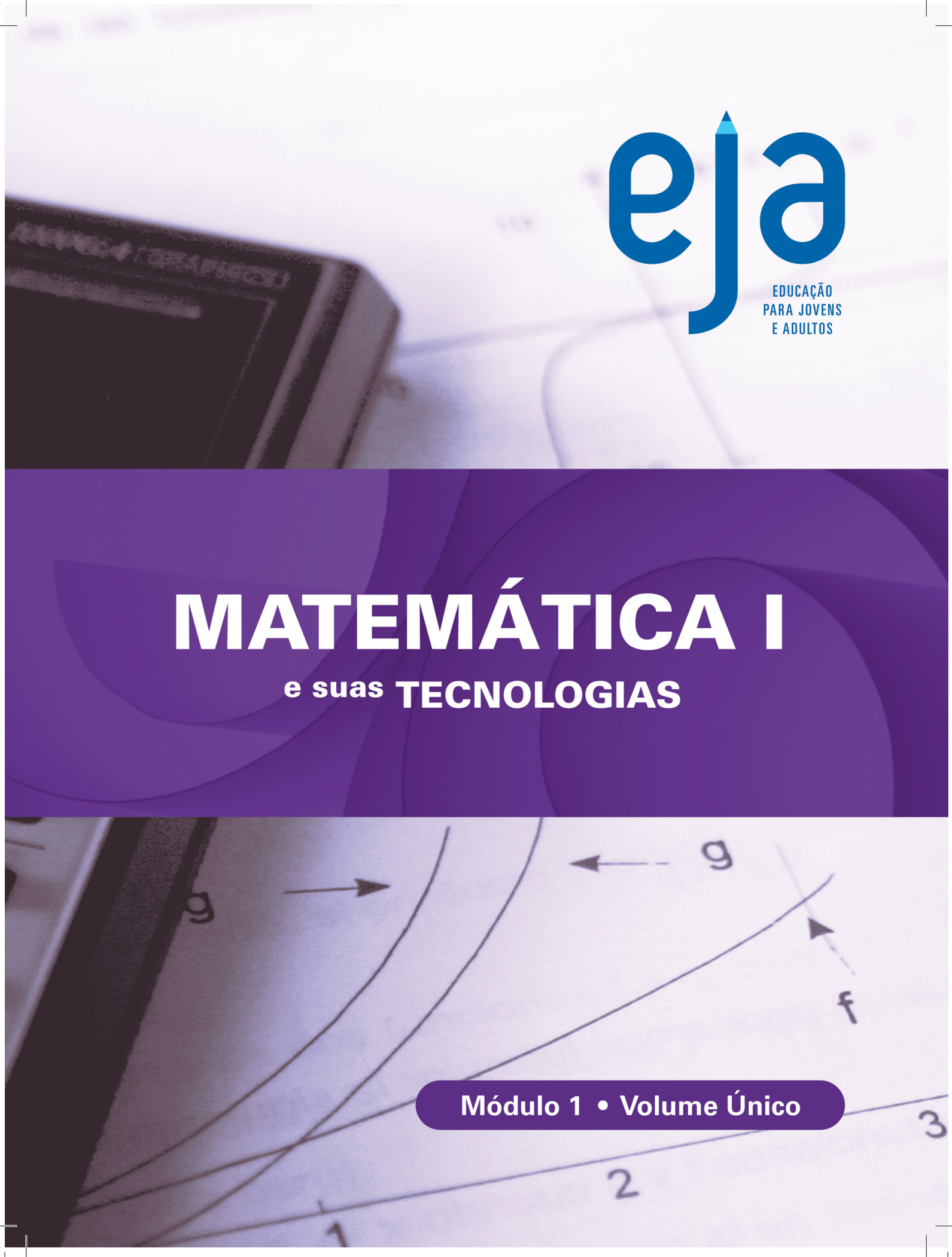


eja

EDUCAÇÃO
PARA JOVENS
E ADULTOS

MATEMÁTICA I

e suas TECNOLOGIAS

Módulo 1 • Volume Único

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Governador
Luiz Fernando de Souza Pezão

Vice-Governador
Francisco Oswaldo Neves Dornelles

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO

Secretário de Educação
Antônio José Vieira de Paiva Neto

Chefe de Gabinete
Caio Castro Lima

Subsecretaria Executiva
Amaury Perlingeiro

Subsecretaria de Gestão do Ensino
Patrícia Carvalho Tinoco

Superintendência pedagógica
Carla Bertânia Conceição de Souza

Coordenadora de Educação de Jovens e adulto
Rosana Mendes

SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO

Secretário de Estado
Gustavo Reis Ferreira

FUNDAÇÃO CECIERJ

Presidente
Carlos Eduardo Bielschowsky

PRODUÇÃO DO MATERIAL EJA (CECIERJ)

Diretoria Adjunta de Extensão
Elizabeth Ramalho Soares Bastos

Coordenadora de Formação Continuada
Carmen Granja da Silva

Gerência do Projeto
Michelle Casal Fernandes

Diretoria Adjunta de Material Didático
Cristine Costa Barreto

Coordenação de Matemática
Agnaldo da C. Esquincalha
Gisela Maria da Fonseca Pinto

Elaboração de Conteúdo
Agnaldo da C. Esquincalha
Daniel Portinha Alves
Gisela Maria da Fonseca Pinto
José Roberto Julianelli
Thiago Maciel de Oliveira

Revisão de Conteúdo
Daniel Portinha Alves
José Roberto Julianelli
Thiago Maciel de Oliveira

Revisão de Língua Portuguesa
Ana Cristina Andrade dos Santos
Paulo Cesar Alves

Coordenação de Desenvolvimento Instrucional
Bruno José Peixoto
Flávia Busnardo
Paulo Vasques de Miranda

Desenvolvimento Instrucional
Aroaldo Veneu

Coordenação de Produção
Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção
Bianca Giacomelli

Projeto Gráfico e Capa
Andreia Villar

Imagem da Capa e Abertura da Unidade
http://www.sxc.hu/photo/475767

Diagramação
Andrea Fiães
Bianca Lima
Verônica Paranhos

Ilustração
Bianca Giacomelli
Clara Gomes
Fernando Romeiro
Jefferson Caçador
Sami Souza

Produção Gráfica
Patrícia Esteves
Ulisses Schnaider

Copyright © 2013, Brasilia

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito.

M425

Matemática e suas tecnologias. Módulo 1 - Matemática / Cléa Rubinstein - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013.

368 p.; 21 x 28 cm – (Nova EJA)

ISBN: 978-85-7648-876-7

1. Matemática. 2. Equações. 3. Geometria. 4. Funções. I. Rubinstein, Cléa. II. Série

CDD: 510

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT e AACR2.

Sumário

Unidade 1 • Números inteiros e números racionais 7

Unidade 2 • Cálculo Algébrico 63

Unidade 3 • Equações e problemas do primeiro grau 107

Unidade 4 • Equações e problemas de segundo grau 145

Unidade 5 • Introdução à geometria 175

Unidade 6 • Proporcionalidade e semelhança de polígonos 219

Unidade 7 • Cálculo de área 259

Expansão • Números naturais 309

Expansão • Circunferência e polígonos regulares 347

Prezado Aluno,

Seja bem-vindo a uma nova etapa da sua formação.

Através da educação a pessoa toma a sua história em suas próprias mãos e consegue mudar o rumo de sua vida. Para isso, acreditamos na capacidade dos alunos de aprender, descobrir, criar soluções, desafiar, enfrentar, propor, escolher e assumir suas escolhas.

O material didático que você está recebendo pretende contribuir para o desenvolvimento destas capacidades, além de ajudar no acompanhamento de seus estudos, apresentando as informações necessárias ao seu aprendizado.

Acreditamos que, com ajuda de seus professores, você conseguirá cumprir todas as disciplinas dos quatro módulos da matriz curricular para Educação de Jovens e Adultos da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

E assim, novas histórias acontecerão em sua vida.

Para ajudá-lo no seu percurso, segue abaixo uma tabela que apresenta a grade de disciplinas que irá cursar:

MÓDULO	NOME DISCIPLINA	CH SEMANAL	CARGA HORÁRIA TOTAL
MÓDULO I	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA I	4	80
MÓDULO I	MATEMÁTICA I	4	80
MÓDULO I	HISTÓRIA I	4	80
MÓDULO I	GEOGRAFIA I	4	80
MÓDULO I	FILOSOFIA I	2	40
MÓDULO I	SOCIOLOGIA I	2	40
MÓDULO I	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL DO MÓDULO I			420
MÓDULO II	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA II	4	80
MÓDULO II	MATEMÁTICA II	4	80
MÓDULO II	FÍSICA I	4	80
MÓDULO II	QUÍMICA I	4	80
MÓDULO II	BIOLOGIA I	4	80
MÓDULO II	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL DO MÓDULO II			420
MÓDULO III	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA III	4	80
MÓDULO III	MATEMÁTICA III	4	80
MÓDULO III	HISTÓRIA II	3	60
MÓDULO III	GEOGRAFIA II	3	60
MÓDULO III	FILOSOFIA II	2	40
MÓDULO III	SOCIOLOGIA II	2	40
MÓDULO III	EDUCAÇÃO FÍSICA	2	40
MÓDULO III	LÍNGUA ESTRANGEIRA OPTATIVA	2	40
MÓDULO III	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL NO MÓDULO III			460
MÓDULO IV	LÍNGUA PORTUGUESA/LITERATURA IV	4	80
MÓDULO IV	MATEMÁTICA IV	3	60
MÓDULO IV	FÍSICA II	3	60
MÓDULO IV	QUÍMICA II	3	60
MÓDULO IV	BIOLOGIA II	3	60
MÓDULO IV	LÍNGUA ESTRANGEIRA	2	40
MÓDULO IV	ARTES	2	40
MÓDULO IV	ENSINO RELIGIOSO	1	20
CARGA HORÁRIA TOTAL NO MÓDULO IV			420

Conte conosco.
Equipe da Fundação Cecierj e SEEDUC

“

Nada lhe posso dar que já não exista em você mesmo.

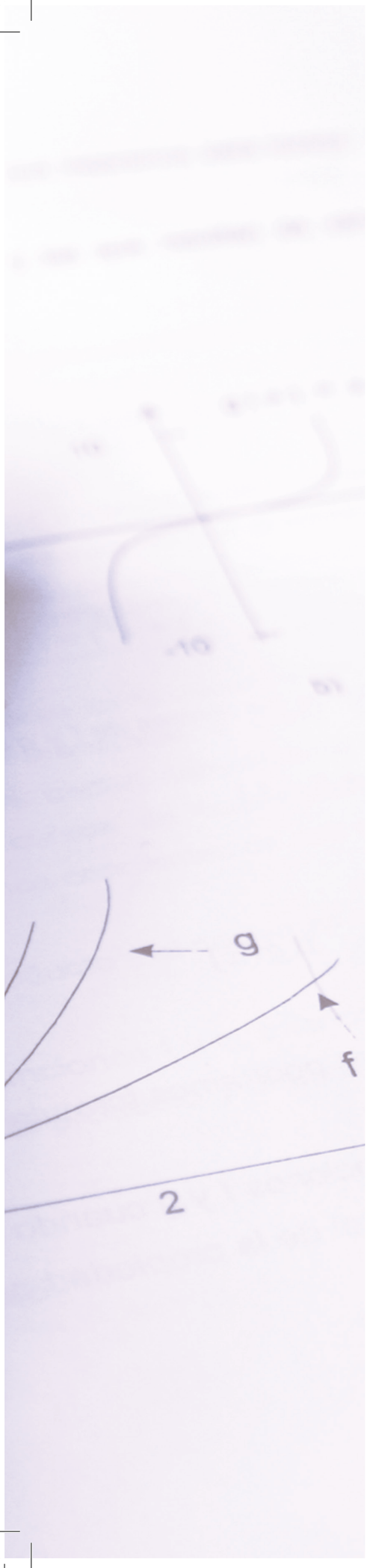
Não posso abrir-lhe outro mundo de imagens, além daquele que há em sua própria alma.

Nada lhe posso dar a não ser a oportunidade, o impulso, a chave.

Eu o ajudarei a tornar visível o seu próprio mundo, e isso é tudo.

Hermann Hesse

”



Números inteiros e números racionais

Para início de conversa

Você já pensou em viver sem os números? Já experimentou passar um dia inteiro sem escrever, ver ou mencionar nenhum número? Difícil, não é mesmo? Vemos números nos extratos bancários, nos valores a pagar no supermercado, em pesquisas divulgadas a mídia, em placas de carro ou números de telefone, na nossa idade, em materiais de construção, na especificação de alguns tipos de canos ou tubos, entre muitas outras situações. Vamos ver algumas situações.

Você já teve oportunidade de ver um extrato bancário? O extrato bancário é o registro das atividades de entradas e saídas de valores me dinheiro em uma conta corrente. Veja o exemplo a seguir:

BANCO CAIXA FORTE SA

EXTRATO DE CTA CORRENTE
AGENCIA 999 DATA 21/06/2013 HORA: 17:54
CONTA 01011
TIPO INDIVIDUAL 8 ESTRELAS

DIA	HISTÓRICO	VALOR
01	SALDO ANTERIOR	208,00
03	REMUNERAÇÃO	1.790,00
04	SALDO	1.998,00
04	SAQUE	500,00
06	PAG CHEQUE	780,00
10	SAQUE	300,00
10	SALDO	418,00
15	PAGTO CARTÃO CRED	348,00
20	PAG CHEQUE	200,00
21	SALDO	- 130,00

Observe que o correntista tem uma grande movimentação em sua conta. Inicia o período com saldo de 208 Reais e recebe o pagamento de 1790 Reais. Fica então com 208 + 1790 = 1998 Reais de saldo.

Daí por diante, é só conta a pagar: cheque, saques para os gastos do mês, fatura do cartão de crédito etc

Um dos itens que frequentemente representam saídas de valores em contas correntes é a alimentação. Além disso, ao preparar uma receita, normalmente muitos números estão envolvidos também. Uma boa pedida para um final de semana é uma pizza... Saboroso e rápido de preparar.

Vamos fazer juntos? Basta acompanhar a receita - e não se esqueça de convidar seu professor ou professora para o lanche!

RECEITA DE PIZZA

15 gramas de fermento fresco ou $1\frac{1}{3}$ colher (chá) de fermento biológico seco

Cerca de 1 xícara (250ml) de água morna

2 xícaras (300g) de farinha de trigo, mais um pouco para polvilhar a superfície de trabalho.

$\frac{1}{3}$ colher (chá) de sal

1 colher sopa) de azeite de oliva extravirgem

Modo de fazer

Coloque o fermento fresco ou seco em uma vasilha e acrescente ½ xícara de água morna. Mexa suavemente até dissolver o fermento. Deixe descansar por alguns minutos até espumar. Acrescente a farinha e o sal e o azeite. Não coloque o sal diretamente no fermento. Bata a massa até desgrudar. Deixe descansar por cerca de 60 minutos.

Agora basta abrir e rechear a seu gosto.

Você seria capaz de fazer esta receita seguindo corretamente as quantidades indicadas dos ingredientes?

Você deve ter identificado algumas quantidades de ingredientes representadas de forma diferente daquelas que temos estudado até agora. Por exemplo, qual a quantidade de sal indicada na receita? E quanto deve ser colocado de fermento biológico seco?

Que representações são estas? Será que elas representam quantidades? Será que podemos chamá-las de números também?

Há algum tempo, o homem sentiu a necessidade de utilizar números que representassem partes de um todo, como a metade de um bolo, 2,25kg de batatas ou ainda um saco e 1/3 de farinha.

Ao medir a altura de uma pessoa, por exemplo, dificilmente vamos encontrar medidas representadas por números inteiros. Nem todas as pessoas têm exatamente 1 metro de altura ou 2 metros de altura. Algumas pessoas têm 1,68 metros ou 1,73 metros, por exemplo.

Estes números que mencionamos aqui fazem parte de dois grandes conjuntos numéricos: os números inteiros e os números racionais. Esta organização é inclusiva, ou seja, os números inteiros também são números racionais – você sabia disso? Não? Então essa é a hora de saber! Vamos lá?

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer, representar e operar com números inteiros
- Reconhecer, representar e operar com números racionais
- Resolver problemas envolvendo números inteiros
- Resolver problemas envolvendo números racionais
- Reconhecer unidades de medida
- Reconhecer e operar com porcentagens

Seção 1
Números Inteiros

Dentro do universo matemático, os números negativos começaram a ser estudados apenas por volta dos séculos XV e XVI. O italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576) foi um dos matemáticos que se preocuparam em estudar estes números, inicialmente chamados por ele de números falsos.

Assim como os números naturais, os números negativos também são relacionados e recebem um tratamento especial. Diremos, a partir de agora, que os números naturais compõem o conjunto dos números inteiros que são positivos, mais o zero. Podemos agora incluir todos os números negativos, que são obtidos colocando-se o sinal de menos (-) na frente de todos os números naturais, exceto para o zero – como ele não representa nenhuma quantidade, então não é nem negativo, nem positivo, mas separa os positivos e os negativos.

É importante ressaltar que os números negativos também são infinitos, pois estaremos associando a cada número natural o seu correspondente, com o sinal de menos na frente (exceção para o zero). Assim, se para cada número natural sempre teremos um número maior que o anterior, para cada número inteiro negativo sempre teremos um número menor que ele, e também um maior do que ele, como nos naturais.

Para representar um número negativo, utilizaremos o sinal de menos e para representar um número positivo utilizamos o sinal de mais ou nenhum sinal: números que não apresentam sinal de mais ou de menos são considerados positivos.

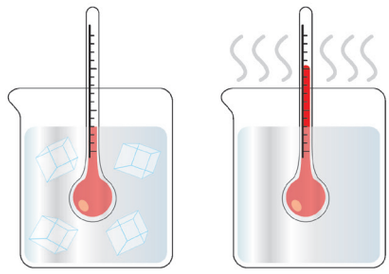
Por exemplo, mais 4 pode ser representado por +4 ou simplesmente 4, mas menos 4 precisa ser escrito com o sinal de menos, ou seja, como – 4.

Importante

Representação geométrica

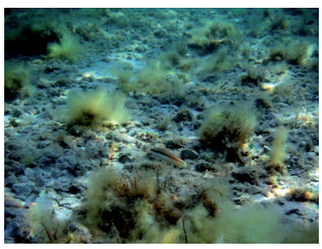
Outra situação em que encontramos números negativos é na indicação das temperaturas muito frias.

Se colocarmos um termômetro na geladeira, a marcação ficará abaixo de zero (Números negativos), se aquecermos o termômetro, sua marcação ficará acima de zero.



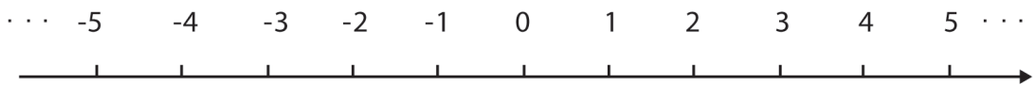
A altitude, que indica a altura de um determinado lugar em relação ao nível do mar, também pode ser representada por números negativos. Se tomarmos o nível do mar como referência, vamos verificar que algumas cidades estão mais próximas deste nível do que as outras. Por exemplo, a cidade de Teresópolis encontra-se a 871 metros acima do nível do mar, isto é +871 metros.

