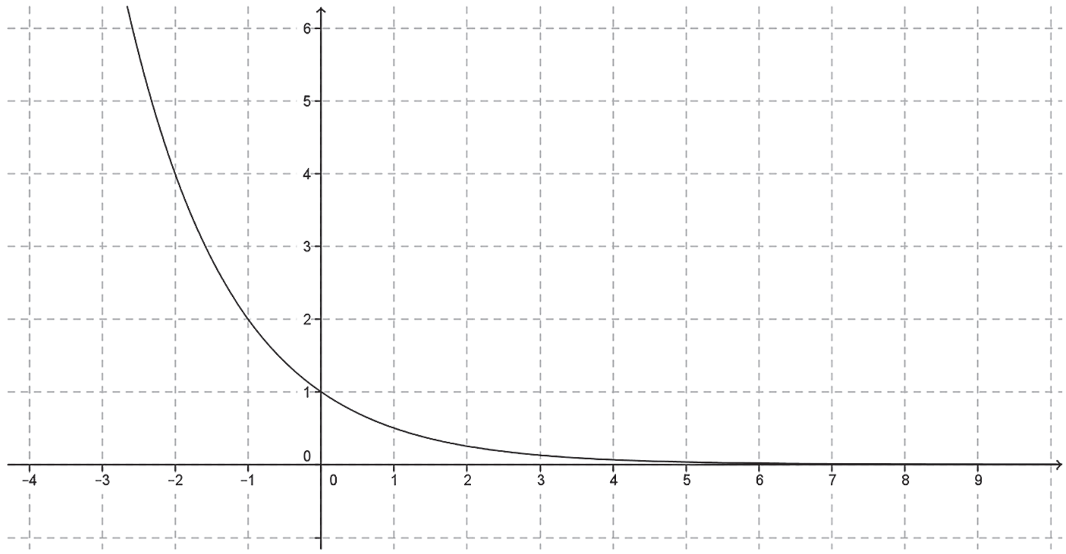


Gráfico 2: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Este gráfico também foi feito por um computador. Podemos perceber da mesma forma que, à medida que os valores de x crescem, o valor de y vai caindo (a função é decrescente) rapidamente.

Vocês perceberam que, apesar de a primeira função ser crescente e a segunda ser decrescente, as duas curvas passam pelo ponto (0, 1)? Vocês saberiam explicar por qual motivo isso ocorre? É simples! Uma das propriedades de potências é que qualquer número (diferente de zero) elevado a zero é sempre igual a 1.

Outra propriedade interessante: vocês saberiam dizer o que faz com que a primeira função seja crescente e a segunda decrescente? Vou dar uma dica: as funções $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$, $y = \left(\frac{5}{16}\right)^x$ e $y = 0{,}1^x$ são todas decrescentes. Já as funções $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{113}{9}\right)^x$ e $y = (11)^x$ são todas crescentes. Descobriu? Muito bem: se o número elevado ao expoente for maior que 1, a função será crescente. Já se este número estiver entre 0 e 1, a função será decrescente. Os motivos de ter falado "entre 0 e 1" e não "menor que 1", como seria de se esperar, ficarão mais claros a seguir.

Acesse o endereço (http://www.igm.mat.br/profweb/sala_de_aula/mat_computacional/alunos/neru/exponencial_1.htm) e, no applet que surgirá, faça variar o valor do número que será elevado ao expoente – no caso, chamado de "a". O que acontece quando ele é igual a 1?

Importante

Importante

Os dois gráficos que traçamos permitem-nos perceber, de maneira mais informal, o que seriam funções crescentes (à medida que x aumenta, y aumenta) e decrescentes (à medida que x aumenta, y diminui). Mais formalmente, uma função é dita crescente quando para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$. E dizemos que uma função é decrescente quando, para quaisquer x_1 e x_2 pertencente ao domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

Resumo

- A função exponencial pode modelar situações importantes da nossa vida, como o cálculo de juros compostos e alguns tipos de crescimento populacional.
- Uma equação exponencial simples pode ser facilmente solucionada por meio da comparação entre as bases e os expoentes.
- Uma função exponencial possui um domínio real, porém um contradomínio real positivo. Além disso, a base deve ser positiva e, ao mesmo tempo, diferente de 1.
- Os gráficos de uma função exponencial podem ser crescentes se a base da função for maior que 1 ou decrescentes se a base estiver entre 0 e 1.

Veja ainda

Para quem gosta de brincar com números, visite o *blog* Matemática na Veia em http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/06/curiosidades-da-aritmetica-calendarios.html

Neste *site*, há uma discussão muito interessante sobre o uso das potências nos calendários e muitos outros truques divertidos que envolvem as potências. Divirtam-se!

Referências

- http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2010/06/curiosidades-da-aritmetica-calendarios.html. Acesso em: 10 jul. 2012.
- ZAGO, Glaciete Jardim; Walter AntonioSciani. **Exponencial e Logaritmos**. 2ª ed. São Paulo: Érika. Estude e Use, 1996. 95p.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/photo/912245

- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528

Respostas das Atividades

Atividade 1

O valor de 2% pode ser representado pelo número decimal 0,02. Com isso, podemos efetuar o seguinte cálculo para determinarmos o valor da multa:

400 x 0,02 = 8 reais.

Logo, o valor total a pagar é: 400 + 8 = 408 reais.

Atividade 2

Efetuamos o produto 2.000 x 0,06 = 120 reais. Adicionando os juros aos 2.000 reais iniciais, Leon terá 2.120 reais.

Atividade 3

A função que descreve a Corrente do Bem é $y = 3^x$, onde y representa a quantidade de pessoas auxiliadas por etapa e x representa as etapas.

Com isso, na 7ª etapa, teremos x = 7. Logo, $y = 3^7 = 2.187$ pessoas.

Atividade 4

Neste caso, temos que y = 729. Sendo assim, $3^x = 729$.

Sabemos, através da fatoração, que $729 = 3^6$. Com isso, $3^x = 3^6$.

Concluímos, portanto, que x = 6 (6ª etapa).

Atividade 5

Eles perceberam que a lei de formação do número de membros da geração (y) em função do número da geração (x) era: $y = 2^x$.

Poderíamos fazer perguntas do tipo: Em qual geração o número de ascendentes que o casal teve corresponde a 2048?

Para resolver este problema, bastaria descobrir x tal que $2^x = 2048$. Este tipo de equação que apresenta incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências é o que chamamos de equação exponencial.

Respostas das Atividades

Vamos ver agora como resolver uma equação exponencial. Bem, um método que utilizamos para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de uma mesma base a ($0 < a \neq 1$) e, daí, aplicar a propriedade:

$$a^{x}_{1} = a^{x}_{2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quando podemos aplicar isso, a equação exponencial é facilmente reduzida, ou seja, informalmente falando, basta colocarmos as potências na mesma base, pois, se as bases forem iguais, para que as potências sejam iguais, basta que os expoentes sejam iguais.

No exemplo das gerações, onde tínhamos que resolver a equação $2^x = 2048$, agora fica bem simples, pois para colocar as potências na mesma base basta escrevermos 2048 na base 2, mas como? Basta fatorar o 2048! Observe:

2048	2
1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	$2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^{11}$

Daí, temos que $2^x = 2^{11}$. Pelo método que comentamos anteriormente, concluímos que $x = 11$ e, portanto, 2048 corresponde a 11ª geração.

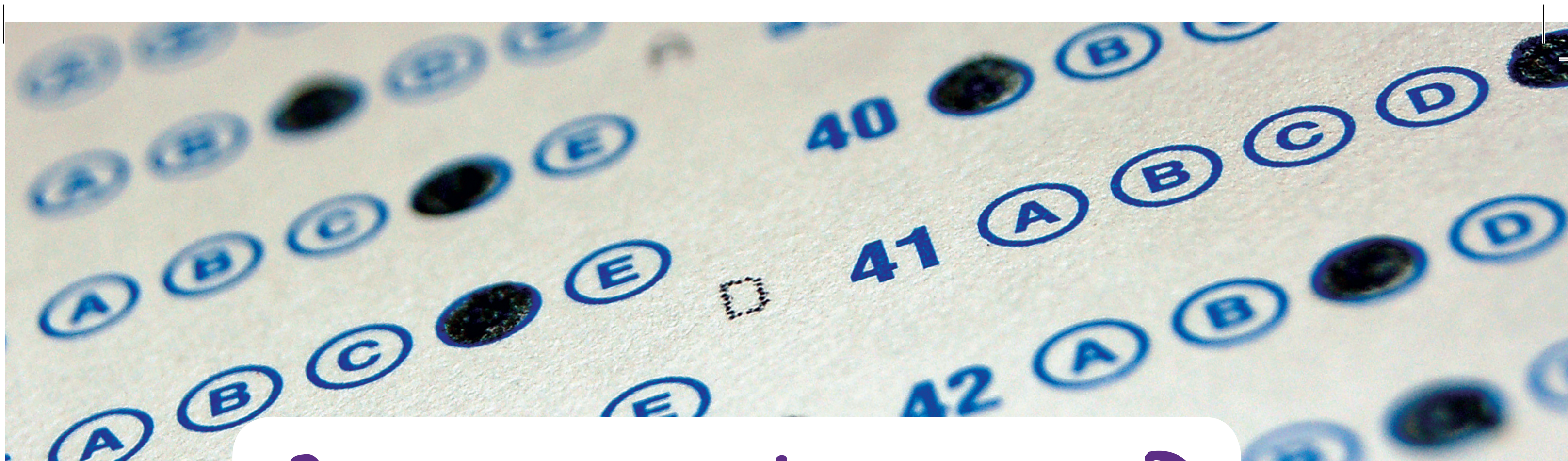
Atividade 6

a. $2^x = 256 \rightarrow 2^x = 2^8 \rightarrow x = 8$

b. $5^x = 125 \rightarrow 5^x = 5^3 \rightarrow x = 3$

c. $5.4^x = 80 \rightarrow 4^x = 80/5 \rightarrow 4^x = 16 \rightarrow 4^x = 4^2 \rightarrow x = 2$

d. $5.2^x - 3.2^x = 32 \rightarrow 2.2^x = 32 \rightarrow 2^{x+1} = 2^5 \rightarrow x+1 = 5 \rightarrow x = 4$



O que perguntam por aí?

Unesp – 2002

A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático $h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t}$, com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi:

a. 1
b. 2
c. 4
d. 8
e. 10

Resposta: Letra E.

Comentário: O instante $t = 0$ é o momento em que o golfinho saiu da água, e o instante $t = T$ é o exato momento em que o golfinho retorna à água. Nesses dois momentos, a altura do golfinho em relação ao nível da água é igual a zero, pois não está nem sob e nem sobre a água. Com isso, temos que:

$4t - t.2^{0,2t} = 0$

$t.(4 - 2^{0,2t}) = 0$

Temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: $t = 0$ (Já esperávamos por essa possibilidade, pois é o momento inicial em que o golfinho sai da água para efetuar o salto.)

2ª possibilidade: $4 - 2^{0,2t} = 0$

Assim, $2^{0,2t} = 4$

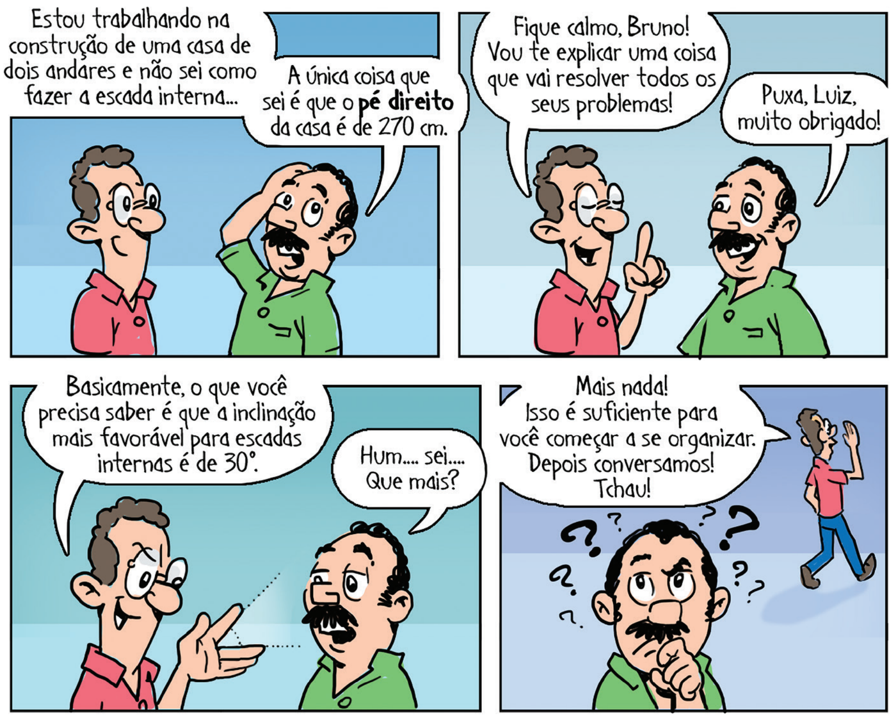
$2^{0,2t} = 2^2$

Logo, $0,2t = 2$

Então, $t = \dfrac{2}{0,2} = 10$ segundos.

Trigonometria do triângulo retângulo

Para início de conversa...



Pé direito

É a altura entre os dois andares.

Você conhece alguém que já passou por esse problema? Será que Bruno tem, de fato, a informação de que precisa para solucionar o problema? Saber que a inclinação ideal para uma escada interna é de 30º e que o pé-direito da casa é de 270 cm, é suficiente para calcular o comprimento da escada?

Nesta unidade, você aprenderá a utilizar o triângulo retângulo para resolver problemas do cotidiano, trabalhar com as razões trigonométricas no triângulo retângulo e utilizará os teoremas do seno e cosseno em situações diversas.

Objetivos de aprendizagem

- Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°
- Resolver problemas do cotidiano, envolvendo as razões trigonométricas.
- Utilizar os teoremas do seno e do cosseno, para resolver problemas variados.

Seção 1

O Triângulo Retângulo e as Razões Trigonométricas

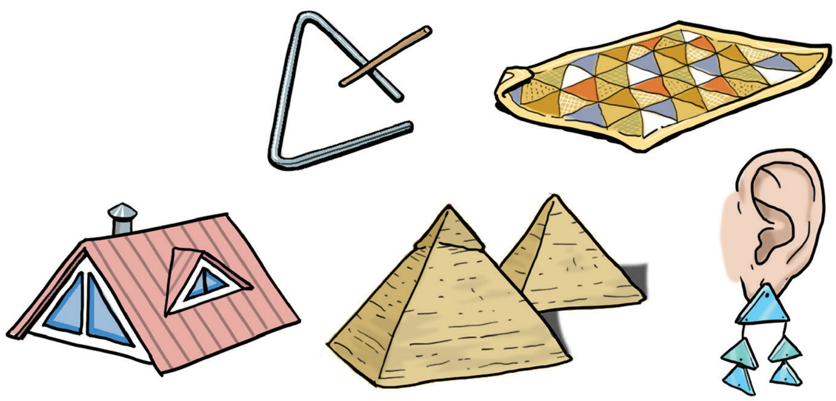
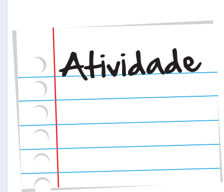


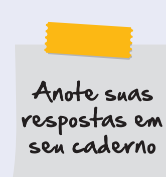
Figura 1: Alguns exemplos do uso de triângulos no nosso dia a dia. Podemos perceber que esta figura geométrica aparece em várias situações desde construções, maquetes a brincos e instrumentos musicais.

Se observarmos o ambiente a nossa volta neste momento, poderemos identificar várias formas geométricas, dentre elas, o triângulo. Vamos tentar?

Interrompa sua leitura nesse momento. Olhe ao redor. Se quiser, levante-se e dê uma volta pelo lugar onde você está. Quantos triângulos você consegue observar? Você poderia dizer que todos eles têm as mesmas características ou você identifica alguma diferença entre eles? Se quiser, copie a tabela a seguir em seu caderno ou em uma folha à parte, para ajudar em sua investigação.

Triângulo	Quantidade observada	Onde encontrei?	Característica
Tipo 1			
Tipo 2			





Agora veja a definição a seguir:

Um triângulo que possui um ângulo de 90º (reto) é chamado de Triângulo Retângulo.

Triângulos retângulos são figuras geométricas muito mais comuns no nosso dia a dia do que imaginamos. Eles estão presentes nas mais diferentes situações. A figura abaixo mostra algumas delas. Será que algum dos objetos mostrados é igual a um dos triângulos que você encontrou?

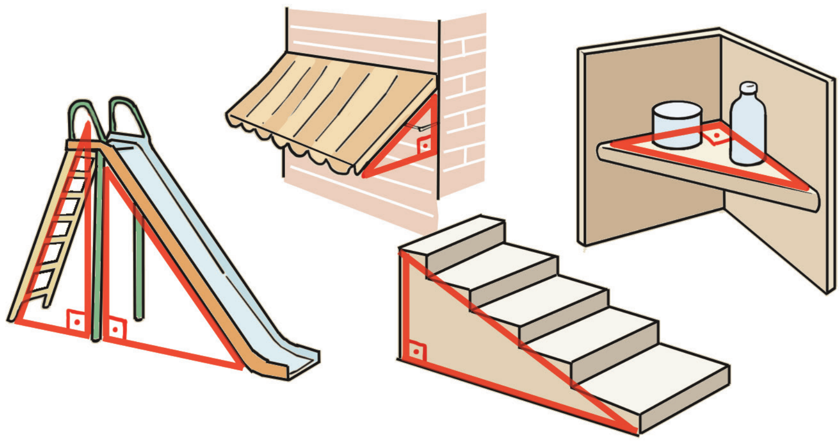
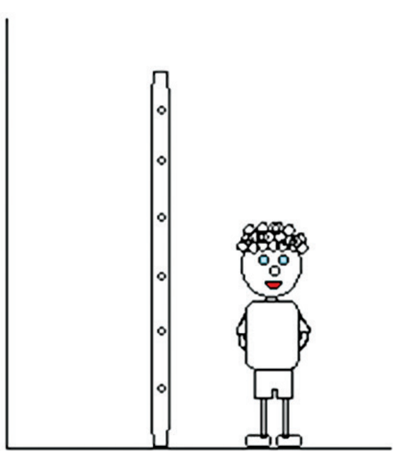


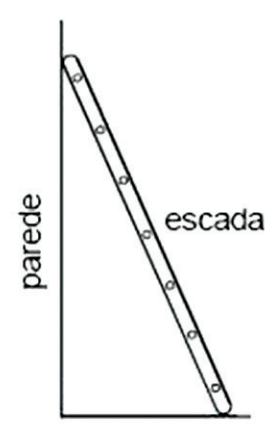
Figura 2: **Alguns exemplos de objetos que possuem o formato ou que nos permitem enxergar triângulos retângulos. Você não acha que esses triângulos são muito mais comuns do que você imaginava?**

Além de estarem presentes em nossas casas, nosso trabalho, em ambientes fechados e abertos, triângulos retângulos podem nos ajudar a resolver problemas importantes para nossa vida diária, tais como o do pedreiro Bruno.

Mas de que forma isso poderia acontecer?

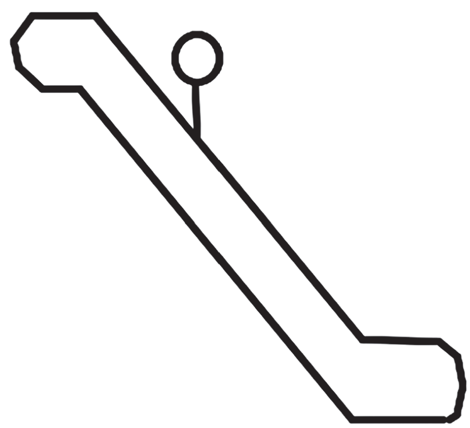
Observe a imagem a seguir. Na primeira figura, um homem irá apoiar uma escada de madeira em uma parede. A figura ao lado, mostra como a escada fica. Você nota a presença de alguma figura geométrica?





Você consegue observar a mesma figura nesta imagem?

E nesta representação de uma escada rolante? Ficou mais difícil?



Se prestarmos atenção aos triângulos retângulos, verificaremos que os ângulos de 30º, 45º e 60º são muito comuns.

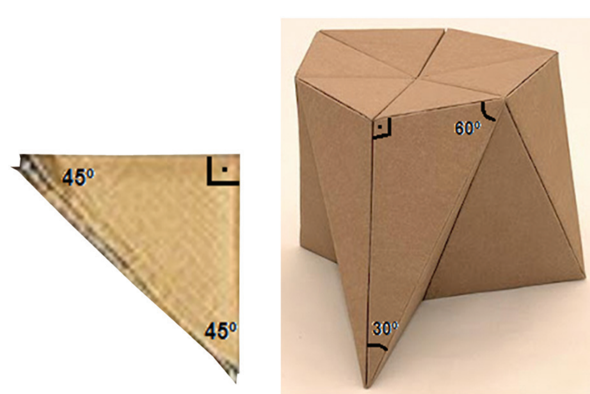


Figura 3: Um guardanapo de pano, dobrado em quatro partes, determina um triângulo retângulo, contendo o ângulo de 45º. Da mesma forma, o origami exibe alguns triângulos. Em destaque, um triângulo retângulo com os ângulos de 30º e 60º.

Tal como a atividade anterior, na figura a seguir, podemos perceber a presença de um triângulo retângulo que vai nos auxiliar a entender melhor como Bruno vai solucionar esse problema.

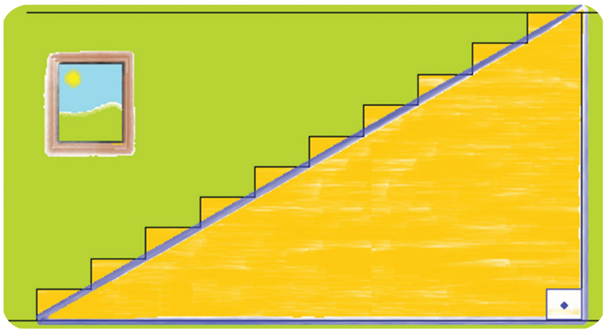


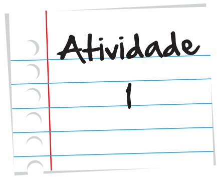
Figura 4: **Com essa figura, fica fácil ver o triângulo retângulo, fica fácil ver que o pé-direito da casa é um dos lados do triângulo e que o comprimento da escada é o outro lado, certo? Mas ainda não ficou claro como essas informações vão ajudar Bruno a descobrir qual o tamanho da escada que deve construir!**

Diante disso, vamos entender de que forma a **trigonometria** aplicada nesses casos pode nos ajudar a resolver o problema de Bruno.

Trigonometria

É um ramo da Matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Para isso, vamos fazer a atividade a seguir.

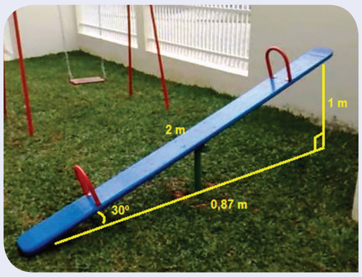


Observe os triângulos abaixo e faça o que se pede:

Todos são triângulos ____________________, pois possuem um ângulo de 90º. Além disso, em todos há um ângulo de 30º.

Calcule o quociente entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e a medida do oposto ao ângulo de 90º em cada um dos triângulos.

a.



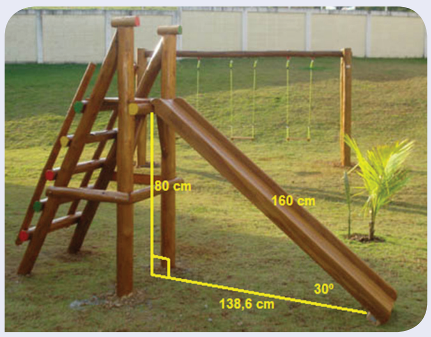
Atividade 1

O lado oposto ao ângulo de 30º mede ______________. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede ______________. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede ________________.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{\textit{lado oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\textit{lado oposto ao ângulo de } 90^\circ} = \_\_\_\_\_$$

b.



O lado oposto ao ângulo de 30º mede ___ ____. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede _____. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede _____.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

Com essa atividade, percebemos que a razão (quociente) entre o lado do triângulo oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao de 90º tem sempre o mesmo valor. Esse valor é ______________.

Anote suas respostas em seu caderno

Observe a figura:

Você sabia que nos triângulos retângulos, o lado que se opõe ao ângulo de 90º (ângulo reto) é chamado de Hipotenusa e os demais lados são chamados de Catetos? Como há dois catetos no triângulo, um deles estará em uma posição oposta ao ângulo agudo x e, por isso, será chamado de cateto oposto e o outro será o cateto adjacente (vizinho) ao ângulo.

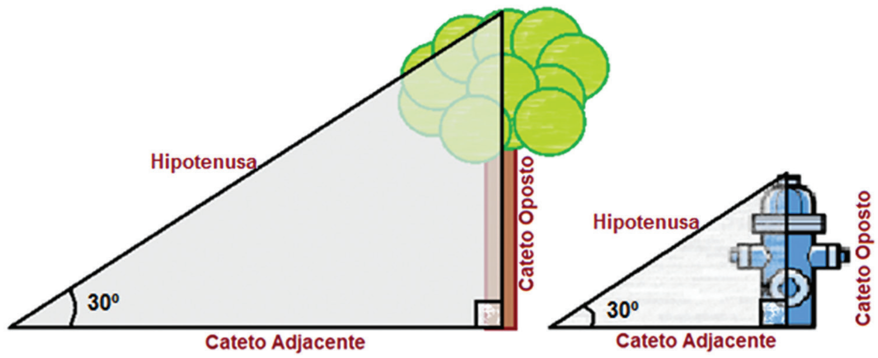


Figura 5: Representações de triângulos retângulos, seus catetos e a hipotenusa. Utilizamos nas duas figuras o ângulo de 30º, mas os nomes dos lados são usados em quaisquer triângulos retângulos.

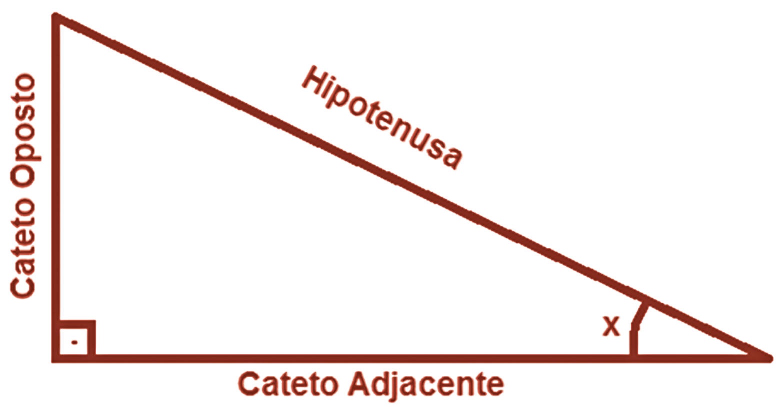


Figura 6: Triângulo retângulo, a hipotenusa e os catetos. O ângulo de 30º foi substituído pelo ângulo x que representa qualquer medida de ângulo.

Pessoal, acho que agora já temos todas as informações necessárias para auxiliar nosso amigo Bruno. Naquela ocasião, vimos que a escada deveria ter uma inclinação de 30º em relação ao solo e que o pé direito da casa (a altura entre os andares da casa) era de 270 cm. Sendo assim, temos a seguinte figura:

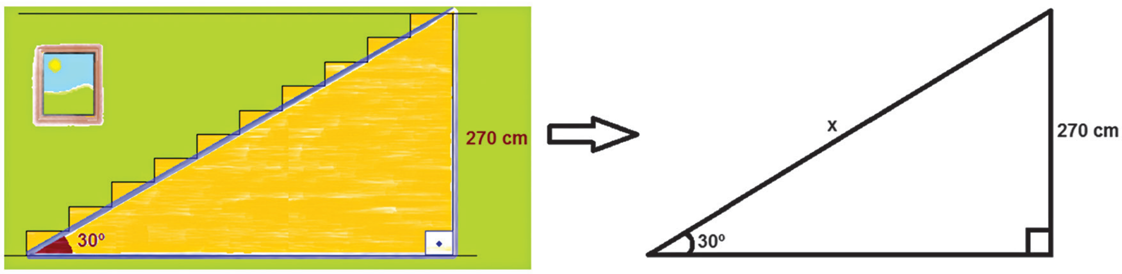


Figura 7: A escada a ser construída por Bruno, o pedreiro. Nesta figura, vemos um triângulo retângulo com o ângulo de 30º indicado, além do cateto oposto a ele com 270 cm de comprimento.

Podemos verificar que o cateto oposto ao ângulo de 30º é o 270. E o comprimento x é a hipotenusa do triângulo. Como poderemos calcular o comprimento x da escada?

Para resolvermos o problema de Bruno, vamos nos lembrar da atividade 1 onde pudemos trabalhar com triângulos semelhantes a este. Naquela ocasião, percebemos que a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 30º e a hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º) sempre vale $\frac{1}{2}$.

Vamos utilizar essa dica e as informações dadas no problema para calcularmos a medida x:

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{270}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{270}{x}$$

$$x = 270 \cdot 2$$

$$x = 540\ cm$$

Com isso, verificamos que a escada terá 540 cm de comprimento. Este valor será aproximadamente a medida do corrimão da escada. Além disso, se pensarmos que cada degrau tem 18 cm de altura, então a escada terá 270 ÷ 18 = 15 degraus.

Agora, desejamos um bom trabalho ao nosso amigo Bruno e vamos seguir o nosso caminho.

Vimos até o momento que a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 30º e a hipotenusa é sempre igual a ½. Mas, não é só o ângulo de 30º que tem esse privilégio. Todos os ângulo**s agudos** possuem esta característica. Porém, cada um deles possui um valor diferente para esta razão.

Ângulo agudo

Um ângulo agudo é aquele que é menor que 90º.

Pelo que estamos vendo, isso é mais importante do que imaginávamos. E é verdade. Essa razão entre o cateto oposto e a hipotenusa é tão importante que recebe um nome específico para isso*: SENO*. Portanto, quando quisermos nos referir à razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um ângulo, estaremos fazendo referência ao SENO deste ângulo.

Sendo assim, vamos conhecer alguns valores desta razão. Que tal os senos dos ângulos de 45º e de 60º? Afinal, vocês se lembram que esses ângulos são muito comuns no nosso dia a dia, não é?!