Figura 1.1: Dedo de Deus O Dedo de Deus é um pico com 1 692 metros de altitude e cujo contorno se assemelha a uma mão apontando o dedo indicador para o céu. O pico encontra-se nos limites do Parque Nacional da Serra dos Órgãos, na área territorial de Guapimirim, sendo melhor avistado em Teresópolis



Por outro lado, a fossa das Marianas (local mais profundo dos oceanos) atinge 11034 metros de profundidade, isto é, está a – 11034 metros.

Podemos estabelecer uma representação geométrica para os números inteiros da seguinte forma:



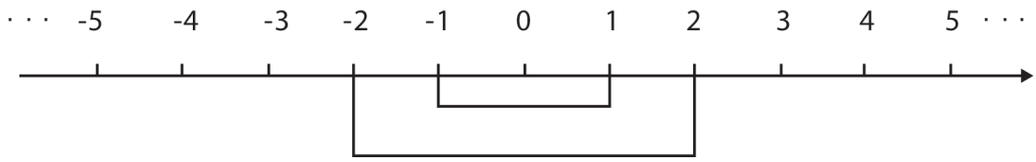
Todos os valores à direita do zero são positivos, enquanto todos os valores à esquerda do zero são negativos. Você pode perceber que, quanto mais à esquerda, menor será o número e, quanto mais à direita, maior será o número. Note também que o zero é maior do que qualquer número negativo. É importante sempre lembrar que, na representação geométrica acima, a distância entre dois números inteiros consecutivos é sempre a mesma, ou seja, igual à unidade considerada como padrão.

O ZERO É POSITIVO OU NEGATIVO?

Todos os números à direita do zero são positivos e todos os números à esquerda do zero são negativos. Como os números inteiros positivos e os números inteiros negativos são infinitos, havendo simetria entre eles, podemos dizer que "o zero está no centro" do conjunto dos números inteiros. Desta forma, zero não é positivo e nem negativo, sendo o único número inteiro sem sinal.

Números Simétricos ou opostos

Uma característica interessante nos números inteiros está relacionada à sua distância do zero.



Para cada número positivo sempre existe um número negativo que mantém a mesma distância ao zero. Isto é, se considerarmos 1 e -1, o zero estará no centro (e a distância de cada um deles ao zero é a mesma). Se considerarmos 6 e -6, igualmente o centro dessa distância será o zero. Assim, diremos que -1 é oposto ou simétrico de 1 (ou ainda que 1 é o oposto de -1); que -6 é oposto ou simétrico de 6 (ou que 6 é oposto ou simétrico de -6).

Dois números são opostos quando as distâncias deles ao zero for a mesma, e essa distância é o que se chama de *módulo* desse número. O módulo de um número será representado colocando-se o número entre duas barrinhas verticais; por exemplo, indicamos o módulo de 6 por |6| e o módulo de – 6 por |–6|. Como a distância de dois números

opostos ao zero é a mesma, podemos concluir que o módulo de um número é igual ao módulo do seu oposto, ou seja, $|-6| = |6| = 6$ ou ainda $|1| = |-1| = 1$. Também chamamos o módulo de um número de *valor absoluto*.

Assim, se o número for positivo, seu oposto (ou simétrico) será negativo; se o número for negativo, seu oposto (ou simétrico) será positivo, e o módulo desses números não é nem positivo nem negativo, é um número de valor absoluto e não relativo.

Entendido? Então faça as atividades a seguir!

Escreva o simétrico de cada um dos números dados:

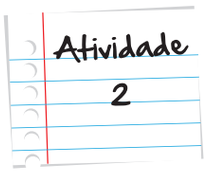
a. 3

b. -8

c. 9

d. -101

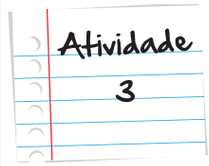
Anote suas respostas em seu caderno



Qual é o oposto do simétrico de -40?

Anote suas respostas em seu caderno

Você leu com atenção as informações que demos anteriormente sobre a cidade de Teresópolis e a fossa das Marianas? Se considerarmos o número que representa a profundidade da fossa das Marianas e o número que representa a altitude da cidade de Teresópolis, em relação ao nível do mar, e colocarmos essas números numa reta numérica, qual será a distância entre eles?



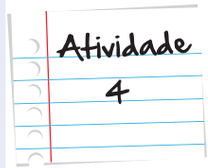
Anote suas respostas em seu caderno

Determine o módulo dos números inteiros:

a. |3|

b. |-5|

c. |-14|

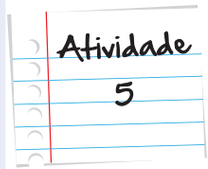


Anote suas respostas em seu caderno

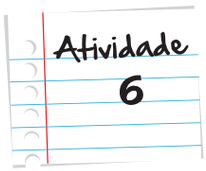
Coloque as sequencias em ordem crescente

a. -1, 0, -4, 7, -3, 2

b. -2, -7, -3, -8, 7, 4, 1, 0



Anote suas respostas em seu caderno



Entre as duas opções dadas a seguir em cada item, qual o número de maior módulo?

a. -9 e 4

b. -5 e -17

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Operações com números inteiros

Agora que já relembramos as ideias iniciais sobre números inteiros, vamos ver como realizar as quatro operações básicas com eles?

Adição

Para adicionar números inteiros é preciso expandir o conceito de adição, uma vez que agora os números nem sempre terão o mesmo sinal.

Tomemos o exemplo 4 + 5; os números são inteiros, e ambos têm sinal positivo, neste caso não há diferença para a adição de números naturais. Ou seja, 4 + 5 = 9

Como fazer então para somar inteiros negativos? E para somar inteiros negativos com inteiros positivos?

Olhe o exemplo -3 + 6. Vamos representar a quantidade negativa por unidades vermelhas e a quantidade positiva por unidades na cor azul.

-3 = **-1 -1 -1**

+6 = **+1+1+1+1+1+1**

Vimos anteriormente que números inteiros opostos ou simétricos têm a mesma distância em relação ao zero. Assim, se anularmos cada **-1** com **+1**, sobrarão 3 unidades azuis. Podemos concluir então que -3 + 6 = +3

Você percebeu que o número de maior módulo sempre será o "vencedor".

De uma forma geral, se estamos somando números que têm sinais diferentes, é preciso verificar a diferença entre os módulos desses números e manter o sinal do que tem o maior módulo.

-3 +2 = -1 (-3 tem o maior módulo, assim, fica o sinal de -3 sobressaindo na resposta)

Uma ideia prática é associar números positivos e números negativos respectivamente com contas a receber e a pagar.

Por exemplo, se tenho ou recebo 200,00 então terei +200. Se precisar pagar 100 Reais, então terei -100.

Devo 100 e tenho 50, logo -100+50 = -50 (devo 50)

Tenho 340 e devo 180, logo 340 – 180 =160

Subtração

Na subtração não é diferente. Podemos utilizar o mesmo recurso. Por exemplo:

7 – 9

Vamos utilizar o mesmo recurso do exemplo de adição:

+ 7 = **+1+1+1+1+1+1+1**

-9 = **-1-1-1-1-1-1-1-1-1**

Como -9 tem o maior módulo, prevalecerá o seu sinal (negativo). Quanto ao valor, vamos proceder de mesma forma, cada **-1** anula um **+1**, o que resultará em duas unidades negativas, logo:

+7 – 9 = -2

Importante

Em alguns casos, aparecem dois sinais, por exemplo -3 + (-2). Neste caso, estamos adicionando -2 com -3, isto é, estamos adicionando um número negativo a outro número negativo. Isto significa que teremos -3 com -2 (três unidades negativas com mais duas unidades negativas) que nos dá -5 (cinco unidades negativas). Numericamente representando,

-3+(-2) = -3 -2 = -5

Outro exemplo interessante é subtrair com mais de um sinal, por exemplo, -3 – (-2).

Neste caso, estamos retirando um valor negativo de um total já existente. Podemos comparar com uma dívida; Se deve 3 (representado por -3) e dessa dívida tira uma dívida de 2 (representado por -2), significa que pagou uma parte da dívida. Ou seja, representando:

-3 –(-2) = -3 + 2 = -1

Saiba Mais

Neste site, você vai encontrar alguns fatos muito interessantes que envolvem números inteiros. Dê um pulinho lá!

No site http://mat7keditfundamental.jimdo.com/un-1-n%C3%BAmeros-naturais-e-inteiros/painel-4--inteiros-representa%C3%A7%C3%A3o-e-utiliza%C3%A7%C3%A3o-pr%C3%A1tica/

Atividade 7

Resolva as operações de adição e subtração

a. -2 + 5
b. -5 - 7
c. -2 - 4
d. +9 - 8
e. +7 - 11
f. -23 + 43
g. -2 – 4 + 3 + 6
h. -2 + 3 – 3 + 2

Anote suas respostas em seu caderno

Resolva as adições e subtrações

a. -2 +(-2)

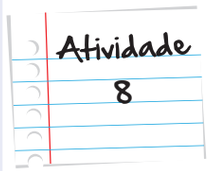
b. -3 – (-4)

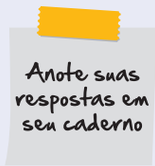
c. -5 + (-2)

d. -3 – 2 +(-4)

e. -5 –(-3) + (-4)

f. -2-(-1)+(-1)-(+1)+(-1)





Multiplicação

A ideia de multiplicar números negativos trouxe grandes problemas para os matemáticos do passado. Por exemplo, o resultado de uma simples multiplicação como (-3) . (-5), ficou durante muitos anos sem uma justificativa.

Vamos tomar outro exemplo: 3 . (-5). Primeiro, usando a ideia que vimos na multiplicação, 3 . (-5) seria o mesmo que somar -5 com ele 3 vezes, o que nos daria:

(-5) + (-5) + (-5) = -15.

Podemos também entender da seguinte forma: é como se estivéssemos multiplicando uma dívida de 5 Reais por três - e, obviamente, ficaremos devendo 15, isto é, -15.

Vamos construir uma tabela

3 . (-5) = -15
2 . (-5) = -10
1 . (-5) = -5
0 . (-5) = 0

Como a multiplicação é **comutativa**, se multiplicarmos (-5) . 3 teremos o mesmo resultado.

Propriedade Comutativa

Propriedade Comutativa da multiplicação é aquela que diz que a ordem dos fatores não altera o produto. Isto é

2 x 3 = 6 e 3 x 2 =6

Note que, nas multiplicações mostradas na tabela, cada vez que diminuímos o fator à esquerda de uma unidade (de 3 para 2, de 2 para 1, etc), o resultado aumenta em 5 unidades. Essa diminuição é feita por três vezes (de 3 a 0). Se dermos continuidade a esta tabela, teremos :

3 . (-5) = -15
2 . (-5) = -10
1 . (-5) = -5
0 . (-5) = 0
-1 . (-5) = 5
-2 . (-5) = 10
-3 . (-5) = 15

Observe que o produto entre um número positivo e um número negativo teve como resultado um número negativo; por outro lado, quando foram multiplicados dois números negativos o resultado foi um número positivo.

Podemos continuar esta tabela infinitamente.

Em nosso dia a dia, é possível fazer uma analogia com contas a pagar e a receber, como fizemos na adição.

Vamos ver:

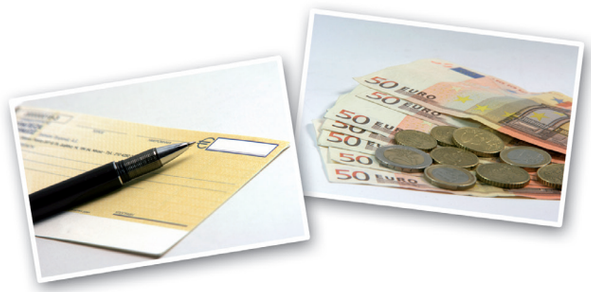
3 . (-5) é o mesmo que somar 3 dívidas de 5, que totaliza uma dívida de 15.

-3 . (-5) é o mesmo que cancelar 3 dívidas de 5, isto significa que deixarei de gastar 15, o que significa lucro. Ou seja, + 15.

Vamos a outros exemplos:

(-3) x 4 = 4 x (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12

Neste exemplo, estaríamos acumulando um débito de 3 Reais por 4 vezes: ao final, estaríamos devendo 12 Reais



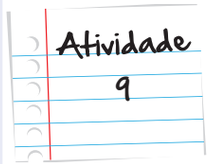
(-5) x (-2) =

Vamos calcular primeiramente 5 x (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -10, isto é, se calcularmos cinco vezes uma dívida de dois Reais, ao final estaremos devendo dez reais.

Como estamos calculando (-5) x (-2), significa que estamos retirando uma dívida de dez reais, ou seja, deixando de pagar dez reais - o que nos dará um saldo positivo. Assim, (-5) x (-2) = + 10.

Há também outra forma de pensarmos sobre essa operação. Vamos retomar o nosso problema de partida, que é efetuar o produto (-3) . (-5). Vamos reescrever esse produto da seguinte maneira: (-3) . (-5) = -[3 . (-5)]. Temos agora então um produto mais simples para resolver inicialmente, que é o produto 3 . (-5). Este produto pode ser calculado pensando-se na soma de parcelas iguais, o que nos leva a 3 . (-5) = -5-5-5 = -15. Entretanto, queremos determinar -[3 . (-5)]. Substituindo o que determinamos nessa expressão, ficamos com (-3) . (-5) = -[3 . (-5)] = -[-15], e -(-15) é o simétrico (ou oposto) de -15, que conforme vimos na seção 1.2 é 15. Então, o produto de (-3) . (-5) = 15, positivo.

Vamos tentar um pouco? Resolva as atividades a seguir com atenção!



Resolva as multiplicações de inteiros.

a. (-7) . (+4) =

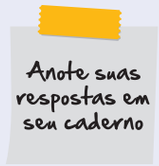
b. (-3) . (-5) =

c. (-3) . 3 =

d. +3 . (+5) =

e. -6 . (-9) =

f. -2 . (-3) . (-1) =



Atividade 10

Pedro, todos os dias, vai ao bar do seu Joaquim, toma café com leite e fica devendo R$ 2,00. Completando uma semana ele se dirige ao bar e pede a conta.

Quanto Pedro paga por semana? Represente com números inteiros.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 11

Utilize a calculadora para resolver as operações a seguir. Depois tente resolvê-las novamente por escrito, no seu caderno.

a. -3 . 4

b. (-2) . (-2) . (-2) . (-2)

c. -4 . (+9) . (-5)

d. -1 . 0 . 9 . (-8)

Anote suas respostas em seu caderno

O produto de qualquer número natural ou inteiro por zero é sempre zero.

O elemento neutro da multiplicação continua sendo 1 (positivo)

Divisão

Como dividir usando os números negativos? Será que há alguma diferença em relação à operação de divisão com números naturais? Bem, se considerarmos o módulo ou valor absoluto dos números envolvidos na divisão, o conceito permanece o mesmo. Resta apenas saber o que fazer com os sinais que aparecerem. Vamos ao exemplo:

-12 : (+4) . Sabemos que 12 : 4 = 3. E os sinais?

É importante perceber que a divisão é a operação inversa da multiplicação, isto é, se 12 dividido por 4 tem resultado 3, então 3 vezes 4 são 12.

Sendo assim, no exemplo que estamos resolvendo, qual seria o sinal do número 3, sabendo que o resultado da multiplicação por +4 é -12?

Vamos representar: (??) . 4 = -12. Se multiplicarmos o 4 por +3 teremos +12, que não é o resultado pedido. Então, a resposta tem de ser -3, pois -3 . 4 = -12. Podemos concluir então que -12 : (+4) = -3.

Percebeu?

Dividimos os módulos e observamos o sinal. Veja outro exemplo:

-20 : (-5) = ???

Sabemos que 20 : 5 = 4, pois 4 x 5 = 20.

Mas e a conta – 20 : (- 5), quanto dará?

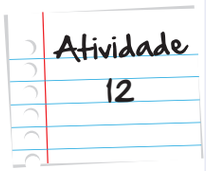
O resultado desta conta deve ser um número que, multiplicado por -5, dê resultado igual a – 20. Ora, já vimos anteriormente que, ao multiplicarmos dois números de sinais diferentes, o resultado fica negativo. Assim, o número que deve ser multiplicado por – 5 deverá ser positivo, para que o resultado seja igual a – 20. Concluímos então que esse número é +4.

Vejamos outro exemplo.

Maria deve 400 Reais; seus 4 irmãos resolveram dividir igualmente essa dívida entre si, para ajudarem Maria a pagar sua dívida. Quanto cada irmão dará para Maria pagar sua dívida?

Bem, se Maria deve 400 Reais, vamos representar por -400 (negativo).

Podemos escrever a divisão assim: -400 : 4 = -100. Cada irmão assume a dívida de 100 reais, isto é -100 (negativo)



Resolva as divisões:

a. (-20) : (-10)

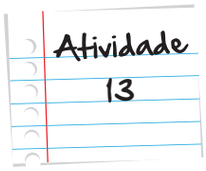
b. 35 : (-7)

c. (-4) : (-4)

d. (7): (-7)

e. 121 : (-11)

Anote suas respostas em seu caderno



Utilize a calculadora para resolver os seguintes exercícios:

a. -800 : (+200)

b. 4 : (-2)

c. -45 : (-9)

d. 81 : (- 27)

e. 72 : (- 8)

Anote suas respostas em seu caderno

Potenciação

A potência é uma multiplicação de fatores iguais, e isso vale tanto para números naturais quanto para números inteiros.

Observe alguns exemplos comentados:

Exemplo 1.:

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ (positivo). O expoente 2 indica que a base (-3) se repetirá duas vezes, e já vimos que ao multiplicarmos dois números negativos, teremos um resultado positivo.

Exemplo 2.:

$-3^2 = -(3 \times 3) = -9$. Qual a diferença? Neste exemplo, apenas o 3 está elevado à potência 2. Diferente do exemplo 1, onde tanto módulo quanto sinal estão elevados ao expoente 2.

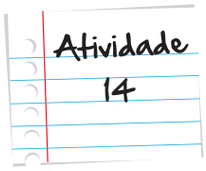
Vamos construir um sequencia de potências

$(-3)^4$	(-3) x (-3) x (-3) x (-3)	81	Lembre-se, o produto de dois números negativos é positivo.
$(-3)^3$	(-3) x (-3) x (-3)	-27	Basta dividir 81 por -3
$(-3)^2$	(-3) x (-3)	9	Basta dividir -27 por -3
$(-3)^1$	-3	-3	Basta dividir 9 por -3
$(-3)^0$		1	Mantendo o raciocínio, dividindo -3 por -3, achamos o resultado 1

Podemos observar que, ao elevarmos um número inteiro ao expoente zero, o resultado é 1.

Se a base é negativa e o expoente é impar, o resultado é negativo.

Se a base é negativa e o expoente é par, o resultado é positivo.



Resolva as potências, se preferir, transforme cada potência em uma multiplicação sucessiva de fatores iguais e utilize sua calculadora.

a. $(-4)^5$

b. -2^6

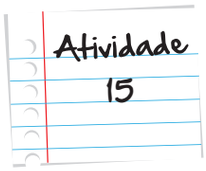
c. $-(3)^5$

d. 1^0

e. $(-1)^4$

f. $(-1)^3$

Anote suas respostas em seu caderno



O número -10 é menor que -2. É correto afirmar que $(-10)^2$ é menor que $(-2)^2$?

Anote suas respostas em seu caderno

Raiz quadrada de números inteiros

Na aula sobre números naturais, nós aprendemos sobre raiz quadrada. Vimos que a raiz quadrada é a operação inversa da potência de expoente dois.

Por exemplo: se 4 elevado ao quadrado é 16, então a raiz quadrada de 16 é igual a 4.

A seguir, representamos a raiz quadrada de 16:

$\sqrt{16}=4$, pois $4^2 = 4 \times 4 = 16$

Agora que estamos estudando os números inteiros, observamos que é possível encontrar o resultado 16 de duas formas diferentes. Observe;

$4 \times 4 = 16$ e

$(-4) \times (-4) = 16$.

Então qual a raiz quadrada de 16? É 4, é – 4 ou ambos os valores servem? A resposta é simples. Para evitarmos esse tipo de dúvida, vamos definir que a raiz quadrada de um número positivo será sempre um resultado positivo. Então, a raiz quadrada de 16 é 4, ou seja, $\sqrt{16} = 4$

E se o radicando for negativo, por exemplo -16. Qual é a raiz de $\sqrt{-16}$?

A resposta é simples: não existe valor inteiro que, multiplicado por ele mesmo resulte em -16. Assim, podemos concluir que ***não há raiz quadrada de números inteiros negativos***.

Qual é a raiz quadrada de zero?

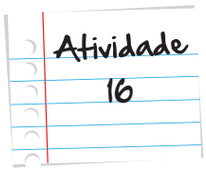
O único número que multiplicado por ele mesmo resulta em zero, é o próprio zero. Assim,

$$\sqrt{0} = 0$$

Outra curiosidade no conjunto dos números inteiros é a respeito da raiz quadrada. Sabemos que a raiz quadrada de um número é um valor que multiplicado por ele mesmo resulta no radicando. Assim, A raiz de 9 é 3, pois $3 \times 3 = 9$.

O problema ocorre com os radicandos negativos, pois não existe forma de encontrar um resultado negativo a partir da multiplicação de dois números negativos ou positivos.

Por exemplo, a raiz quadrada de -4 não pode ser 2 porque $2 \times 2 = 4$ (positivo), e também não pode ser -2, pois $-2 \times -2 = 4$. Desta forma, diremos que não há, dentro do universo dos números Reais, raiz quadrada de números negativos.



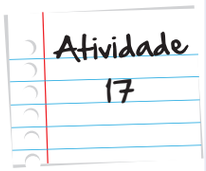
Determine a raiz quadrada dos valores a seguir, quando existirem, justificando cada resposta.

a. $\sqrt{289}$

b. $-(\sqrt{36})$

c. $\sqrt{-64}$

Anote suas respostas em seu caderno



Quais são os números inteiros que, elevados ao quadrado, resultam em 400? qual é a raiz quadrada de 400?

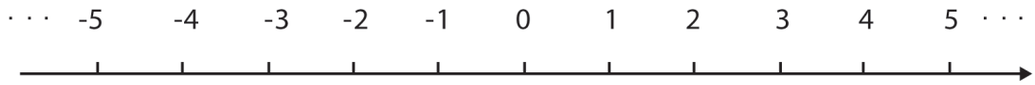
Anote suas respostas em seu caderno

Estudamos até agora os números inteiros e as operações entre eles. Chegou o momento de conhecermos melhor os números que não são necessariamente inteiros: os números racionais. Você está pronto?

Seção 3
Números Racionais

Até agora estudamos o conjunto dos números inteiros, para os quais há uma sequência de números onde a distância de um número qualquer ao seu sucessor é sempre a unidade. Noutras palavras, após o 2 vem o 3, após o 3 vem o 4, antes do 0 vem o -1, antes do -102 vem o -103 e assim por diante. Todos separados entre si por uma distância de uma unidade.

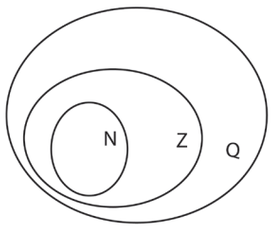
Veja a figura



Como observamos no início da unidade, muitas vezes há a necessidade de representar quantidades que não são inteiras. Para isto, expandiu-se o conjunto dos números inteiros, acrescentando os números que, apesar de não serem inteiros, podem ser representados na forma de fração. Esse conjunto é representado pela letra Q, e é denominado "conjunto dos números racionais".

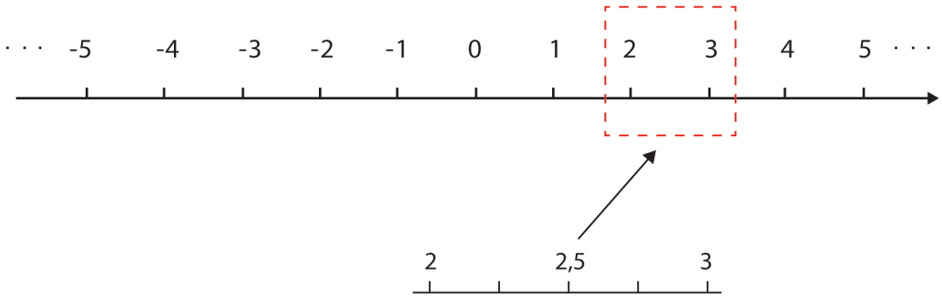
Esse conjunto, o conjunto dos números racionais, abrange então todos os números que são resultado da divisão entre dois números inteiros (com divisor diferente de zero). São eles: todos os números inteiros, todas as frações, todos os números decimais exatos e, dos não exatos, os periódicos (dízimas periódicas).

Podemos afirmar que $N \subset Z \subset Q$, isto é, N está contido em Z que está contido em Q.



Importante

Vamos observar mais uma vez a reta numérica. Se colocarmos uma lente de aumento entre dois números consecutivos, vamos observar que há um espaço entre eles. Será que existem outros números neste espaço? Por exemplo, entre o 2 e o 3, existe algum número? Se existe, como poderemos representar esse número?



Saiba Mais

No endereço eletrônico http://www.uff.br/cdme/edn/edn-html/edn-br.html, você pode encontrar atividades interessantes para auxiliá-lo no entendimento de números racionais. Nelas, estão sendo trabalhadas questões relacionadas às operações e à localização de números reais na reta real.

Aqui, marcando apenas a medida central entre o 2 e 3, achamos 2,5, ou seja, dois mais a metade da unidade. Se continuarmos aumentando o desenho com a nossa lente de aumento, encontraremos sempre mais valores, isto é, entre dois valores, sempre haverá outros valores. Podemos então concluir, que entre dois números, existem infinitos outros números.

Uma forma de escrever muitos desses números não inteiros é a forma de fração.

Mas o que é uma fração? Como o próprio nome diz, fração é uma parte de um todo tomado como referência.

Vamos imaginar que alguma coisa (uma barra de chocolate, por exemplo) foi dividida em um certo número de partes todas iguais entre si, e que foram consideradas apenas algumas dessas partes.

No desenho a seguir podemos entender melhor.

O retângulo está dividido em 8 partes. Note que as partes são iguais. Assim podemos dizer que cada uma destas partes é uma fração do retângulo todo. Isto é, temos 1 retângulo inteiro, dividido em oito partes iguais. Se pensarmos que o retângulo mede 1 unidade de área, então cada uma dessas equivale a 1 : 8 da área do retângulo. Podemos representar a área dessa parte na forma de um número fracionário, ou simplesmente uma fração.

Então, fica assim: 1: 8 = $\frac{1}{8}$. Em outras palavras, o retângulo está dividido em 8 partes iguais, e diremos que, cada uma dessas partes representa um oitavo do retângulo todo, duas destas partes representam dois oitavos $\left(\frac{2}{8}\right)$; três destas partes representam $\frac{3}{8}$ do retângulo, e assim sucessivamente, até que o retângulo todo, ou seja, todas as 8 partes representam oito oitavos do retângulo $\left(\frac{8}{8}\right)$, o que também pode ser entendido como 1, uma vez que a área do retângulo inteiro era de 1 unidade de área.

Na divisão em fração, todas as partes têm de ser do mesmo tamanho.

Importante

Lembra da nossa receita? No modo de fazer a pizza, pede-se para acrescentar $\frac{1}{2}$ xícara de água morna. O que significa isso? Quanto de água será acrescentado? O que se pede é que se divida a quantidade de água (uma xícara) em duas parte iguais e se utilize apenas uma dessas partes; vamos dizer que estamos considerando a metade da quantidade de água disponível.

Ampliando as ideias anteriores, vamos dizer que uma fração é representada da seguinte forma:

$$\frac{a}{b}$$

Nessa representação, o valor ***a*** é chamado numerador, isto, porque ele numera a quantidade de partes que serão consideradas após a divisão do todo.

Já o valor ***b*** é chamado denominador, porque ele denomina em quantas partes iguais o todo foi dividido.

Não há fração com denominador zero porque a divisão por zero não existe. Mais adiante, retomaremos este assunto.

Importante

Ler uma fração é fácil, observe a tabela em que apresentamos várias frações com numerador igual a 1 e, embaixo, a forma como a leitura dessas frações deve ser feita. :

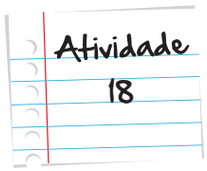
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
Um meio	Um terço	Um quarto	Um quinto	Um sexto	Um sétimo	Um oitavo	Um nono	Um décimo

Quando o numerador não for igual a 1, a leitura se fará de forma semelhante. Por exemplo, a fração $\frac{3}{5}$ será lida "três quintos".

Nas frações onde o denominador é uma potência de base 10, usaremos décimos, centésimos, milésimos e assim por diante.

Nas frações onde o denominador é maior que 10 e não é potência de 10, utilizaremos a palavra AVOS, após o número de partes em que o todo foi dividido. Por exemplo, na fração $\frac{1}{17}$ leremos: um, dezessete avos.

A palavra AVOS significa partes.



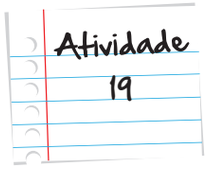
Escreva por extenso as frações:

a. $\frac{3}{4}$

b. $\frac{5}{8}$

c. $\frac{1}{14}$

Anote suas respostas em seu caderno



Escreva numericamente as frações

a. Dois nonos

b. sete, quinze avos

c. Oito milésimos

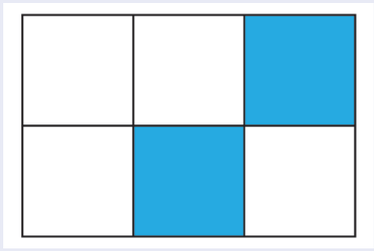
d. Seis quintos

Anote suas respostas em seu caderno

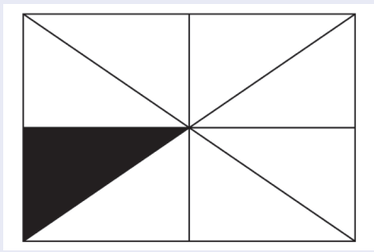
Escreva a fração representada nas figuras abaixo. Considere a parte pintada como sendo o numerador.

Atividade 20

a)



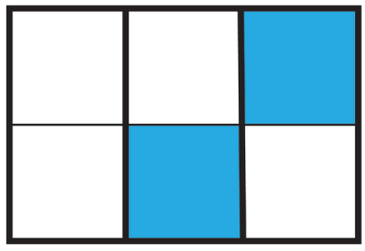
b)



Anote suas respostas em seu caderno

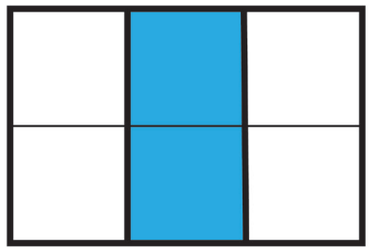
Números fracionários equivalentes

Vamos partir da Atividade 20 para exemplificar o que são números fracionários equivalentes. Como o nome já sugere, são números que representam um mesmo valor. Veja:



Se considerarmos que o retângulo foi dividido em 6 partes iguais, e apenas duas foram pintadas de azul, essa parte representa $\frac{2}{6}$ retângulo todo, certo?

Agora, se pintarmos o mesmo retângulo de forma diferente, podemos ter a seguinte representação:



Considerando agora as linhas mais grossas, note que o mesmo retângulo anterior agora está dividido em apenas três partes iguais, e, dessas três partes, foi pintada apenas uma parte, o que pode ser representado pela fração $\frac{1}{3}$

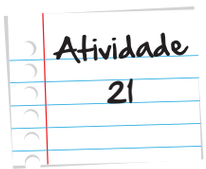
Embora tenhamos utilizado duas representações diferentes, a parte pintada ocupa o mesmo espaço. Nesse caso, dizemos que as duas frações são equivalentes, pois representam a mesma parte de um todo.

Como foi dito anteriormente, a primeira fração pode ser escrita como $\frac{2}{6}$, enquanto a segunda fração pode ser escrita como $\frac{1}{3}$. Diante do que foi exposto, podemos escrever que $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, isto é, as frações são equivalentes.

Note que, se multiplicarmos o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{3}$ por 2, teremos exatamente a fração $\frac{2}{6}$. Isto nos dá uma dica de como podemos construir quantas frações equivalentes quisermos. Veja o exemplo a seguir:

$\frac{1}{3}$ -> multiplicando numerador e denominador por 2 teremos $\frac{2}{6}$

$\frac{1}{3}$ -> multiplicando numerador e denominador por 3 teremos $\frac{3}{9}$. Assim, podemos ver que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ e assim sucessivamente...



Determine cinco frações equivalentes para cada caso.

a. $\frac{2}{7}$

b. $\frac{2}{4}$

c. $\frac{12}{6}$

Anote suas respostas em seu caderno

Observemos ainda que, ao estudarmos os números decimais, vimos que eles surgiram quando tivemos que realizar algumas divisões que não eram exatas. Por exemplo, ao dividir 2 por 5, vamos obter o número decimal 0,4, que é lido "quatro décimos", lembra-se?

Não vamos esquecer: Fração é divisão!

Ora, quatro décimos pode ser representado pela fração $\frac{4}{10}$, que é uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ (basta dividir o 4 e o 10 da primeira fração por 2).

Assim, muitos números decimais também poderão ser representados por frações. Você deve estar pensando: onde saiu esse 10?

Simples: note que à direita da vírgula temos uma casa decimal. Sendo assim, o denominador da fração será 10 (um zero). Caso existissem 2 casas decimais após a vírgula, o denominador passaria a ser 100 (dois zeros) e assim sucessivamente. Depois, basta simplificar a fração, ou seja, reduzir o numerador e o denominador, achando uma fração equivalente.

Como representar o número 2,4 por uma fração? E o número 3,75? Você pode pensar, por exemplo, que 2,4 é o mesmo que 24 divido por 10, isto é, 24 décimos, e que 3,75 é o resultado da divisão de 375 por 100, obtendo a fração 375 centésimos. Tudo bem até aqui? Ótimo!

Observe também que, nos exemplos mostrados, trabalhamos apenas com as frações que representam partes de números naturais, isto é, só utilizamos frações positivas. No entanto, podemos pensar também em frações que representam números negativos. Por exemplo, uma temperatura de -10,5 graus poderia ser representada por uma fração. Que fração seria essa?

Atividade 22

Transforme os números decimais a seguir em frações

a. 2,4

b. 3,75

c. -10,5

d. 4,1

e. 33,67

f. -1,023

Anote suas respostas em seu caderno

Saiba Mais

Em alguns casos a fração é equivalente a um número inteiro, por exemplo $\frac{8}{2} = 4$. A estas frações damos o nome de frações aparentes.

Como vimos anteriormente, as frações representam uma divisão, ou ainda, a razão entre dois números. Por isso, os números fracionários também são chamados números racionais.

Todos os números naturais e todos os números inteiros poderem ser escritos em forma de fração, ou seja, também são racionais. Apesar disso, há números que não conseguimos escrever a patir de uma fração. Isso significa que estes números não são resultado de uma divisão entre inteiros. São os chamados número Irracionais, ou seja, os números não racionais.

Um exemplo de número irracional é $\sqrt{2}$ = 1,41421356237309504880 ... Este número não tem fim. Além disso, não há uma repetição de seus elementos de forma organizada. Não é possível escrever este número na forma a/b, com b diferente de zero. Sendo assim, é um número irracional.

Seção 4
Operações com os números racionais

Nesta seção, vamos relembrar um pouco sobre as operações fundamentais com números racionais. Este costuma ser um ponto de muitas dificuldades, então procure ficar atento e conversar com o seu professor se sentir dificuldades!

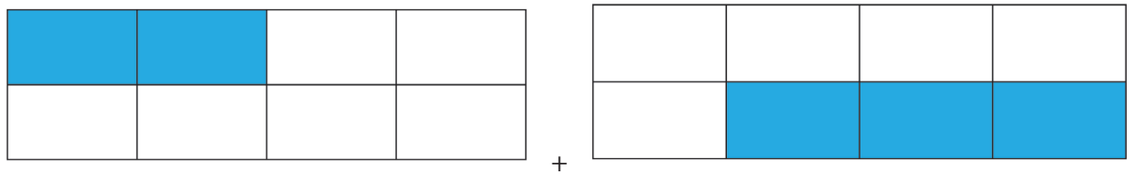
Adição e Subtração

Para adicionarmos ou subtrairmos frações, utilizaremos os conhecimentos que já vimos até agora nas operações com números inteiros.

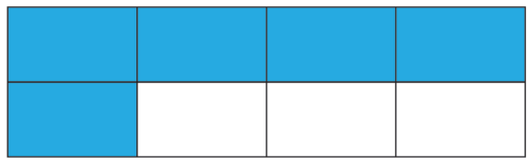
Vamos estabelecer apenas um critério: somente podemos somar ou subtrair frações de mesmo denominador. Ou seja, somente podemos somar ou subtrair partes de mesmo tamanho. Mas como é que isto funciona?

Veja o exemplo a seguir

$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}$ = Note que são "oitavos", isto é, estamos adicionando 2 oitavos com 3 oitavos, assim, teremos ao total, cinco oitavos. Representando graficamente teremos:



O resultado está representado na figura a seguir:



De um modo geral podemos estabelecer a seguinte regra para adição e subtração de frações:

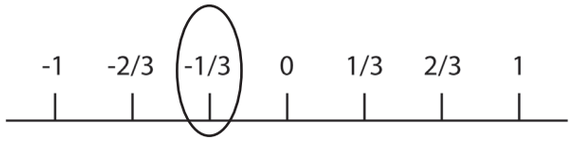
Se os denominadores são iguais, basta repeti-lo e somar ou subtrair os numeradores.