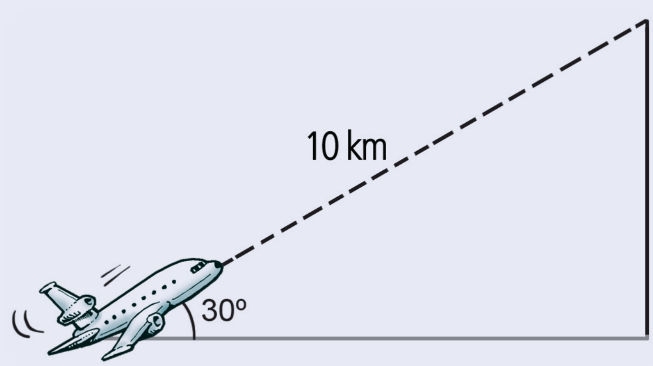
Ângulo	Seno
30º	$\frac{1}{2}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tabela 1: Nesta tabela, vemos os valores dos senos de 30º, 45º e de 60º. Da mesma maneira que trabalhamos com o ângulo de 30º, podemos agir com os demais ângulos. Ou seja, a razão entre o cateto oposto ao ângulo de 45º, por exemplo, e a hipotenusa vale sempre $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Agora, é sua vez! Resolva os problemas a seguir, utilizando os conhecimentos que adquirimos até agora.

Atividade 2

Um avião levanta voo sob um ângulo de 30º. Depois de percorrer 10 km, a que altura se encontra este avião?



Anote suas respostas em seu caderno

Uma escada de 8 metros de comprimento está apoiada em um ponto de uma parede a 4 metros de altura. Qual das opções abaixo traz o ângulo de inclinação da escada em relação ao chão?

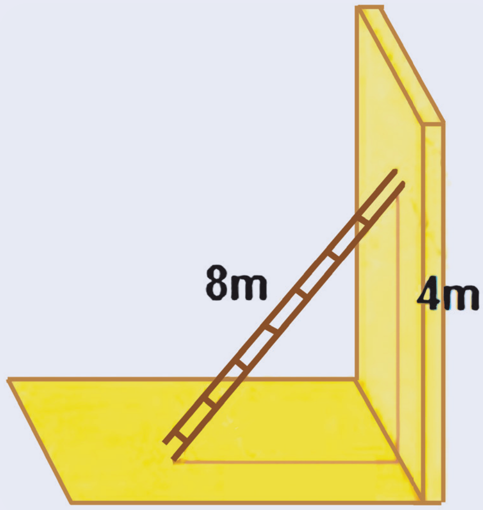
Atividade 3

(a) 30º

(b) 45º

(c) 60º

(d) 90º



Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Estamos cada vez melhores!

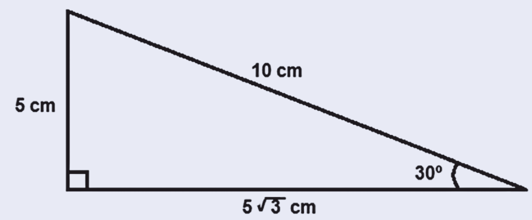
Mas uma curiosidade está aparecendo agora: será que existem outras razões nesses triângulos retângulos? Por exemplo, a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa? Ou a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente?

Vamos dar uma olhadinha nisso? Observe os triângulos abaixo e faça a atividade a seguir:

Atividade 4

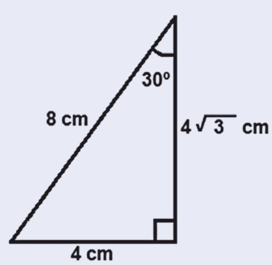
Complete as lacunas de acordo com cada figura.

a.



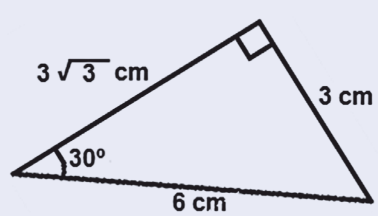
- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede _____________. O cateto adjacente a este ângulo mede _____________ e a hipotenusa mede ______________.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração __________________.
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração ____________________.

b.



- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede _____________. O cateto adjacente a este ângulo mede _____________ e a hipotenusa mede ______________.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração __________________.
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração ____________________.

c.



- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ____________. O cateto adjacente a este ângulo mede ____________ e a hipotenusa mede ____________.

- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração _________________.

- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração ___________________.

Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

Ora, ora... Pelo que estamos percebendo, esses valores também são recorrentes. E será que essas razões também possuem um nome especial? É claro que sim!

A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa chama-se *COSSENO*. Já a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente chama-se *TANGENTE*.

Isto é:

Importante

seno do ângulo x = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

cosseno do ângulo x = $\dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

tangente do ângulo x = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

Além disso, assim como ocorre com o seno, os ângulos de 45º e 60º também possuem seus valores específicos. Veja no quadro a seguir:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 2: Aqui são mostrados os valores de seno, cosseno e tangente. Esses valores são muito importantes. Tenha muita atenção!

Multimídia

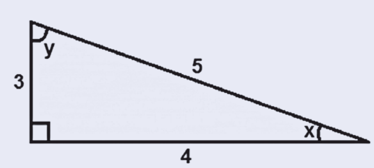
Clique neste *link* para assistir a um vídeo que mostra a demonstração matemática dos valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º. Vale a pena conferir!

http://www.youtube.com/watch?v=AllG-nig6qQ

Agora, vamos ver como podemos utilizar esses valores e o que aprendemos até agora para resolvermos as mais diversas atividades.

Atividade 5

Observe o triângulo abaixo e indique os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos abaixo:



Seno de x =

Cosseno de x =

Tangente de x =

Seno de y =

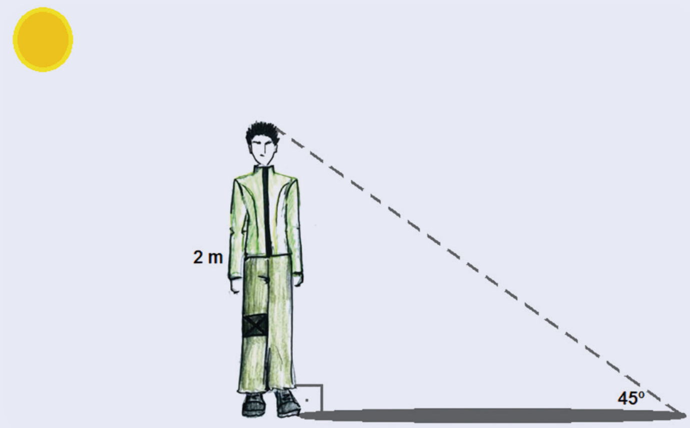
Cosseno de y =

Tangente de y =

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

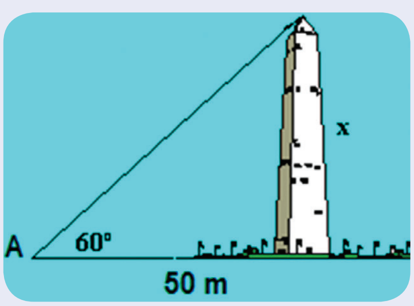
Uma pessoa de 2 metros de altura está exposta ao sol. Os raios solares incidem no solo sob um ângulo de 45º, como mostrado na figura. Qual a medida da sua sombra projetada no solo?



Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

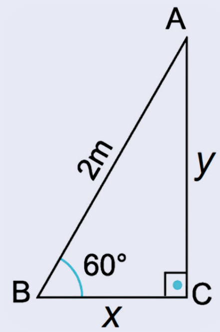
De um ponto A, a 50 metros de distância, uma pessoa enxerga o topo de um obelisco, segundo um ângulo de 60º. Qual é a altura desse obelisco?



Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

A figura a seguir possui duas medidas desconhecidas. Utilize as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) para determiná-las.



Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem, pessoal. Verifiquem as respostas no final desta unidade.

Pelo visto, este assunto já está na ponta da língua. Mas se ainda não estiver, a sugestão é procurar fazer os exercícios da seção "O que perguntam por aí?".

Surge, agora, mais uma curiosidade: essas razões trigonométricas só podem ser usadas em triângulos retângulos? Seria muito interessante, se conseguíssemos trabalhar com a trigonometria em outros tipos de triângulos, não acham? Então, vamos seguir para a próxima seção onde falaremos exatamente deste assunto.

Seção 2
A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos

Até agora, vimos como lidar com as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Mas será que só podemos trabalhar com a Trigonometria em triângulos deste tipo? Afinal, nem sempre estaremos diante de triângulos retângulos. Sendo assim, como faremos? Observe a situação a seguir:

Dona Clotilde quer vender o seu terreno, mas para isso, quero saber qual a sua área, pois isso influenciará diretamente no preço que cobrará por ele. Vejamos o terreno de Dona Clotilde.

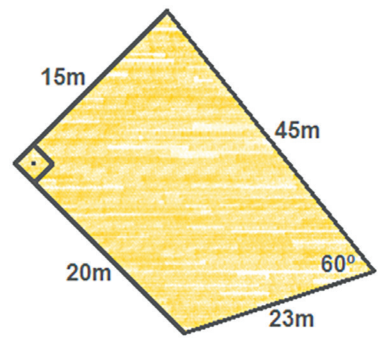


Figura 8: Terreno de Dona Clotilde em forma de um quadrilátero irregular. Podemos visualizar um ângulo reto e outro ângulo de 60º.

Para resolver o problema, Dona Clotilde dividiu seu terreno em duas partes. Vamos observar na figura a seguir que a área 1 é um triângulo retângulo e que, por isso, sua área pode ser calculada, multiplicando-se um cateto pelo outro e dividindo-se por 2. Assim:

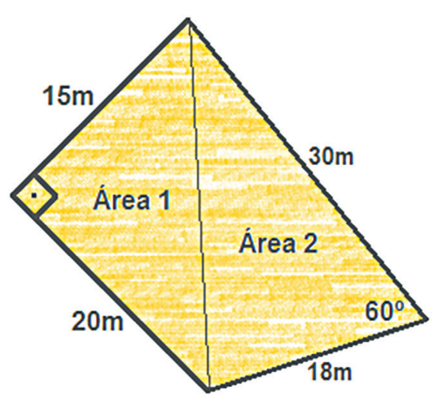


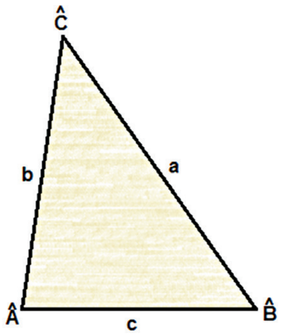
Figura 9: O terreno está dividido em duas áreas. Uma delas é um triângulo retângulo e o outro é um triângulo qualquer.

Cálculo da área 1:

$$\frac{20.15}{2} = \frac{300}{2} = 150m^2$$

Para o cálculo da área 2, Dona Clotilde utilizou uma fórmula um pouco diferente. Nesta fórmula, levamos em consideração dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles. Ou seja, Área = ½ (b.c.sen Â). Com isso, bastou multiplicar 30 por 18 e pelo seno de 60º e, em seguida, dividir por 2 para obter a área 2 no valor aproximado de 234m². Totalizando, portanto, uma área de 150 + 234 = 384m².

A fórmula utilizada para resolver o problema de Dona Clotilde permite-nos calcular a área de um triângulo qualquer. Além disso, podemos utilizar qualquer um dos três ângulos para isso, desde que usemos os lados correspondentes do triângulo e o resultado será o mesmo! Vejamos:



$$área=\frac{1}{2}\ (b.c.sen\hat{A})$$

$$área=\frac{1}{2}\ (a.b.sen\hat{C})$$

$$área=\frac{1}{2}\ (a.b.sen\hat{B})$$

Figura 10: **Um triângulo qualquer como seus respectivos lados e ângulos. Notemos que não há necessariamente a presença de um ângulo reto ou mesmo dos ângulos notáveis (30º, 45º ou 60º).**

Em todos esses casos, a área tem o mesmo resultado. Portanto, podemos dizer que:

$$\frac{1}{2}\ (b.c.sen\hat{A})=\frac{1}{2}\ (a.b.sen\hat{C})$$

$$b.c.sen\hat{A}= a.b.sen\hat{C}$$

$$c.sen\hat{A}=a.sen\hat{C}$$

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Se trabalharmos com a igualdade $\frac{1}{2}\ (b.c.sen\hat{A})=\frac{1}{2}\ (a.c.sen\hat{B})$, conseguiremos a expressão:

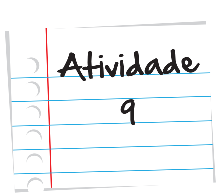
$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$$

Sendo assim,

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Esta razão entre o lado e o seno do seu ângulo oposto é constante para todos os lados do triângulo. A esta igualdade, damos o nome de *Lei dos Senos*.

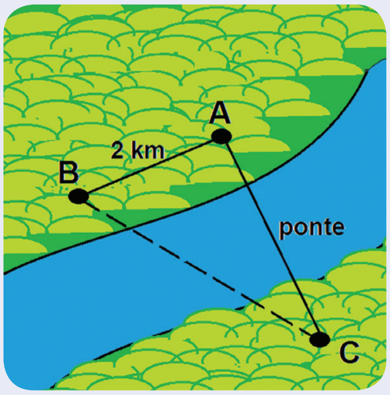
Vamos praticar um pouco?



Uma contrutora quer colocar uma ponte ligando os pontos A e C do mapa abaixo. Mas, precisava calcular a distância entre esses pontos. Dispunha apenas de um **teodolito**. Do ponto A, caminhou até o ponto B, na mesma margem a 2 quilômetros de distância.

Teodolito

é um instrumento óptico, utilizado para medir ângulos verticais e horizontais.



Atividade 9

Com o teodolito, calculou o ângulo $C\hat{A}B = 75^{\circ}$ e $C\hat{B}A = 60^{\circ}$.

Utilize a Lei dos Senos para calcular a medida aproximada da ponte AC. (Considere $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$)

Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

Que tal construirmos um Teodolito? Assim, poderemos entender melhor seu funcionamento, além de aprender mais sobre Trigonometria numa exepriência bem divertida. Acesse o site e assista ao vídeo explicativo.

http://www.youtube.com/watch?v=jivQJZlbCBY

Outra importante relação da Trigonometria é a *Lei dos Cossenos*. Essa lei relaciona os três lados de um triângulo e apenas um único ângulo.

Vamos tentar entender como ele funciona?

Se estivermos diante de um triângulo retângulo, poderemos utilizar o Teorema de Pitágoras para a relação entre os seus lados.

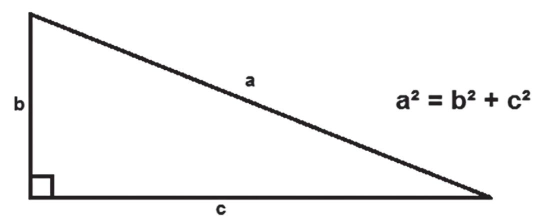


Figura 13: **O triângulo retângulo, seus lados e o Teorema de Pitágoras**

Porém, se o ângulo reto der lugar a um ângulo agudo, certamente a hipotenusa sofrerá uma redução e, a partir desse momento, o Teorema de Pitágoras não funcionará mais. Diante disso, precisaremos fazer uma pequena "correção" no Teorema de Pitágoras, ajustando-o para que possamos relacionar os lados corretamente.

Esse ajuste leva em consideração o ângulo que ficou no lugar do ângulo reto. Da seguinte forma:

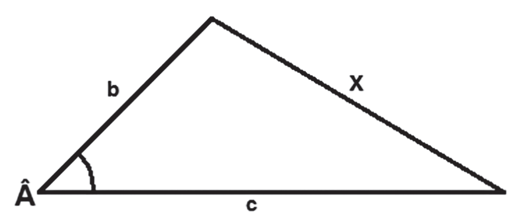


Figura 14: **O ângulo reto foi reduzido a um ângulo agudo e o lado a também diminuiu de tamanho, tornando-se o lado x.**

A relação que podemos criar entre os lados é:

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

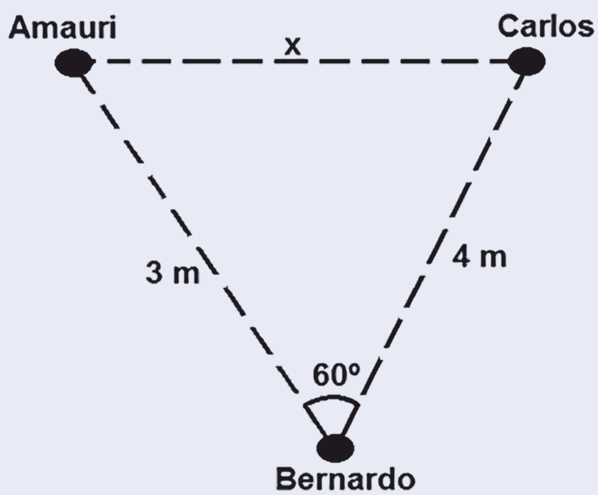
Podemos notar que a expressão "$- 2.b.c.\cos\hat{A}$" é o fator de correção que havíamos comentado anteriormente. Essa relação recebe o nome de **Lei dos Cossenos**.

Você quer saber como fizemos para deduzir esta fórmula? Acesse o *link* a seguir para entender como chegamos a essa relação. Nele, você vai encontrar um vídeo com todo o passo a passo. Veja!

http://www.youtube.com/watch?v=3gUhDWlqOB8

Atividade 10

Três amigos estão sentados em um campo. Bernardo está a 3 metros de distância de Amauri e a 4 metros de distância de Carlos. Além disso, consegue observá-los sob um ângulo de 60º. (Observe a figura)



Como poderemos determinar a distância entre Amauri e Carlos?

Anote suas respostas em seu caderno

Resumo...

Nesta aula, estudamos sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Estas são relações que são muito importantes em todas as ações matemáticas que você vai vivenciar daqui por diante. Por isso, não deixe de realizar cuidadosamente todas as atividades que propusemos. Avalie com cuidado o seu aprendizado e, se necessário, busque auxílio.

- As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente são formas de relacionar lados e ângulos de um triângulo retângulo.
- Os ângulos de 30º, 45º e 60º são os mais comuns e, por isso, procuramos sempre nos lembrar dos seus respectivos valores de seno, cosseno e tangente. Esses valores estão nesta tabela:

	Seno	Co-seno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

- A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos possibilitam relacionar lados e ângulos de um triângulo qualquer, isto é, sem a necessidade de trabalharmos com triângulos retângulos.
- A Lei dos Senos é definida por . $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$
- A Lei dos Cossenos é definida por: $x^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A}$.

Veja ainda

Para quem é curioso e gosta de conhecer aplicações diferentes dos assuntos que aprendemos nesta unidade, temos algumas sugestões que podem enriquecer nosso aprendizado.

Os vídeos do Novo Telecurso são muito interessantes, pois trazem situações práticas e discutem inclusive a demonstração das fórmulas aqui apresentadas. Acesse os vídeos e saiba mais!

Trigonometria no triângulo retângulo:

- http://www.youtube.com/watch?v=nT2A4Ehf1kU

Lei dos Senos

- http://www.youtube.com/watch?v=-rSvHD1DYXo

Lei dos Cossenos

- http://www.youtube.com/watch?v=v5_CXEI4TLs&feature=plcp

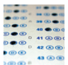
Referências

Livros

- IMENES, L.M., TROTTA, F., JAKUBOVIC, J. **Matemática Aplicada – 2º grau**, Ed. Moderna.
- LOBO DA COSTA, N.M. **Funções Seno e Cosseno***:* Uma Sequência de Ensino a Partir dos Contextos do Mundo Experimental.e do Computador. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 1997.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

Resposta: Letra C

Respostas das Atividades

Atividade 1

Todos são triângulos retângulos, pois possuem um ângulo de 90º. Além disso, em todos há um ângulo de 30º.

O lado oposto ao ângulo de 30º mede 1 metro. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede 0,87 m. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede 2 metros.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{lado\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ de\ 30^0}{lado\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ de\ 90^0}=\frac{1}{2}$$

O lado oposto ao ângulo de 30º mede 80 cm. Já o lado adjacente a este mesmo ângulo mede 138,6 cm. Não confunda com o lado oposto ao ângulo de 90º que mede 160 cm.

Agora, calcule a razão (quociente) entre a medida do lado oposto ao ângulo de 30º e o oposto ao ângulo de 90º.

$$\frac{lado\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ de\ 30^0}{lado\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ de\ 90^0}=\frac{80}{160}=\frac{1}{2}$$

Atividade 2

Segundo a figura do problema, a trajetória retilínea do avião faz um ângulo de 30º com a horizontal. Sendo assim, formamos um triângulo retângulo, formado pela trajetória, a altura do avião e a horizontal com este ângulo de 30º.

Dessa forma, a trajetória de 10 quilômetros representa a hipotenusa deste triângulo e a altura funciona como cateto oposto ao ângulo de 30º. Portanto, podemos usar o seno do ângulo de 30º para calcular essa altura.

Logo,

$$sen30^0=\frac{h}{10}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{h}{10} \qquad 2h=10\Rightarrow h=5$$

h= 5km ou 5000 metros

Atividade 3

Neste problema, o triângulo formado pela escada, a parede e o chão possui como hipotenusa comprimento da escada (8 metros). O ângulo solicitado pelo problema encontra-se na parte inferior do triângulo, isto é, o ângulo formado pela escada e o chão.

Respostas das Atividades

Como a escada encosta na parede em um ponto a 4 metros de altura, esta medida representará o cateto oposto ao ângulo requisitado. Então, se temos a hipotenusa e o cateto oposto, poderemos trabalhar com o Seno.

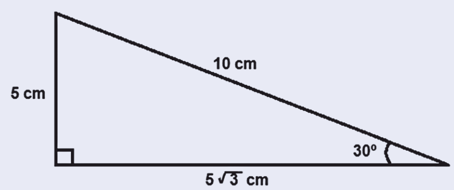
Com isso,

$$senX = \frac{altura\,do\,muro}{comprimento\,da\,escada} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Percebemos, portanto, que o seno do ângulo X vale ½. Imediatamente, vamos consultar nossa tabela para verificar qual ângulo possui este valor para o seu seno. E este ângulo é o de 30º.

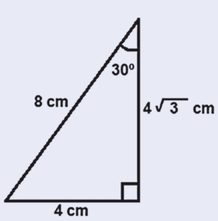
Atividade 4

a.



- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede ___5cm___. O cateto adjacente a este ângulo mede _5√3 cm____ e a hipotenusa mede __10 cm____.
- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração $\frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. .
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (racionalizando o denominador).

b.



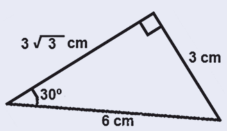
Respostas das Atividades

- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede __4 cm__. O cateto adjacente a este ângulo mede __$4\sqrt{3}$ cm__ e a hipotenusa mede _8cm_.

- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração $\frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (racionalizando o denominador).

c.



- Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30º mede __3 cm__. O cateto adjacente a este ângulo mede __$3\sqrt{3}$ cm__ e a hipotenusa mede _6 cm_.

- A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração $\frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

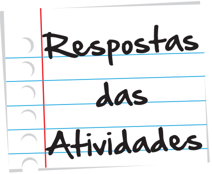
- A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30º pode ser representado através da fração $\frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (racionalizando o denominador).

Atividade 5

Seno de x = 3/5	Seno de y = 4/5
Cosseno de x = 4/5	Cosseno de y = 3/5
Tangente de x = 3/4	Tangente de y = 4/3

Atividade 6

O triângulo formado pela situação descrita no problema nos mostra um ângulo de 45º, onde a altura da pessoa representa o cateto oposto e a projeção da sombra o cateto adjacente a este ângulo. Dessa forma, a tangente, razão trigonométrica que relaciona estes dois lados do triângulo é a mais indicada para solucionar este problema.



Com isso,

$$tg45^\circ = \frac{altura\ da\ pessoa}{sombra} = \frac{2}{x}$$
$$1 = \frac{2}{x}$$
$$x = 2\ metros$$

Atividade 7

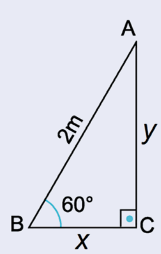
Quando falamos em altura do obelisco, entendemos que é uma medida que faz 90º com o solo. Portanto, um triângulo retângulo com um ângulo de 60º. A altura é o cateto oposto ao ângulo de 60º e a distância de 50 m representa o cateto adjacente ao mesmo ângulo.

Logo, utilizaremos a tangente de 60º para resolver esse problema.

$$tg60^\circ = \frac{altura\ do\ obelisco}{distância\ da\ pessoa} = \frac{x}{50}$$
$$\sqrt{3} = \frac{x}{50}$$
$$x = 50\sqrt{3}\ metros\ de\ altura$$

Se você utilizar a calculadora, verá que esse valor é aproximadamente 86,6 metros de altura.

Atividade 8



Segundo esta figura, o lado x é o cateto adjacente e o lado y é cateto oposto ao ângulo de 60º. Já o lado AB, que mede 2 metros, é a hipotenusa deste triângulo.

Logo, para encontrar o valor de x, iremos utilizar a razão cosseno.

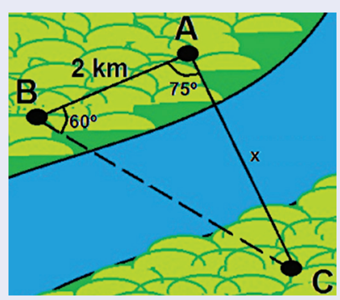
$$cos60^o = \frac{x}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$
$$x = 1$$

Para calcularmos o valor de y, iremos utilizar a razão seno.

$$\text{sen}60^o = \frac{y}{2}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{2}$$
$$y = \sqrt{3}$$

Atividade 9

Neste problema, a situação pode ser descrita pela seguinte figura:



Notamos que há dois lados e os seus respectivos ângulos opostos. Essas informações são necessárias e suficientes para utilizarmos a Lei dos Senos. Vamos ver como fica:

$$\frac{x}{sen60^o} = \frac{2}{sen45^o}$$
$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 1,7}{1,4} = \frac{3,4}{1,4} \cong 2,43km$$

Respostas das Atividades

Atividade 10

Neste problema, devemos estar atentos para os dados que são fornecidos: dois lados e o ângulo formado por eles. Essas informações permitem-nos utilizar a Lei dos Cossenos para encontrarmos a distância entre Amauri e Carlos. Vamos lá:

A distância entre eles será chamada de x; portanto,

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2x3x4xcos30^o$$

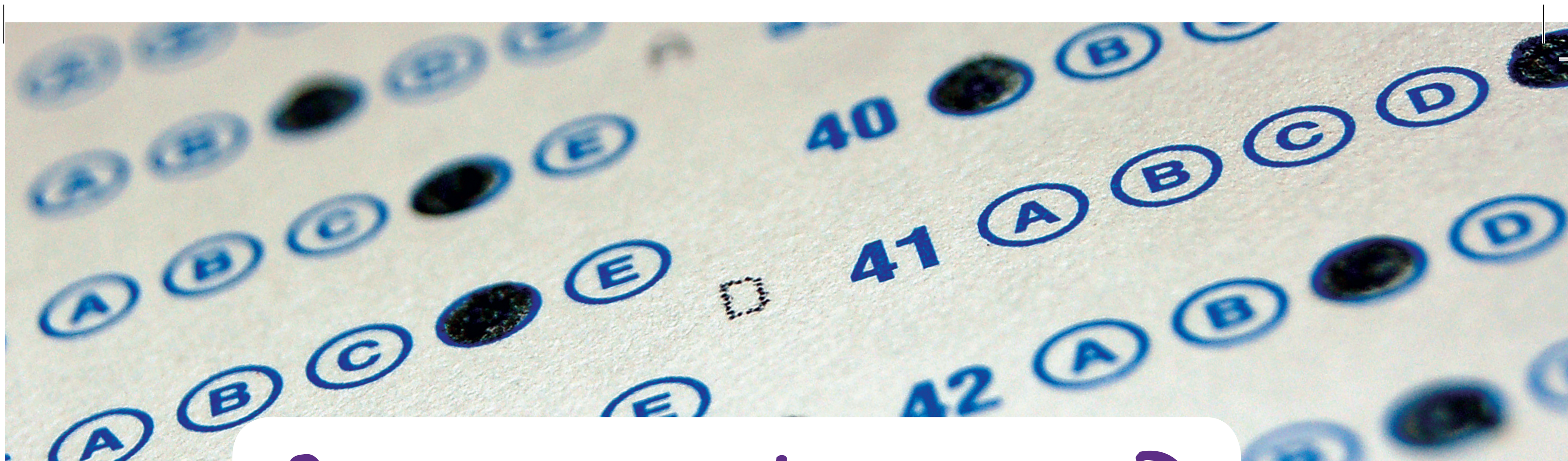
$$x^2 = 9 + 16 - 24\frac{1}{2}$$

$$x^2 = 25 - 12$$

$$x^2 = 13$$

$$x = \sqrt{13}\,metros \cong 3,60m$$

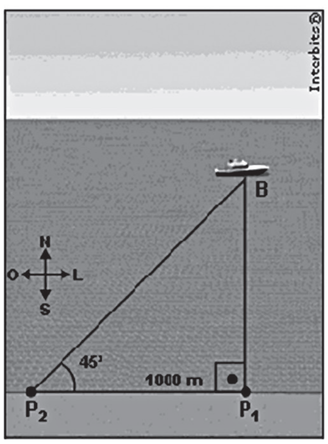
Atenção: Lembre-se de que devemos efetuar as multiplicações antes das adições e subtrações.



O que perguntam por aí?

Questão 1 (UEL – 2011)

Um indivíduo em férias na praia observa, a partir da posição P_1, um barco ancorado no horizonte norte na posição B. Nesta posição P_1, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 90°, como mostrado na figura a seguir.



Ele corre aproximadamente 1000 metros na direção oeste e observa novamente o barco a partir da posição P_2. Neste novo ponto de observação P_2, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 45°.

Qual a distância P_2B aproximadamente?

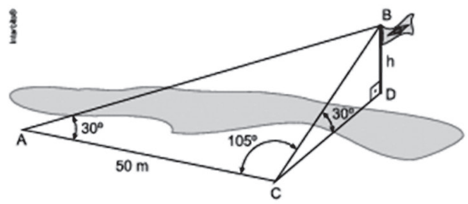
a) 1000 metros
b) 1014 metros
c) 1414 metros
d) 1714 metros
e) 2414 metros

Resposta: Letra C

Comentário: A distância P_2B é a hipotenusa do triângulo. Com isso, usando cos 45º, temos que a medida P_2B vale $1000\sqrt{2}$. Como $\sqrt{2} \cong 1,414$, temos que $1000\sqrt{2} = 1414$ metros.