Outro exemplo: $\frac{1}{6}-\frac{3}{6}=$ Note que os denominadores são iguais. Assim, vamos repeti-lo e operar com os numeradores. Teremos: $\frac{1-3}{6}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

Lembra da aula anterior? Conservamos sempre o sinal do número com o maior módulo.

Uma pergunta interessante que pode surgir aqui é a respeito da localização deste número na reta numérica. Onde fica localizado o número $\frac{-1}{3}$?

Note que é um número negativo, desta forma já fica claro que estará a esquerda do zero. Observe também que estamos dividindo uma unidade por 3, isto é, este número é menor que a unidade. Em outras palavras é a terça parte da unidade. Viram como é fácil localizar?



Importante

Sempre que for possível, vamos simplificar a fração. Basta dividir o numerador e o denominador por um mesmo valor. No caso do exemplo anterior, tanto numerador quanto denominador foram divididos por 2.

Como podemos ver, somar ou subtrair frações de mesmo denominador é muito fácil.

Atividade 23

Resolva as operações com frações:

a. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=$

b. $\frac{3}{11}+\frac{1}{11}-\frac{7}{11}=$

c. $-\frac{3}{8}+\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=$

Anote suas respostas em seu caderno

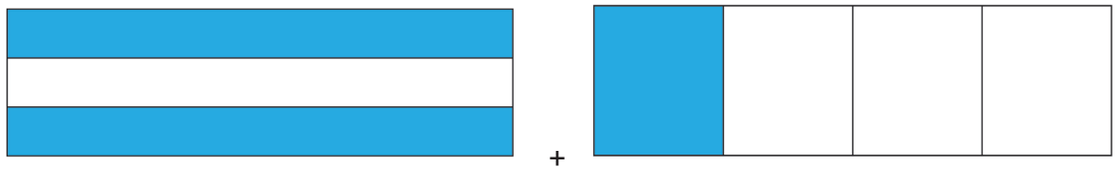
E se os denominadores forem diferentes?

Se os denominadores forem diferentes, será necessário escrever as frações de modo que os denominadores sejam iguais.

Lembra da equivalência de frações? Muito bem, aqui elas serão muito úteis.

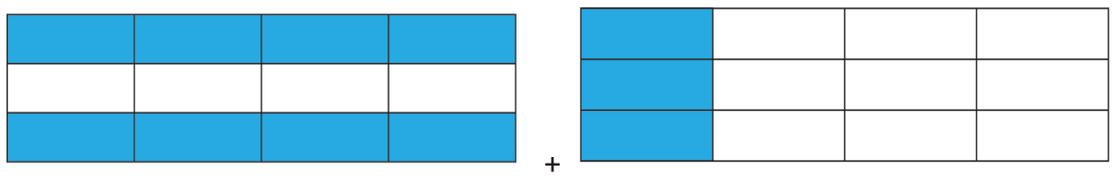
Veja o exemplo: $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$

A representação gráfica fica assim:



Note que, apesar de os retângulos serem iguais, as partes foram divididas de tamanhos diferentes. São fracionadas de forma diferente. E deste modo, não é possível adicionar ou subtrair as frações. É preciso redividir os retângulos, de maneira a todas as partes ficarem iguais. Será que isso é possível?

Vamos refazer a divisão. No primeiro retângulo, vamos traçar três linhas verticais, fazendo divisões iguais, e no segundo retângulo faremos duas linhas horizontais, também fazendo divisões iguais. Assim, os dois retângulos ficaram divididos em 12 partes iguais



Observe que as frações agora são do mesmo tipo (12 avos). Mas como vamos proceder com os números?

É simples, vamos criar frações equivalentes para $\frac{2}{3}$ e para $\frac{1}{4}$

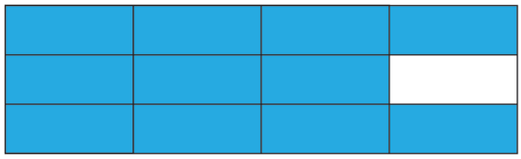
$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}$ e $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\frac{5}{20}$.

É claro que podemos criar infinitas frações equivalentes, porém, já temos o que é necessário. Isso mesmo, frações com mesmo denominador. Observe as frações selecionadas.

Temos então que $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ e que $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$

Podemos concluir então que $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$.

Sua representação gráfica fica assim:



Importante

Alguns números racionais representam valores maiores do que a unidade. Por exemplo, 5/4.

O numerador é maior que o denominador, ou seja, há mais partes do que o todo.

È simples de entender esta situação.

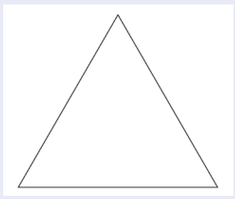
Imagine dividir 5 Reais para quatro pessoas. Obviamente, cada um ficará com a quantia de R$ 1,25, ou seja, mais do que um Real, nesse caso, 1 real, mais vinte e cinco centavos.

Você saberia representar a fração 5/4 usando figuras geométricas? Como tomar 5 partes de um retângulo, por exemplo, que foi dividido em 4 partes? É claro que você terá de utilizar dois retângulos, sendo que as quatro partes de um deles serão totalmente pintadas (4/4 ou 1 inteiro) e o outro terá apenas uma parte pintada (1/4). Assim, adicionando 4/4 com ¼, obtemos 5/4.

Atividade 24

DESAFIO!

Com 3 riscos, divida o triângulo em 4 partes iguais e represente a fração ¼.



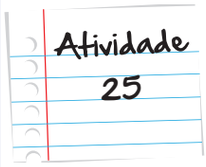
Anote suas respostas em seu caderno

Resolva as operações:

a. $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}=$

b. $\frac{2}{9}-\frac{1}{3}=$

c. $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=$



Anote suas respostas em seu caderno

Multiplicação de números racionais.

Primeiramente, vamos ver como se multiplica um número inteiro por uma fração:

Por exemplo, vamos multiplicar a fração $\frac{2}{3}$ pelo inteiro 3.

$3.\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$ Neste caso, o resultado também é um inteiro.

Outro exemplo interessante é o produto quando o resultado é um valor menor que a unidade.

Por exemplo se multiplicarmos $4.\frac{1}{5}$ teremos $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ Isto é, fizemos a adição de 4 partes das 5 possíveis.

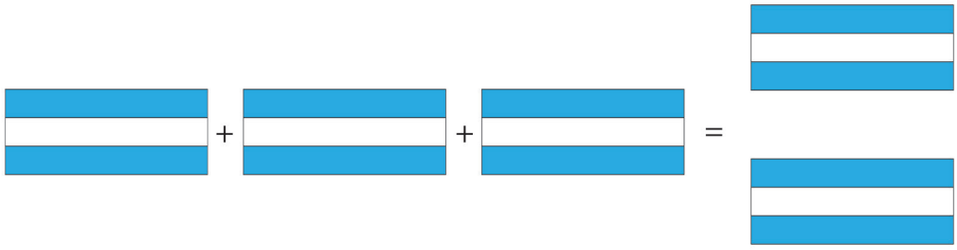
É importante lembrar que, quando calculamos o produto de um número inteiro por uma fração envolvendo números inteiros negativos, obedeceremos às mesmas regras já vistas com produto de números inteiros.

Por exemplo se multiplicarmos $-3.\frac{2}{3}$, estaremos somando 3 parcelas iguais a $\frac{2}{3}$. Assim:

$-3.\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}=-2$

De uma forma geral, ao multiplicar um número inteiro por uma fração, basta multiplicar o numerador da fração por este número inteiro.

Graficamente podemos representar da seguinte maneira:



Atividade 26

Efetue as operações solicitadas:

a. $4.-\frac{3}{5}=$

b. $7.\frac{3}{7}=$

c. $-6.\frac{7}{9}=$

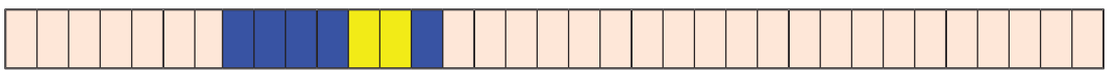
Anote suas respostas em seu caderno

Multiplicando fração por fração.

O produto de frações pode ser entendido através de uma atividade bastante interessante. Por exemplo, se tomarmos o produto $\frac{2}{7}.\frac{1}{5}$, na verdade, o que esta operação quer dizer é o seguinte: Vamos pegar $\frac{2}{7}$ de $\frac{1}{5}$.

Em outras palavras, se dividir uma figura em cinco partes e pintarmos uma dessas partes, obviamente a parte colorida equivale a $\frac{1}{5}$.

Agora, cada uma dessas partes deve ser dividida em 7 partes. Teremos ao todo 35 partes.



Ao selecionarmos duas partes do grupo azul, teremos $\frac{2}{7}$ desse grupo, ou seja teremos $\frac{2}{7}$ de $\frac{1}{5}$.

No total, como são 35 partes, $\frac{2}{7}$ de $\frac{1}{5}$ equivale a $\frac{2}{35}$.

De forma geral, para multiplicarmos duas frações, basta multiplicar o numerador da primeira pelo numerador da segunda, assim como, o denominador da primeira pelo denominador da segunda.

Exemplo 1:

$$\frac{2}{7}.\frac{1}{5}=\frac{2.1}{7.5}=\frac{2}{35}.$$

Quando forem utilizados números racionais negativos, a operação deverá ser feita respeitando-se as mesmas regras utilizadas com os números inteiros.

Exemplo 2

$$\left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{2}{3}\right)=+\frac{6}{15}=+\frac{2}{5}$$

No exemplo 2, a fração $\frac{2}{5}$ equivale a fração $\frac{6}{15}$. Note que o decimal que representa $\frac{2}{5}=0,4$. De mesma forma, o decimal que representa $\frac{6}{15}=0,4$ também. As frações são equivalentes, apenas são representadas com termos menores. A este processo de reduzir proporcionalmente os termos da fração, chamamos simplificação.

Importante

Atividade 27

Efetue as operações:

a. $-\frac{2}{5}.\left(-\frac{3}{7}\right)=$

b. $\frac{1}{9}.-\frac{2}{5}=$

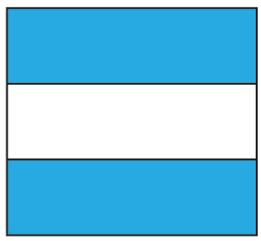
c. $-3.\frac{2}{3}.-\frac{5}{8}=$

Anote suas respostas em seu caderno

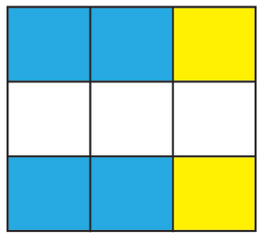
Divisão de frações

Vamos inicialmente dividir uma fração por um número inteiro.

Por exemplo, $\frac{2}{3}$ dividido por 3. Observe, no diagrama, a representação de $\frac{2}{3}$



Vamos dividir agora, cada retângulo em 3 novas partes, assim, teremos:



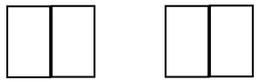
Fica fácil perceber que a segunda figura agora tem 9 partes, sendo que 2 partes são pintadas em amarelo. Estes retângulos em amarelo correspondem ao resultado de $\frac{2}{3}$ dividido por 3, ou seja, em relação ao todo, teremos $\frac{2}{9}$.

Assim, $\frac{2}{3}:3=\frac{2}{9}$

Como fica então se dividirmos um número inteiro por uma fração? Vamos dividir 2 por $\frac{1}{2}$, isto é $2 : \frac{1}{2}$.

Inicialmente, é preciso entender o problema. O que está sendo pedido é quantas vezes o $\frac{1}{2}$ cabe dentro de 2.

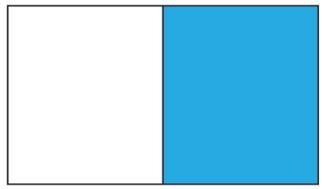
Vamos representar duas unidades e dividir essas unidades no meio, assim, teremos partes do tamanho $\frac{1}{2}$



É óbvio que teremos 4 partes do tamanho $\frac{1}{2}$. Assim, fica evidente que duas unidades podem ser divididas em 4 partes iguais a ½, ou seja, a fração ½ "cabe dentro" do 2 quatro vezes. Assim, $2: \frac{1}{2} = 4$

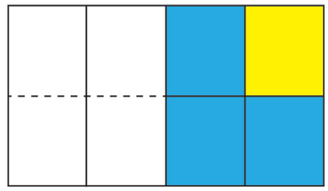
Complementando, como fica a divisão de uma fração por outra fração?

Para exemplificar esta divisão vamos resolver a operação $\frac{1}{2} : \frac{1}{8}$. O que estamos pedindo é verificar quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabe em $\frac{1}{2}$



Em azul temos a representação de $\frac{1}{2}$

Vamos representar neste mesmo desenho uma divisão em 8 partes, assim, a parte amarela representa $\frac{1}{8}$



É evidente que, em cada parte azul $\left(\frac{1}{2}\right)$, cabem 4 partes amarelas $\left(\frac{1}{8}\right)$, o que significa que, ao dividir meio $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{8}$, teremos resultado 4.

De uma forma geral, podemos adotar um algoritmo prático para esta operação. Na divisão de frações, vamos sempre repetir a primeira fração e multiplicá-la pelo inverso da segunda fração.

Importante

Veja como ficarão os exemplos trabalhados anteriormente:

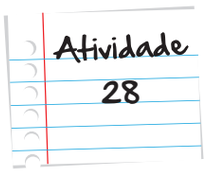
No primeiro exemplo, fizemos 2/3 dividido por 3

Aplicando esta "regra", teremos que multiplicar 2/3 pelo inverso de 3, que é 1/3. Obteremos então: $\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

Agora, para dividir 2 por 1/2 , teremos:

Sabemos que o inverso de ½ é 2 . Logo, teremos: $2:\frac{1}{2}=2.2=4$

Finalmente, da mesma forma temos a operação $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.\frac{8}{1}=\frac{8}{2}=4$



Resolver as operações:

a. $\frac{2}{5}:\frac{3}{8}=$

b. $\frac{3}{2}:\frac{3}{5}=$

c. $\frac{2}{7}:\frac{3}{9}=$

d. $\frac{1}{5}:5=$

e. $6:\frac{3}{8}=$

Anote suas respostas em seu caderno

Problemas envolvendo frações.

Alguns problemas podem ser resolvidos utilizando as operações com frações. Observe o exemplo a seguir:

Mensalmente, Beatriz retira de seu pagamento $\frac{1}{3}$ para alimentação e $\frac{1}{4}$ para aluguel. Qual a fração que sobra do salário de Beatriz para os demais gastos?

Os gastos de Beatriz são $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Pela equivalência de frações podemos afirmar que:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$. Para calcular o restante do salário, basta subtrair este valor do total que é representado por $\frac{12}{12}$.

$\frac{12}{12}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$. Então, o que sobra para Beatriz após os gastos com alimentação e aluguel, corresponde a 5/12 do seu salário.

Frações e Porcentagem

Algumas frações recebem um tratamento especial devido ao seu denominador. São as frações centesimais, isto é, quando estamos dividindo por 100.

Por exemplo, $\frac{5}{100}$ que se lê 5 centésimos, na verdade significa que estamos dividindo uma unidade em 100 partes iguais e separando 5 dessas partes. Assim, podemos dizer que estamos considerando 5 unidades em cada grupo de 100. O que está sendo feito é uma comparação entre 5 e 100, isto é, em cada 100 partes tomamos 5 partes.

Note que simplificando $\frac{5}{100}$ teremos $\frac{1}{20}$, isto quer dizer que pegar 5 partes de 100 é o mesmo que pegar 1 parte em 20 (lembre-se das frações equivalentes!).

E se pegarmos 40 partes em 100?

Simples, representaremos pela fração $\frac{40}{100}$, que simplificada por 10 nos dará $\frac{4}{10}$. Esta fração ainda poderia ser escrita como 2/5...

O que isto significa?

Significa que, em cada 100 partes, separamos 40, ou que, a cada 10 partes, separamos 4, ou ainda, que, a cada 5 partes, tomamos duas. Em todos os casos, fazendo a divisão, vamos obter o número decimal 0,4, ok?

Toda vez que fizermos uma divisão por 100, ela será chamada porcentagem ou percentagem. Vamos representar pelo símbolo % que significa por cento. Assim, quando escrevermos 40%, queremos dizer que estamos dividindo 40 por 100; 25%, significa que estamos dividindo 25 por 100. Tudo bem até aqui? Então vamos continuar!

Observe:

Pelo que foi visto acima, podemos concluir que cada porcentagem tem uma representação fracionária, que também tem uma representação decimal. Veja os exemplos:

$$50\% = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$75\% = \frac{75}{100} = 0,75$$

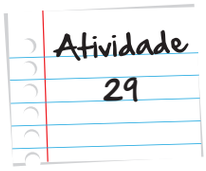
$$\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$$

Outros exemplos:

$$\frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$$

$$\frac{13}{100} = 0,13 = 13\%$$

$$0,06\% = 0,006$$



Calcule o número decimal correspondente a cada percentual:

a. 67%

b. $\frac{19}{100}$

c. 2,8%

d. 5,67%

Como calcular o percentual de uma quantidade?

Por exemplo, quanto custa 35% de R$ 400,00 ?

É simples. Inicialmente vamos definir o decimal correspondente a 35%.

Isso mesmo, você já deve ter feito de cabeça: 0,35.

Agora basta multiplicar esse decimal pelo valor que se quer calcular:

0,35 x 400 = 140, ou seja 35% de R$ 400,00 são R$ 140,00.

Anote suas respostas em seu caderno

Ache o percentual solicitado:

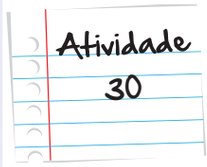
a. 30% de 230

b. 25% de 100

c. 100% de 8

d. 200% de 76

e. 19,5% de 50



Anote suas respostas em seu caderno

Nesta unidade, revisitamos os números inteiros e racionais. As operações com estes números costumam apresentar dificuldades para os alunos, inclusive nas séries posteriores. Procure não deixar passar dúvidas nesta unidade, sim? Nela, nós vimos as ideias relacionadas aos números inteiros e racionais fracionários e as principais operações.

Abraços e até a próxima!

Resumo

- O conjunto dos números inteiros compreende todos os números naturais, o zero e todos os números simétricos aos números naturais.
- Módulo ou valor absoluto de um número inteiro é a distância desse número ao zero.
- Números de mesmo valor absoluto e sinais contrários são chamados opostos ou simétricos e o resultado de sua soma é sempre zero.
- O número zero não tem sinal, ou seja, não é positivo e nem negativo.
- No resultado da adição ou subtração de números inteiros, consideramos na resposta sempre o sinal do número com maior valor absoluto.
- Ao multiplicarmos ou dividirmos um número negativo por um número positivo, sempre teremos resultado negativo.
- Ao multiplicarmos ou dividirmos dois números negativos, sempre teremos resultado positivo
- Todo número diferente de zero, elevado a zero é igual a 1;

- Todo número elevado a 1 é igual a ele mesmo.
- Em uma potência, quando a base é negativa, o resultado será positivo se o expoente for um número par e negativo se o expoente for um número impar;
- Não é possível extrair raiz quadrada de números inteiros negativos;
- Raiz quadrada de zero é zero;
- Entre dois números quaisquer existem infinitos outros números.
- Toda fração tem infinitas frações equivalentes;
- Os números não racionais são chamados irracionais, ou seja, são os números que não podem ser escritos na forma a/b;
- Somente podemos adicionar ou subtrair frações de mesmo denominador.
- Na adição ou subtração de frações com mesmo denominador, repetimos o denominador e somamos ou subtraímos o numerador, conforme a operação.
- Quando as frações têm denominador diferente, precisamos encontrar utilizando frações equivalentes, frações com denominador comum antes de efetuar a adição ou subtração.
- Simplificar uma fração é achar uma fração equivalente; para isto, basta dividir tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número.
- Na multiplicação de fração por um número inteiro, multiplica-se o inteiro pelo numerador e repete-se o denominador.
- Na multiplicação de fração por fração, multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador.
- Na divisão entre duas frações, repetimos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da outra fração.
- Quando a fração tem denominador 100, dizemos que estamos calculando a porcentagem e representamos com o símbolo %.

Para calcular x % de um número basta calcular o produto da fração $\frac{x}{100}$ por esse número.

Veja ainda

Nos endereços a seguir, você poderá acessar vídeo aulas interessantes.

- http://www.youtube.com/watch?v=A3rzH8OtVJk
- http://www.youtube.com/watch?v=IAGczKSd848

- No site http://www.brasilescola.com/matematica/fracao-equivalente.htm você verá várias atividades com frações equivalentes.
- **No endereço** http://www.youtube.com/watch?v=ewTwRZiOms0 você poderá ver sobre a representação de dízimas periódicas.
- Utilize o vídeo disponível em http://www.youtube.com/watch?v=aBpYexwWtPw para conhecer mais sobre os números.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/701012

- http://www.sxc.hu/photo/1289957

- http://www.sxc.hu/photo/1426218

- http://www.sxc.hu/photo/1376037

- http://www.sxc.hu/photo/1194321

- http://www.sxc.hu/photo/1196125

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Jer%C3%B4me_Cardan.jpg

- http://www.sxc.hu/photo/1125831

- http://www.sxc.hu/photo/563822

- http://www.sxc.hu/photo/211699

- http://www.sxc.hu/photo/911431

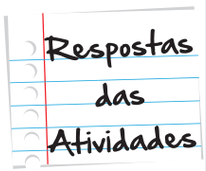
- http://www.sxc.hu/photo/913663

- http://www.sxc.hu/photo/1439838

- http://www.sxc.hu/photo/477807

- http://www.sxc.hu/photo/1439101

- http://www.sxc.hu/photo/517386



Atividade 1

a. - 3

b. + 8

c. - 9

d. + 101

Atividade 2

-40

Atividade 3

Fossa das Marianas 11.034 metros

Teresópolis 871 metros

11.034 + 871 = 11.905 metros de distância.

Atividade 4

Determine o módulo dos inteiros:

a. 3

b. 5

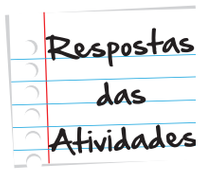
c. 14

Atividade 5

Coloque as sequencias em ordem crescente

a. -4,-3, -1, 0, 2, 7

b. -8, -7, -3, -2, 0, 1, 4



Atividade 6

Entre as opções dadas abaixo, qual o número de maior módulo?

a. -9

b. -17

Atividade 7

Resolva as operações de adição e subtração

a. + 3

b. - 12

c. - 6

d. +1

e. - 4

f. + 20

g. + 3

h. 0

Atividade 8

Resolva as adições e subtrações

a. -2 +(-2) = -2 -2 = -4

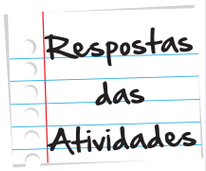
b. -3 – (-4) = -3 + 4 = +1

c. -5 + (-2) = -5 -2 = -7

d. - 3 – 2 +(-4) = -3 - 2 – 4 = -9

e. -5 –(-3) + (-4) = -5 + 3 -4 = -6

f. -2-(-1)+(-1)-(+1)+(-1) = -2 + 1 – 1 – 1 – 1 = -4



Atividade 9

a. (-7) . (+4) = -28

b. (-3) . (-5) = + 15

c. (-3) . 3 = - 9

d. +3 . (+5) = + 15

e. -6 . (-9) = + 54

f. -2 . (-3) . (-1) = - 6

Atividade 10

Dívida diária = -2. Como a semana tem 7 dias, teremos 7 x -2 = -14. Pedro de

14 Reais.

Atividade 11

a. -3 . 4 = -12

b. -2 . -2 . -2 . -2 = 8

c. -4 . +9 . -5 = 180

d. -1 . 0 . 9 . -8 = 0

Atividade 12

Resolva as divisões:

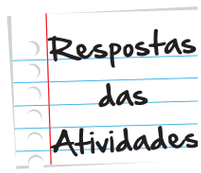
a. (-20) : (-10) = 2

b. 35 : (-7) = -5

c. (-4) : (-4) = 1

d. (7): (-7) = -1

e. 121 : (-11) = - 11



Atividade 13

a. -800 : +200 = -4

b. 4 : -2 = -2

c. -45 : -9 = 5

d. 81 : - 27 = -3

e. 72 : - 8 = -9

Atividade 14

g. $(-4)^5 = -4 \times -4 \times -4 \times -4 \times -4 = -1024$

h. $-2^6 = -(2x2x2x2x2) = -32$

i. $-(3)^5 = -(3x3x3x3x3) = -243$

j. $1^0 = 1$

k. $(-1)^4 = 1$

l. $(-1)^3 = -1$

Atividade 15

Não, pois ao efetuar as potências teremos:

$(-10)^2 = 100$ e $(-2)^2 = 4$, log 100 é maior que 4.

Atividade 16

a) $\sqrt{289} = 17$, pois 17 x 17 = 289

b) $-(\sqrt{36}) = -6$, pois 6 x6 =36

c) $\sqrt{(-64)}$ = Não existe. Não há valor inteiro que multiplicado por ele mesmo resulte em -64.

Atividade 17

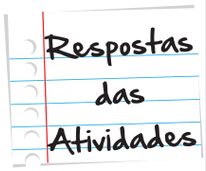
-20 e + 20, pois -20 x -20 = 400 e +20 x +20 = 400. A raiz quadrade de 400 é 20.

Atividade 18

a. Três quartos

b. Cinco oitavos

c. Um, catorze avos



Atividade 19

a. $\frac{2}{9}$

b. $\frac{7}{15}$

c. $\frac{8}{1000}$

d. $\frac{6}{5}$

Atividade 20

a. Dois sextos

b. Um oitavo

Atividade 21

a. $\frac{2}{7}=\frac{4}{14}=\frac{6}{21}=\frac{8}{28}=\frac{10}{35}=\frac{12}{42}$

b. $\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}=\frac{10}{20}=\frac{12}{24}$

c. $\frac{12}{6}=\frac{6}{3}=\frac{3}{1}=\frac{24}{12}=\frac{36}{18}=\frac{48}{24}$

Estes são apenas alguns exemplos, porém, cada aluno poderá escolher entre infinitas possibilidades.

Atividade 22

Transforme os números decimais a seguir em frações

a. 2,4

b. 3,75

c. -10,5

d. 4,1

e. 33,67

f. -1,023

Atividade 23

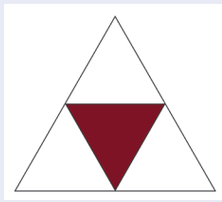
a. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$

b. $\frac{3}{11}+\frac{1}{11}-\frac{7}{11}=\frac{3+1-7}{11}=\frac{-3}{11}$

c. $-\frac{3}{8}+\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{-3+2-1}{8}=\frac{-2}{8}$

Atividade 24

Com 3 riscos, divida o triângulo em 4 partes iguais e represente a fração ¼.



Respostas das Atividades

Atividade 25

a. $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}=\frac{3}{15}+\frac{20}{15}=\frac{23}{15}$

$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{3}{15}=\frac{4}{20}$

$\frac{4}{3}=\frac{8}{6}=\frac{12}{9}=\frac{16}{12}=\frac{20}{15}$

b. $\frac{2}{9}-\frac{1}{3}=\frac{2}{9}-\frac{3}{9}=-\frac{1}{9}$

$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$

c. $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{63}{42}-\frac{7}{42}+\frac{6}{42}=\frac{62}{42}=\frac{31}{21}$

$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=\frac{18}{12}=...=\frac{57}{38}=\frac{60}{40}=\frac{63}{42}$

$\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{3}{18}=\frac{4}{24}=\frac{5}{30}=\frac{6}{36}=\frac{7}{42}=\frac{8}{48}$

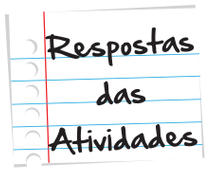
$\frac{1}{7}=\frac{2}{14}=\frac{3}{21}=\frac{4}{28}=\frac{5}{35}=\frac{6}{42}=\frac{7}{49}$

Atividade 26

a. $4.-\frac{3}{5}=-\frac{12}{5}$

b. $7.\frac{3}{7}=\frac{21}{7}=3$

c. $-6.\frac{7}{9}=-\frac{42}{9}=-\frac{14}{3}$



Atividade 27

Efetue as operações:

a. $-\frac{2}{5}.\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{6}{35}$

b. $\frac{1}{9}.-\frac{2}{5}=-\frac{2}{45}$

c. $-3.\frac{2}{3}.-\frac{5}{8}=\frac{30}{24}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

Atividade 28

a. $\frac{2}{5}:\frac{3}{8}=\frac{2}{5}.\frac{8}{3}=\frac{16}{15}$

b. $\frac{3}{2}:\frac{3}{5}=\frac{3}{2}.\frac{5}{3}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

c. $\frac{2}{7}:\frac{3}{9}=\frac{2}{7}.\frac{3}{9}=\frac{6}{63}=\frac{2}{21}$

d. $\frac{1}{5}:5=\frac{1}{5}.\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$

e. $6:\frac{3}{8}=6.\frac{8}{3}=\frac{48}{3}=16$

Atividade 29

a. 0,67

b. 0,19

c. 0,028

d. 0,0567

Atividade 30

a) 0,30 x 230 = 69

b) 0,25 x 100 = 25

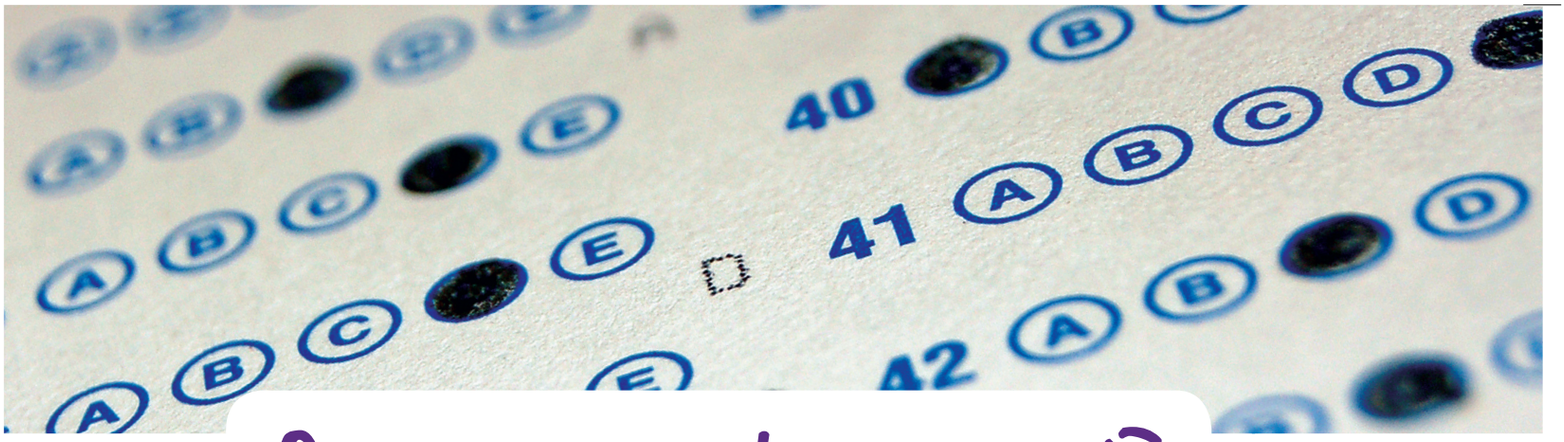
c) 1 x 8 = 8

d) 2 x 76 = 152

e) 0,195 x 50 = 9,75

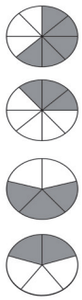
Referências

- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Georgetown: Edgard Blucher, 1991. 479 páginas.



O que perguntam por aí?

1. (Banco de Questões da Prova Brasil) Nas figuras a seguir, as áreas escuras são partes tiradas do inteiro. A parte escura que equivale aos 3/5 tirados do inteiro é



Comentário: Esta questão faz com que o aluno perceba a representação 3/5 de forma imediata (C), mas é importante lembrar que não é raro os alunos confundirem numerador com denominador e que a alternativa (A) seja marcada.

2. (Banco de Questões Saerj/Saerjinho)

(M090703A9) Observe a reta numerada abaixo:

Nessa reta, o ponto P corresponde ao número:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{7}{3}$

Comentário: Para resolver esta questão é necessário que o aluno tenha conhecimento prévio da reta numerada. A maior dificuldade está no aluno compreender que a questão não está se referindo aos números naturais. Neste caso, o professor deve orientar para que atente na gradação da reta. O aluno, provavelmente, visualizará primeiro o número misto $2\frac{1}{3}$ que posteriormente terá que transformar na fração imprópria 7/3.

3. (Banco de Questões do Saerj/Saerjinho)

(M060136B1) Marli comprou uma pizza grande, dividiu-a em partes iguais e comeu alguns pedaços. Veja, na figura abaixo, o que sobrou dessa pizza.

A fração que representaos pedaços que Marli comeu em relação a pizza toda é:

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{8}{3}$

Comentário: Esta é uma questão de resposta direta (A). O aluno deverá concluir que a pizza inteira é representada por 8/8 e que restou 5/8; logo 8/8 – 5/8= 3/8. Provavelmente os alunos não farão esse pensamento, pois irão contar diretamente na figura a parte que foi comida.

4. (Banco de Questões Prova Brasil) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado 1/6 da estrada e na segunda etapa 1/4 da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é
   a. (a)1/5
   b. (b)5/12
   c. (c)7/12
   d. (d)12/7

Comentário: Se já foram construídas nas duas primeiras etapas 1/6 e ¼ é possível concluir que já foram construídas 5/12 da estrada. Logo para terminar faltam 7/12. Diante desse problema os alunos poderão ter dificuldades em manipular as frações e obterem frações equivalente com o mesmo denominador. Nesse momento o professor deve estar atento e reforçar o conceito de frações equivalentes.

5. (Banco de Questões da Prova Brasil) A fração 3/100 corresponde ao número decimal
   a. (A) 0,003.
   b. (B) 0,3.
   c. (C) 0,03.
   d. (D) 0,0003.

Comentário: É possível que essa questão seja trivial para a maioria dos alunos; porém é possível que alguns alunos não consigam relacionar a fração decimal com o número decimal correspondente; o uso da calculadora neste caso pode ser um recurso a ser utilizado. Resposta correta 0,03 (c).

6) (Banco de Questões da Prova Brasil) Distribuímos 120 cadernos entre as 20 crianças da 1ª série de uma escola. O número de cadernos que cada criança recebeu corresponde a que porcentagem do total de cadernos?

(A) 5%

(B) 10%

(C) 15%

(D) 20%

Comentário: Esta questão não utiliza o conceito de fração de forma explícita, mas, se este estiver bem desenvolvido pelo aluno, a resolução deste problema não ocasionará maiores transtornos. Inicialmente o aluno terá de calcular quantos cadernos cada criança recebeu. Se foram 120 cadernos distribuídos entre 20 crianças, logo cada criança recebeu 6 cadernos (estamos considerando que a divisão foi feita em partes iguais para cada criança!) . Diante desse resultado, é necessário calcular qual a porcentagem de cadernos recebidos (6 cadernos) em relação ao total de cadernos (120). Um bom modo é calcular 6/120 que resultará em 0,05= 5/100; logo, a resposta será a letra a. Outras formas de poderão ser apresentadas pelos estudantes.

Cálculo Algébrico

Para início de conversa...

Uma atividade muito comum a todas as cidades, quer sejam cidades grandes ou da periferia, é a realização de feiras livres. Todas as semanas, em dias determinados, dezenas de profissionais se reúnem a fim de venderem diferentes produtos. Armam suas barracas multicoloridas e se prepararam para negociar vários produtos, alguns produzidos por eles mesmos, outros adquiridos para comercialização.

É interessante como as pessoas da região onde a feira se localiza, sabem exatamente onde comprar cada produto. Esta é uma atividade que se estende há milhares de anos e que, com certeza, você já frequentou diversas vezes.

É comum as mercadorias conterem pequenos cartazes indicando o nome do produto e o preço, como por exemplo:

Pare e pense: gastando exatamente dez reais, quais destes artigos podemos comprar?

Por exemplo, podemos comprar:

• um quilo de tomates e uma dúzia de bananas; ou

• dois quilos de cebola, e uma dúzia de bananas;

Será que existem outras possibilidades?

Sem contar as opções onde restará troco. Neste caso, as possibilidades são ainda maiores. A variedade de opções é grande. Imagine agora que você pode gastar até dez reais, ou seja, não necessariamente todos os dez reais. Teremos várias outras possibilidade de combinarmos as quantidades e valores.

Note que existe uma variação de valores a ser pago, obviamente, dependendo dos itens e das quantidades a serem compradas. Se resolvermos comprar apenas bananas, poderemos variar a quantidade até alcançar os dez reais, se tivermos mais dinheiro para investir na compra deste produto, a variação será ainda maior. Se utilizarmos a letra b para indicar a quantidade de bananas que vamos comprar, teremos uma variação no valor a ser pago, ou seja, a variação dos valores de b acarretará a variação do valor a ser pago. Veja a tabela abaixo:

Quantidade a ser comprada	Valor de b (em dúzias)	Valor pago
Meia dúzia	0,5	4,00 . 0,5 = 2,00
Uma dúzia	1	4,00 . 1 = 4,00
Uma dúzia e meia	1,5	4,00 . 1,5 = 6,00

Você pode perceber que b assume diferentes valores, ou seja, varia de acordo com a quantidade a ser comprada. Pelo fato de esta letra poder assumir diferentes valores, ela é chamada *variável*.

Nesta unidade, vamos aprender um pouco de Álgebra, isto é, vamos utilizar letras (que chamaremos de variáveis) para representar diferentes valores e representar diversas situações.