Questão 2 (Unesp – 2011)

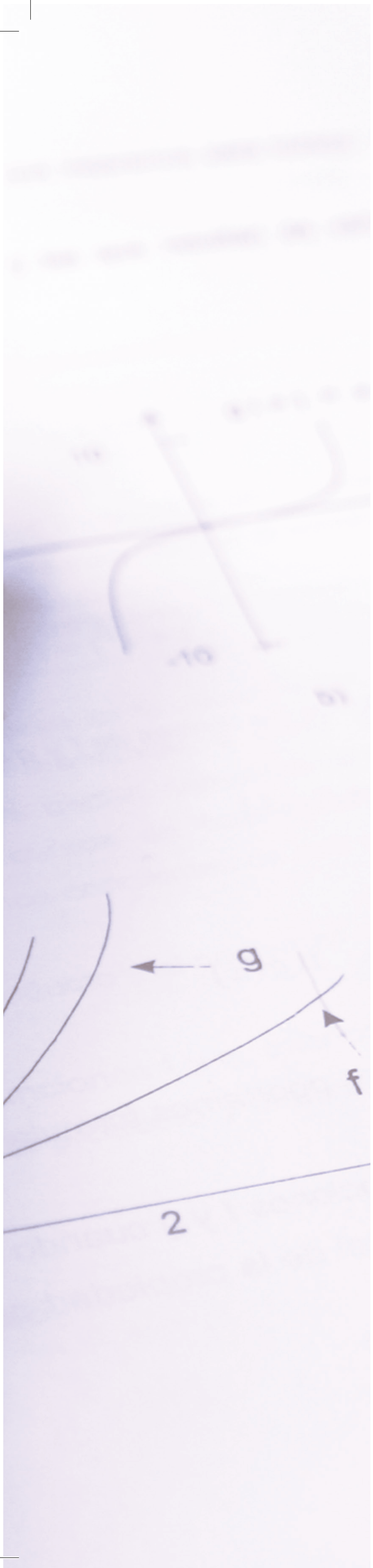
Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos BÂC e BĈD valem 30º, e o AĈB vale 105º, como mostra a figura:



a) 12,5.
b) $12{,}5\sqrt{2}$.
c) 25,0.
d) $25{,}0\sqrt{2}$.
e) 35,0.

Resposta: Letra B

Comentário: O ângulo ABC vale 45º, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo e sempre igual a 180º. Utilizando a Lei dos Senos, conseguimos calcular a medida do segmento BC que é igual a $25\sqrt{2}$ m. Como h é o cateto oposto ao ângulo de 30º e BC é a hipotenusa, usamos o seno de 30º para calcularmos h. Com isso, encontramos $12,5\sqrt{2}$ m.



Função Polinomial do 1º grau – Parte 2

Para início de conversa...

Gráfico de jornal americano mostra como o mundo engordou nos últimos 30 anos

10 de fevereiro de 2011

O *site* do jornal americano The Washington Post publicou um **gráfico** interativo que revela como a população do planeta ganhou peso nos últimos 30 anos.

É possível inclusive ver a situação do Brasil. Basta selecionar o país numa lista que fica no canto direito. Homens e mulheres brasileiros hoje estão com sobrepeso.

Fonte: http://saude.abril.com.br/blogs/emagreca-com-saude/2011/02/10/grafico-de-jornal-americano-mostra-como-o-mundo-engordou-nos-ultimos-30-anos/

Você já reparou que todos os dias nos deparamos com inúmeras informações que envolvem gráficos?

Basta abrir um jornal, uma revista ou pesquisar na Internet que você perceberá que está imerso em um mundo rodeado de informações que são transmitidas através de gráficos.

Mas... você já parou para pensar o que representa um gráfico?

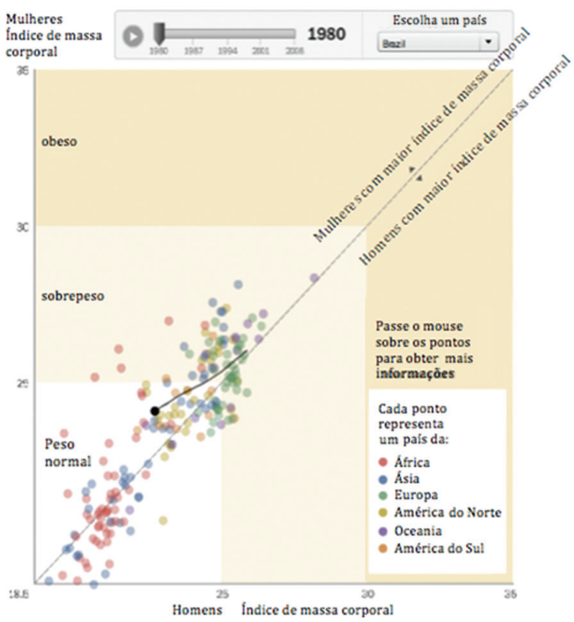
Gráfico

Expressa visualmente dados ou valores numéricos com objetivo de facilitar e dinamizar sua leitura.

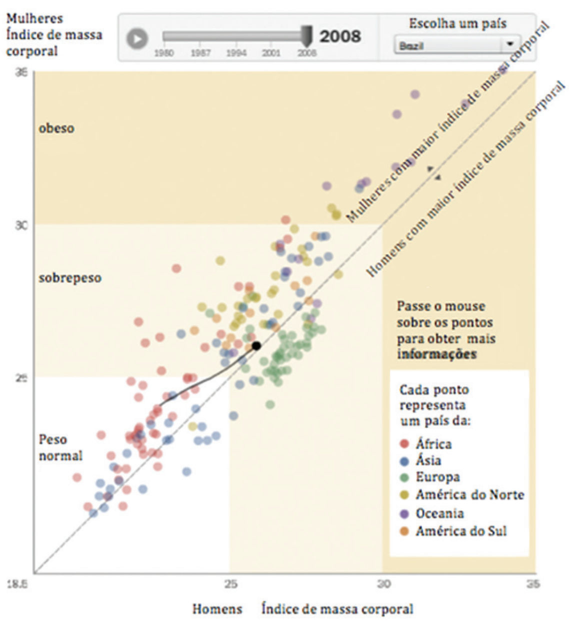
Na matéria do *site* que aparece no início desta unidade, ao clicar em gráfico interativo você pode fazer a simulação do índice de massa corporal de homens e mulheres do mundo inteiro de 1980 até 2008.

Vejamos a situação do Brasil:

Em 1980



Em 2008



IMC

(Índice de Massa Corporal) – fator para a avaliação do peso ideal dos indivíduos. É calculado através do quociente (divisão) entre a massa do indivíduo (em quilogramas) e o quadrado da sua altura (em metros). No site http://dab.saude.gov.br/nutricao/ , é possível calcular o seu IMC e saber se o seu peso é ou não ideal.

Ao analisar esses dados, o que você pode concluir?

Atividade

Anote suas respostas em seu caderno

Nesta unidade, continuaremos estudando as funções afins, entendendo como é possível representá-las por meio de gráficos.

Objetivos de Aprendizagem

- Interpretar gráficos de funções afins;
- Construir gráficos de funções afins;
- Resolver situações do dia a dia que envolvam gráficos de funções afins.

Seção 1
Funções em toda parte

No estudo das funções e da Matemática em geral, é sempre interessante que o estudante associe os conceitos estudados em sala com o seu cotidiano. A vivência de situações práticas constitui um importante apoio no processo ensino-aprendizagem, sendo facilitadora da assimilação de conteúdos. Por exemplo, imagine que você foi ao mercado comprar carne, que está em oferta, e decide comprar alcatra que está custando R$9,00 o quilo. Como determinar uma maneira de se calcular o valor a ser pago por uma quantidade qualquer de alcatra?

Como vimos na unidade anterior, esse tipo de problemática é resolvido através da função afim. Você já consegue facilmente perceber que ao multiplicarmos o preço da carne (R$9,00) pela quantidade de carne (em quilogramas) que queremos comprar, obteremos o valor total a ser pago, certo?

Desta maneira, podemos escrever $f(x) = 9x$ como a função que representa a situação descrita no problema: o valor total a ser pago $f(x)$ em função da quantidade x (em quilograma) de alcatra cujo quilograma custa 9 reais.

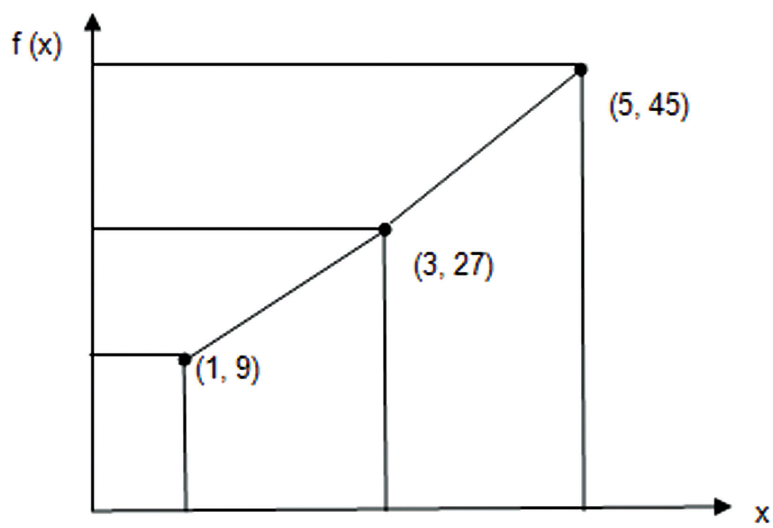
Você percebeu que estamos representando de duas formas distintas uma mesma situação real? Na primeira vez, descrevemos a situação em linguagem natural e na segunda, na forma de linguagem algébrica (através da função afim).

Além dessas duas maneiras, podemos também representar essa mesma situação, através da tabela de valores e através de gráfico.

x	f(x) = 9x
1 kg	R$ 9,00
3,5 kg	R$ 31,50
5,25 kg	R$ 47,25

Para construirmos uma tabela, basta escolhermos um valor para uma das variáveis (x ou f(x)) e determinarmos o valor da outra variável através da sua lei de formação (nesse caso f(x) = 9x). No nosso exemplo, analisando a 1ª linha temos: Se compramos 3,5 kg pagamos R$31,50 (9x3,5) pela carne ou, se pagamos R$31,50 pela carne significa que estamos comprando 3,5 kg (31,50÷9). Já se comprarmos 5,25 kg de carne, pagaremos R$ 47,25 (5,25x9) e assim por diante.

Podemos exibir as informações contidas na tabela acima no plano cartesiano, marcando pontos da forma (x,f(x)).



A escolha de outros valores para x implica em marcarmos novos pontos do plano cartesiano. Veremos mais adiante que os pontos da forma (x, f(x)), com f(x) = ax + b (uma função polinomial do 1º grau), estão alinhados.

No exemplo a seguir, vamos entender melhor como podemos interpretar dados em um gráfico.

Exemplo: O gráfico representado na Figura 1 demonstra a evolução de casos da influenza A (vírus H1N1).

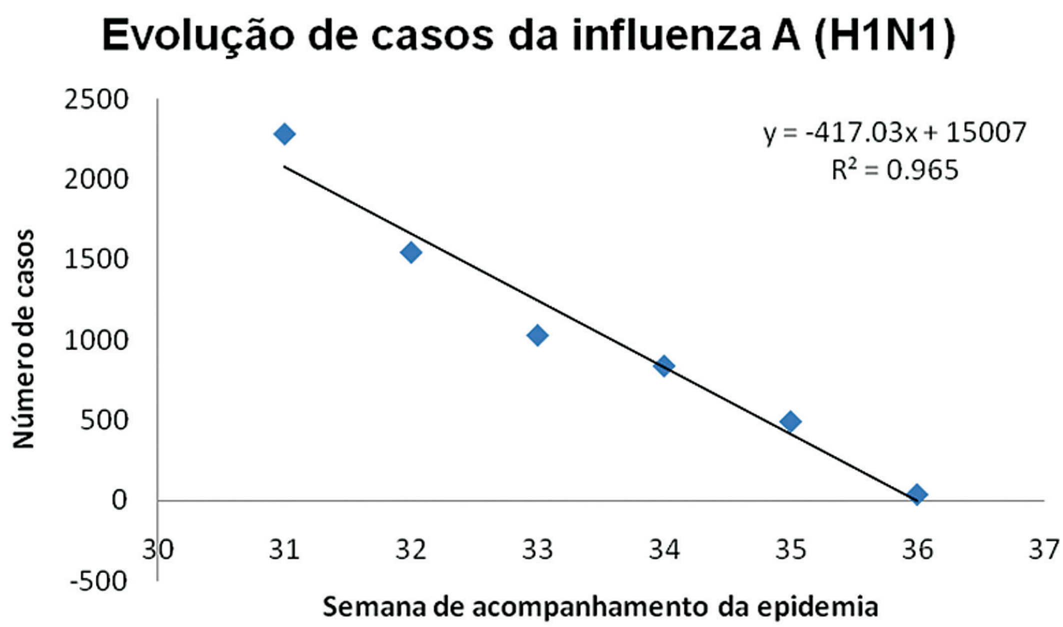
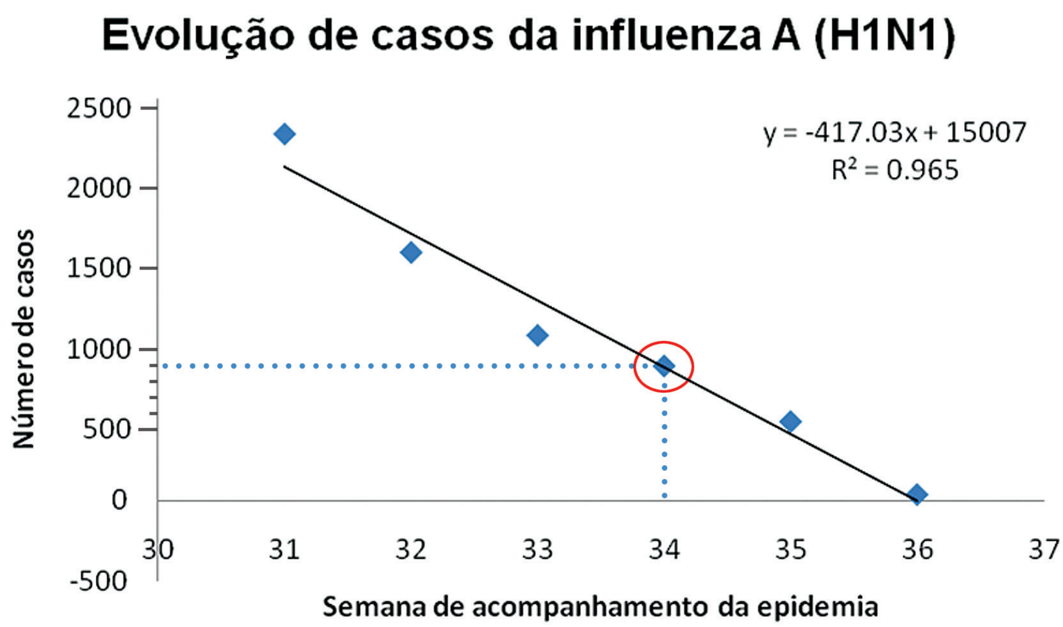


Figura 1: Gráfico do número de casos do vírus H1N1, ao longo das semanas de acompanhamento da epidemia. A representação foi aproximada pelo gráfico de uma função afim (observe que alguns pontos estão fora da reta).

O que podemos dizer sobre os números de casos na 34ª semana?

Observe que são dois eixos: um vertical que descreve o número de casos e um horizontal que relata as semanas de acompanhamento da epidemia.

O gráfico relaciona, então, essas duas grandezas.



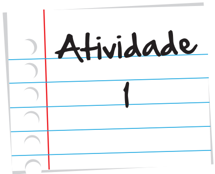
Analisando a 34ª semana, percebemos que o número de casos gira em torno de 900, ou seja,no acompanhamento da epidemia, na 34ª semana o número de casos foi de aproximadamente 900.

E quando o número de casos é praticamente zero?

Analisando novamente o gráfico da **Figura 1**, vemos que o número de casos é praticamente zero na 36ª semana.

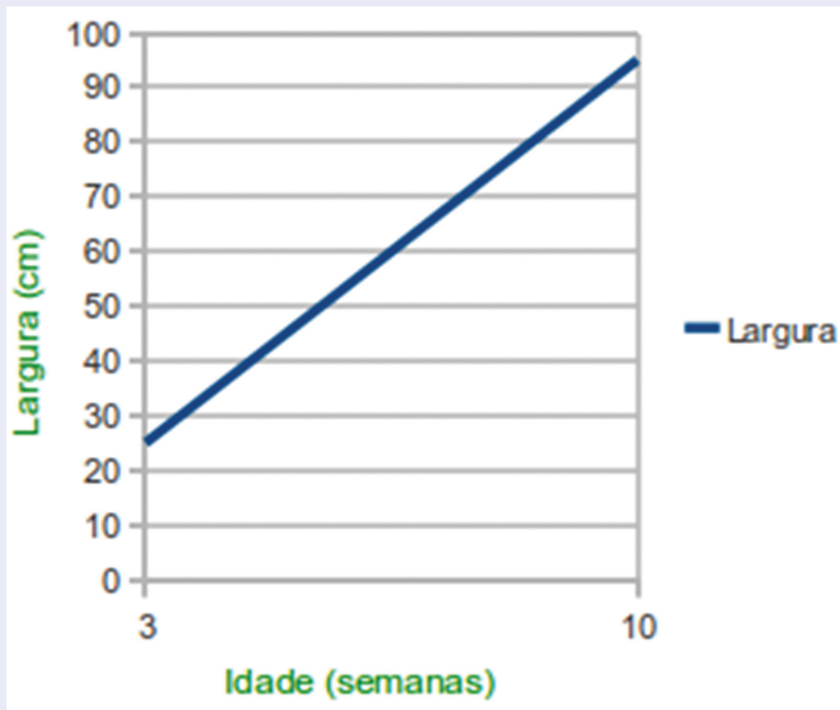
Agora é sua vez de interpretar as situações apresentadas a seguir.

Atividade 1



Observe o gráfico a seguir:

Relação entre idade e largura de um orgão.



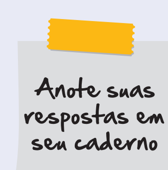
Analise as afirmativas como verdadeiras ou falsas:

a. O gráfico relaciona a idade em anos e a largura em centímetros de um órgão. (   )

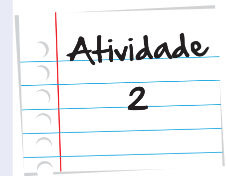
b. O eixo horizontal representa a idade e o vertical a largura. (   )

c. Com 3 semanas a largura do órgão mede menos de 30 cm. (   )

d. Com 10 semanas a largura do órgão mede exatamente 100 cm. (   )

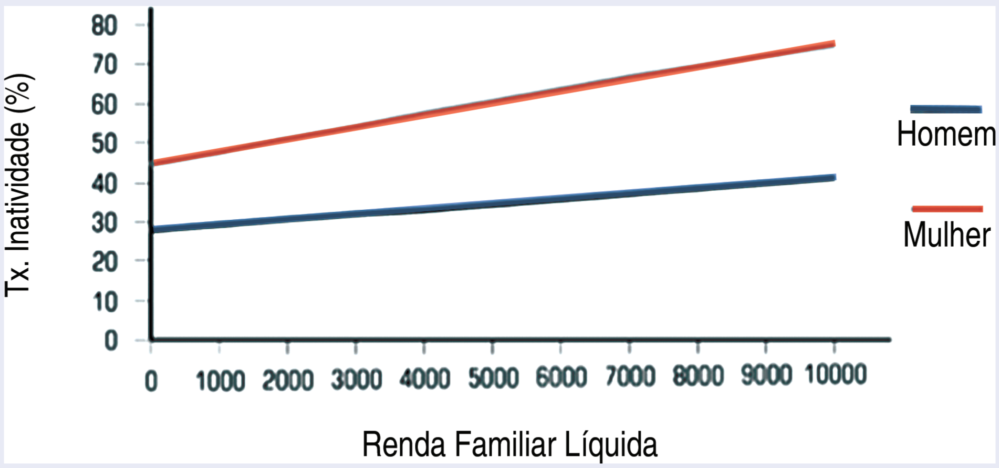


Atividade 2



O gráfico a seguir relaciona a taxa de inatividade (%) e a renda familiar (em Reais) entre homens e mulheres. Com base nas informações do gráfico, responda:

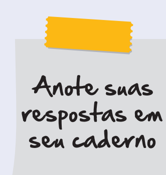
Relação entre a taxa de Inatividade e Renda Familiar

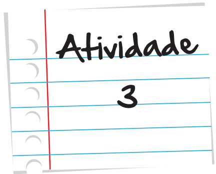


a. Em qual dos sexos, a taxa de inatividade é maior?

b. Com base em qual característica, podemos afirmar que os gráficos que descrevem a taxa de inatividade de homens e mulheres em função da renda representa uma função afim?

c. Quando a renda familiar é de 1000 reais, de quantos por cento é aproximadamente a taxa de inatividade de homens e mulheres?



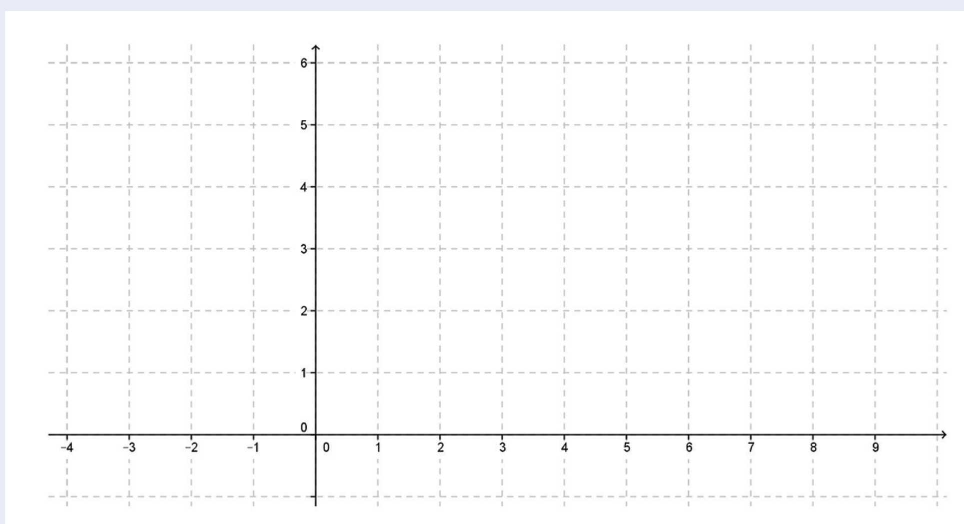


Atividade 3

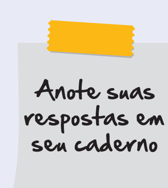
a. Considere uma função real dada por f(x) = x + 2. Vamos escolher três valores para x: 1, 2 e 3. Determine f(1), f(2) e f(3). Preencha a seguinte tabela com esses valores:

Ponto	x	f(x)
A	1	
B	2	
C	3	

b. Marque no plano cartesiano os pontos A, B e C. A malha quadriculada abaixo facilitará sua construção.



Mostre que esses três pontos estão alinhados. Para isso, mostre que a distância de A até C é a soma das distâncias de A até B e de B até C.



Saiba Mais

Será que foi uma coincidência os valores escolhidos na atividade anterior nos fornecerem pontos alinhados através da função? No link http://www.moodle.ufba.br/mod/book/view.php?id=131066&chapterid=30720 (Acesso em 17/02-13) você pode encontrar uma demonstração de que os pontos que pertencem ao gráfico de uma função polinomial do 1º grau estão alinhados.

Seção 2
Crescente ou decrescente?

Observe novamente os gráficos da seção anterior e tente descobrir alguma diferença entre eles.

Você notou a diferença nesses exemplos?

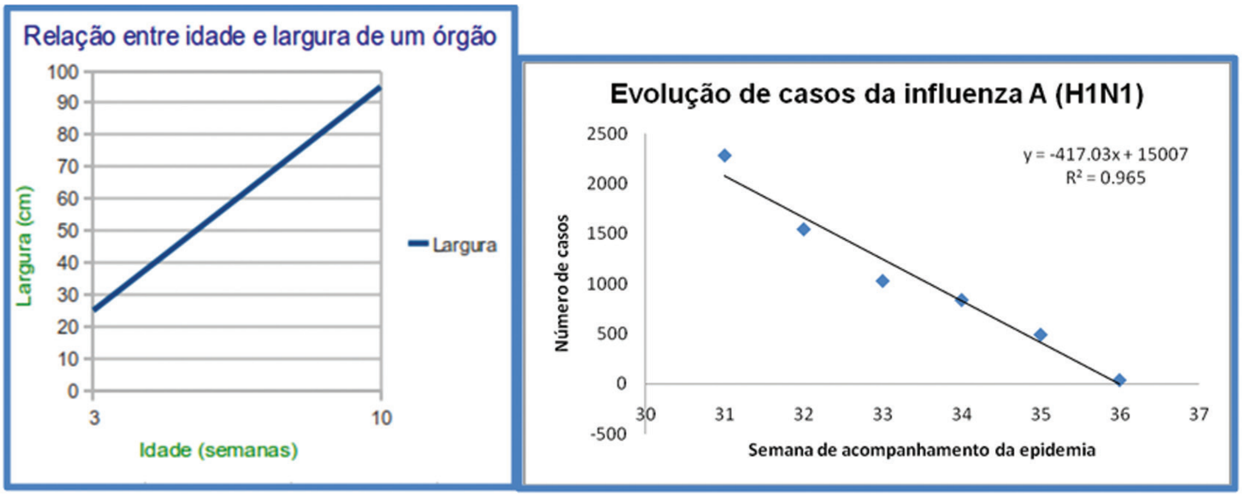


Figura 2: (a) Relação entre idade e largura de um órgão. (b) Relação entre semanas de acompanhamento da epidemia do vírus H1N1 e o número de casos.

A diferença existe porque alguns são gráficos de funções crescentes como no exemplo ao lado. Veja que à medida que o valor de x vai aumentando, o valor de y também aumenta.

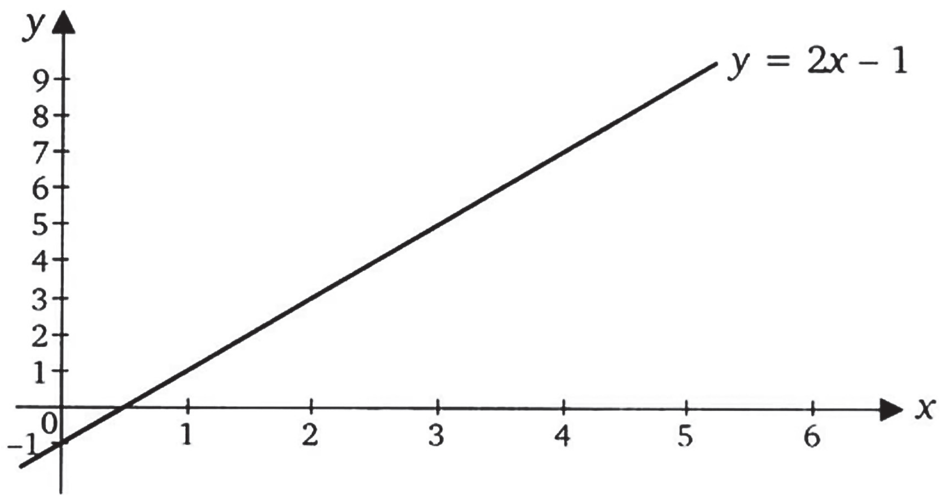


Figura 3: Gráfico de uma função crescente

E outros são gráficos de funções decrescentes, como o exemplo que segue:

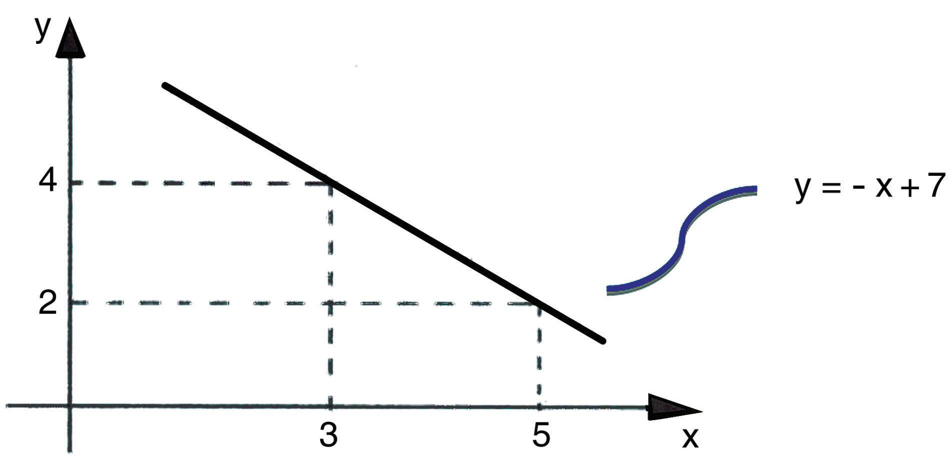
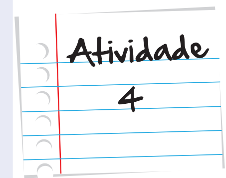


Figura 4: Gráfico de uma função decrescente

Note que no gráfico da **Figura 4** à medida que o valor de x aumenta, o valor de y vai diminuindo.

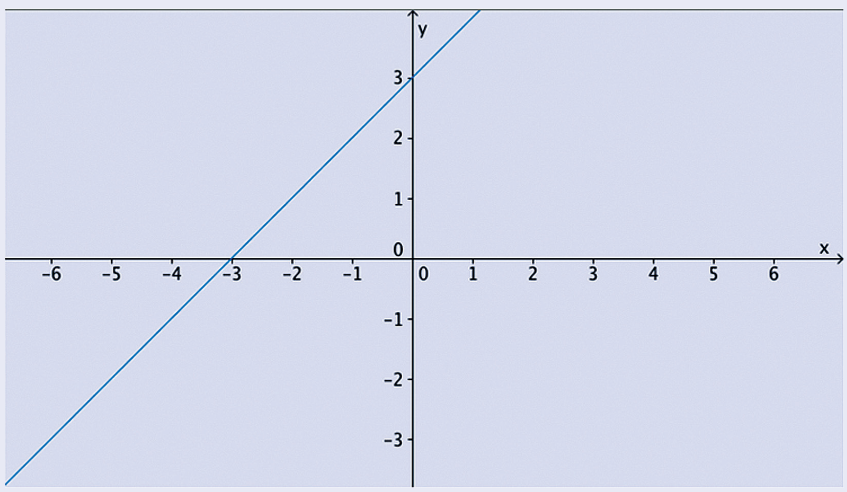
Será que você já pode dizer se as funções a seguir são crescentes ou decrescentes, apenas observando sua representação gráfica? Confira seu entendimento a esse respeito, fazendo a próxima atividade.