Objetivos de Aprendizagem

- Compreender a ideia de variável e a utilização de letras para representar números.
- Representar expressões algébricas como modelo matemático de diferentes situações.
- Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
- Resolver operações com monômios e binômios.
- Calcular perímetros e de áreas utilizando expressões algébricas.

Seção 1
Expressões Algébricas

Na introdução, observamos que uma letra pode assumir diferentes valores numéricos. Para dar continuidade a nosso estudo, vamos representar a quantidade de tomate que será comprada pela letra t, a quantidade de bananas pela letra b e a de cebolas, pela letra c. Assim, as letras t, b e c são as variáveis. Vamos fazer algumas contas para ver os valores a serem pagos em cada compra:

Tomate (quilo) 6,00	**Banana (dúzia) 4,00**	**Cebola (quilo) 3,00**	**Total**	**Representação**
Meio quilo 6,00 . 0,5 = 3,00	Uma dúzia 4,00 . 1 = 4,00	1 quilo 3,00 . 1 = 3,00	10,00	$6,00.\frac{1}{2}+4,00.1+3,00.1=10,00$
Dois quilos 6,00 . 2 = 12,00	Meia dúzia 4,00 . 0,5 = 2,00	3 quilos 3,00 . 3 = 9,00	23,00	$6,00.2+4,00.\frac{1}{2}+3,00.3=23,00$

Se utilizarmos as letras t, b e c para representarem as quantidades compradas, respectivamente, de tomates, bananas e cebolas, podemos calcular o preço a pagar usando a seguinte expressão: 6,00.t + 4,00 . b + 3,00 . c

Se substituirmos cada letra pela respectiva quantidade que comprarmos, e efetuarmos as contas, vamos obter o valor a ser pago.

Você pode perceber que as variáveis (letras) podem assumir diferentes valores reais, pois elas dependem da quantidade que vamos comprar de cada produto. Perceba também que a situação descrita pode ser representada matematicamente por uma expressão. Esta expressão contém letras e números e é chamada expressão algébrica.

Usamos as letras para representar variáveis ou valores desconhecidos em Matemática. As letras mais usadas costumam ser x, y ou z , mas qualquer letra pode ser usada.

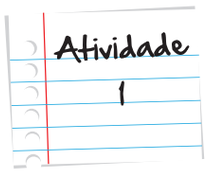
Vamos agora representar algumas situações por expressões algébricas. Considerando x um número qualquer, representar:

O dobro de número: 2x

A diferença entre a terça parte de um número e seu dobro: $\frac{x}{3} - 2x$

O triplo da quarta parte de um número: $3.\frac{x}{4}$

O consecutivo de um número: $x + 1$



Escreva uma expressão algébrica que representa cada situação a seguir:

a. A oitava parte de um número.

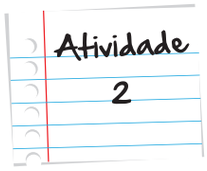
b. O quinto de um número somado com sua metade.

c. A diferença entre o triplo de um número e seu quadrado.

d. O cubo de um número mais o quadrado de sua metade.

e. A décima parte de um número menos o quadrado de sua terça parte.

Anote suas respostas em seu caderno



Dadas as expressões algébricas, escreva por extenso o significado de cada uma.

a. $3x - 5$

b. $2x + \frac{x}{4}$

c. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$

d. $2x - x^3$

Anote suas respostas em seu caderno

Valor numérico de uma expressão algébrica

Você já observou como os feirantes conseguem realizar cálculos mentais com enorme facilidade? O treinamento e a repetição a que eles se submetem diariamente faz com que tenham enorme facilidade em calcular o valor das compras.

Por exemplo: dois quilos de tomate mais uma dúzia de bananas.

Vamos escrever a expressão algébrica representativa para esta situação:

É fácil entender que basta substituir a variável t por 2 e a variável b por 1. Teremos então:

6.2 + 4.1 = 12 + 4 = 16. O valor 6 que precede a letra t está multiplicando. Se o feirante resolver reduzir o preço do tomate para 5,00 e manter o preço da banana, qual o valor a ser pago?

Vamos partir da mesma expressão: 5t+4b = 5.2+4.1 = 14.

Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica é simplesmente substituir cada variável por um valor determinado, calculando assim o resultado da expressão para aqueles valores.

Importante

O número que precede a letra é chamado parte numérica ou coeficiente e a letra (variável) é chamada parte literal. A parte numérica está multiplicando a parte literal, pois representa a quantidade de vezes que esta letra é repetida.

3x = x + x + x, ou seja, três vezes x.

Exemplo. Calcule o valor numérico da expressão 3a – 2b quando a = 3 e b = -2

3a – 2b = 3.3 – 2 (-2) = 9 + 4 = 13

Atividade 3

Calcule em seu caderno o valor numérico das expressões:

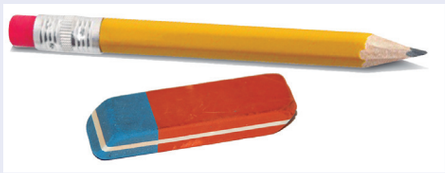
a. $2a - 3b + c$ para $a = 1$, $b = 0$ e $c = 2$

b. $3x - \frac{y}{4}$ para $x = 2$ e $y = 8$

c. O dobro de x mais o triplo de y, para $x = -3$ e $y = 2$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4



Bianca compra lápis R$ 1,50 e borrachas a R$ 0,70. Esta semana ela comprou 12 lápis e 10 borrachas para distribuir entre seus alunos. Se ela comprar x lápis e y borrachas, como pode ser representado o valor a ser pago por Bianca?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Monômios

Já vimos que podemos escrever expressões algébricas representando diferentes situações. Por exemplo, representar o dobro de um número, implica em escrever 2x. Vamos analisar esta expressão:

Parte numérica ou coeficiente → **2.x** ← Parte literal ou variável

A estas expressões formadas por uma parte numérica, que chamaremos coeficiente, multiplicada por uma parte literal, daremos o nome de monômios. Observe outros exemplos de monômios:

.4y: coeficiente 4 e parte literal y

.3ab: coeficiente 3 e parte literal ab

.$2xy^2$: coeficiente 2 e parte literal xy^2

Observe que não colocamos o sinal de multiplicação entre os coeficientes e as letras das expressões, mas vamos considerar que entre elas será feita esta operação. Assim, quando escrevemos a expressão $2xy^2$ queremos representar o produto $2.x.y^2$.

Desta forma, se o coeficiente for zero, teremos que toda a expressão será zero.

Monômios que apresentam exatamente a mesma parte literal são chamados monômios semelhantes.

.3x e 5x são semelhantes

.$2x^6$ e x^6 são semelhantes

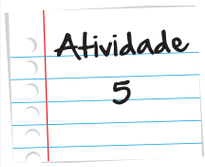
O grau de um monômio de coeficiente não nulo é dado pela soma dos expoentes das variáveis

$3x^3$ tem grau 3 ou terceiro grau

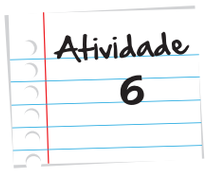
$4x^2y^4$ tem grau 6 ou sexto grau, pois a soma dos expoentes será 2 + 4 = 6

Escreva o coeficiente, a parte literal e o grau de cada monômio

a. 3x
b. by^2
c. $5d^3e^2$
d. $-4g^2$
e. $\frac{x}{4}$



Anote suas respostas em seu caderno



Dadas as expressões a seguir, separe os pares de monômios semelhantes:

$3x$ $7y^2$ $7y$ $4ab$ $-3y^2$ $\frac{1}{8}y$ x $-2ab$

Anote suas respostas em seu caderno

Operações com Monômios

Agora que já conhecemos os monômios semelhantes, somos capazes de realizar as operações elementares de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação e radiciação dos monômios. Vamos lá?

Adição e subtração

Adicionar ou subtrair monômios é uma tarefa bastante fácil. Veja a situação a seguir:

Três amigos (Paulo, Fernando e Edson) vão à feira e cada um resolve comprar laranjas.

Paulo comprou duas dúzias, Fernando comprou uma dúzia e Edson comprou 5 dúzias. Como não sabemos o preço da dúzia de laranjas, vamos dizer que eles compraram a um preço x cada dúzia de laranjas.

Como representar o valor pago por cada um? E o valor pago pela compra dos três amigos?

Se cada dúzia de laranjas custa x reais, teremos:

Paulo = 2x reais

Fernando = x reais

Edson = 5x reais

Custo total = x + 2x + 5x = 8x reais

Você pode perceber que a adição foi realizada adicionando-se os coeficientes (1 + 2 + 5) e repetindo-se a parte literal. Vale observar que esta adição só foi possível porque os três monômios são semelhantes.

Exemplos:

$4x + 3x + 9x + 6y = 16x + 6y$

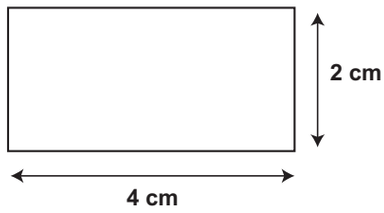
$3z + 8f + 5f + 2z = 5z + 13f$

Vamos resolver um exemplo de adição de monômios onde é necessário calcular a área e o perímetro de uma figura.

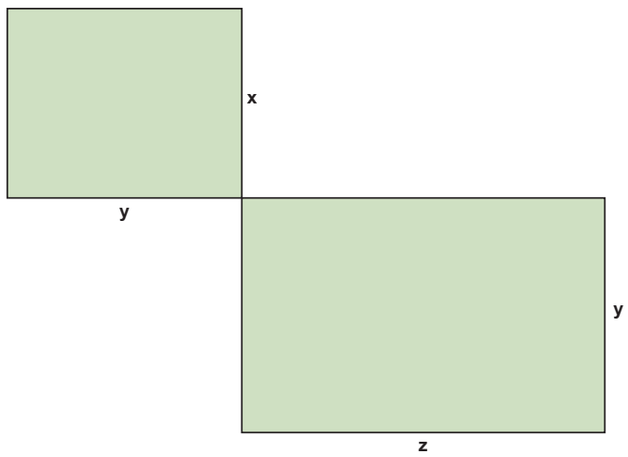
Importante

O perímetro de um polígono é dado pela soma das medidas de seus lados. Por exemplo, um retângulo onde a medida dos lados é 2cm e 4cm, tem perímetro igual a 12cm.

Temos que 2 cm + 2 cm + 4 cm + 4 cm = 12 cm.



Vamos tomar como exemplo a figura abaixo composta por dois retângulos em que as medidas dos seus lados são representadas pelas variáveis x , y e z.



Qual o perímetro desta figura?

Como os lados do retângulo menor são x e y, teremos $x + x + y + y = 2x + 2y$. O retângulo maior tem lados y e z, assim, seu perímetro será: $z + z + y + y = 2z + 2y$.

Somando os perímetros, teremos: $2x + 2y + 2z + 2y = 4x + 2z + 2y$.

Para subtrair monômios, o processo será semelhante ao que se faz para adicionar monômios, ou seja, só podemos subtrair monômios semelhantes, por exemplo:

$4x + 3y - 2x - 5y - z =$

Vamos subtrair apenas os monômios semelhantes:

$4x - 2x$ e $3y - 5y$, teremos $-2x - 2y - z$.

Outros exemplos:

$3x^2 - 6x + 2x^2 - 9x - x^2 =$

Organizando, teremos: $3x^2 + 2x^2 - x^2 - 6x - 9x = 4x^2 - 15x$

Apenas podemos adicionar ou subtrair monômios semelhantes

Mais exemplos:

$4x^2 + 3x^2 + y^3 = 7x^2 + y^3$

$-2x^2y - x^2y = -3x^2y$

Para somar ou subtrair monômios, basta somar ou subtrair os coeficientes dos monômios de termos semelhantes e repetir a parte literal.

Um processo prático é repetir a parte literal e resolver as operações apenas com os coeficientes. É o que chamamos redução dos termos semelhantes:

$3xy + 2xy - 5xy - 7xy + xy = (3 + 2 - 5 - 7 + 1)\,xy = -6xy$

Efetue as adições e subtrações de monômios em seu caderno:

a. $2ab + 3ab - 7ab - 8ab + 2ab$

b. $5xyz - 6xyz + 9xyz$

c. $5x^2 - 4x^2 - 7x^2$

d. $2z^3 + 3z^3 + (-5z^3)$

e. $3x + 4yz - 7x$

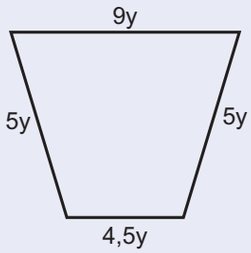
f. $2x^3 - 2x^2 + 2x^3$

Atividade 7

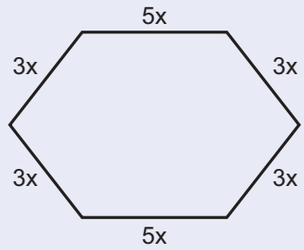
Anote suas respostas em seu caderno

Determine o perímetro das figuras construídas a seguir:

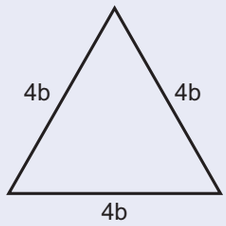
I.



b)



c)



Atividade 8

Anote suas respostas em seu caderno

Multiplicação de monômios

Já sabemos como adicionar e subtrair monômios. Também já aprendemos a multiplicar números inteiros e números racionais. Vamos agora multiplicar monômios:

Primeiro vamos multiplicar um número por um monômio, por exemplo, $2 \cdot 3x^2$

Vamos fazer a multiplicação de $2 \cdot 3x^2$

É o mesmo que escrever $3x^2 + 3x^2$, logo teremos $3x^2 \cdot 2 = 6x^2$.

Você pode perceber que não há a necessidade dos termos serem semelhantes. Neste caso, basta multiplicar o número pelo coeficiente do monômio e repetir a parte literal.

Veja este outro exemplo: $4x \cdot 3y$

$$4x.3y = (4.3).(x.y) = 12xy$$

Observe que multiplicamos os coeficientes de cada monômio e em seguida as suas partes literais...

Mais um exemplo, agora com expoentes:

$3x^2y \cdot (-2x^3y) =$

Vamos multiplicar os coeficientes: $3 \cdot (-2) = -6$

Agora vamos multiplicar as partes literais. Lembrando que no produto de potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes:

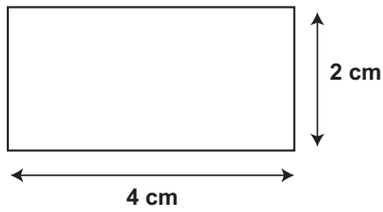
$x^2y \cdot x^3y = x^{2+3}y^{1+1} = x^5y^2$.

Assim, $3x^2y \cdot (-2x^3y) = -6x^5y^2$

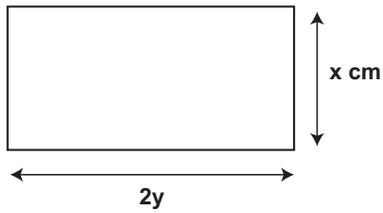
Como você percebeu, na multiplicação, não é necessário que os termos sejam semelhantes.

Importante

Calcular a área de um retângulo é simplesmente multiplicar a medida da altura pela medida da largura. Por exemplo, na figura a seguir, a área é $8cm^2$ pois a medida da altura vale 2cm e a largura mede 4cm.



Vamos calcular a área do retângulo cujas medidas da altura e da largura são expressas por x e 2y.



A área do retângulo será dada por $x \cdot 2y = 2xy$

De uma forma geral, para multiplicar monômios basta multiplicar os coeficientes de cada monômio e multiplicar a parte literal com a parte literal.

Resolva os produtos de monômios em seu caderno.

a. $6x^3 \cdot 3xy$

b. $-3ad^2 \cdot ab$

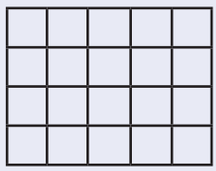
c. $\frac{x}{3} \cdot \left(-\frac{x^3}{4} \right)$

d. $ab^2c^3 \cdot 8ab^2c$

Atividade 9

Anote suas respostas em seu caderno

No desenho a seguir, o lado de cada quadrado que compõe o retângulo tem *x* cm de comprimento. Determine o perímetro e a área do retângulo.



Atividade 10

Anote suas respostas em seu caderno

Divisão de Monômios

A divisão de monômios deve obedecer às mesmas regras da divisão de números reais. Vamos lembrar que, na divisão de potências de mesma base, basta repetir a base e subtrair os expoentes.

Alguns exemplos:

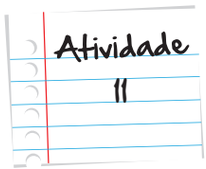
$14x : 7 = 14 : 7 = 2x$

$16x^2 : 4x = 16:4 = 4$ e $x^2 : x = x^{2-1} = x$ teremos, $4x$

$24x^3 : (-12xy)$ Vamos lembrar que a fração é uma divisão, assim.

Teremos $24x^3 : -12xy = \frac{24x^3}{-12xy} = 24 : (-12) = -2$ e $\frac{x^3}{xy} = \frac{x^{3-1}}{y} = \frac{x^2}{y}$. Então $24x^3 : (-12xy) = -2\frac{x^2}{y}$

Para dividir dois monômios, é preciso dividir os coeficientes e depois dividir as partes literais.



Resolva as divisões de monômios em seu caderno

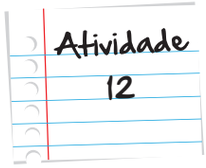
a. $-48x^2y^3 : 4x^2y^3$

b. $4c^2d^3 : -4d^3c^2$

c. $16x^2y^3 : 8xy^2$

d. $2x^3 : 4x^2$

Anote suas respostas em seu caderno



Ache o monômio desconhecido em cada caso.

a. Qual o monômio que, multiplicado por $-3x^2$, resulta no monômio $36x^4y$?

b. Qual o monômio que, multiplicado por $3x^7$, resulta no monômio $-16x^7y^5$?

Anote suas respostas em seu caderno

Potências de Monômios

Já estudamos que uma potência é um produto de termos iguais, onde a base representa o termo a ser multiplicado e o expoente, a quantidade de vezes que faremos a multiplicação.

Por exemplo $5^3 = 5x5x5 = 125$

Lembrando as propriedades de potenciação:

Na multiplicação de potências de base igual, conservamos a base e somamos os expoentes.

$X^3 . x^4 = x^{3+4} = x^7$

Para calcular potência de potência, repete-se a base efetua-se o produto de um expoente pelo outro:

$(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^6$ ou seja, $(4^2)^3 = 4^{2.3} = 4^6$

Importante

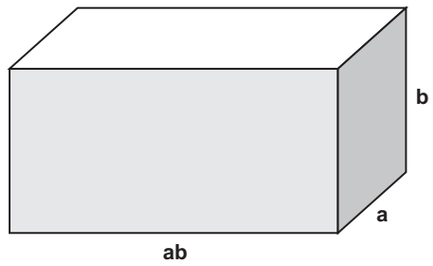
Ao elevarmos um monômio a uma potência, iremos proceder de igual modo:

$(3x^2)^3 = 3x^2 . 3x^2 . 3x^2 = 3.3.3.x^2.x^2.x^2 = 27x^6$

$(4x^2y^3)^4 = 4x^2y^3 . 4x^2y^3 . 4x^2y^3 . 4x^2y^3 = 4.4.4.4 . x^{2+2+2+2} . y^{3+3+3+3} = 256x^8y^{18}$

$$\left(\frac{2}{3}x^2\right)^3 = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.x^2.x^2.x^2 = \frac{8}{27}x^6$$

Outro exemplo interessante é o cálculo do volume de um paralelepípedo. Por exemplo, se considerarmos um paralelepípedo como o representado na figura abaixo, cujas dimensões são expressas por ab, a e b.



Sabemos que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto entre suas dimensões, que neste caso são: a, b e ab.

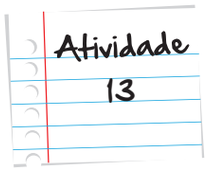
Teremos o volume $V = a . b . ab$, ou seja, $V = a^2b^2$.

Qual será então o volume do paralelepípedo acima, se considerarmos a = 2cm e b = 3cm? Quais seriam as dimensões desse paralelepípedo, considerando os valores de a e b dados? Calcule novamente o volume e confira se o resultado que você encontrou usando a expressão algébrica é o mesmo.

Simples. Substituindo os **valores** nas variáveis teremos:

$V = a^2b^2 \therefore V = 2^2.3^2 \therefore V = 4 . 9 \therefore V = 36\ cm^3$

As dimensões serão 2cm, 3cm e 6cm, e o volume será 36 cm^3



Calcule as potências dos monômios a seguir:

a. $(3z^3x)^4$

b. $(2a^2b)^5$

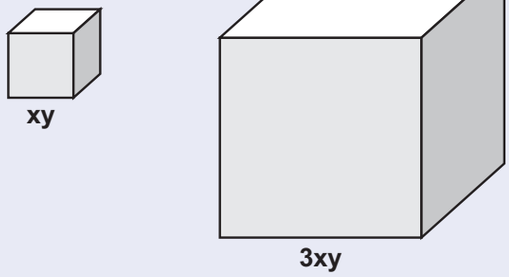
c. $\left(\frac{t^3}{2}\right)^3$

Anote suas respostas em seu caderno

O volume de um cubo é dado pelo valor da medida da aresta elevada ao cubo. Por exemplo, se um cubo tem aresta cuja medida é 4 cm, seu volume será $(4cm)^3$, isto é, 64 cm^3.

Importante

Observe a seguir, as figuras representativas de dois cubos e calcule:



Atividade 14

a. O volume do cubo menor.

b. O volume do cubo maior.

c. Considerando os cubos menores, quantos cabem dentro do cubo maior?

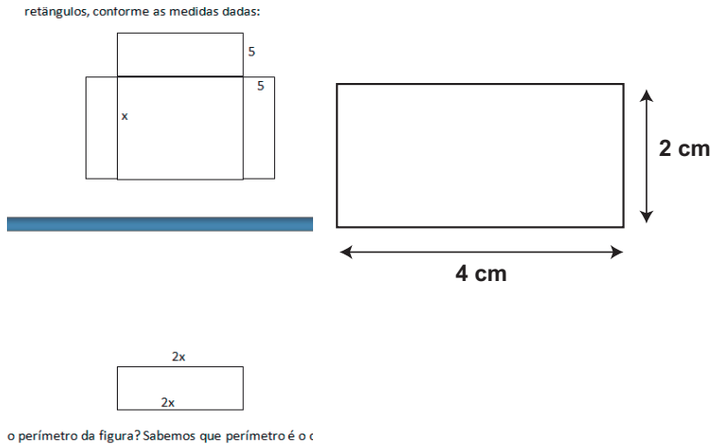
d. Qual o volume dos cubos quando x = 2 cm e y = 4 cm?

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Polinômios

Nas atividades e exemplos anteriores, algumas vezes encontramos expressões formadas pela adição de dois ou mais monômios.

- Vamos agora calcular o perímetro e a área da figura abaixo, formada por cinco retângulos, conforme as medidas dadas:



Qual o perímetro da figura? Sabemos que perímetro é o contorno da figura, assim, teremos:

$2x + 2x + x + x + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6x + 40$.

Qual a área da figura? Podemos calcular esta área dividindo a figura em 5 partes: dois retângulos pequenos de dimensões 5 e x; dois retângulos médios, de dimensões 5 e 2x, e um retângulo maior, de dimensões x e 2x. Assim teremos:

.área do retângulo pequeno = $5 . x = 5x$

.área do retângulo médio = $2x . 5 = 10x$

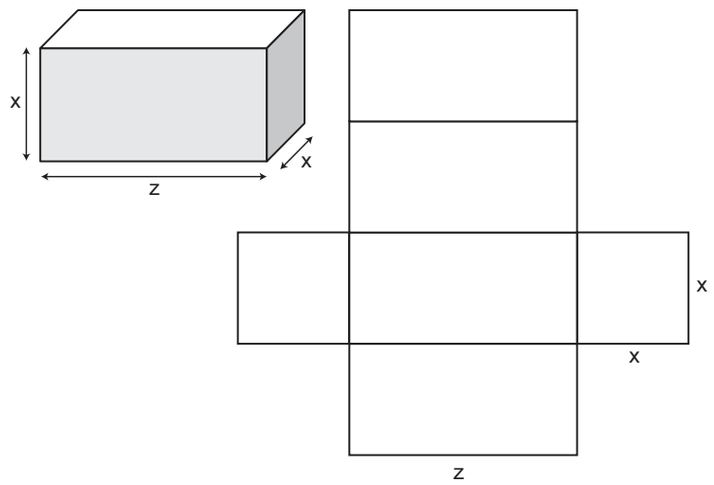
.área do retângulo maior = $x . 2x = 2x^2$

Somando as áreas teremos a Área total:

.área total = $2 . 5x + 2 . 10x + 2x^2$

.área total = $2x^2 + 30x$

Outro exemplo pode ser visto a partir da observação das figuras a seguir. Elas representam uma caixa com a forma de um paralelepípedo e sua planificação, onde as medidas são representadas por variáveis.



Vamos calcular a área total da superfície planificada

Temos seis figuras:

- quatro retângulos de largura x e altura z;
- dois quadrados de lado x. Calculando as áreas teremos:

. área do retângulo: xz, como temos 4 retângulos, a área total dos retângulos será 4xz;

. área do quadrado: $x.x = x^2$, como temos dois quadrados, a área total dos quadrados será $2x^2$;

Sendo assim, a área total da figura é a soma de todas as áreas, ou seja, $4xz + 2x^2$.

Esta expressão é a soma de dois monômios.

Toda expressão composta pela adição de dois ou mais monômios não semelhantes é chamada polinômio. No caso de serem apenas dois monômios, chamaremos binômio.

Alguns exemplos:

.$x^2y^3 + 4x$ é um polinômio com dois termos, chamaremos binômio;

.$b^2 – 4ac$ é um polinômio com dois termos, chamaremos binômio;

.$ax + b - a + 8$ é um polinômio de quatro termos.

Importante

O grau de um monômio é dado pela soma dos expoentes da parte literal. O grau de um polinômio é dado pelo maior grau dos monômios que o formam.

Na expressão $a^3b^4 – b^3c – b$, o monômio de maior grau é a^3b^4, assim, o grau do polinômio é 7

Atividade 15

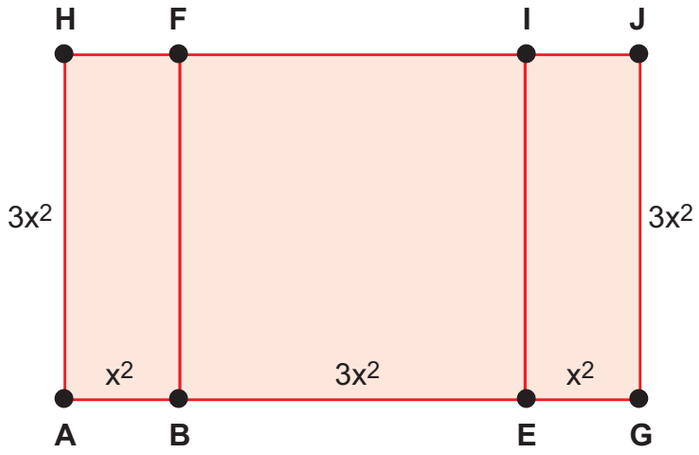
Classifique cada expressão algébrica como monômio, binômio ou trinômio. A seguir determine o grau:

a. $3x^4y^2 – 2x^6 + 5x^3yz^4$
b. $xy – y$
c. $b^2 – c^4 + d$
d. c^5f^4

Anote suas respostas em seu caderno

Simplificação de polinômios

Observe a figura abaixo. Ela representa dois retângulos de medidas x^2 e $3x^2$ e um quadrado de lado $3x^2$.



Vamos calcular o perímetro desta figura.

Teremos: $3x^2 + x^2 + 3x^2 + x^2 + 3x^2 + x^2 + 3x^2 + x^2$

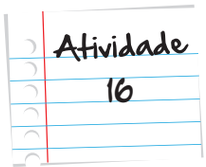
Você pode perceber que temos 4 parcelas $3x^2$ e quatro parcelas x^2. Somando as parcelas teremos:

$3x^2 + 3x^2 + 3x^2 + 3x^2 = 12x^2$

$X^2 + x^2 + x^2 + x^2 = 4x^2$

$12x^2 + 4x^2 = \mathbf{16x^2}$

O que acabamos de fazer foi simplificar a expressão, reduzindo os termos semelhantes. Chamamos a este resultado **polinômio reduzido**.



Simplifique os polinômios abaixo:

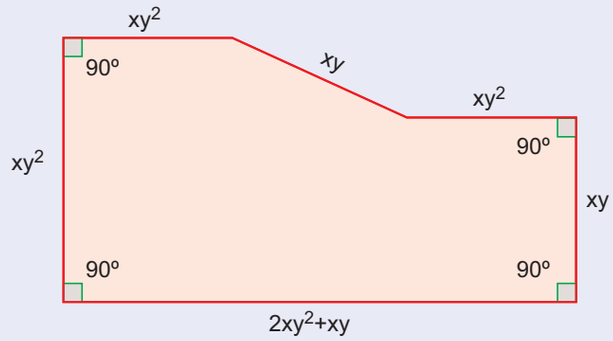
a. $3x^3 - 5x^2y + 4x^3 + 2x^2y - 7$

b. $x^2 - 3x^2 + y^4 - y^4 + 3x^2y^6$

Anote suas respostas em seu caderno

Determine o perímetro da figura:

a)



Atividade 17

Anote suas respostas em seu caderno

Operações com binômios

As operações com binômios obedecerão os mesmos critérios das operações com monômios, visto que um binômio nada mais é que uma expressão formada por monômios.

Antes de estudarmos sobre adição e subtração de binômios, vamos falar sobre binômios opostos ou simétricos.

Oposto ou simétrico de um binômio

Você deve lembrar que o oposto (ou simétrico) de um número é aquele que adicionado a esse número resulta igual a zero. Complicado? Claro que não. Vejamos na prática:

O oposto ou simétrico de 4 é -4, pois $4 + (-4) = 0$.

O oposto ou simétrico de -10 é 10, pois $-10 + 10 = 0$.

Assim, para obter o oposto de um número basta multiplicá-lo por -1.

Essa ideia é válida quando estamos trabalhando com expressões algébricas. Por exemplo,

O oposto ou simétrico de $6x$ é $-6x$, pois $6x + (-6x) = 0$.

Qual o oposto ou simétrico de - $4y^2$?

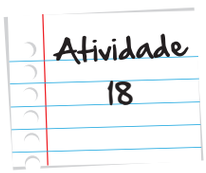
Isso mesmo é $4y^2$, pois - $4y^2$ + $4y^2$ = 0.

Qual o oposto ou simétrico de 3x + 2?

O oposto ou simétrico de (3x + 2) será –(3x+2), isto é, multiplicando cada elemento por -1 teremos -3x -2.

Outro exemplo: Qual o oposto ou simétrico de (-3x + 4)?

Oposto ou simétrico é – (-3x + 4), ou seja 3x -4.



Dê o oposto ou simétrico de cada expressão:

a. $2x^2 – 4x$

b. $5xy + 2x^3$

c. $3xy^2 – 4x^2$

Anote suas respostas em seu caderno

Adição e Subtração de Binômios

Vamos adicionar e subtrair binômios, para isto, vamos utilizar o exemplo a seguir:

Sejam os binômios ($x^2 – y$) e ($3x^2 +y$).

Se somarmos os binômios teremos:

($x^2 – y$) + ($3x^2 +y$) = $x^2 – y + 3x^2 + y = 4x^2$. Como –y e y são opostos, o resultado de sua soma é zero. Lembre que podemos somar apenas os termos semelhantes.

E a subtração? Neste caso, basta lembrar que a subtração pode ser vista como a soma de um número com o seu oposto ou simétrico.

assim, 5 – 4 = 5 + (- 4). Entre expressões algébricas podemos usar o mesmo raciocínio:

Exemplo 1:

$(2x + y) – (4x - 3y) = (2x + y) + [-(4x – 3y)] = 2x + y -4x + 3y = - 2x + 4y$

Exemplo 2:

$(3x^2 – 5x) – (5x +2) = (3x^2 – 5x) + [– (5x +2)] = 3x^2 – 5x – 5x - 2 = 3x^2 – 10x - 2$

Exemplo 3:

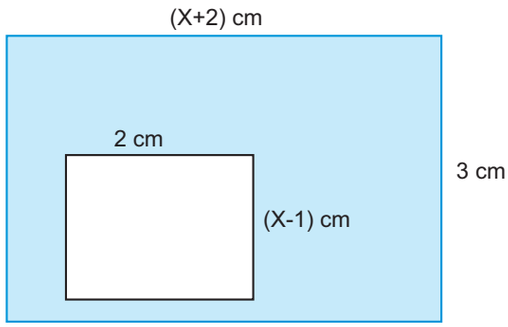
$(x^2 – y) - (3x^2 +y)$.

Na prática, procederemos diretamente, apenas trocando os sinais do segundo polinômio e efetuando as operações adição e subtração. Assim:

$(x^2 – y) - (3x^2 +y) = x^2 – y - 3x^2 - y = -2x^2 – 2y$

Outro exemplo muito interessante é o cálculo da área resultante de uma figura, quando dela retiramos uma outra figura. Observe:

O retângulo maior tem altura medindo 3 cm e comprimento medindo (x + 2) cm, enquanto que o retângulo menor tem altura medindo (x – 1) cm e comprimento com medida igual a 2 cm. Determine a área pintada de azul .



Para determinar a área resultante, devemos inicialmente calcular a área de cada figura e depois subtrair o valor da área do retângulo branco do valor da área do retângulo azul. Assim:

.área do retângulo azul = $3 . (x+2) = (3x + 6)$ cm ^{2},

.área do retângulo branco = $2 . (x – 1) = (2x – 2)$ cm^2

.área resultante = $(3x +6) - (2x - 2)$

É preciso eliminar os parênteses, e para isto, precisamos achar o simétrico do segundo binômio, visto que o mesmo é precedido pelo sinal de (-).

.$3x + 6 – 2x +2 = (x + 8)$ cm^2.

A área pintada em azul mede $(x + 8)$ cm^2.

Atividade 19

Efetue as operações com os binômios:

a. $(x^4 - 5x^2) + (3x^4 + 6x^2)$

b. $(xy - y^5) - (y^5 + xy)$

c. $(x^3 - 8) + (3x^3 + 6) - (2x^3 + 2)$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 20

Qual binômio devo adicionar a $(3x^2 + x^2y)$ para resultar no binômio $-5x^2y$?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 21

Minha casa foi construída em um terreno retangular de x metros de largura e y metros de comprimento. Através de negociação com os vizinhos, consegui aumentar em 2 metros na largura e 3 metros no comprimento. Calcule o novo perímetro do terreno.

Anote suas respostas em seu caderno

Multiplicação de Binômios

Inicialmente, vamos verificar como é feita a multiplicação de um monômio por um binômio.

Por exemplo, vamos efetuar o produto de 3x por $(2x^2 - 4)$.

Vamos utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição.

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição diz que:

$a . (b+c) = a.b + a.c$

$(a + b) . (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Cada elemento do primeiro termo multiplicado por cada elemento do segundo termo.

$3x . (2x^2 - 4) = 3x . 2x^2 – 3x . 4 = 6x^3 – 12x$

Outro exemplo:

$-2y . (6x +7) = -2y . 6x + (-2y) . 7 = -12yx – 14y$

Quanto à multiplicação de binômios, é bem simples. Como exemplo vamos efetuar o produto de (3x+1) por (x +y).

Para isto, vamos utilizar também a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Vamos efetuar a multiplicação:

Podemos lembrar que multiplicar (3x + 1) por (x + y) equivale a multiplicar cada termo do primeiro fator pelos termos do segundo fator, isto é:

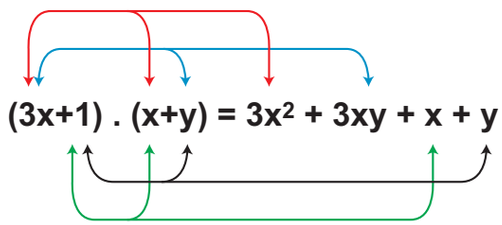
$(3x + 1) . (x + y) = 3x . (x + y) + 1 . (x + y) = 3x.x + 3x.y + 1.x + 1.y = 3x^2 + 3xy + x + y$

logo, $(3x+1) . (x +y) = 3x^2 + 3xy + x + y$

Outro exemplo:

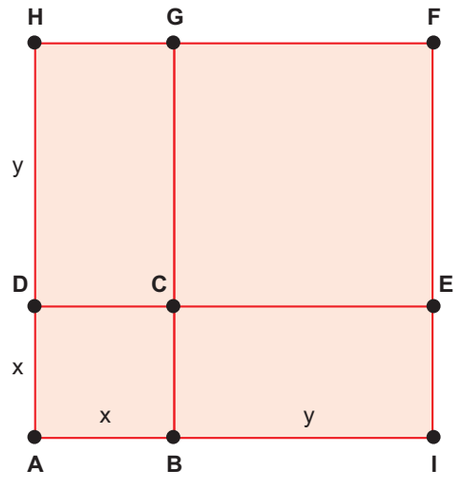
$(5y – 3). (2x + y) = 5y. (2x + y) – 3 . (2x + y) = 5y.2x + 5y.y – 3.2x - 3.y = 10yx + 5y^2 - 6x - 3y$

De uma forma geral, podemos entender do seguinte modo:



Viram como é fácil. Cada elemento do primeiro binômio é multiplicado por cada elemento do segundo binômio. Quando realizamos esta operação, estamos multiplicando monômios por monômios, como vimos na aula anterior.

Agora observe o quadrado a seguir. Ele representa um terreno que está dividido em 4 partes retangulares (I, II,III e IV) definidas pelas medidas conforme a figura. Vamos calcular o perímetro e a área do terreno.