Atividade 4

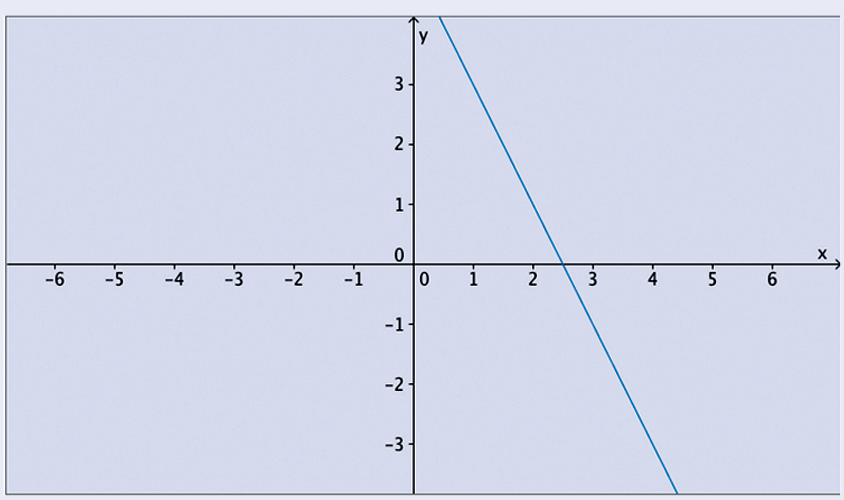


Analise os gráficos e diga se as funções abaixo são crescentes ou decrescentes.

a. $y = x + 3$

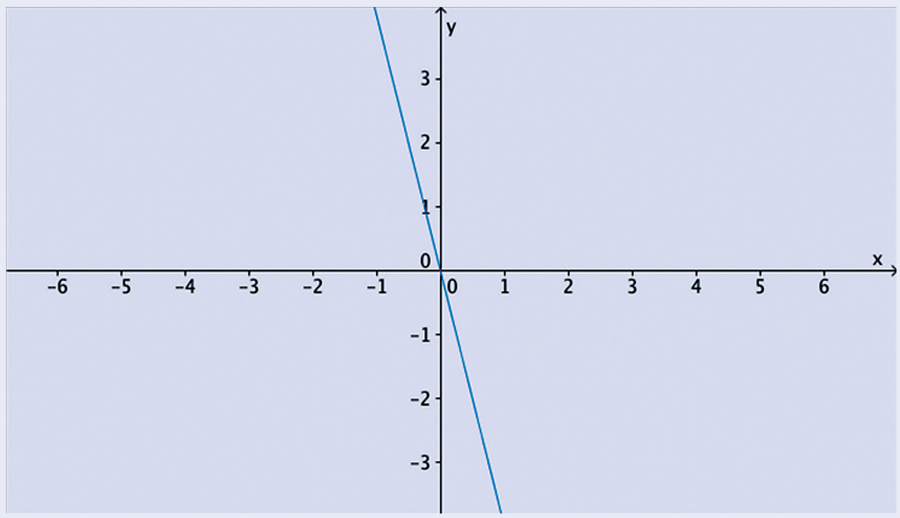


b. $y = -2x + 5$

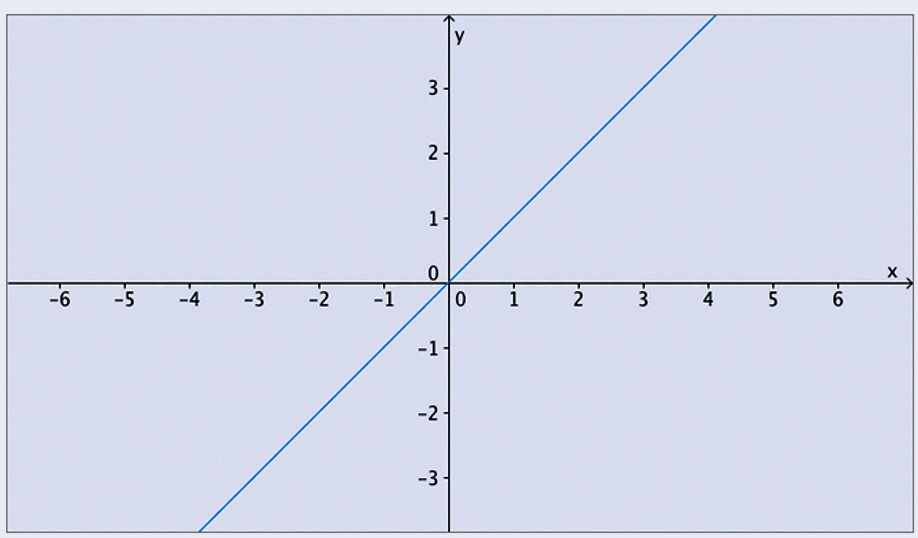


Atividade 4

c. $y = -4x$

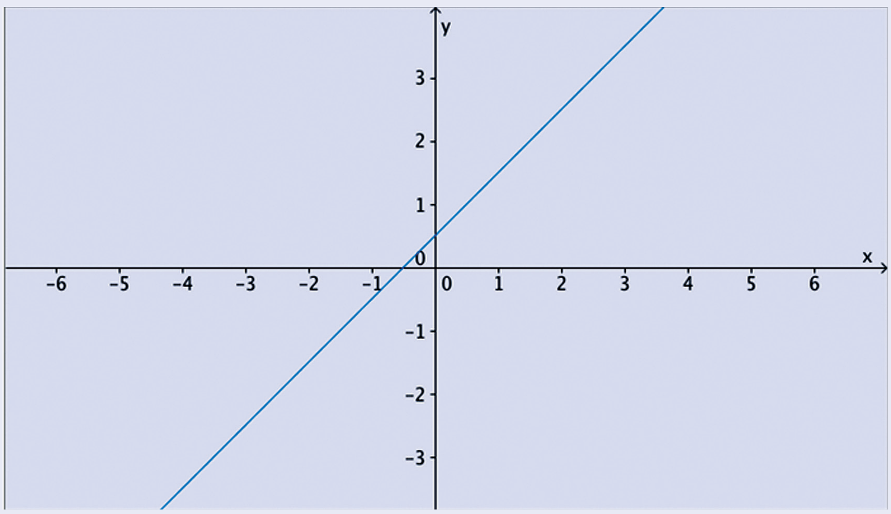


d. $y = x$

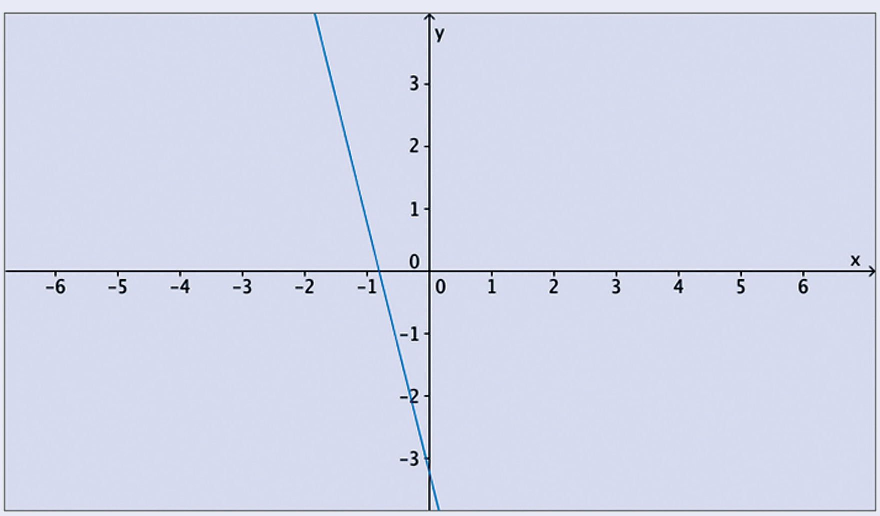


Atividade 4

e. $y = x + 0{,}5$



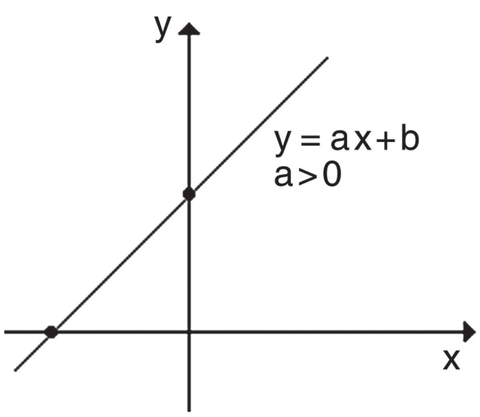
f. $y = -4x - 3{,}2$



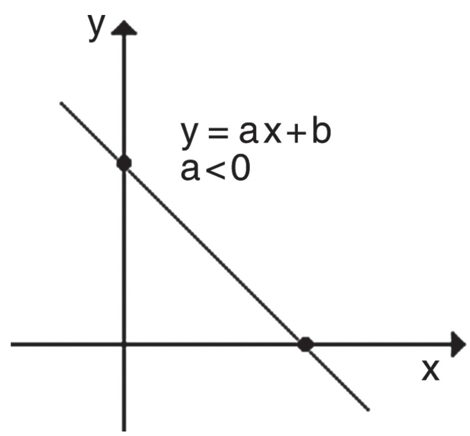
Anote suas respostas em seu caderno

Percebeu que nas funções y = ax + b, quando a > 0, ou seja, positivo a função é crescente e quando a< 0, ou seja, negativo a função é decrescente?

Função Crescente



Função Decrescente



Importante

Uma função f é crescente se, dados dois valores x_1 e x_2 do seu domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$.

A função f será decrescente se, dados dois valores x_1 e x_2 do seu domínio tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

Saiba Mais

Em certos problemas, estamos interessados em saber se uma função assume valores positivos ou negativos. Estudar o sinal de uma função significa dizer quais são os valores de x que tornam f(x) > 0, f(x) = 0 ou f(x) < 0.

Graficamente, é possível estudar o sinal de uma função. A parte do gráfico que se encontra acima do eixo x é formada por pontos cujas ordenadas são positivas, isto é, para valores de x que são abscissas de pontos situados acima do eixo x a função assume valores positivos. Analogamente, a parte do gráfico que se encontra abaixo do eixo x é formada por pontos cujas ordenadas são negativas.

No exemplo a seguir, podemos identificar que:

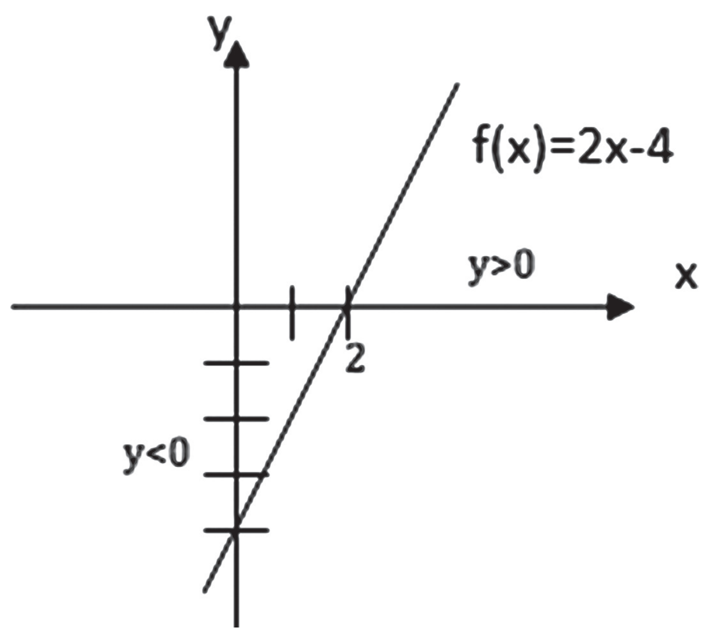
y>0, se x>2

y=0, se x = 2 (zero da função)

y<0, se x<2

Saiba Mais

Analisando o sinal da função, você consegue saber que valores são positivos, nulo ou negativos, o que pode auxiliá-lo a resolver muitos problemas principalmente os relacionados à inequação. Você vai estudar esse assunto mais adiante.



Atividade 5

Estude o sinal das funções reais definidas por:

a. $f(x) = 2x - 4$

b. $g(x) = -5x - 12$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Mãos à obra!

Até agora, aprendemos a identificar, interpretar e determinar algumas características do gráfico da função afim.

Considere a função real definida por $f(x) = 3x - 6$. Vamos construir o seu gráfico, seguindo o seguinte roteiro:

PASSO 1: Analisar a taxa de variação e identificar se a função é crescente ou decrescente.

A função é $f(x) = 3x - 6$. Logo, a taxa de variação é igual a 3. Como o valor da taxa de variação é positivo, ou seja, maior que zero, podemos afirmar que a função é crescente.

PASSO 2: Como o gráfico da função afim é uma reta, precisamos descobrir apenas dois pontos, uma vez que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Então vamos encontrar dois pontos que pertençam ao gráfico da função.

Neste exemplo, vamos encontrar o valor da função para $x = 0$ e para $x = 2$. Você poderia escolher outros valores.

Considerando $x = 0$, temos que $f(0) = 3(0) - 6 = -6$.

Para $x= 2$, temos que $f(2) = 3.(2) - 6 = 0$.

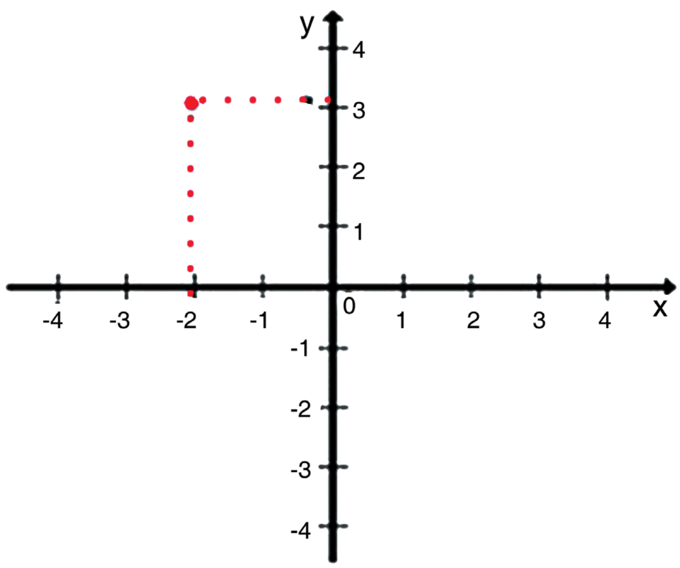
PASSO 3: Construindo o gráfico

Dos passos anteriores, sabemos que:

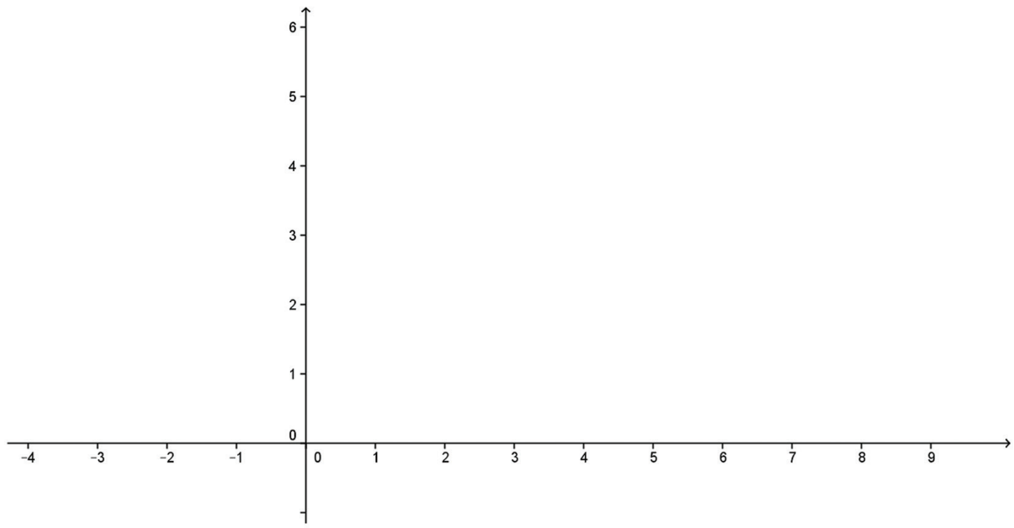
1. A função é crescente
2. Os pontos (0, -6) e (2,0) pertencem ao gráfico da função f.

No plano cartesiano, cada ponto do plano está associado a dois números reais. O primeiro representará o valor do eixo das abscissas (x) e o segundo, o valor do eixo das ordenadas (y), determinando, dessa forma, um ponto nesse plano.

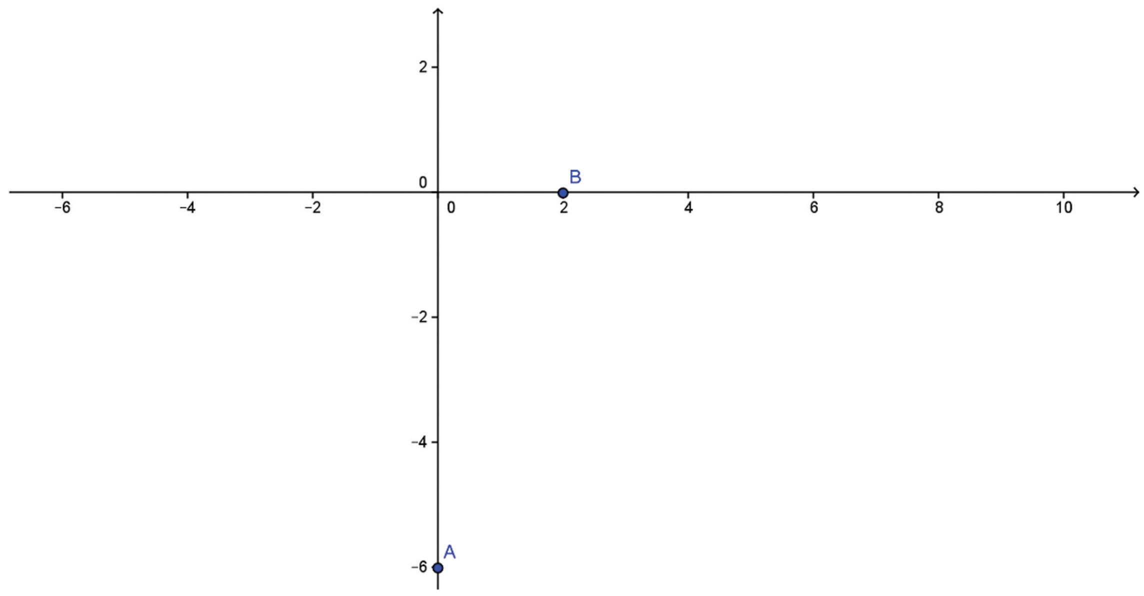
Assim o ponto ilustrado no gráfico ao lado é a representação do par ordenado (-2,3).



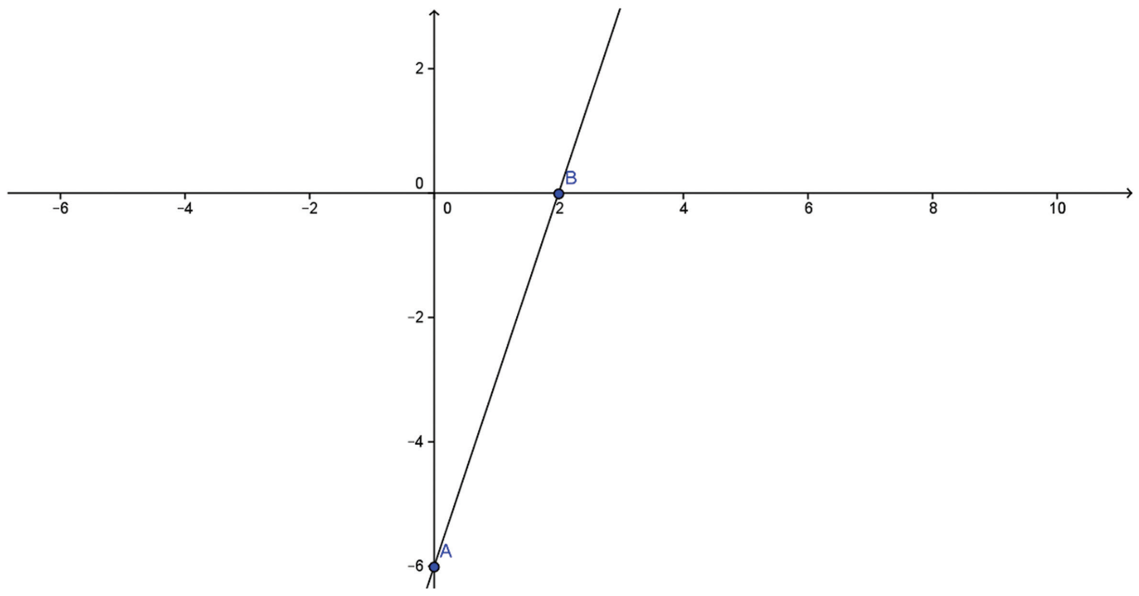
PASSO 4: Para construímos a representação gráfica de uma função, primeiro devemos traçar os eixos das abscissas e das ordenadas.



PASSO 5: Agora basta marcamos os pontos encontrados no passo 2, ou seja, (0,-6) e (2,0).



PASSO 6: E para finalizar unimos os pontos marcados, construindo uma reta que passa por eles.



Mas será que sempre devemos traçar uma reta ligando os dois pontos? Depende da situação-problema proposta.

Para avançamos em nosso estudo de gráficos, convido você a relembrar um exemplo que vimos na unidade anterior a essa. O Buffet que Ana contratou para o aniversário de sua filha. Relembre o caso conosco.

Ana quer comemorar o aniversário de sua filha com um buffet que cobra por uma festa infantil R\$ 500,00 fixos e R\$ 30,00 por pessoa. Ana tem 80 convidados e fez uma reserva de R\$ 3.200,00 para gastar com o buffet. Ana pode contratar esse buffet? Aliás, com esse valor, qual a quantidade máxima de pessoas que ela pode convidar? (...)

Imagine, então, que você é dono desse buffet e para facilitar a visualização de seus clientes, você resolve construir um gráfico que mostra como o orçamento da festa varia de acordo com a quantidade de pessoas. Como você faria essa construção?

Vamos construir o gráfico da função f(x) = 30x + 500, que representa, como já vimos, o valor da festa infantil, cobrada por esse *buffet*, em função do número de convidados.

A função é f(x) = 30x + 500. Logo, a taxa de variação: é igual a 30. Como o valor da taxa de variação é positivo, ou seja, maior que zero, podemos afirmar que a função é crescente.

Neste exemplo, vamos encontrar o valor da função, quando x = 0 e quando x =80 que são valores importantes para o problema. Vamos entender agora o porquê da escolha desses valores.

Considerando x = 0, temos que f(0) = 30(0) + 500 = 500. Esse resultado mostra que o valor fixo cobrado pelo *buffet* é de R$ 500,00.

Quando x= 80 (número de convidados de Ana), temos que f(80) = 30(80) + 500 = 2.900. Com esse resultado, podemos concluir que o *buffet* cobra R$ 2.900,00 para realizar uma festa infantil para 80 convidados.

Agora basta marcamos os pontos (0,500) e (80,2900).

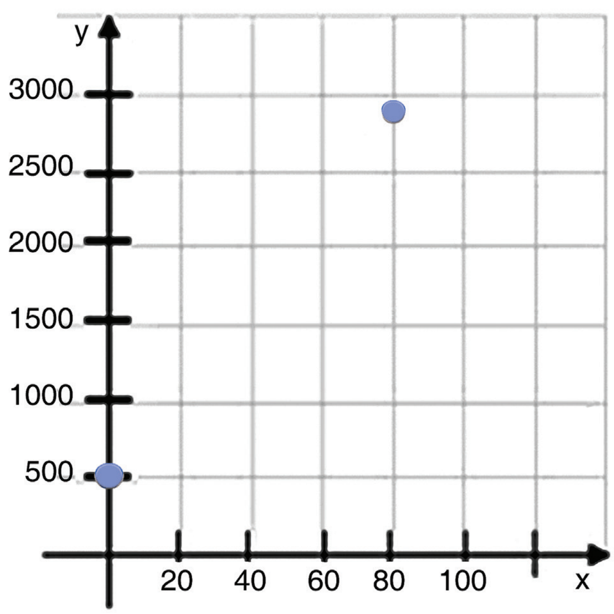


Figura 7: Marcação dos pares ordenador (0,500) e (80, 2900).

Note que, nesse exemplo, x assume somente valores inteiros maiores ou iguais a zero, uma vez que representa o número de convidados. Nesse caso, teríamos um conjunto discreto de pontos alinhados. Não teríamos uma reta como no nosso primeiro exemplo.

Os pontos que fazem parte do gráfico dessa função seriam: (0,500), (1,530), (2,560), (3,590), ...

Dessa forma, vemos que observar o conjunto de valores que x pode assumir é importante para a construção do gráfico de uma função.

Dispondo dessa representação gráfica, você como dono do *buffet*, pode auxiliar seus clientes de modo rápido e prático a calcular o custo de cada festa em função do número de convidados.

Agora é sua vez de construir o gráfico de um outro problema, visto na unidade anterior. Mãos à obra!

Lembra-se do Silvio que conhecemos na unidade anterior? O vendedor de uma loja de colchões e cujo salário é de 1000 reais fixos mais uma comissão de 60 reais por colchão vendido?

Imagine que você é gerente do Sílvio e quer construir o gráfico que representa o salário de Silvio para incentivá-lo a vender mais. Lembre-se o salário de Sílvio é dado por $S(c) = 1000 + 60c$, e que o número de colchões vendidos deverá ser representado por um número inteiro, maior ou igual a zero, e por isso, os pontos obtidos não poderão ser ligados!

Atividade 6

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Observando gráficos. Enxergando funções.

Nesta seção, vamos percorrer o sentido inverso ao que tomamos durante as seções anteriores, onde partimos da função afim para a interpretação, classificação e construção de seu gráfico. Agora vamos verificar que a partir da análise cuidadosa das informações apresentadas em um gráfico, é possível chegar a várias conclusões. Uma delas é encontrar a função que descreve aquela representação gráfica.

Para trabalharmos esse novo olhar, suponha que você pegou um empréstimo de 100 reais no banco. Ao retirar o dinheiro, seu gerente entregou um gráfico (**Figura 9**), representando o valor devido ao longo dos meses que o dinheiro permanecerá emprestado.

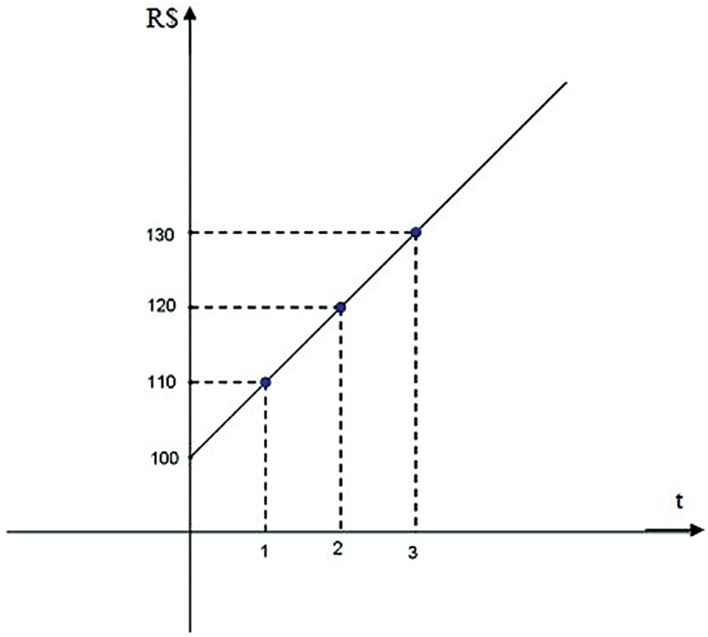
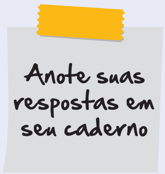


Figura 9: Valor da dívida (em R$) em função do tempo (t em meses).

De quanto será a dívida se você permanecer com o dinheiro durante 8 meses?



Uma maneira para resolver esse problema, é descobrir a função que determina esse gráfico. Veja o passo a passo de como podemos fazer isso.

PASSO 1: Identificar dois pontos que pertençam ao gráfico e por consequência à função que o determina:

1º ponto: Tempo = 0, Valor = 100

2º ponto: Tempo = 1, Valor = 110

Basta encontrar dois pontos, pois assim teremos apenas duas incógnitas para encontrar.

Substituindo os valores dos pontos (x_1,y_1) e (x_2, y_2) encontrados no gráfico, teremos de encontrar os valores de a e b, para determinar a função afim $f(x) = ax + b$.

PASSO 2: Montar um sistema de equações, substituindo os valores dos pontos na função, ou seja, em $f(x) = ax + b$.

Considerando o primeiro ponto que identificamos no gráfico, temos que, quando o tempo é zero (ou seja, antes de completar 1 mês de empréstimo), o valor do empréstimo é de 100 reais (valor inicial). Substituindo os valores de x e y na função concluímos que:

$f(x) = ax + b$,

$f(0) = a(0) +b$

$100 = a(0) + b$

Da mesma forma, considerando o segundo ponto que reconhecemos no gráfico, temos que quando o tempo é igual a 1 mês o valor cobrado pelo empréstimo passa a ser igual a 110 reais. Substituindo os valores de x e y na função concluímos que:

$f(x) = ax + b$,

$f(1) = a(1) +b$

$100 = a(1) + b$

Reescrevendo as funções encontradas, temos o seguinte sistema de equações:

1ª equação $\rightarrow 100 = 0a+ b$

2ª equação $\rightarrow 110 = 1.a + b$

PASSO 3: Resolvendo o sistema, temos:

$100 = 0.a + b$

então:

$100 = 0 + b$

$b = 100$

Importante

Com esse resultado, encontramos o valor do coeficiente linear da função (b). Esse coeficiente representa o valor numérico por onde a reta passa no eixo das ordenadas.

Substituindo o valor de b na 2ª equação:

$110 = 1.a + b$

$110 = 1.a + 100$

$110 = a + 100$

$110 - 100 = a$

$a = 10$

Descobrindo o valor do coeficiente a, encontramos,na verdade, a taxa de variação da função.

PASSO 4: Montar a função que representa a variação do valor empréstimo (f(t)) em relação ao tempo (t).

$f(t) = at + b$

Substituindo os valores de *a* e *b,* encontrados no passo 3, encontramos a função representada no gráfico da **Figura 9**.

$f(t) = 10t + 100$

Agora que conseguimos descrever a função que fundamenta o gráfico, podemos responder à pergunta feita inicialmente: "De quanto será a dívida, se você permanecer com o dinheiro durante 8 meses?"

PASSO 5: Para encontrar o valor que será cobrado pelo empréstimo, após 8 meses, basta substituirmos o valor da variável tempo na função $f(t) = 10t + 100$. Nesse caso, $t = 8$.

$f(t) = 10t + 100$

$f(8) = 10.(8) + 100$

$f(8) = 80 + 100 = 180$

Com auxílio desses passos, você pode concluir que no 8º mês a dívida será de 180 Reais.

Atividade 7

Pesquise um gráfico de uma função afim em jornais, Internet, revista e descubra a função que o gráfico representa.

Anote suas respostas em seu caderno

Como vimos, o gráfico é um recurso muito utilizado em jornais, revistas e Internet.

Agora, para terminarmos, algumas perguntinhas para você sobre a reportagem do início da unidade:

O gráfico do início da unidade representa uma função afim?

Conseguiu perceber que a população no Brasil estava com peso normal em 1980 e em 2008 a população estava acima do peso?

Resumo

- O gráfico que representa a função afim é uma reta.
- Na função $f(x) = ax + b$, o gráfico é crescente se $a>0$ e decrescente se $a<0$.
- Seguindo apenas cinco passos simples, podemos construir o gráfico de uma função afim. Veja a seguir.

  PASSO 1: Analisar a taxa de variação (valor do coeficiente a) e identificar se a função é crescente ou decrescente;

  PASSO 2: Encontrar dois pontos que pertençam à função;

  PASSO 3: Construímos os eixos das abscissas e das ordenadas;

  PASSO 4: Marcamos os pontos;

PASSO 5: Unimos os pontos marcados, construindo uma reta.

- Veja a seguir o passo a passo para determinar a lei que determina o gráfico de uma função afim.

  PASSO 1: Identificar dois pontos que pertençam ao gráfico e por consequência à função que o determina;

  PASSO 2: Montar um sistema de equações, substituindo os valores dos pontos;

  PASSO 3: Resolver o sistema;

  PASSO 4: Montar a função.

Veja ainda

Acessando o site http://math.exeter.edu/rparris/peanut/Explorando%20Winplot%20-%20Vol%201.pdf, você tem um passo a passo para a construção de gráficos, utilizando o software Winplot.

O winplot é uma ferramenta importante e pode ser útil quando você precisar construir gráficos e puder utilizar o computador.

Referências

Livros

ALMEIDA, Nilze de; DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. **Matemática Ciência e Aplicações 1**. Segunda Edição. São Paulo: Atual Editora, 2004.157p.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Temas e Problemas**. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p

________**A Matemática do Ensino Médio Volume 1**. Sétima Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. 237 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexo e Aplicações Volume 1**. Primeira Edição. São Paulo: Editora Ática, 2011. 240p.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa**. Quinta Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1999. 2128 p.

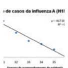
Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767.

- http://www.sxc.hu/photo/1094969.

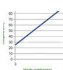
- http://www.sxc.hu/photo/737301.

- http://www.sxc.hu/photo/801548.

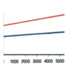


- http://h1n1bioestatufrj.blogspot.com.br/2010/12/h1n1-no-brasil.html

- http://www.sxc.hu/photo/958658.



- http://www.cultura.ufpa.br/dicas/open/calc-ret1.htm

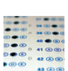


- http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-63512009000200004&script=sci_arttext

- http://www.sxc.hu/photo/13202

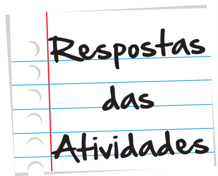
- http://www.sxc.hu/photo/937589

- http://www.sxc.hu/photo/59943



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528



Atividade 1

a. Falso. A largura é em centímetros, mas a idade em semanas e não em anos.

b. Verdadeiro

c. Verdadeiro

d. Falso. A largura é menor que 100 cm.

Atividade 2

a. Feminino

b. Os gráficos são representados por retas.

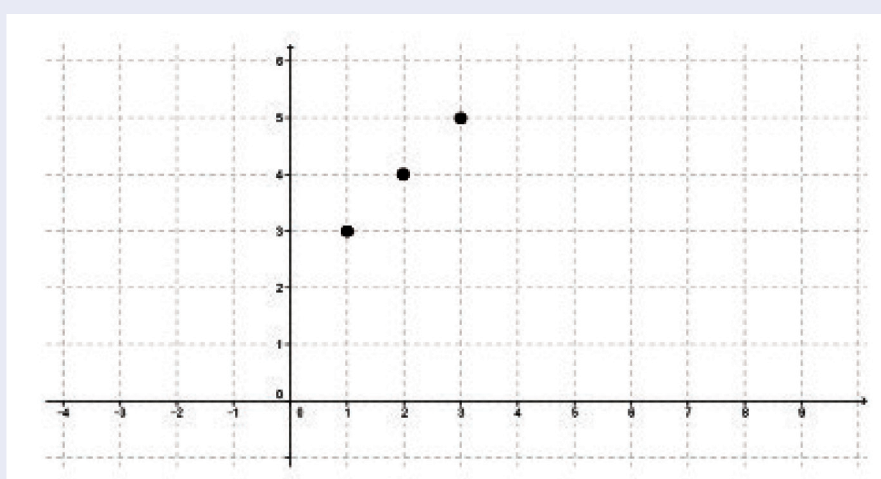
c. Homens 30% e mulheres 50% aproximadamente

Atividade 3

a.

Ponto	X	f(x)
A	1	3
B	2	4
C	3	5

b.



Respostas das Atividades

Atividade 4

a. crescente

b. decrescente

c. decrescente

d. crescente

e. crescente

f. decrescente

Atividade 5

a. $f(x) > 0 \rightarrow 2x - 4 > 0 \rightarrow x > 2$

$f(x) = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(x) < 0 \rightarrow 2x - 4 < 0 \rightarrow x < 2$

b. $g(x) > 0 \rightarrow -5x - 12 > 0 \rightarrow x < -12/5$

$g(x) = 0 \rightarrow -5x - 12 = 0 \rightarrow x = -12/5$

$g(x) < 0 \rightarrow -5x - 12 < 0 \rightarrow x > -12/5$

Atividade 6

Construir o gráfico da função $S(c) = 1000 + 60c$

PASSO 1:

A função é $S(c) = 60c + 1000$

Taxa de variação: 60

Como 60>0, ou seja, é positivo, podemos afirmar que a função é crescente.

Respostas das Atividades

PASSO 2:

Escolheremos os pontos onde c = 0 e c = 10

C	S(c)
0	60.0 + 1000 = 0 + 1000 = 1000
10	60.10 + 1000 = 600 + 1000 = 1600

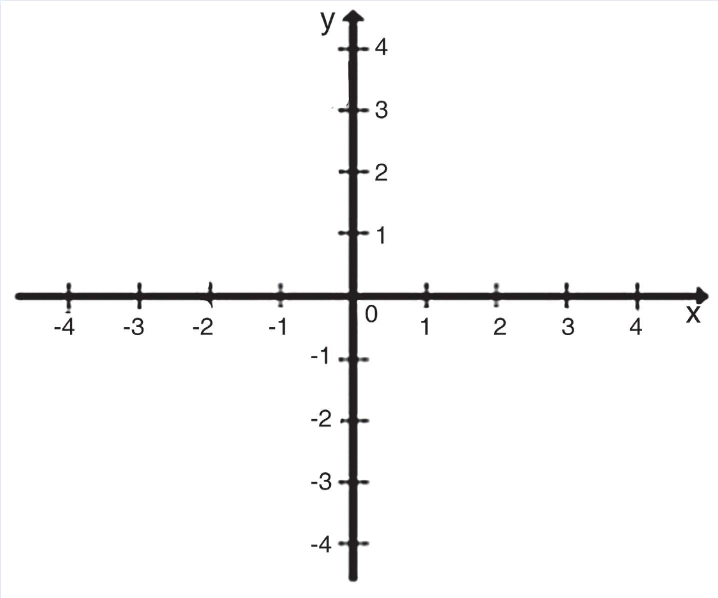
PASSO 3:

Dos passos anteriores, sabemos que:

A função é crescente

Os pontos c =0, y = 1000 e c = 10, y = 1600 pertencem à função e por consequência ao gráfico.

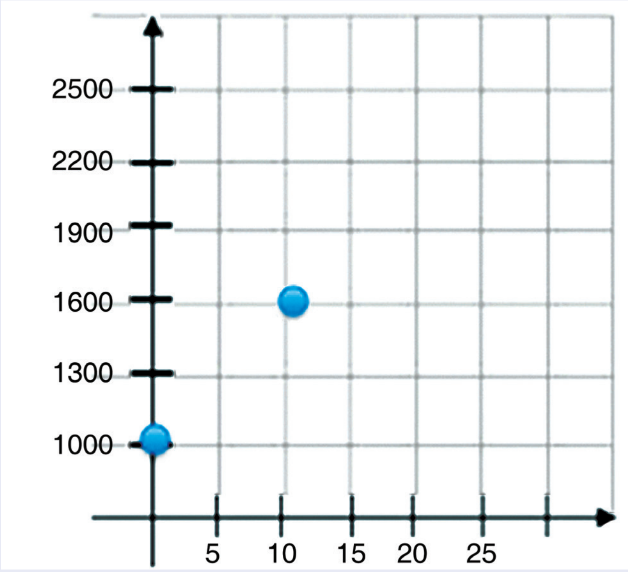
PASSO 4:



PASSO 5:

Marcamos os pontos

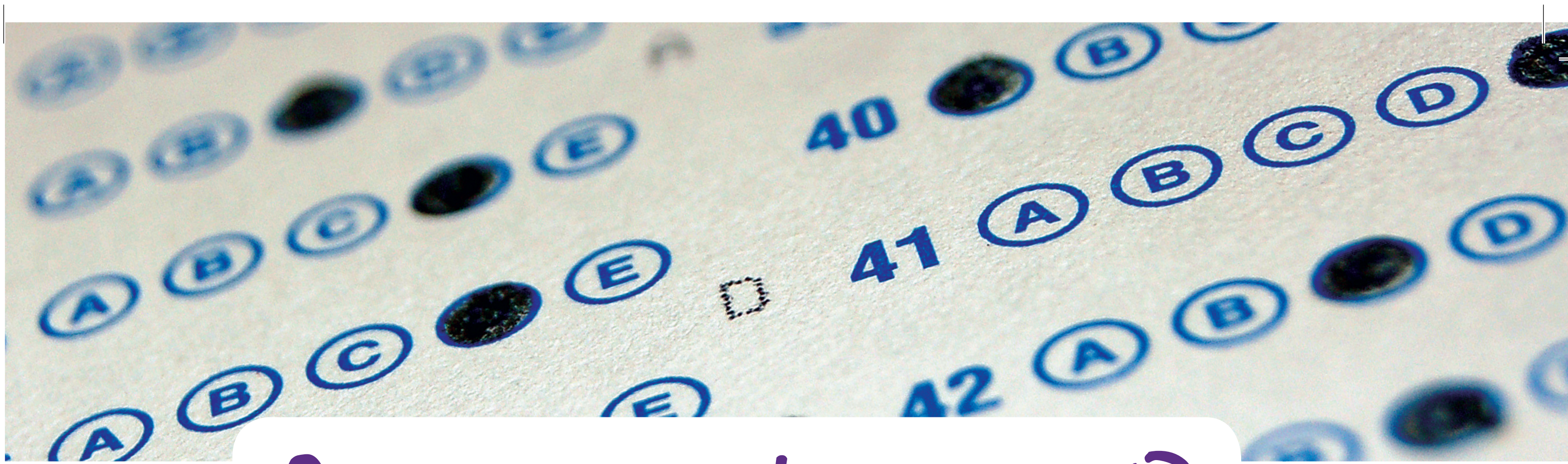
(0,1000) e (10,1600)



Respostas das Atividades

Atividade 7

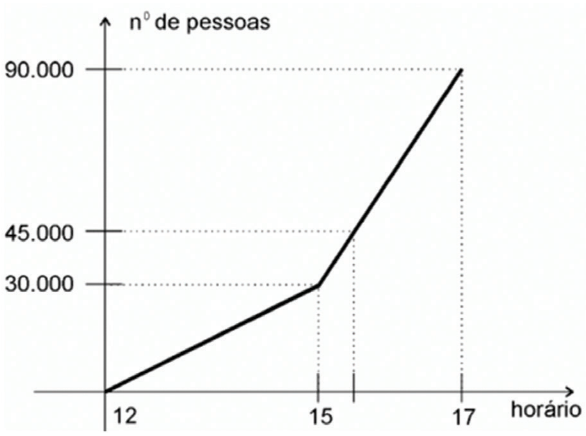
Resposta pessoal



O que perguntam por aí?

(UERJ)

Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até às 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou. Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico abaixo:



Quando o número de torcedores atingiu 45.000, o relógio estava marcando 15 horas e:

(A) 20 min

(B) 30 min

(C) 40 min

(D) 50 min

Resposta: Letra B

Comentário: Até 15 horas e depois das 15 horas a entrada de torcedores é dada através de funções afim crescentes. Antes das 15h, a função cresce com menor rapidez e após as 15h com maior rapidez.

PASSO 1:

1º ponto: Tempo = 15, Torcedores = 30000

2º ponto: Tempo = 17, Valor = 90000

PASSO 2:

1ª equação $\rightarrow 30000 = 15.a + b$

2ª equação $\rightarrow 90000 = 17.a + b$

PASSO 3:

$90.000 = 17a + b$

$-30.000 = 15a - b$

então, utilizando o método da adição, temos:

$60000 = 2a$

$a = 30000$

substituindo o valor de a na segunda equação, temos:

$30000 = 15.30000 + b$

$30000 = 450000 + b$

$b = 30000 – 450000$

$b = - 420000$

PASSO 4:

$f(x) = ax + b$

$f(x) = 30000x - 420000$

PASSO 5:

Encontrar o valor quando $y = 45000$

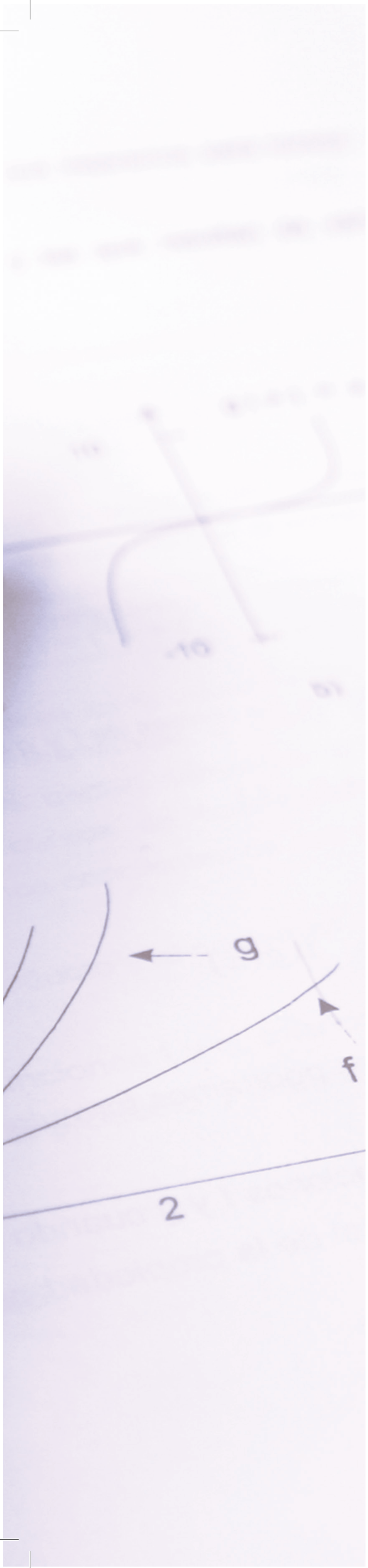
$45000 = 30000x - 420000$

$45000 + 420000 = 30000x$

$465000 = 30000x$

$x = 15,5$

O número de torcedores atingiu 45000, quando o relógio atingiu 15,5h (15h + 0,5h), ou seja, 15 e 30 minut0s.



Função Polinomial do 2º grau – Parte 2

Para início de conversa...

Imagine você sentado em um ônibus, indo para a escola, jogando uma caneta para cima e pegando de volta na mão.

Embora para você a caneta só vá para cima e para baixo, quem está de fora do ônibus consegue ver a caneta fazer um movimento de parábola, com concavidade para baixo. Nessa situação, temos dois movimentos distintos, pois, além de a caneta ir para cima, o ônibus movimenta-se para frente. Esse exemplo simples mostra como as funções do 2º grau fazem parte do nosso cotidiano e muitas vezes nem percebemos.

Elas possuem várias aplicações no dia a dia, principalmente em situações relacionadas à Física, envolvendo lançamento oblíquo, movimento uniformemente variado etc.; na Biologia, estudando o processo de fotossíntese das plantas, entre outros.

Nessa unidade continuaremos estudando as funções polinomiais do 2° grau (estudo iniciado na unidade anterior a esta), mas agora trabalharemos com os conceitos de zeros ou raízes, máximo e mínimo de uma função do 2° grau, construiremos seus gráficos e analisaremos suas aplicações.

Objetivos de aprendizagem

- Consolidar conhecimentos obtidos na resolução de equações do 2° grau;
- Conceituar função polinomial do 2° grau;
- Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2° grau;
- Determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2° grau;
- Construir, ler e analisar os gráficos de funções polinomiais do 2° grau;
- Identificar a concavidade e outros elementos da parábola;
- Identificar o crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 2° grau;
- Resolver problemas de máximos e mínimos associados a função polinomial do 2° grau;
- Compreender os significados dos coeficientes da função do 2° grau;
- Utilizar a função polinomial do 2° grau para resolver problemas.

Seção 1
Entendendo as parábolas

A parábola é o gráfico da função polinomial do 2° grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$. Isso significa que a união de todos os pontos $(x , f(x))$ formam uma figura chamada de parábola, o que vale para toda função do 2° grau. Os elementos principais de uma parábola são a concavidade, os pontos onde cortam os eixos coordenados e o vértice. Convidamos você a identificar esses elementos em uma representação gráfica.

Veja a figura a seguir:

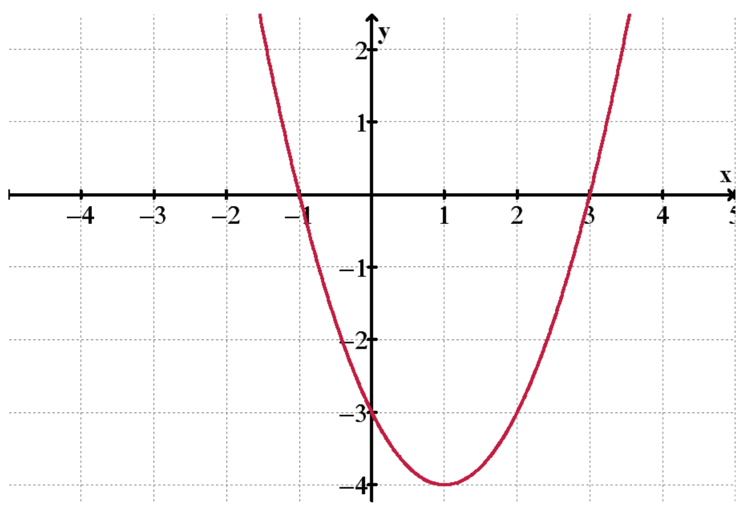


Figura 1: Gráfico de uma função do 2° grau: Parábola.

Os pontos $(–1, 0)$ e $(3,0)$ são os pontos de interseção com o eixo x. O ponto $(0, –3)$ é o ponto de interseção com o eixo y. E o ponto $(1, –4)$ é chamado vértice da parábola. O vértice é o ponto em que a parábola começa a mudar sua direção. Note que até $x = 1$ a função é decrescente e após $x = 1$ esta passa a ser crescente. A concavidade desta parábola está voltada para cima. Neste caso, dizemos que a parábola tem um ponto de mínimo (vértice), pois nenhum outro ponto da parábola possui um valor para a ordenada (coordenada y do ponto) menor que –4.

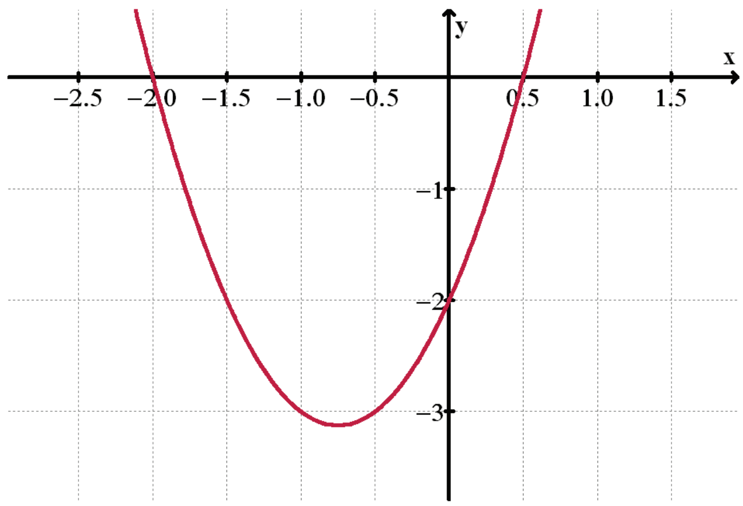
Como você pode ver, podemos retirar muitas informações de um gráfico que representa uma função quadrática (ou função do 2º grau), não é verdade?

Vamos começar falando a respeito da concavidade. Ela ora está voltada para cima, ora está voltada para baixo. Mas o que determina a orientação dessa concavidade?

A concavidade da parábola

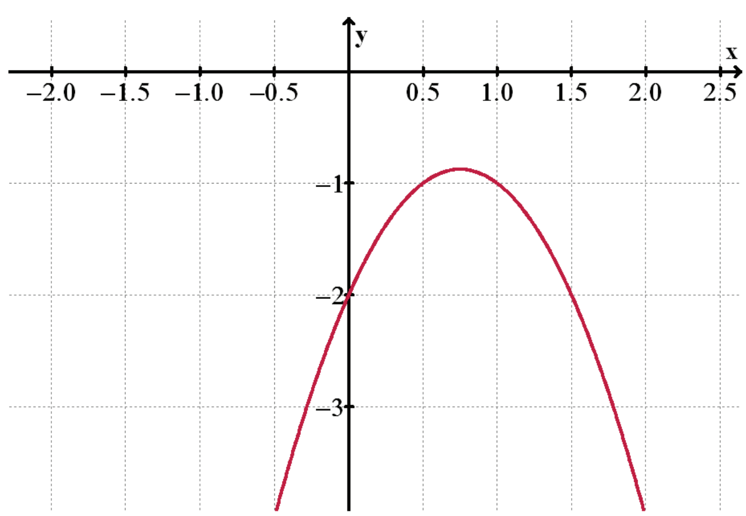
A concavidade da parábola será voltada para cima, se o valor do coeficiente *a* for positivo e será voltada para baixo, se o valor de *a* for negativo.

Exemplo 1: $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$



Como o valor do coeficiente *a* é positivo ($a = 2$), a concavidade da parábola está voltada para cima. Podemos concluir também que a parábola possui um valor mínimo, sem precisarmos olhar o gráfico, já que a concavidade da parábola está voltada para cima ($a>0$).

Exemplo 2: $g(x) = -2x^2 + 3x - 2$



Como o valor do coeficiente *a* é negativo ($a = -2$), a concavidade da parábola está voltada para baixo. Podemos concluir também que a parábola possui um valor máximo, sem precisarmos olhar o gráfico, já que a concavidade da parábola está voltada para baixo ($a < 0$).

Atividade 1

Determine se as funções a seguir possuem gráficos cujas concavidades estão voltadas para baixo ou para cima e determine se possui um valor máximo ou mínimo.

a. $f(x) = x^2 + 3x + 6$

b. $g(x) = -x^2 + 5x$

c. $h(x) = 1{,}3x - 2x^2$

d. $m(x) = -5 + 0{,}2x^2$

e. $n(x) = 2 + x^2 - 3x$

Anote suas respostas em seu caderno

Pontos onde o gráfico intersecta os eixos coordenados

Podemos destacar, em uma parábola, pontos notáveis, com os quais poderemos construir com mais facilidade o gráfico de uma função quadrática. Eles se dividem em:

a. Ponto(s) de interseção da parábola com o eixo das abscissas;

b. Ponto de interseção da parábola com o eixo das ordenadas;

c. Vértice da parábola.

Zeros (ou raízes) de uma função e o eixo das abscissas.

Os zeros ou raízes de uma função são os valores de x tais que $f(x) = 0$, isto é, são os valores de x cuja imagem é igual a zero. Graficamente, isso significa que são os valores das coordenadas x dos pontos de interseção da parábola com o eixo x (lembre-se de que todos os pontos que pertencem ao eixo x têm ordenada igual a zero, ou seja, $y = 0$). Para ajudá-lo a identificar as raízes de uma função do 2º grau, desenvolvemos três bons exemplos. Eles mostram que uma função do 2º grau pode ter duas raízes reais, apenas 1 raiz real ou até mesmo há casos em que ela não possui nenhuma raiz real. Ao fazermos f(x) = 0, recaímos em uma equação do 2° grau que, como vimos na unidade anterior, pode ser resolvida, dentre outras formas, utilizando a fórmula conhecida como “Fórmula de Bhaskara”. Vejamos essas possibilidades.

Saiba Mais

O hábito de dar o nome de *Bhaskara* para a fórmula de resolução da equação do segundo grau estabeleceu-se no Brasil, por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome *Bhaskara* para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado, pois:

- Problemas que recaem em uma equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos, o que se tinha era uma receita (escrita, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.
- *Bhaskara* nasceu na Índia, em 1114, e viveu até cerca de 1185. Foi um dos mais importantes matemáticos do século XII. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são Lilavati (“bela”) e Vijaganita (“extração de raízes”), que tratam de Aritmética e Álgebra, respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas (resolvidas também com receita sem prosa), progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.
- Até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito com François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de *Bhaskara*, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do 2º grau.

Fonte: *Revista do Professor de Matemática* (RPM), 39, p. 54.

Exemplo 1: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Vamos identificar os coeficientes a, b e c de f: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$. Dessa forma, temos que:

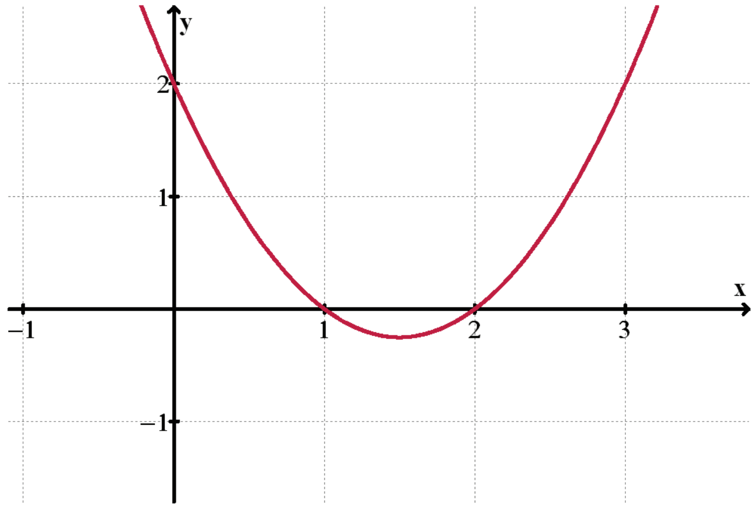
i. O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima (pois o coeficiente a é positivo);

ii. Um ponto sobre o eixo y tem coordenada $x = 0$. Dessa forma, o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y é $(0, f(0))$. No exemplo apresentado, o gráfico intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0,2);

iii. As raízes de f são obtidas resolvendo-se a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$

Utilizando a Fórmula de Bhaskara teremos que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$, e $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$, donde teremos que $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ e $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

O gráfico de f é mostrado a seguir. Observe nele as informações que acabamos de obter através da lei da função.



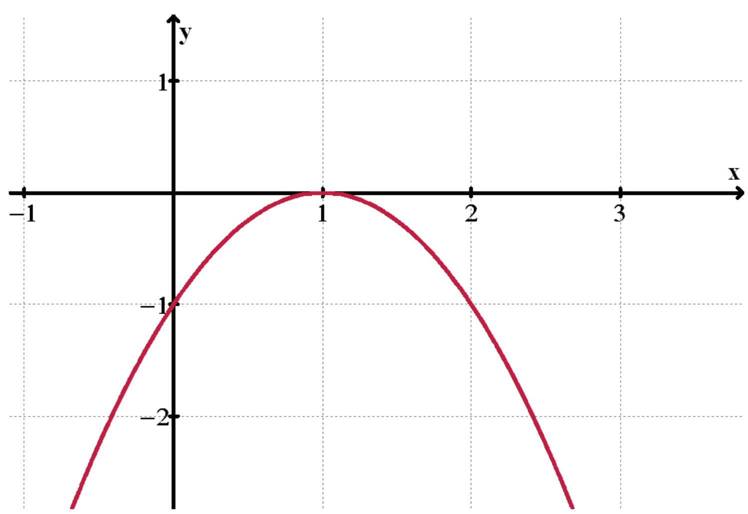
Exemplo 2: $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

Procedendo da mesma forma como no exemplo 1, temos:

i. Os coeficientes dessa função são $a = -1$, $b = 2$ e $c = -1$. Assim, o gráfico de g é uma parábola com a concavidade voltada para baixo (pois o coeficiente a é negativo);

i. O gráfico de g corta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -1)$;

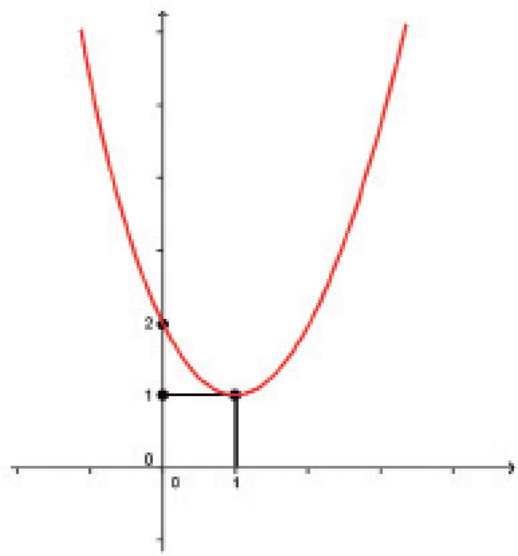
i. Resolvendo-se a equação $-x^2 + 2x - 1 = 0$, temos que $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$, e $x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)}$. Como $\Delta = 0$, g possui uma única raiz real ($x = 1$). Veja o gráfico de g a seguir. Note que a parábola tangencia o eixo x apenas no ponto cuja abscissa é 1.



Exemplo 3: $h(x) = x^2 - 2x + 2$

Nesse caso, o gráfico de h é uma parábola com concavidade voltada para cima e passa pelo ponto (0,2). Contudo, ao resolvermos a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$ para encontrarmos as raízes de h, temos que $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$.

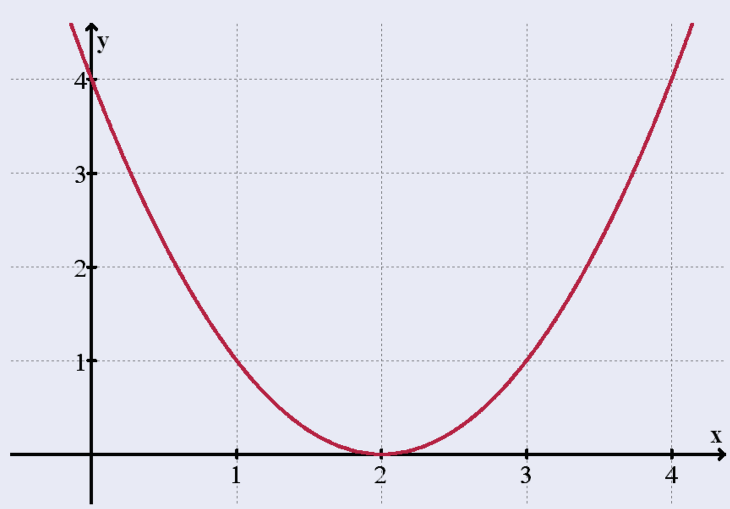
Como $\Delta < 0$, as raízes obtidas pela Fórmula de Bhaskara não são números reais. Neste caso, o gráfico da função h não intersecta o eixo x. Veja a representação gráfica de h a seguir.



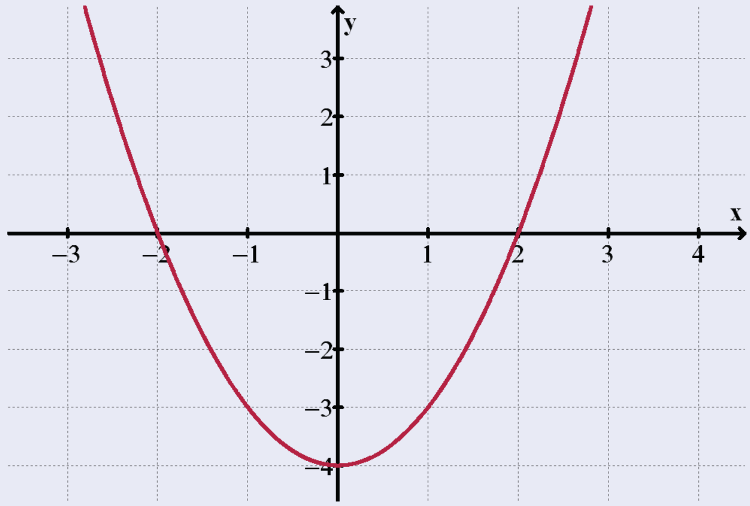
Atividade 2

Determine, caso existam, as raízes reais das seguintes funções:

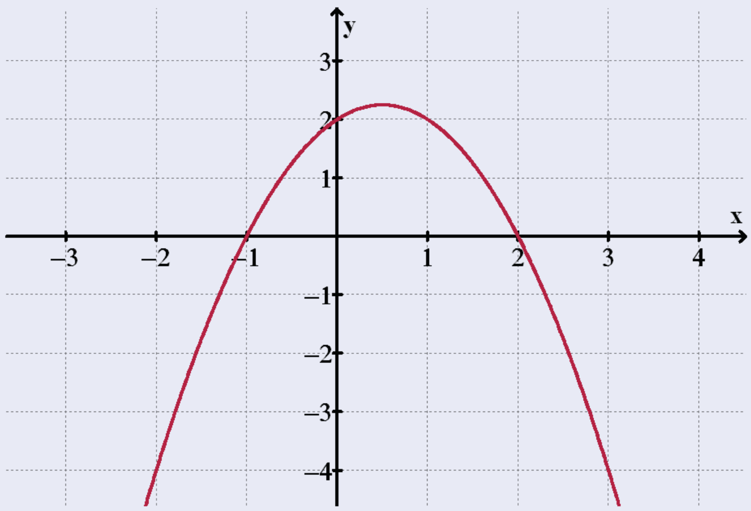
a. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

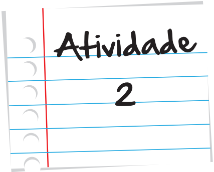


b. $g(x) = x^2 - 4$



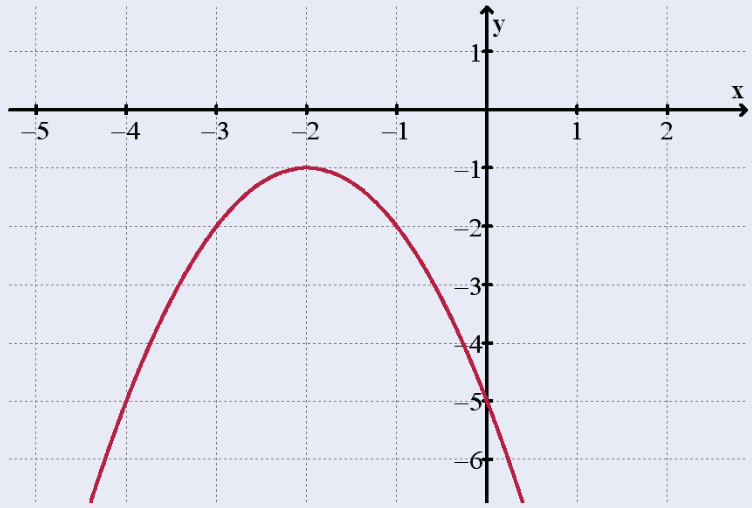
c. $h(x) = -x^2 + x + 2$



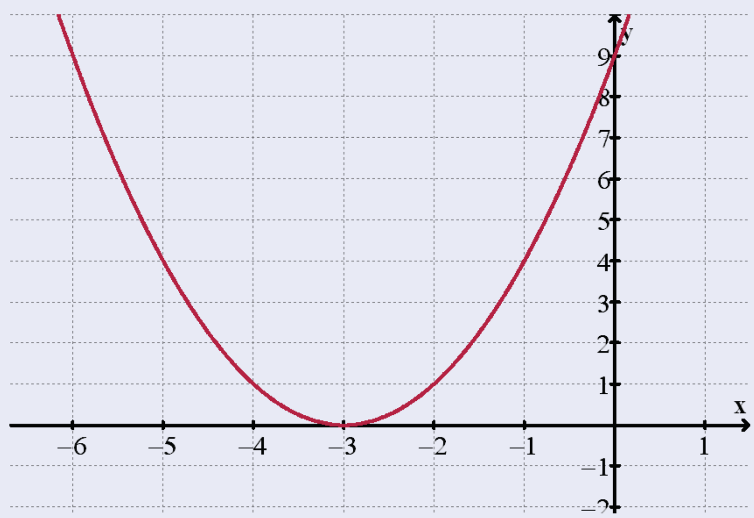


Atividade 2

d. $q(x) = -x^2 - 4x - 5$



e. $r(x) = x^2 + 6x + 9$



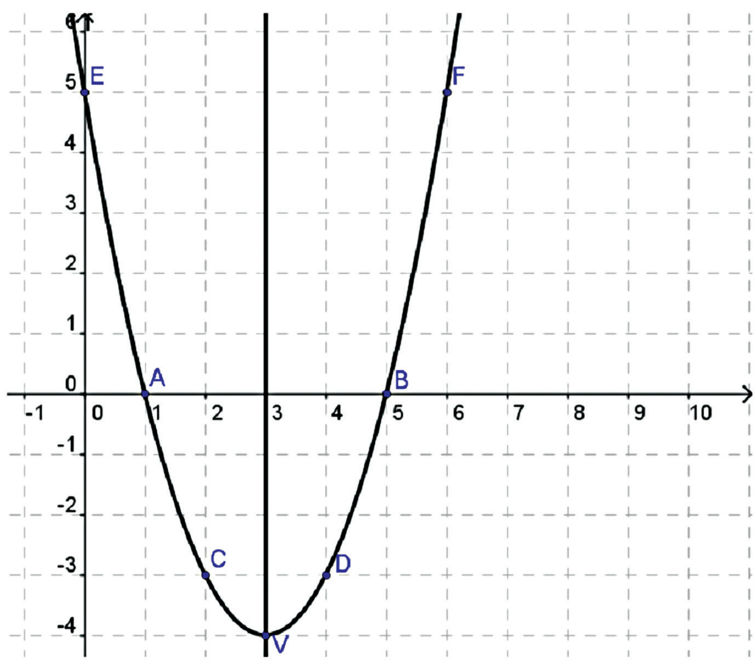
Anote suas respostas em seu caderno

O vértice de uma parábola

O vértice de uma parábola é o ponto desta em que a função assume seu valor máximo ou mínimo, dependendo da direção de sua concavidade. A reta paralela ao eixo y e que passa pelo vértice da parábola é chamada de eixo de **simetria** da parábola, pois os pontos da parábola são simétricos em relação a esta reta, ou seja, a distância de um ponto da parábola até o eixo de simetria é a mesma do seu ponto simétrico (em relação a esta reta) até o eixo de simetria. Para melhor entendimento, vejamos o gráfico a seguir, que mostra uma parábola, seu vértice e seu eixo de simetria.

Simetria

Correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou ponto médio (Holanda Ferreira, 2000).



Repare que V(3, – 4) é o vértice da parábola e a reta, que passa por este ponto e é paralela ao eixo y, é o eixo de simetria. Os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo de simetria, ou seja, a distância do ponto A até o eixo é igual à distância do ponto B até o eixo. Neste caso, a distância é igual a 2. O mesmo ocorre para os pontos C e D: são simétricos em relação ao eixo de simetria e neste caso a distância é 1. Podemos ainda notar que os pontos E e F também estão a uma mesma distância do eixo de simetria da parábola, que neste caso é igual 3.

Importante

É importante destacar que, pelo gráfico, vemos que a coordenada x do vértice (x_v) é igual a 3, e este número pode ser obtido, sempre fazendo a média aritmética das raízes (neste exemplo, as raízes são 1 e 5) ou quaisquer outros dois valores de x desde que sejam abscissas de pontos simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola, isto é, $x_v = (1+5)/2 = (2+4)/2 = (0+6)/2 = 3$.

Seção 2

Como construir o gráfico de uma função do 2° grau?

Vimos como identificar os elementos do gráfico da função do 2° grau, mas como podemos construí-lo? Para responder a esta pergunta, precisamos aprender a calcular cada um dos elementos da parábola, vistos na seção anterior. Veja o passo a passo a seguir. Começaremos, calculando as raízes da função.

Passo 1: Zeros (ou raízes) da função

Como você já sabe, as raízes da função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c, \ \ a \neq 0$, são os números reais x que obtemos ao tomarmos $f(x) = 0$. Elas são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Importante

A quantidade de raízes reais de uma função do 2º grau depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- Quando Δ é zero, há só uma raiz real;
- Quando Δ é negativo, não há raiz real.

Passo 2: Coordenadas do vértice

Para calcularmos as coordenadas do vértice $V(x_v\ y_v)$ da parábola, usaremos as fórmulas

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Também podemos obter a coordenada x do vértice calculando a média aritmética das raízes. De fato, as raízes dadas pela Fórmula de Bhaskara são $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, cuja média aritmética é $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Também podemos obter a coordenada y do vértice, calculando a imagem de $x = -\frac{b}{2a}$ pela função f.

Vejamos:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

Vale lembrar que o vértice indica o valor mínimo (se $a > 0$) ou máximo (se $a < 0$) da parábola e que a reta que passa pelo vértice e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola.

Saiba Mais

Passo 3: Ponto em que o gráfico intersecta o eixo y

Para sabermos qual é o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y, basta anularmos a coordenada x.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$; logo, para $x = 0$, temos:

$f(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c = c$

Então, o par ordenado $(0, c)$ é o ponto em que a parábola intersecta o eixo dos y.

Passo 4: Concavidade da parábola

Antes de construirmos o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, além do cálculo das raízes, das coordenadas do vértice e do ponto de intersecção com o eixo y, é necessário sempre estar atento à concavidade da parábola. Para isso, basta considerar que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo;

Importante

Resumindo...

Para construir o gráfico de uma função quadrática sem montar a tabela de pares ordenados (*x*,*y*), basta levar em consideração as cinco informações a seguir.

1. Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos *x*.
2. O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou máximo ($a < 0$).
3. A reta que passa por *V* e é paralela ao eixo dos *y* é o eixo de simetria da parábola.
4. $(0,c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo dos *y*.
5. O valor do coeficiente *a* define a concavidade da parábola.

Exemplo:

Para construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, temos de determinar o seguinte:

1. As raízes da função

Para determinar as raízes, façamos $f(x) = 0$, ou seja, $x^2 - 2x - 3 = 0$. Podemos resolver esta equação, usando a forma de resolução de uma equação do 2° grau,

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$, $\Delta = 16$.

$X = (2 \pm 4)/2$, logo $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

Outra maneira de encontrar as raízes é usando soma e produto das raízes. A fórmula da soma das raízes é $S = -b/a$, e o produto das raízes é $P = c/a$. Assim, devemos pensar em dois números cuja soma $S = 2$ e o produto é $P = -3$. Estes números são -1 e 3. Logo, as raízes de $f(x)$ são $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

2. As coordenadas do vértice $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Calculando a coordenada x do vértice, temos $x_v = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1$. Neste caso, poderíamos calcular x_v através da média aritmética das raízes: $x_v = \frac{-1+3}{2} = 1$.

Calculando a coordenada y do vértice, temos $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ e, assim, $y_v = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -4$.

Poderíamos determinar o valor de y_v calculando a imagem de x_v pela função f, isto é, $y_v = f(x_v) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

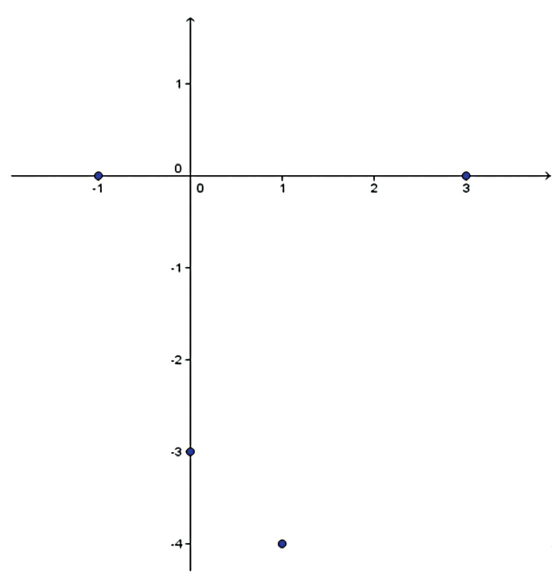
Logo, o vértice é o ponto $V(1, -4)$.

3. O ponto onde a parábola intersecta o eixo *y*

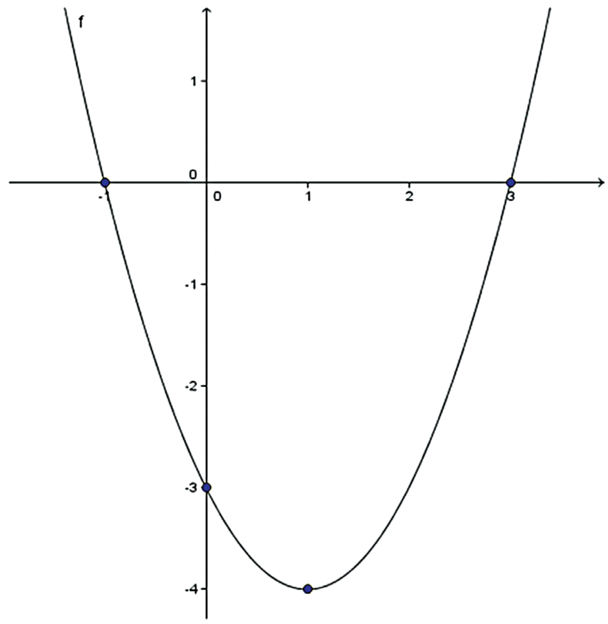
Para isso, usamos o valor de c, que neste caso é – 3. Logo, o ponto é (0,– 3).

4. A concavidade da parábola

A concavidade está voltada para cima, pois $a = 1$, ou seja, é positivo. Portanto, o vértice será um ponto de mínimo. Agora marcamos os pontos obtidos, como mostra a figura a seguir:



Como sabemos que a concavidade está voltada para cima, devemos unir os pontos desenhando uma parábola, como mostra a figura a seguir:



Agora é com você. Faça a atividade 3 e confira seu aprendizado.

Atividade 3

Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

b) $g(x) = -x^2 - 2x - 1$

c) $h(x) = x^2 + 2x + 3$

Anote suas respostas em seu caderno

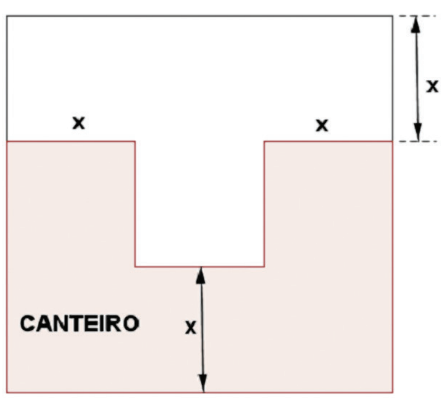
Seção 3
Aplicações da função quadrática

Veremos agora algumas aplicações da função quadrática e como todos esses conceitos que acabamos de estudar podem ser utilizados para resolvermos problemas práticos. Para isso, apresentaremos três exemplos com suas respectivas resoluções.

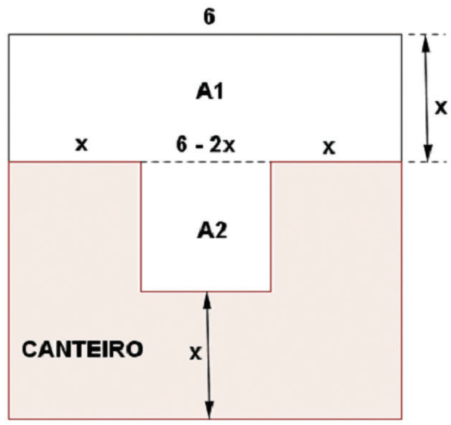
Exemplo 1:

Desejamos construir um canteiro, para plantações, em um grande jardim de formato quadrado de 36 m^2 de área, como mostra a figura a seguir, com $0 < x < 3$.

1. Se $x = 2$, qual será a área do canteiro?
2. Mostre que a área do canteiro depende do valor de x.
3. Para que valor de x esse canteiro terá a maior área possível?
4. Qual é o valor dessa área?
5. É possível observar graficamente a variação dessa área em função de x. Construa um gráfico que dá a área do canteiro (no eixo y) em função do valor de x.



Como o jardim tem formato quadrado de área 36 m^2, temos que o lado deste é igual a 6 m. Para calcularmos a área do canteiro (A), devemos subtrair da área do jardim as áreas dos retângulos A1 e A2 indicadas na figura a seguir.



Temos:

A = 36 – A1 – A2, como A1 = 6x e A2 = $(6 - 2x)^2$, então

A = $36 - 6x - (6 - 2x)^2 = 36 - 6x - (36 - 24x + 4x^2) = 36 - 6x - 36 + 24x - 4x^2$,

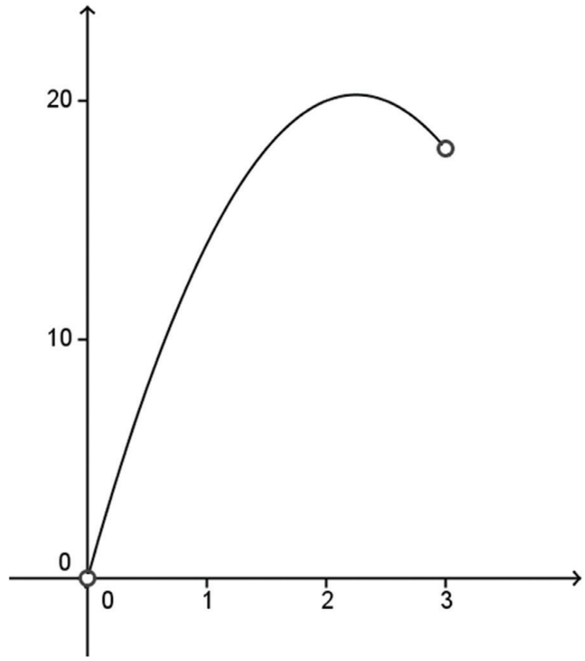
ou seja,

A = $-4x^2 + 18x$

Logo, a área desse canteiro é expressa por uma função do 2º grau. Vamos responder aos itens do enunciado desse exemplo.

1. Se x = 2, a área do canteiro é $A = -4(2)^2 + 18(2) = -16 + 36 = 20\ m^2$.
2. A expressão $A = -4x^2 + 18x$ mostra que o valor de A depende do valor de x, isto é, ao variarmos o valor de x, variamos também do valor de A.
3. Note que a função quadrática que dá o valor de A em função de x possui coeficiente a negativo. Dessa forma, A possui um valor máximo dado pela fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$ e o valor de x para que tal fato ocorra é dado pela fórmula $-\frac{b}{2a}$. Assim, $_{\max} = \frac{18}{} = 2,25$.

   Logo, o valor de x é 2,25 m.
4. Utilizando a fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$, temos que $\Delta = 324 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = 324$ e que a área máxima do canteiro é $A_{\max} = \frac{-324}{-16} = 20,25 m^2$.
5. Vamos construir o gráfico que dá a variação da área em função do comprimento x. Note que x não pode assumir qualquer valor real, mas apenas valores entre 0 e 3.



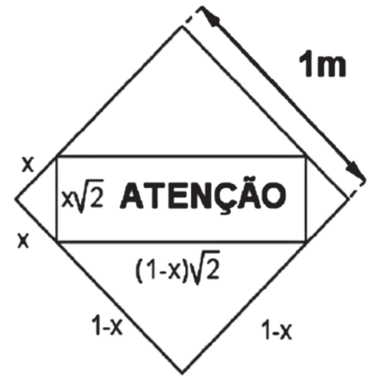
Exemplo 2 (adaptado da U.F. Santa Maria – RS):

Algumas placas de advertência para o trânsito têm a forma de um quadrado de lado 1m, que possui no seu interior retângulos destinados a mensagens, como mostra a figura a seguir.

Dentre os possíveis retângulos, determine aquele que tem a maior área.

Solução:

Os lados do retângulo são $x\sqrt{2}$ e $(1-x)\sqrt{2}$, pois são hipotenusas dos triângulos retângulos isósceles, como mostra a figura:



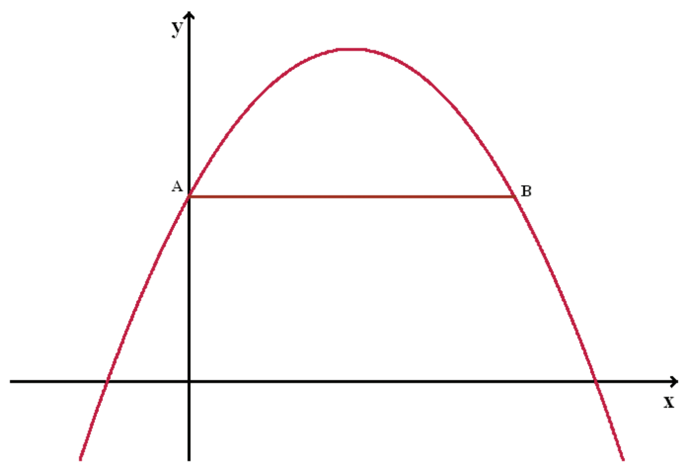
Assim, a área do retângulo é dada pela função $A(x)=(1-x)\sqrt{2}x\sqrt{2})$, ou seja, $A(x)=-2x^2+2x$. A área máxima é obtida pela fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$, e o comprimento *x* que dá o retângulo de área máxima é obtido pela fórmula $-\frac{b}{2a}$. Assim,

$$x=-\frac{2}{2\cdot(-2)}=0,5$$
$$\Delta=2^2-4\cdot(-2)\cdot 0=4$$
$$\text{e } A_{\max}=-\frac{4}{4\cdot(-2)}=0,5$$

Logo, todos os lados do retângulo medem $0,5\sqrt{2}$ m e a área máxima do retângulo é de 0,5 m².

Exemplo 3 (adaptado da UF-MG)**:**

Na figura a seguir, os pontos A e B estão sobre o gráfico da função do 2° grau f(x) = ax² +bx + c. O ponto A é o ponto de interseção da parábola com o eixo y, e o segmento AB é paralelo ao eixo x.



Determine o comprimento do segmento AB.

Solução:

Como a distância do ponto A até o eixo de simetria é igual à distância do ponto B até o eixo de simetria, então o comprimento do segmento AB é o dobro desta distância. Sabemos que a distância do ponto A até o eixo de simetria é igual à coordenada x do vértice da parábola, ou seja, $-\frac{b}{2a}$. Logo, o comprimento do segmento AB é igual a $2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$.

Agora, sugerimos duas atividades, relacionadas a problemas reais. Para isso, apresentaremos situação-problema, envolvendo variação de grandezas como recurso para a construção de argumentos.

Atividade 4

Um modesto hotel tem 50 quartos individuais e cobra R$ 40,00 pela diária. Com o aumento da procura, devido ao evento “Rio+20”, o dono do hotel resolveu aumentar o preço da diária para lucrar mais. Mas percebeu que para cada R$ 2,00 de aumento na diária ele perdia um hóspede. Dessa forma, quanto ele deve cobrar pela diária para que sua receita (produto do preço da diária pela quantidade de hóspedes) seja a maior possível?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

PUC-MG

Uma pedra é atirada para cima e sua altura h, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$, em que t é medido em segundos. Se a pedra atingiu a altura máxima no instante t = 2s, pode-se afirmar que o valor de a é:

a. – 3

b. – 2

c. 2

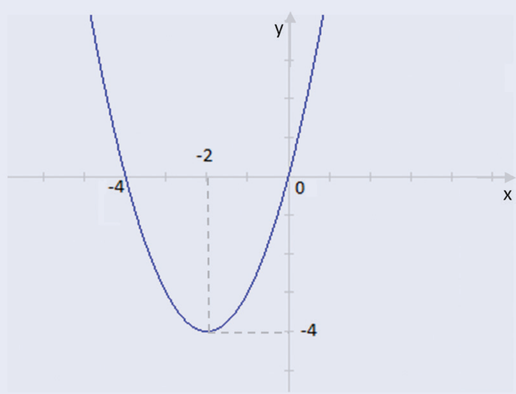
d. 3

Anote suas respostas em seu caderno

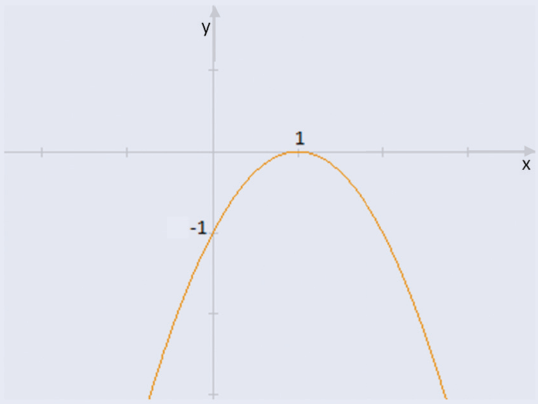
Atividade 6

Determine os coeficientes a, b e c de cada uma das funções do 2º grau representadas graficamente abaixo.

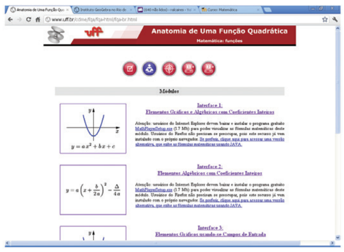
a.



b.



Anote suas respostas em seu caderno



Página da UFF de conteúdos digitais para ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística. Explore os elementos gráficos de uma função do 2° grau na "Anatomia de uma função quadrática".

Visite: http://www.uff.br/cdme/fqa/fqa-html/fqa-br.html

Multimídia

Nesta unidade, vimos a importância do estudo de funções polinomiais do 2° grau e foram apresentadas várias aplicações práticas. Entendemos também que podemos tomar decisões importantes por meio de um estudo detalhado, obtido pela análise da lei de formação de funções do 2° grau. Além disso, aprendemos a fazer uma leitura e interpretar gráficos de funções do 2° grau.

Resumo

- Função polinomial do 2º grau (também chamada de função quadrática) é toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$.
- O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola. Essa curva tem concavidade voltada para cima, quando $a>0$ e para baixo, quando $a < 0$.
- O vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola é obtido pelas fórmulas $x_v = -b/2a$ e $y_v = -\Delta/4a$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.
- O vértice de uma parábola será um ponto de máximo, quando a concavidade estiver voltada para baixo, e será um ponto de mínimo, quando estiver voltada para cima.
- Os zeros ou raízes da função do 2° grau são obtidos ao tomarmos $f(x) = 0$ e podem ser calculados pela fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Veja Ainda

Para entender como se demonstram as fórmulas contidas nesta unidade e para conhecer um pouco mais sobre este assunto, indicamos os seguintes sites:

- http://matematizando-gabriel.blogspot.com.br/2011/05/aqui-esta-deducao-da-formula-da.html (dedução da fórmula das coordenadas do vértice).
- http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html (a fórmula de resolução de equação do 2° grau não é de Bhaskara).
- http://www.mais.mat.br/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_quadr%C3%A1tica (aplicações).

Referências

Livros

- HOLANDA FERREIRA, A. B. de. **Minidicionário da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática**: ciência e aplicações, Saraiva, vol.1.
- LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A matemática do Ensino Médio**, vol.1, SBM.
- Revista do Professor de Matemática (RPM) 39, p. 54.

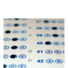
Imagens


- http://www.sxc.hu/photo/475767


- http://www.sxc.hu/photo/1118070


- http://www.sxc.hu/photo/1341162


- http://www.sxc.hu/photo/1382166


- http://www.sxc.hu/photo/517386

Respostas das Atividades

Atividade 1

a. para cima e ponto de mínimo

b. para baixo e ponto de máximo

c. para baixo e ponto de máximo

d. para cima e ponto de mínimo

e. para cima e ponto de mínimo

Atividade 2

a. A raiz é 2

b. As raízes são –2 e 2

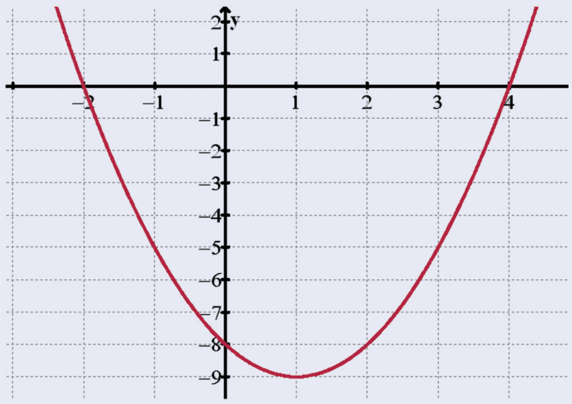
c. As raízes são –1 e 2

d. Não tem raiz real

e. A raiz é –3

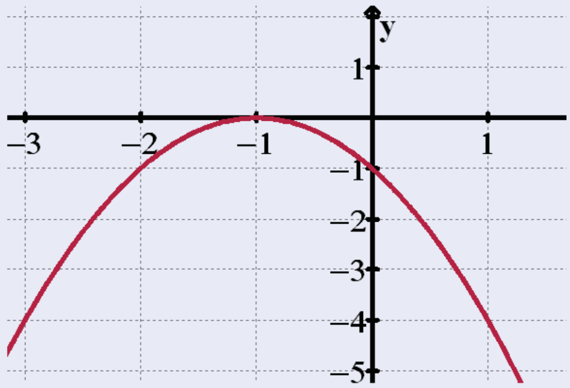
Atividade 3

a.

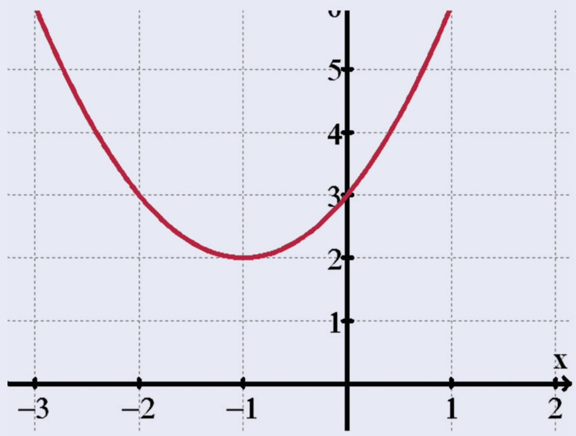


Respostas das Atividades

b.



c.



Atividade 4

A receita é dada pela fórmula $R(x) = -2x^2 + 60x + 2000$. Logo, o preço para que a receita seja máxima será igual a $p = 70$. Tomar cuidado que $p \neq x$.

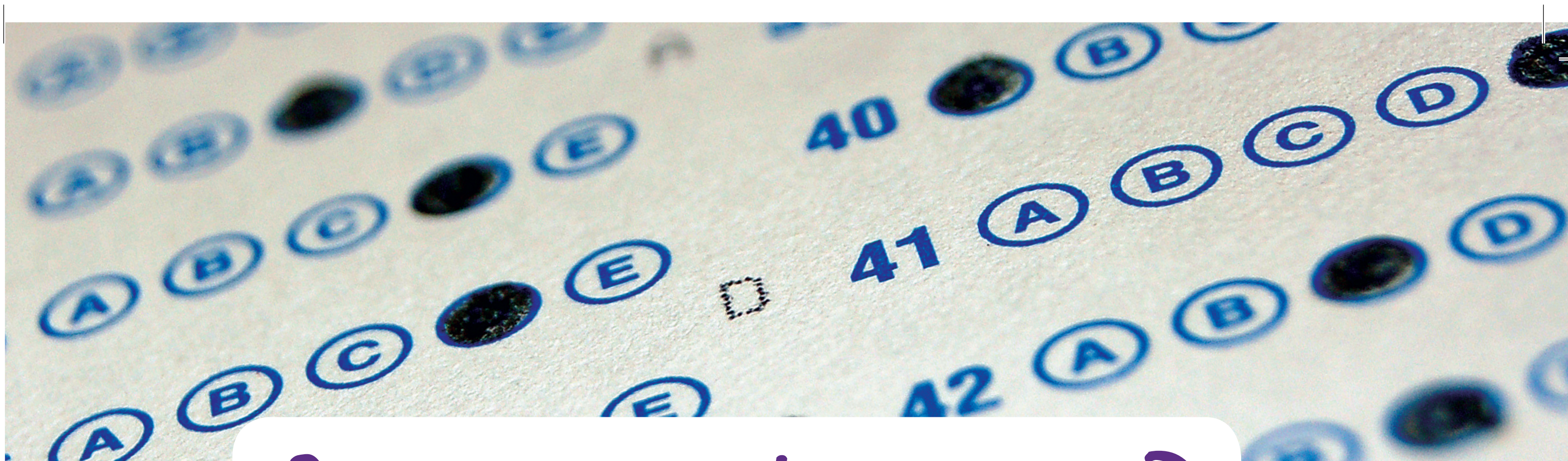
Atividade 5

Usando a fórmula do x_v, temos que $a = -3$. Logo, a alternativa correta é a letra *a*.

Atividade 6

a. $f(x)=x^2+4x$

b. $f(x)=-x^2+2x-1$



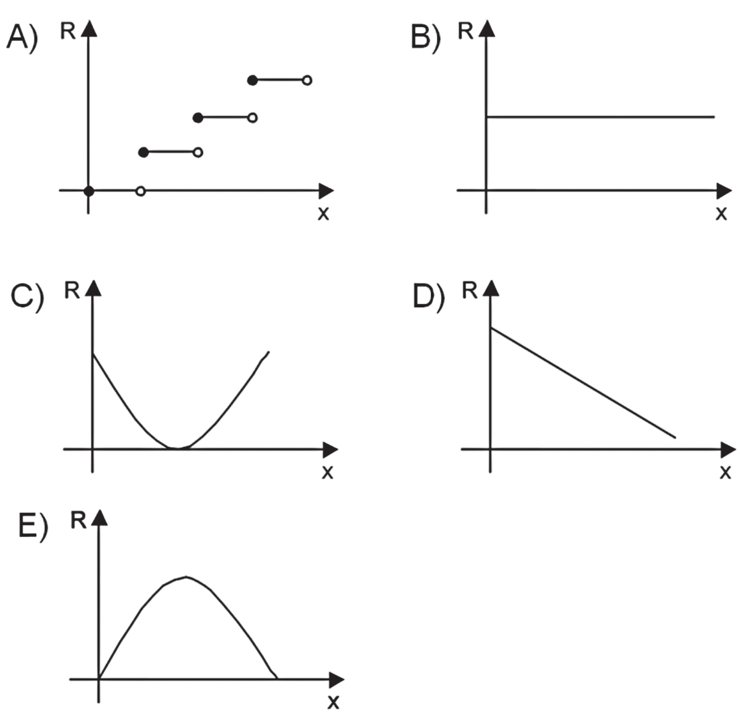
O que perguntam por aí?

AQuestão 1 (ENEM 2000)

Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

$R(x) = k.x.(P-x)$, onde k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para x real, é:



Resposta: Letra E

Comentário: A rapidez de propagação de um boato é dada pela função do 2° grau R(x) = k.x.(P – x), ou seja, R(x) = kPx – kx^2 . Como uma função do 2° grau é descrita como f(x) = ax^2 + bx +c, podemos dizer que, neste caso, a = –k, b = kP e c = 0. Como k é positivo, então o valor de a é negativo, podemos então afirmar que a concavidade da parábola está voltada para baixo. Como a única alternativa em que a parábola tem concavidade voltada para baixo é a letra E, então esta é a alternativa correta. Observe ainda que quando x = 0, R = 0 também, o que confere com o gráfico.

Questão 2

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a. 11.000

b. 22.000

c. 33.000

d. 38.000

e. 44.000

Resposta: Letra B

Comentário: A máxima rapidez de propagação (R_{max}) ocorre quando o número de pessoas que conhece o boato for máxima (x_{max}). Devemos, assim, calcular o x do vértice (x_v) da parábola, mostrada anteriormente. Para isso, usaremos a fórmula x_v = – b/2a. Temos, então, x_v = –kP/2·(– k). Como o público-alvo é de 44.000 pessoas, temos que P = 44000. Substituindo na fórmula do x do vértice, temos: x_v = 44000/2, ou seja, x_v = 22000. Logo, a alternativa correta é a letra b.

Questão 3 (Faap-SP)

Uma companhia estima que pode vender mensalmente *q* milhares de unidades de seu produto ao preço de *p* reais por unidade. A receita mensal das vendas é igual ao produto do preço pela quantidade vendida. Supondo p= –0,5q + 10, quantos milhares de unidades deve vender mensalmente para que a receita seja a máxima possível?

a. 18

b. 20

c. 5

d. 10

e. 7

Resposta: Letra D

Comentário: Como a receita mensal das vendas é o produto do preço pela quantidade vendida, então se chamamos de R a receita, temos: $R = p \cdot q$, e substituindo p pela expressão fornecida na questão, obtemos $R = (-0{,}5q + 10)q$. Assim, chegamos à função do 2° grau $R = -0{,}5q^2 + 10q$. Para determinarmos quantos milhares de unidades deve vender mensalmente para que a receita seja a máxima possível, devemos determinar o valor de q dado pela fórmula $-b/2a$. Logo, $q_{max} = -10/2\cdot(-0{,}5) = -10/-1 = 10$. Logo, deve vender 10 mil unidades para que a receita seja máxima. A resposta é a alternativa d.

Trigonometria na circunferência

Para início de conversa...

Figura 1: Reportagem do jornal O Globo da década de 1990 mostra o relógio da Central do Brasil, no Rio de Janeiro, sendo limpo por dois funcionários da CBTU (Companhia Brasileira de Trens Urbanos), devido a um ato de vandalismo que se difundia cada vez mais pela cidade: a pichação.

Sem dúvida, você já deve ter visto várias pichações nos mais diversos lugares. No início da década de 90, a moda era destacar-se dos demais pichadores pela ousadia, pichando em locais cada vez mais altos e arriscados. Hoje em dia, ainda há pichações, porém num movimento cada vez mais fraco. Mas a ousadia de pichar o relógio da Central do Brasil assusta bastante. Simplesmente, porque é muito alto!

Você sabe quantos metros de altura tem esse relógio?

São 110 metros de altura do nível da rua até o relógio que foi fabricado em 1943. Possui quatro faces quadradas de 10 metros de lado e ocupa exatamente cinco andares do prédio, do 22º ao 26º andar.

Realmente, é muita coragem!

E você? Teria coragem de subir até o relógio da Central para realizar o mesmo trabalho que os dois funcionários da foto realizaram?

Um dos funcionários presentes nesta foto está pisando a base do relógio, isto é, está a 110 metros de altura. Agora, observe na foto que o outro funcionário está agarrado no ponteiro das horas. Será que tem ideia da altura que se encontra? Como podemos calcular a que altura ele se encontra? Será que depende da posição do ponteiro no qual se segura?

Fique tranquilo. Estaremos juntos nesta unidade para discutir de que forma podemos determinar algumas distâncias dentro de um círculo. Para isso, tomaremos por base a Trigonometria que aprendemos na unidade anterior.

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica;
- Identificar o radiano como unidade de medida de arco;
- Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa;
- Representar o seno, o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico;
- Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta.

Seção 1
Calculando distâncias na circunferência

Na unidade passada, aprendemos a calcular o comprimento de alguns segmentos, principalmente em triângulos, levando-se em consideração alguns ângulos. Isto é, usamos a Trigonometria para efetuar tais cálculos.

Será que podemos fazer uso novamente da Trigonometria para determinarmos distâncias em uma circunferência?

Vamos analisar a situação que nosso amigo, funcionário da CBTU, está passando. Para facilitar um pouco nossa análise, vamos considerar que ele está sobre o número 3 do relógio, conforme a figura.

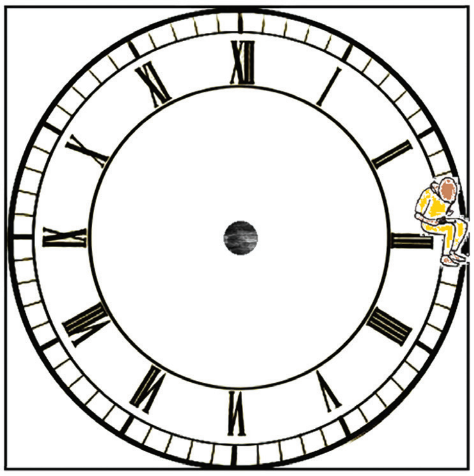


Figura 2: Representação do relógio da Central do Brasil com o funcionário da CBTU sentado junto ao número 3. Que tal darmos um pseudônimo ao nosso amigo? O que acham de João?

Vamos lembrar que esse relógio tem a forma de um quadrado com 10 metros de lado. Sendo assim, Sr. João está a uma altura que corresponde à metade da medida do lado do relógio, isto é, a 5 metros de altura. Contudo, não se esqueça de que o relógio encontra-se a 110 metros de altura do chão. Logo, Sr. João está a 115 metros de altitude. Essa foi fácil, não foi?!

Antes de prosseguir, uma pequena atividade:

Atividade 1

Sr. João também estaria a uma altura de 115 metros de tivesse sentado em um outro número do relógio. Que número é esse?

Anote suas respostas em seu caderno

Agora, vejamos outra situação: digamos que Sr. João esteja sentado sobre o número 2. Observe, então, a figura a seguir:

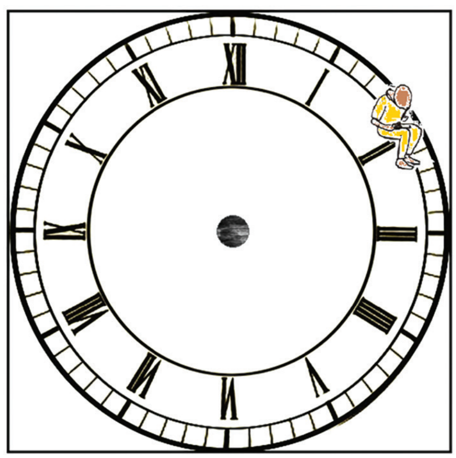


Figura 3: **Sr. João está um pouco mais alto. Agora, está no número 2. Como poderemos calcular o quanto que o Sr. João subiu? Quer uma dica? Use a Trigonometria!**

Ora, ora.... Como a Trigonometria vai nos ajudar a resolver este caso?

Vamos investigar!

Lembremos que toda volta completa em uma circunferência possui 360º (360 graus). Como em um relógio há 12 números igualmente separados ao longo da circunferência, podemos garantir que existe um ângulo de $360^{\circ} \div 12 = 30^{\circ}$ entre dois números. Isto é, Sr. João percorreu um **arco** de 30º, ao sair do número 3 e ir para o número 2.

Observe a figura a seguir. Nela, colocamos o ângulo de 30º entre os números 2 e 3. Perceba que a altura até o número 3 já foi calculada anteriormente. O que falta apenas é uma pequena distância que vamos chamá-la de x.

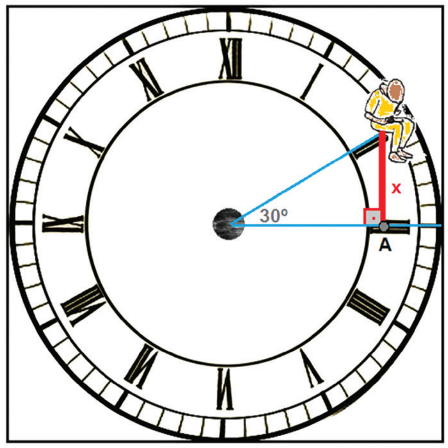
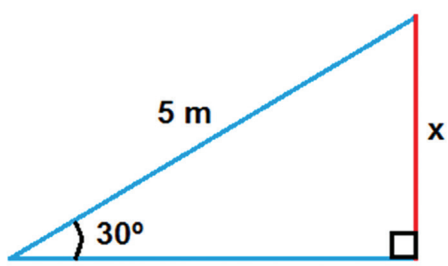


Figura 4: A distância x representa o quanto Sr. João deslocou-se verticalmente, quando estava no número 3. Repare que o centro do relógio, Sr. João e o ponto A formam um triângulo retângulo. Percebeu onde entra a Trigonometria?

Note bem este triângulo formado na figura. Conhecemos a medida do segmento que une o centro do relógio e o Sr. João: ele é o **raio da circunferência** do relógio, ou seja, tem 5 metros de comprimento.

Dessa forma, o triângulo fica assim:



Como vimos na unidade anterior, calculamos x através do seno de 30º.

Observe:

$$sen 30° = \frac{x}{5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{5}$$

$$x = 2{,}5 \, metros$$

Concluímos, portanto, que a altura do Sr. João sentado sobre o número 2 do relógio da Central do Brasil é de: 110m + 5m + 2,5m = 117,5 metros.

Vamos ver se estamos entendendo bem?

Atividade 2

Existe um outro número no qual seu Sr. João pode se sentar e manter a mesma altura de 117,5m. Marque a opção correta:

a. IV

b. VIII

c. IX

d. X

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 3

Complete as lacunas:

Caso Sr. João queira ficar na mesma altura do número 5, basta se posicionar sobre o número ________.

Os números que estão a 30º do número 12 são __________ e _________. Com isso, podemos dizer que possuem alturas _____________ (iguais / diferentes).

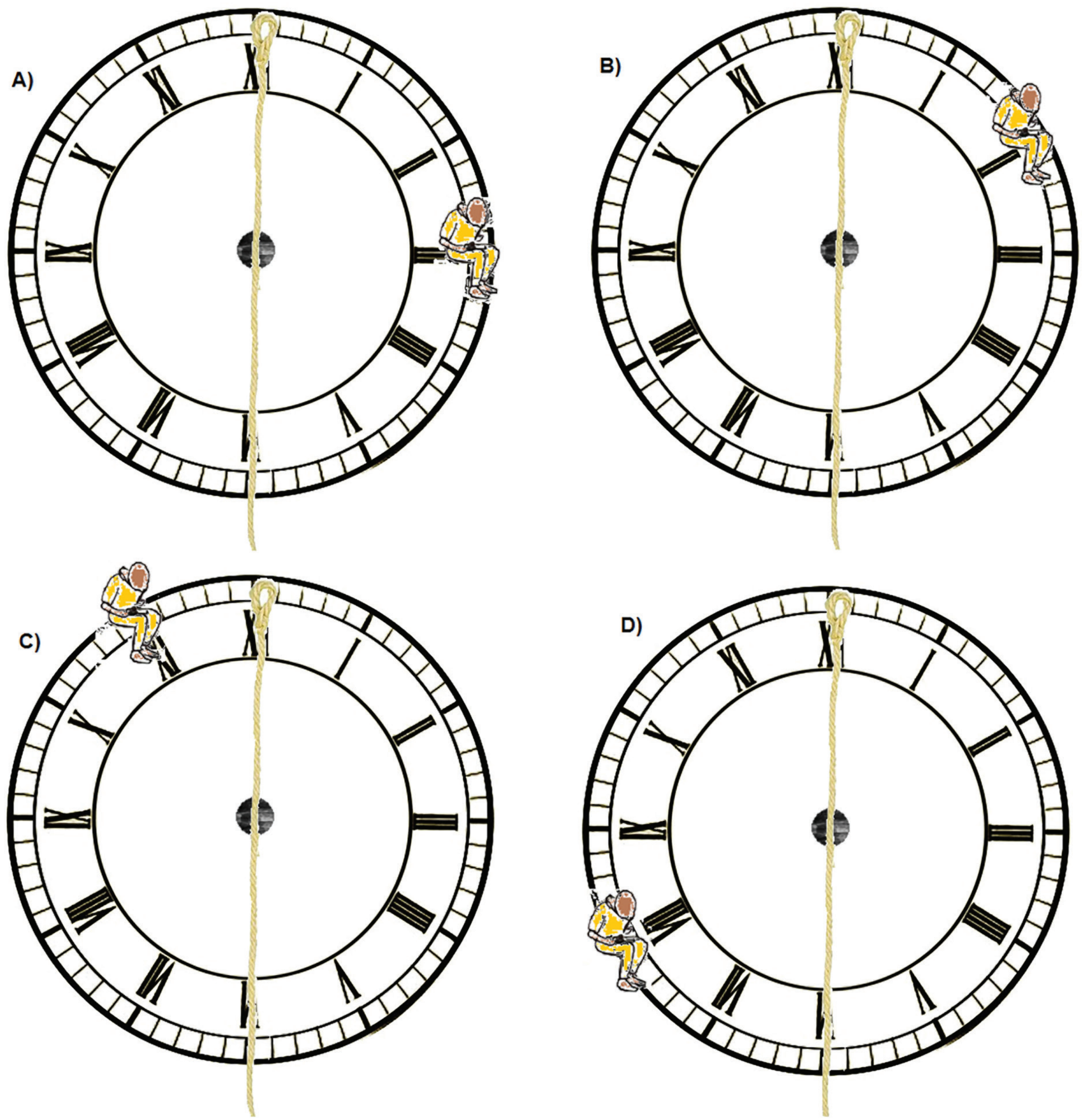
Sr. João quer ficar na maior altura possível. Para isso, terá de se sentar sobre o número ________________. A altura neste número é de ____________ metros. Já o número __________ está na posição mais baixa, isto é, a ________ metros de altura.

Anote suas respostas em seu caderno

Se considerarmos que Sr. João está agarrado ao ponteiro do relógio, percebemos que sua altura varia de acordo com a posição deste ponteiro. Sempre entre a máxima e a mínima que já calculamos. De tempos em tempos, as alturas repetem-se. A isso, damos o nome de *fenômeno periódico*.

Sendo assim, conseguimos esclarecer quanto à altura em que Sr. João encontra-se. Para isso, utilizamos a Trigonometria. Esperamos, então, que nosso amigo convença-se de que está a uma altura muito grande e que desça o quanto antes desse relógio!

Falando em descer, vamos pendurar uma corda no número 12 que leva até a base do relógio. Nossa tarefa agora é determinar a distância de cada número à corda pendurada. Vamos ver a figura a seguir para responder à próxima atividade:



Atividade 4

Responda às perguntas:

a. Em qual das opções, Sr. João está mais próximo da corda?

b. Qual a distância de Sr. João à corda na opção (A)? (Não se esqueça de que o raio deste relógio é de 5 metros).

c. Em duas situações, Sr. João está a uma mesma distância da corda. Quais são elas?

Anote suas respostas em seu caderno

Muito bem! Conseguimos responder à atividade sem precisar de cálculos (Veja na seção Resposta das atividades no final desta aula). Mas, como poderemos definir as distâncias do Sr. João à corda nas figuras B, C e D? Vamos analisar juntos?

Para calcularmos a distância de Sr. João à corda na situação descrita na letra B, temos de recapitular algumas informações sobre o relógio:

Sua circunferência tem raio igual a 5 metros e o arco determinado por dois números consecutivos possui 30º (trinta graus). Com isso, traçamos o raio do relógio (segmento que parte do centro do relógio até Sr. João) e a distância do nosso amigo até a corda. Vamos observar a figura a seguir. Ela ilustra tudo isso.

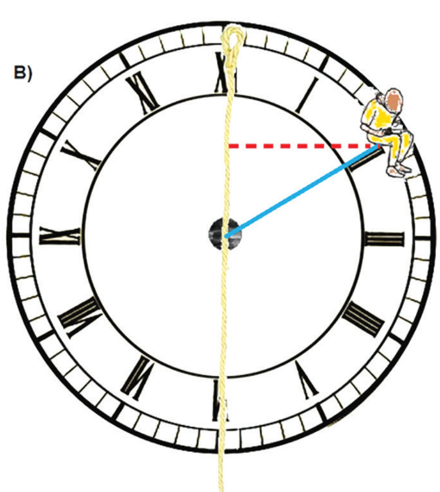


Figura 5: Esta figura mostra Sr. João sobre o número 2, o raio do relógio (em azul) e a distância dele à corda (em vermelho pontilhado). Repare que, neste desenho, não aparece um dado importante: o ângulo de 30º. Lembre-se de que isto é muito importante para resolvermos este problema através da Trigonometria.

Vamos colocar o ângulo de 30º, nesta figura. Para isso, vamos colocar um eixo horizontal (em cinza) que passa pelo centro do relógio. Note que o segmento vermelho pode ser projetado sobre este eixo horizontal (para esta projeção, fizemos uso de um eixo vertical em preto). Dessa forma, construímos um triângulo retângulo que contém um ângulo de 30º, um lado (a hipotenusa) medindo 5 metros e a distância que queremos calcular. Podemos chamar essa distância de y. Vejamos a figura para entender tudo isso.

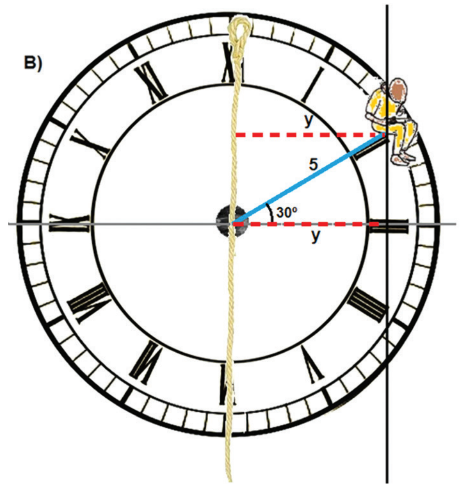
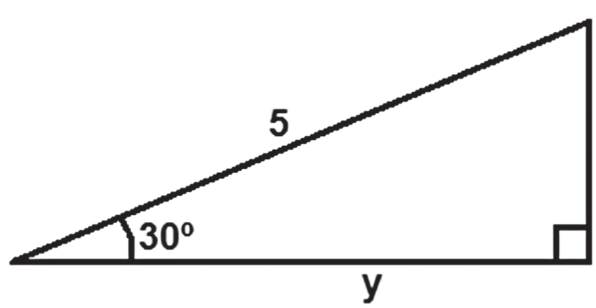


Figura 6: Com o raio de 5 metros em azul, a projeção da distância y em vermelho e o eixo vertical, formamos um triângulo retângulo que contém um ângulo de 30º. Com isso, temos que y representa um cateto adjacente a este ângulo e o raio, a hipotenusa.

Observem a figura a seguir que mostra apenas o triângulo que nos ajudará a resolver este problema:

Utilizando nossos conhecimentos de Trigonometria no triângulo retângulo que discutimos na unidade anterior, vemos que y é o cateto adjacente ao ângulo de 30º e 5 é a hipotenusa do triângulo.



Logo, faremos uso do cosseno do ângulo de 30º para determinarmos a medida do segmento y.

$$\cos 30° = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{y}{5}$$

Como $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos que:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cong \frac{5 \cdot 1{,}7}{2} = 4{,}3\,metros$$

Para calcularmos as distâncias do Sr. João à corda nos demais casos, vamos utilizar uma linha de raciocínio similar. Quer tentar?

Atividade 5

Calcule as distâncias de Sr. João à corda nos casos das letras C e D.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Complete as lacunas e verifique o que aprendemos:

Em todos os exercícios que fizemos, para calcularmos as distâncias verticais, sempre utilizamos a razão trigonométrica ________________ (seno / cosseno / tangente). Em todos esses exercícios, calculamos as distâncias horizontais sempre através do ______________ (seno / cosseno / tangente).

Aprendemos nesses exercícios que a distância de Sr. João até a corda depende da __________________ em que se encontra no relógio. Desta posição, sempre conseguimos determinar um ___________________ com o eixo horizontal que por sua vez passa pelo centro do relógio e pelos números ______ e ______.

Trabalhamos em todos os casos com este eixo horizontal. Ele é muito importante para o conhecimento que estamos desenvolvendo nesta unidade.

Anote suas respostas em seu caderno

Pessoal, após essa parte inicial desta unidade, verificamos que através da Trigonometria nos triângulos retângulos, podemos calcular distâncias em uma circunferência. Para isso, faremos algumas substituições: no lugar do relógio da Central do Brasil, colocaremos apenas uma circunferência de *raio igual a 1*. No lugar da corda, um eixo vertical. Manteremos em nossos desenhos o eixo horizontal.

Seção 2
Organizando os conceitos trabalhados

Observem na figura a seguir a circunferência de raio unitário, os eixos horizontal e vertical, e um pontinho A. Este pontinho A vai ser nosso principal referencial, um ponto de partida, um marco inicial, tal qual o número 3 do relógio da Central do Brasil.

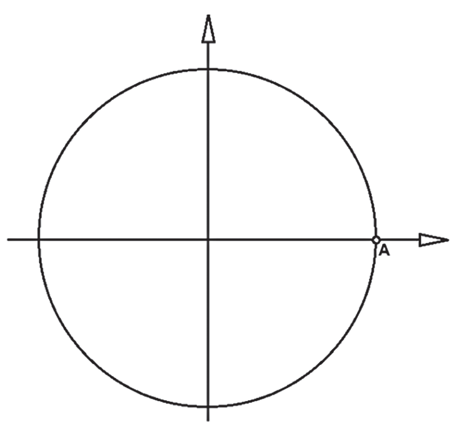


Figura 5: A circunferência acima possui raio unitário. O ponto A é o ponto de partida. Como se fosse o número 3 do relógio da Central do Brasil. Este ponto vai nos auxiliar a marcar os ângulos nesta circunferência, tal como fizemos no caso do Sr. João.

A estrutura que construímos na figura acima recebe um nome especial, devido à sua importância no desenvolvimento deste assunto. Seu nome é *Círculo Trigonométrico*. Vamos conhecê-lo melhor?

No círculo trigonométrico, podemos construir ângulos, conforme pudemos verificar ao longo desta unidade. Porém, não podemos nos esquecer de ter como ponto de partida o ponto A. Se percorremos a circunferência no sentido anti-horário (sentido contrário dos ponteiros do relógio), estaremos construindo ângulos positivos. Se percorremos no sentido horário, estaremos construindo ângulos negativos. Deem uma olhada no exemplo abaixo, em que percorremos dois arcos de medida igual a 45º.

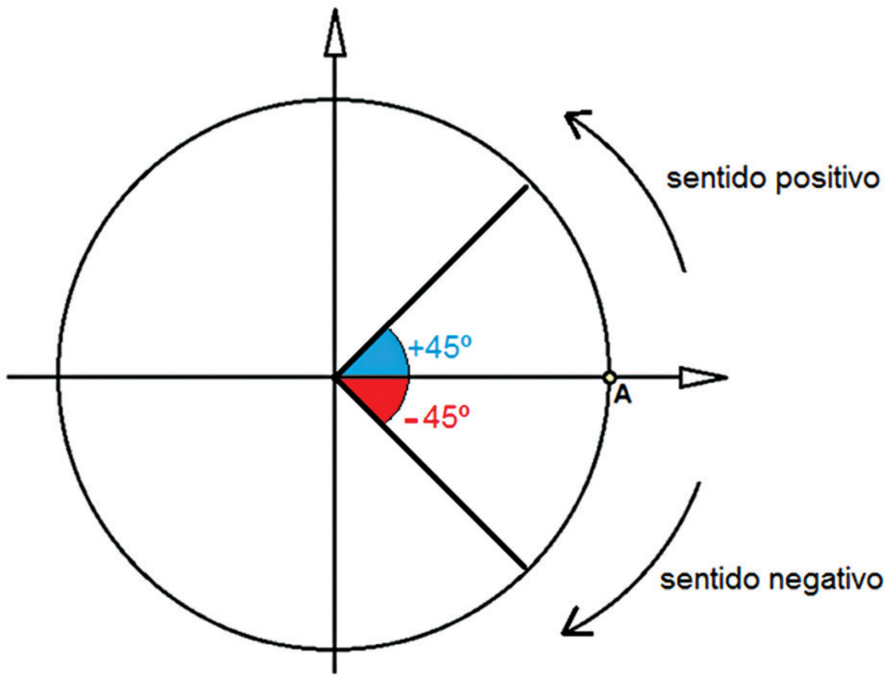


Figura 6: Círculo trigonométrico, contendo a marcação de dois ângulos de 45º. Contudo, um deles está no sentido negativo e o outro no positivo. Mas, você já se perguntou o porquê dos dois eixos na figura? Qual a função deles mesmo?

A presença dos eixos perpendiculares no círculo trigonométrico permite-nos calcular algumas distâncias, tal qual fizemos no relógio da Central. Como discutimos em uma atividade anterior, para calcularmos distâncias horizontais no círculo, fazemos uso do cosseno. Com isso, vamos definir o eixo horizontal como sendo o Eixo dos Cossenos. Da mesma forma, como sempre utilizamos o seno para calcularmos as distâncias verticais, vamos definir o eixo vertical como o Eixo dos Senos.

Vocês podem estar se perguntando: esses eixos são iguais aos *eixos cartesianos* que aprendemos no módulo sobre o estudo das funções?

É verdade. Eles fazem lembrar os eixos cartesianos mesmo. Funcionam praticamente da mesma forma. Possuem a parte positiva, a parte negativa e a marcação das coordenadas é feita da mesma forma. A diferença é que os eixos cartesianos determinam pontos em todo o plano. Já os eixos trigonométricos determinam pontos apenas sobre a circunferência de raio unitário, nenhum na parte de dentro e nem na de fora, apenas sobre a linha.

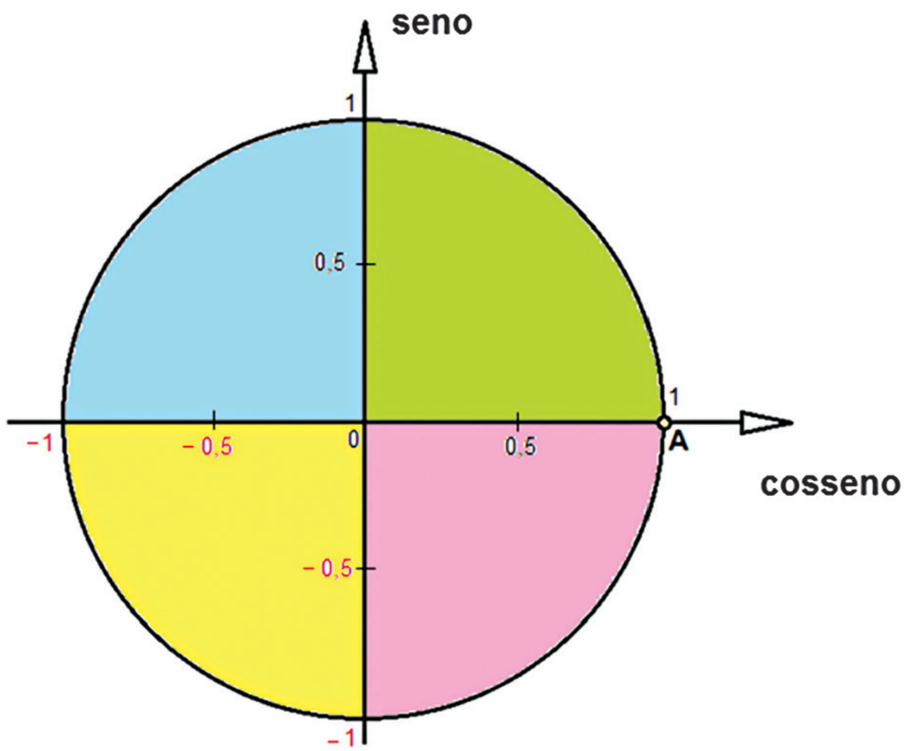


Figura 7: No círculo trigonométrico, os eixos variam de –1 até +1, pois funcionam apenas com a circunferência de raio unitário. Esses eixos dividem o círculo em quatro partes, chamadas de quadrantes. Como tudo começa pelo ponto A, girando no sentido anti-horário, teremos o 1º quadrante na cor verde, o 2º na cor azul, o 3º na cor amarela e o 4º na cor rosa.

A **Figura 7** mostra uma importante propriedade que podemos perceber: os valores no eixo dos senos e no eixo dos cossenos só variam de –1 a +1.

Agora, pessoal, sugiro explorar um pouquinho do círculo trigonométrico para que as demais propriedades e definições possam ser esclarecidas na prática.

Inicialmente, vamos colocar um ponto B na circunferência. Em seguida, traçamos a altura x deste ponto e o raio $\overline{OB}$. Perceba na Figura 8 a seguir que construímos, dessa forma, um triangulo retângulo, do mesmo jeito que fizemos com Sr. João, no relógio da Central do Brasil. Só que neste caso, o raio não é mais de 5 metros. O raio é unitário.

Como poderemos calcular a altura x do ponto B, sabendo que o ângulo AÔB vale 60º?

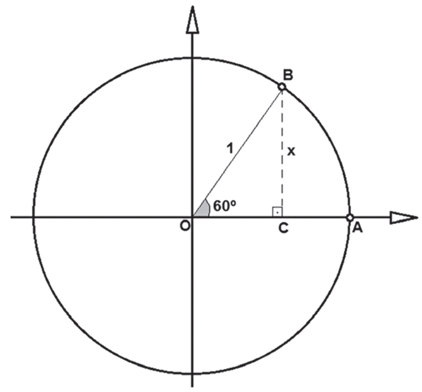


Figura 8: O ponto B sobre a circunferência possui uma altura x. Lembre-se da Trigonometria para calcular essa altura.

Como já fizemos antes, para determinar esta altura, utilizamos as razões trigonométricas. Nesse caso, mais especificamente, utilizaremos o seno do ângulo de 60º (distância vertical).

Este cálculo, deixamos por sua conta.

Atividade 7

Calcule a medida do segmento BC da **Figura 8** (altura do ponto B). Utilize uma estratégia semelhante para calcular a medida do segmento OC.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

Agora, marque um ponto D nesta circunferência, a partir de A, no sentido anti-horário, de modo que o arco considerado seja menor que 90º. Qual a altura deste ponto? Qual a distância desse ponto ao eixo vertical? É muito fácil! Tenho a certeza de que não vai errar.

Antes de encerrar esta atividade, onde estariam localizados na circunferência os seguintes pontos (sempre em relação ao ponto A)?

Ponto E → 180º	Ponto J → – 270º
Ponto F → 270º	Ponto K → 120º
Ponto G → 360º	Ponto L → 190º
Ponto H → – 90º	Ponto M → 300º
Ponto I → – 180º	Ponto N → 380º

Anote suas respostas em seu caderno

Estas últimas atividades levam-nos a entender que o raio unitário da circunferência permite-nos dizer que o eixo dos Senos revela-nos o valor do seno de cada ângulo. Da mesma forma que o eixo dos cossenos revela-nos o valor do cosseno de cada ângulo. E isso é muito importante, pois facilita em algumas coisas. Quer ver? Vamos lá!

É, pessoal. Rui parece não estar com sorte, mas nem tudo está perdido. Ele pode contar com nossa ajuda. Vamos entender um pouco o que Lia disse a ele:

Lia: quero a mesma quantidade que o número de soluções da equação $sen\, x = 0,5$.

Vamos recordar uma coisa: a solução de uma equação é o valor da incógnita, que neste caso é o x, que mantenha a igualdade da expressão. Também vamos considerar apenas os valores de x variando entre 0^0 e 360^0, isto porque em Trigonometria podemos considerar arcos com medidas maiores que 360^0, mas isto é um assunto para outro momento, não se preocupe agora! Vamos voltar ao problema que Rui precisa resolver...

Então, se relembrarmos a unidade anterior, quando aprendemos os valores dos senos de alguns ângulos, veremos que 0,5, ou ½ , era o valor do seno do ângulo de 30º. Já temos, portanto, a primeira solução. Será que existem mais? Vamos dar um pulinho no círculo trigonométrico!

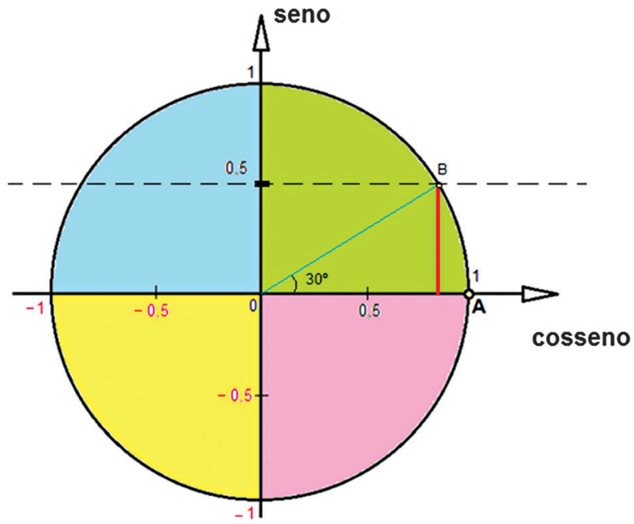
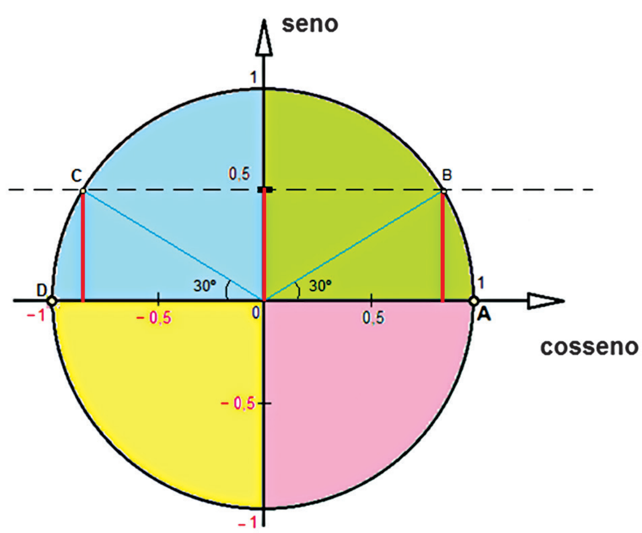


Figura 9: O ponto B, a 30º de A, é uma das soluções da equação, pois o seno de 30º (a distância vertical, a altura do ponto) é igual a 0,5. Repare, porém, que a linha pontilhada que determina essa altura, cruza o círculo trigonométrico em outro lugar. Para saber qual é esse ponto, vamos lembrar que na atividade 3 vimos que sempre havia duas posições no relógio em que Sr. João podia ocupar e manter a mesma altura. Note que algo similar ocorre aqui.

Se seguirmos o mesmo raciocínio que nas atividades com Sr. João, veremos que o outro ponto, do outro lado do eixo dos senos faz o mesmo ângulo com o eixo horizontal. Vamos visualizar isso na figura a seguir:



Sendo assim, como o ponto D faz 180º (meia volta) com o ponto A, então o ponto C está a 180º – 30º = 150º em relação ao ponto inicial A.

Giramos de A a D (sentido anti-horário, positivo) para determinar o ângulo de 180º. Giramos de D a C (sentido horário, negativo) para determinar os 30º.

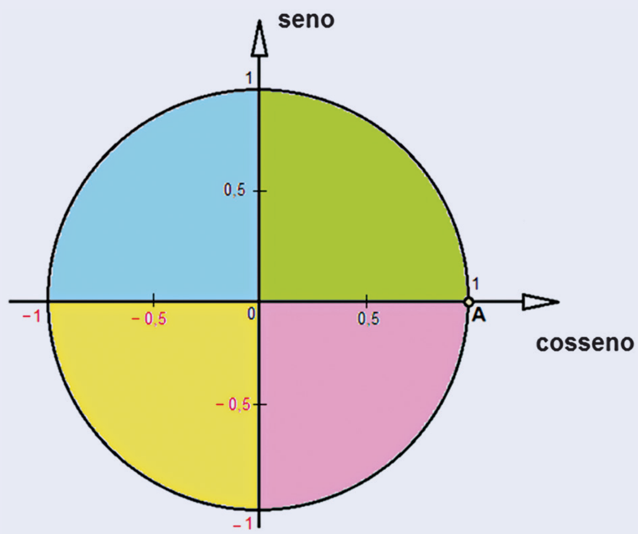
Importante

Então, vamos correr para avisar ao Rui que a equação que Lia lhe propôs, possui duas soluções: 30º e 150º. Sendo assim, deverá comprar para ela dois bombons e, assim, impressioná-la mais um pouco para quem sabe conquistar o seu coração.

Agora, é com você! Resolva a atividade proposta, relacionada ao que acabamos de realizar. Quem sabe dá sorte no amor também!

Atividade 9

Determine as soluções da equação $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Colocamos um círculo trigonométrico aqui para te auxiliar.



Anote suas respostas em seu caderno

Ao longo desta unidade, trabalhamos com diversos ângulos. E, como toda medida, foi necessário utilizarmos uma unidade, o grau. Porém, o Sistema Internacional de Unidades determina que a unidade padrão para ângulos é o RADIANO. Mas, antes de definirmos o radiano como uma unidade de medida de ângulo, vamos trabalhar um pouco com comprimentos de arcos de circunferência.

Saiba Mais

Duas circunferências distintas são figuras semelhantes. Dessa forma, a razão entre duas linhas homólogas é constante. Se, por exemplo, dividirmos a medida do diâmetro de qualquer circunferência pela medida do seu raio, obteremos 2 como resultado. Se dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro, também obteremos um valor constante, que chamaremos de π.

Mas que número é esse?

No link http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/calculo-valor-pi.htm é apresentado o método utilizado por Arquimedes para a determinação de uma aproximação para esse número.

Como foi dito anteriormente, ao dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pela medida do seu diâmetro, obteremos um valor constante (π). Podemos dizer que $\frac{C}{2r}=\pi$ (C indica o comprimento da circunferência e r a medida do seu raio), de onde obtém-se a fórmula para o cálculo do comprimento de uma circunferência: $C=2\pi r$.

Atividade 10

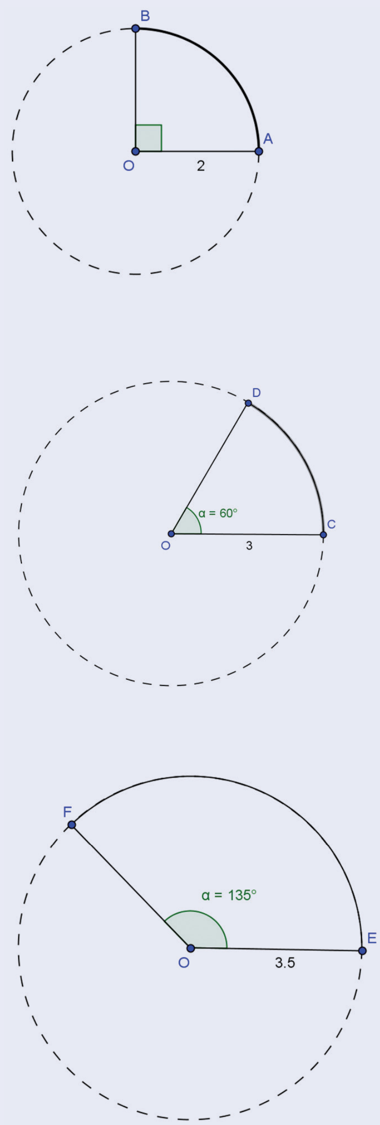
Quais os comprimentos das circunferências cujos raios medem 2 cm, 1 cm, 3.5 cm, respectivamente?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 11

Com a atividade anterior, calculamos comprimentos de circunferências. Como podemos calcular o comprimento de certas partes da circunferência? É fácil perceber que o comprimento de uma semicircunferência é πr (a metade do comprimento total, que é $2\pi r$).

Calcule os comprimentos dos arcos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ determinados por ângulos centrais nas circunferências a seguir.



Anote suas respostas em seu caderno

Um ângulo que mede 1 Radiano determina um arco de mesma medida que o raio da circunferência.

Como visto anteriormente, o comprimento de uma circunferência é $C=2\pi r$. Pela definição de radiano apresentada acima, uma volta completa possui 2π radianos. Dessa forma, podemos associar graus e radiano assim:

$360^\circ = 2\pi$ rad

Então, segue que:

$180^\circ = \pi$ rad

$90^\circ = \pi/2$ rad , e por aí vai...

Saiba Mais

A letra grega π representa na Matemática o número irracional 3,14159265.... Em geral, aproximamos esse valor ora para 3,14, ora para 3,1, ora para 3 dependendo do caso. Visite o site http://pt.wikipedia.org/wiki/Pi e conheça algumas curiosidades deste número.

Atividade 12

Complete a tabela de modo que a coluna à direita contenha a medida em radianos dos arcos medidos em graus da coluna da esquerda.

Medidas em graus	Medidas em radianos
30º	
	π/4 rad
60º	
	3π/2 rad
300º	
	2 rad

Anote suas respostas em seu caderno

Resumindo...

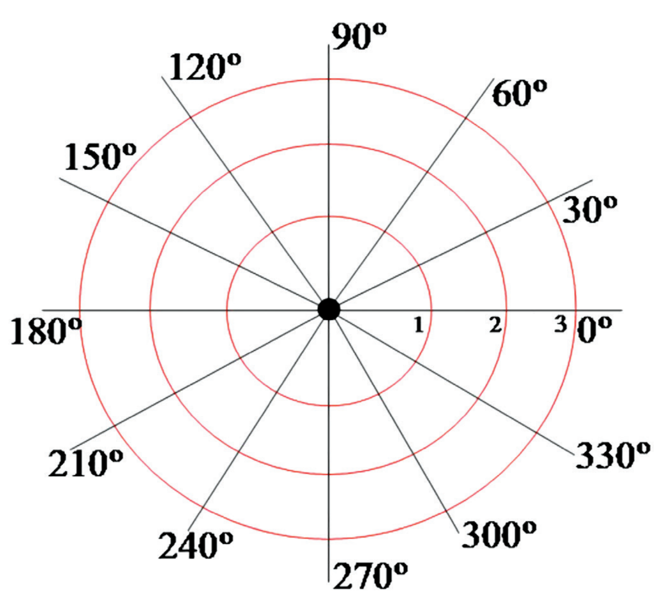
- No círculo trigonométrico, podemos encontrar os valores de seno e cosseno dos ângulos. Esses valores auxiliam no cálculo de algumas distâncias (medida de segmentos).
- O eixo vertical é conhecido como eixo dos senos.
- O eixo horizontal é conhecido como eixo dos cossenos.
- Os valores de seno e cosseno variam de –1 a +1.
- Uma volta determina um ângulo de 2 π radianos ou 360º.

Veja ainda

Início

1. Quer se divertir, utilizando os conceitos aprendidos nesta unidade?

Então acesse http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/batalha-naval-no-circulo-trigonometrico.htm. Chame um colega para jogar essa batalha naval diferente com você!!!!



Tabuleiro da batalha naval

2. Você pode fazer download no software gratuito Trigonometria 1.1 (que é um arquivo executável) no site http://www.baixaki.com.br/download/trigonometria.htm

O programa é fácil de usar, basta digitar o valor de um ângulo, em graus ou radianos e clicar em Iniciar ou Mostrar e o programa gera os valores das funções seno, cosseno e tangente.

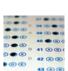
Referências

Livros

- Dante, L. Roberto. Matemática: **Contexto e aplicações**. Volume 1. Ed. 3. Impressão 1. Editora Ática. São Paulo. 2003.
- Iezzi, Gelson (e outros). **Fundamentos de Matemática Elementa**r. Volume 3. Ed Atual. São Paulo. 1995.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767



- http://www.sxc.hu/photo/517386

- http://www.sxc.hu/985516_96035528

Respostas das Atividades

Atividade 1

João estaria na mesma altura se estivesse sentado no número IX, ou seja, 9.

Atividade 2

Resposta letra d.

Atividade 3

Caso Sr. João queira ficar na mesma altura do número 5, basta se posicionar sobre o número sete.

Os números que estão a 30º do número 12 são onze e um. Com isso, podemos dizer que possuem alturas iguais (iguais / diferentes).

Sr. João quer ficar na maior altura possível. Para isso, terá de se sentar sobre o número doze. A altura neste número é de 120 metros. Já o número seis está na posição mais baixa, isto é, a 110 metros de altura.

Atividade 4

a. Opção c.

b. 5 metros

c. Opções b e d

Atividade 5

Letra d mesma distância da encontrada na letra b.

Letra c

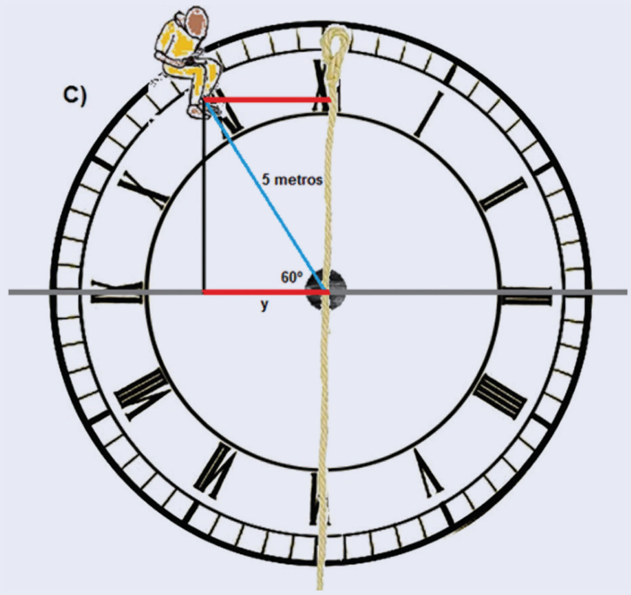
$$\cos 60^\circ = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{y}{5}$$

Respostas das Atividades

Como cos $60° = \frac{1}{2}$, temos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{5}{2} = 2,5 \, metros$$



Atividade 6

Em todos os exercícios que fizemos, para calcularmos as distâncias verticais, sempre utilizamos a razão trigonométrica <u>seno</u> (seno / co-seno / tangente). Ao passo que, em todos esses exercícios, calculamos as distâncias horizontais sempre através do cosseno (seno / <u>cosseno</u> / tangente).

Aprendemos nesses exercícios que a distância de Sr. João até a corda depende da <u>posição</u> em que se encontra no relógio. Desta posição sempre conseguimos determinar um <u>ângulo</u> com o eixo horizontal que por sua vez passa pelo centro do relógio e pelos números <u>três</u> e <u>nove</u>. Trabalhamos em todos os casos com este eixo. Ele é muito importante para o conhecimento que estamos desenvolvendo nesta unidade.

Atividade 7

$$sen 60° = \frac{x}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong \frac{1,7}{2} = 0,85$$

Para calcularmos OC, precisamos do cosseno de 60º.

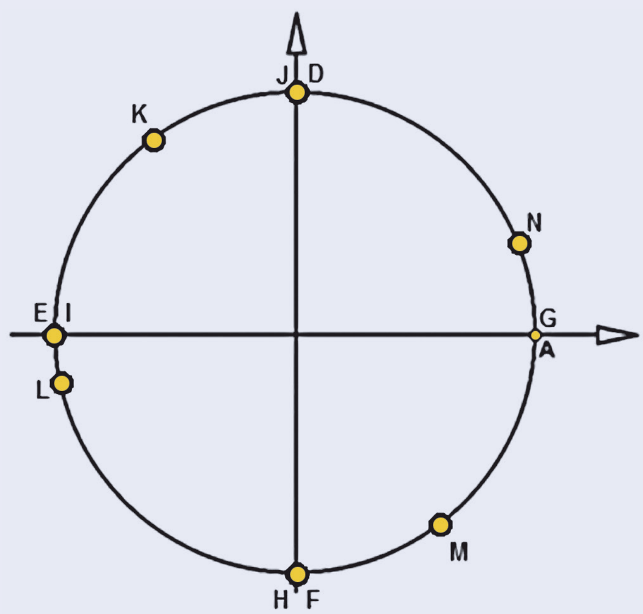
$$\cos 60° = \frac{OC}{1}$$

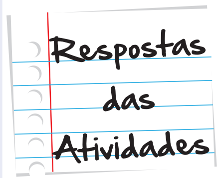
$$\frac{1}{2} = \frac{OC}{1}$$

$$OC = \frac{1}{2} = 0,5$$

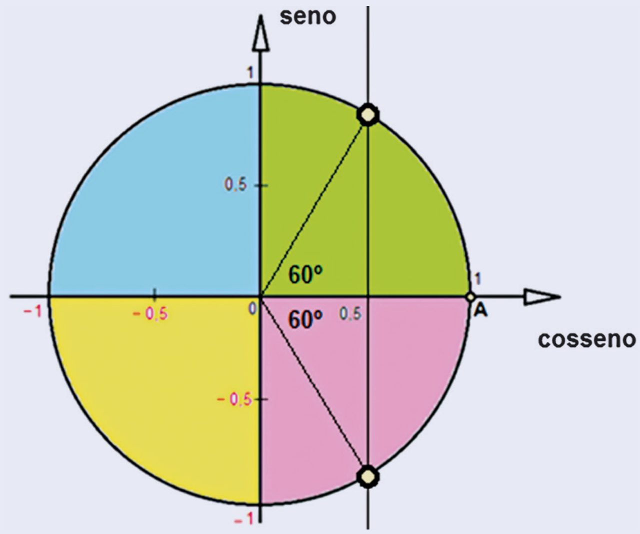
Atividade 8

A distância do ponto D ao eixo horizontal é igual ao raio da circunferência, ou seja, 1 unidade.





Atividade 9



Percebemos que a primeira solução é ângulo de 60º e que a segunda solução é o ângulo que está a 60º de A no sentido horário. Logo, 360º – 60º = 300º.

Atividade 10

4π cm, 2π cm, 7π cm respectivamente.

Atividade 11

$\overline{AB}$ tem comprimento igual à quarta parte do comprimento da circunferência de raio 2, ou seja, $AB = \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi$.

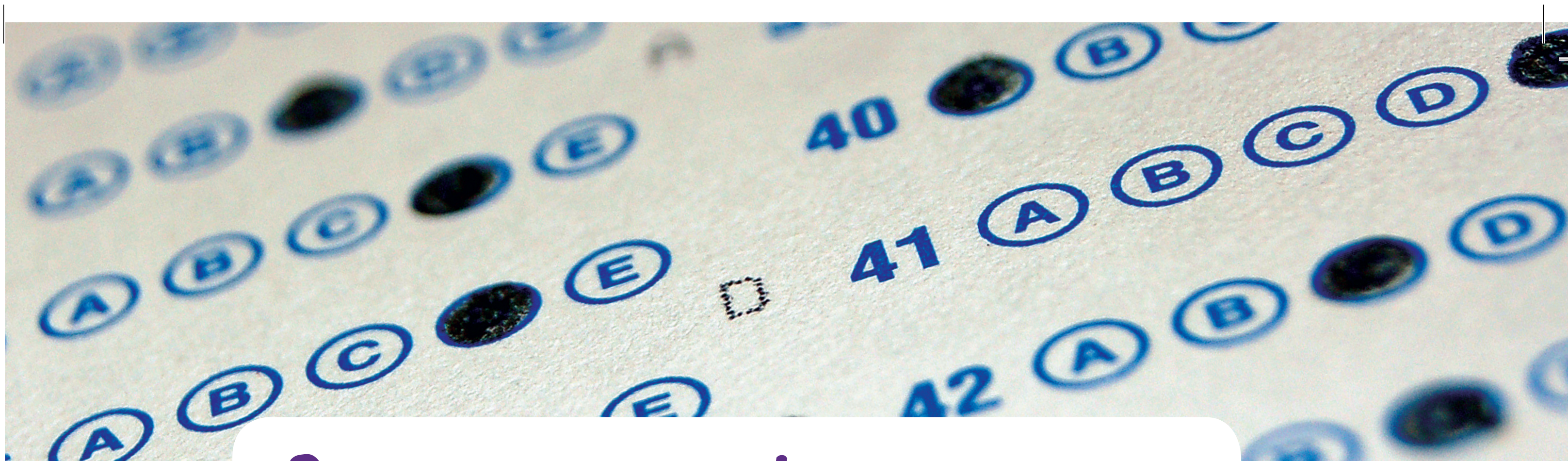
$\overline{CD}$ tem comprimento igual à sexta parte do comprimento da circunferência de raio 3, ou seja, $CD = \frac{2\pi \cdot 3}{6} = \pi$.

$\overline{EF}$ tem comprimento igual à três oitavos do comprimento da circunferência de raio 3.5, ou seja, $EF = \frac{3}{8} \cdot 2\pi \cdot 3{,}5 = \frac{21\pi}{8}$.

Respostas das Atividades

Atividade 12

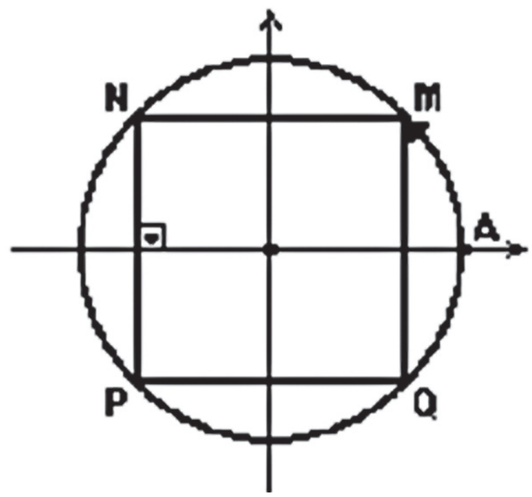
Medidas em graus	Medidas em radianos
30º	π/6 rad
45º	π/4 rad
60º	π/3 rad
270º	3π/2 rad
300º	5π/3 rad
360º/ π	2 rad



O que perguntam por aí...

Unifravas – 2000

A figura MNPQ é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida do arco AM é $\pi/4$ rad, as medidas dos arcos AN e AP, em radianos, respectivamente, são:



a. $3\pi/4$ e $5\pi/4$

b. π e $3\pi/2$

c. $3\pi/4$ e 2π

d. $\pi/2$ e $5\pi/4$

e. $3\pi/4$ e $5\pi/8$

Resposta: Letra A

Sendo π rad = 180º, $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{4} = 45° \pi / 4\, rad = 180° / 4 = 45°$. Logo, o arco AM mede 45º. Como o retângulo da figura mostra que o ponto N tem a mesma altura que o ponto M, então N está a 45º da horizontal, ou seja, 180º – 45º = 135º que, em radianos vale $3\pi/4$ rad. Já o ponto P está a 45º depois do eixo horizontal, pois devido às propriedades do retângulo P está a uma mesma distância deste eixo que o ponto N. Logo, P está a 180º + 45º = 225º que, em radianos vale $5\pi/4$ rad.