Calculando o perímetro:

Calcular o perímetro é somar as medidas dos lados deste quadrado. Como cada lado mede (x + y), teremos 4 . (x+y) = 4x + 4y.

No cálculo da área, podemos fazer de duas maneiras diferentes:

Primeiro modo – Calcular a área de cada parte e somar os resultados.

Área I: x.y

Área II : y.y = y^2

Área III: x.x = x^2

Área IV: x.y = xy

Somando as áreas teremos a área total:

Área total = Área I + Área II + Área III + Área IV

Área total = $xy + y^2 + x^2 + xy$, simplificando o polinômio teremos:

Área total = $\mathbf{x^2 + 2xy + y^2}$

Segundo modo – Calcular a área total a partir dos lados do terreno.

Os lados do terreno medem x+y. Como a área de um quadrado é calculada elevando-se a medida do lado ao quadrado, temos que a área do terreno será $(x+y)^2$.

Vamos desenvolver esta potência:

$(x+y)^2 = (x+y) \cdot (x+y) = x \cdot (x + y) + y \cdot (x + y) = x^2 + xy + yx + y^2$, como $xy = yx$, teremos: $x^2 + xy + xy + y^2$

Reduzindo os termos semelhantes: $\mathbf{x^2 + 2xy + y^2}$

O que acabamos de calcular foi um produto notável conhecido como quadrado da soma de dois números. Existe uma regra básica para facilitar este cálculo:

O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado da primeira parcela,mais o dobro do produto da primeira parcela pela segunda parcela, mais o quadrado da segunda parcela.

Importante

Calcule o produto dos binômios

f. (x + 3) (x-5)

g. (3x +a) (4b -5)

h. (a+b) (a – b)

i. (a+3) (a+3)

j. (x – 8) (x - 8)

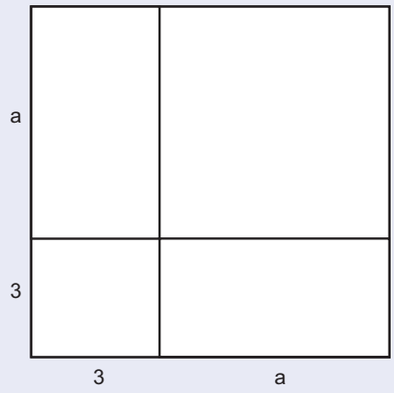
Atividade 22

Anote suas respostas em seu caderno

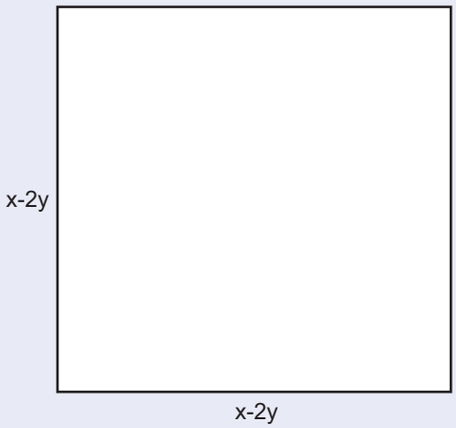
Atividade 23

Calcule a área das figuras a seguir

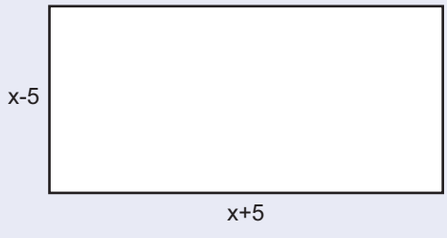
a)



b)

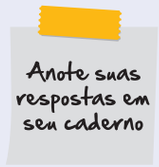


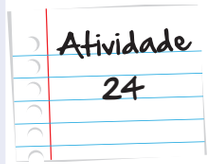
c)



Anote suas respostas em seu caderno

Determine o volume do cubo cuja medida da aresta é expressa por (x+2)





Divisão de Binômio por monômio

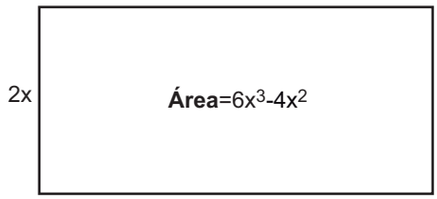
Anteriormente, aprendemos a calcular a divisão entre monômios. Não vamos esquecer que um binômio é uma expressão composta de monômios. Assim, fica fácil entender a divisão de um binômio por um monômio. Semelhante ao que fizemos na multiplicação, vamos dividir cada termo do binômio pelo monômio.

Como exemplo, vamos calcular $(10x^2 – 15x^3) : 5x^2$

$(10x^2 – 15x^3) : 5x^2 = \underbrace{10x^2 : 5x^2}_{2} - \underbrace{15x^3 : 5x^2}_{3x}$

A resposta então será 2 – 3x.

Observe esse outro exemplo: na figura abaixo, está representado um retângulo, cuja área é expressa por $6x^3 – 4x^2$. Sabendo que a altura é expressa por 2x, qual a expressão que representa a medida da base deste retângulo?



Sabemos que o cálculo da área é dado por

Área = base . altura.

Então. Teremos:

$6x^3 – 4x^2$ = (base) . 2x, obviamente a base será calculada por

Base = $(6x^3 – 4x^2) : 2x$

Base = $3x^2 – 2x$

Atividade 25

Efetue as divisões de binômio por monômio

a. $(x^2 - 6x^3):x^2$

b. $(8x^7 - 6x^3) : 4$

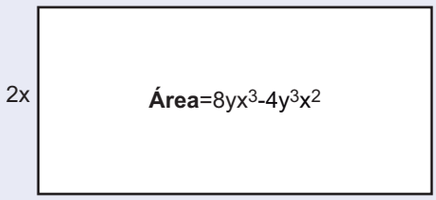
c. $(3x^4 + 7x^3) : 2x^2$

d. $(7x^2 - 14x^3) : 14x$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 26

Dada a figura e sabendo sua área, calcule a medida do lado desconhecido



Anote suas respostas em seu caderno

Nesta unidade, você teve oportunidade de relembrar os aspectos principais relacionados ao Cálculo Algébrico e as operações envolvendo monômios e polinômios. Esse é um conteúdo particularmente útil para os seus estudos posteriores relacionados a equações e funções. Não deixe dúvidas se acumularem!

Abraços e até a próxima!

Resumo

- Expressões algébricas são expressões que contêm números e letras.
- Em uma expressão as letras são chamadas variáveis.
- O número que precede a variável em uma expressão algébrica é chamado coeficiente.
- Calculamos o valor numérico de uma expressão algébrica, substituindo as variáveis por valores reais.
- Monômios são expressões formadas por uma parte numérica e uma parte literal.
- Monômios que contêm a mesma parte literal são chamados monômios semelhantes.
- Somente podemos adicionar ou subtrair monômios semelhantes, bastando para isso, adicionar ou subtrair seus coeficientes.
- Para multiplicar monômios, é preciso multiplicar parte literal com parte literal e coeficiente com coeficiente. O mesmo acontece para a divisão.
- Para elevar um monômio a uma potência, é preciso elevar tanto o coeficiente quanto a parte literal a essa potência.
- Polinômios são expressões algébricas com mais de um monômio.
- Binômios são polinômios compostos por dois monômios.
- Para multiplicar dois binômios é preciso multiplicar cada elemento do primeiro termo por cada elemento do segundo termo.

Veja ainda

No site http://www.youtube.com/watch?v=MasXxq3CYKc, é apresentada uma aula sobre expressões algébricas. Muito interessante e ajuda bastante, reforçando os conteúdos estudados nesta unidade.

No endereço eletrônico http://www.youtube.com/watch?v=139CkqAivCQ é possível ver apresentação sobre um interessante jogo envolvendo os conhecimentos de expressões algébricas. Vale a pena formar um grupo com os colegas e confeccionarem o jogo.

Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/323283

- http://www.sxc.hu/photo/337561

• http://www.sxc.hu/photo/1418481

• http://www.sxc.hu/photo/896871

• http://www.sxc.hu/photo/1130082

• http://www.sxc.hu/photo/1204786

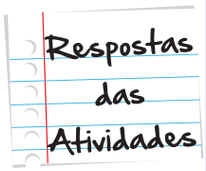
• http://www.sxc.hu/photo/1256726

• http://www.sxc.hu/photo/726056

• http://www.sxc.hu/photo/911431

Referências

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Georgetown: Edgard Blucher, 1991. 479 páginas.



Atividade 1

a. $\frac{x}{8}$

b. $\frac{x}{5}+\frac{x}{2}$

c. $x^2 - 3x$

d. $x^3+\left(\frac{x}{2}\right)^2$

e. $\frac{x}{10}-\left(\frac{x}{3}\right)^2$

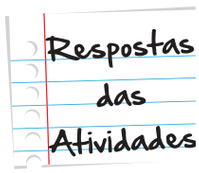
Atividade 2

f. O triplo de um número menos cinco.

g. O dobro de um número mais sua quarta parte.

h. A metade de um número, mais a sua terça parte somado com sua quarta parte.

i. O dobro de um número menos o seu cubo.



Atividade 3

f. $2a - 3b + c = 2.1 - 3.0 + 2 = 2 - 0 + 2 = 4$

g. $3x - \frac{y}{4} = 3.2 - \frac{8}{4} = 6 - 2 = 4$

h. $2x + 3y = 2.(-3) + 3.2 = -6 + 6 = 0$

Atividade 4

O valor a ser pago será representado pela expressão 1,5x + 0,7y

Atividade 5

o. Coeficiente = 3; Parte literal = x

p. Coeficiente = 1; Parte literal = by^2

q. Coeficiente = 5; Parte literal = d^3e^2

r. Coeficiente = -4; Parte literal = g^2

s. Coeficiente = $\frac{1}{4}$; Parte literal = x

Atividade 6

3x , x

$7y^2$, $-3y^2$

$7y$, $\frac{1}{8}y$

4ab, -2ab

Respostas das Atividades

Atividade 7

f. $2 + 3 -7 -8 +2 (ab) = -8ab$

g. $5 – 6 +9 (xyz) = 8xyz$

h. $5 – 4 – 7(x^2) = -6X^2$

i. $2 +3 +(-2)(z^3) = 2+3-2(z^3) = 3z^3$

j. $3x + 4yz$ não são semelhantes

k. $2x^3 – 2x^2 + 2x$ não são semelhantes

Atividade 8

l. $9y + 5y + 5y + 4{,}5y = 23{,}5\ y$

m. $3x + 5x + 3x + 3x + 5x + 3x = 22x$

n. $4b + 4b + 4b = 12b$

Atividade 9

o. $18x^4y$

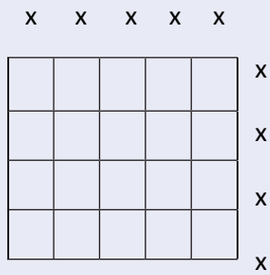
p. $-3a^2bd^2$

q. $-\frac{x^4}{12}$

r. $8a^2b^4c^4$

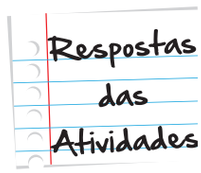
Atividade 10

Cada quadrado pequeno tem lado x, isto é, a figura terá as seguintes medidas:



A largura mede 5x e altura mede 4x, assim, o perímetro é $4x + 4x + 5x + 5x = 18x$

A área será calculada com $4x . 5x = 20x^2$



Atividade 11

a. -12

b. – 1

c. 2xy

d. $\frac{x}{2}$

Atividade 12

a. $36x^4y : -3x^2 = -12x^2y$

b. $-16x^7y^5 : 3x^7 = -\frac{16}{3}y^5$

Atividade 13

Calcule as potências dos monômios a seguir:

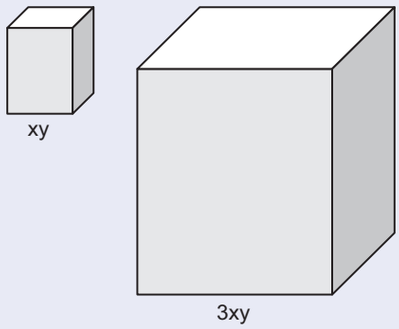
a. $81z^{12}x^4$

b. $32^{a10}b^5$

c. $\frac{t^9}{8}$

Atividade 14

Observe a seguir, as figuras representativas de dois cubos e calcule:



a. O volume do cubo menor é $(xy)^3 = xy \cdot xy \cdot xy = x^3y^3$.

b. O volume do cubo maior é $(3xy)^3 = 3xy \cdot 3xy \cdot 3xy = 27x^3y^3$

c. Como o cubo maior tem um volume 27 vezes maior, então caberão 27 cubos menores.

d. No cubo menor o volume é $x^3y^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$ cm.

No cubo maior o volume é $27x^3y^3 = 27 \cdot 2^3 \cdot 4^3 = 27 \cdot 8 \cdot 64 = 13.824$ cm .

Respostas das Atividades

Atividade 15

Classifique cada expressões algébrica como monômio, binômio ou trinômio. A seguir determine o grau:

s. $3x^4y^2 - 2x^6 + 5x^3yz^4$ é um trinômio e seu grau é 8

t. $xy - y$ é um binômio de grau 2

u. $b^2 - c^4 + d$ é um trinômio de grau 4

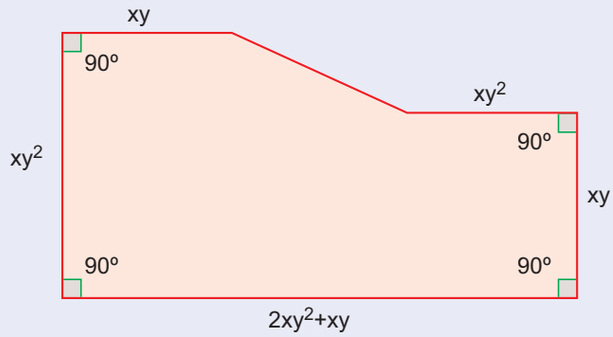
v. c^5f^4 é um monômio de grau 9

Atividade 16

s. $3x^3 - 5x^2y + 4x^3 + 2x^2y - 7 = 7x^3 - 3x^2y - 7$

t. $x^2 - 3x^2 + y^4 - y^4 + 3x^2y^6 = -2x^2 + 3x^2y^6$

Atividade 17



$(2xy^2+xy) + xy^2 + xy^2 + xy + xy = 2xy^2 + xy^2 + xy^2 + xy + xy + xy = 4xy^2 + 3xy$

Atividade 18

Dê o oposto ou simétrico de cada expressão:

s. $2x^2 - 4x$

t. $5xy + 2x^3$

u. $3xy^2 - 4x^2$

Atividade 19

a. $(x^4 - 5x^2) + (3x^4 + 6x^2) = 4x^4 + x^2$

b. $(xy - y^5) - (y^5 + xy) = -2y^5$

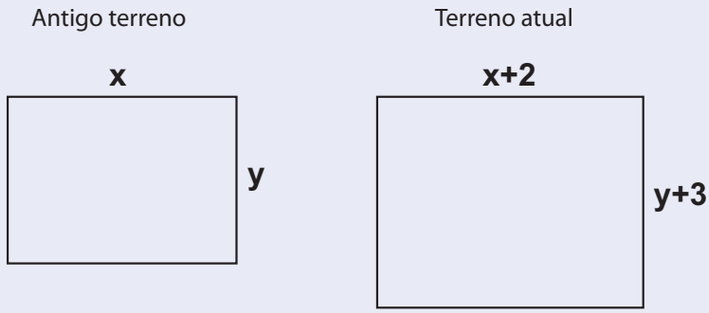
c. $(x^3 - 8) + (3x^3 + 6) - (2x^3 + 2) = 2x^3 - 4$

Atividade 20

O resultado será dado por

$-5x^2y - (3x^2 + x^2y) = -5x^2y - 3x^2 - x^2y = -6x^2y - 3x^2$

Atividade 21



O perímetro será dado por $(x+2)+(x+2)+(y+3)+(y+3) = x+2+x+2+y+3+y+3 = 2x+2y+10$

Atividade 22

Calcule o produto dos binômios

a. $(x + 3)(x-5) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$

b. $(3x + a)(4b - 5) = 12xb - 15x + 4ab - 5a$

c. $(a+b)(a - b) = a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2$

d. $(a+3)(a+3) = a^2 + 3a + 3a + 3^2 = a^2 + 6a + 9$

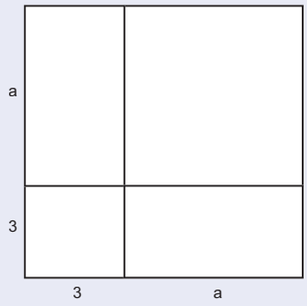
e. $(x - 8)(x - 8) = x^2 - 8x - 8x + 8^2 = x^2 - 16x + 64$

Respostas das Atividades

Atividade 23

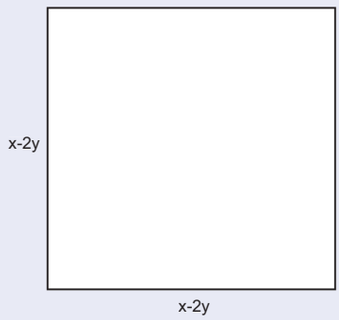
Calcule a área das figuras abaixo

a)



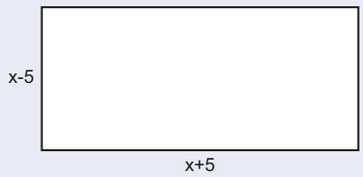
A área é dada por $(3+a)^2 = (3+a)(3+a) = 3^2 + 3a + 3a + a^2 = 9 + 6a + a^2$

b)



A área é dada por $(x - 2y)^2 = (x - 2y)\,(x - 2y) = x^2 - 2xy - 2xy + (2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

c)

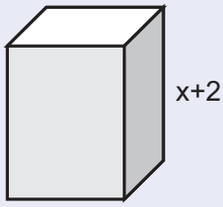


A área é dada por $(x - 5)^2 = (x - 5)\,(x - 5) = x^2 - 5x - 5x + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

Respostas das Atividades

Atividade 24

Temos a figura



O volume de um cubo é dado por ℓ^3, assim, teremos:

$(x+2)^3 = (x+2)(x+2)(x+2) = (x^2 + 4x + 4)(x+2) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2x^2 + 8x + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Atividade 25

Efetue as divisões de binômio por monômio

a. $(x^2 - 6x^3) : x^2 = 1 - 6x$

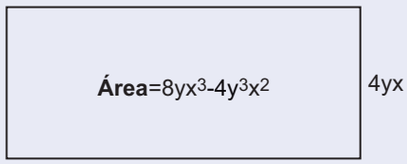
b. $\left(8x^7 - 6x^3\right) : 4 = 2x^7 - \frac{6}{4}x^4 = 2x^7 - \frac{3}{2}x^3$

c. $\left(3x^4 - 7x^3\right) : 4x^2 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$

d. $\left(7x^2 - 14x^3\right) : 14x = \frac{7}{14}x + \frac{14}{14}x^2 = \frac{1}{2}x + x^2$

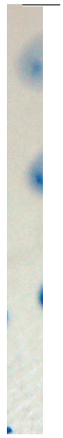
Atividade 26

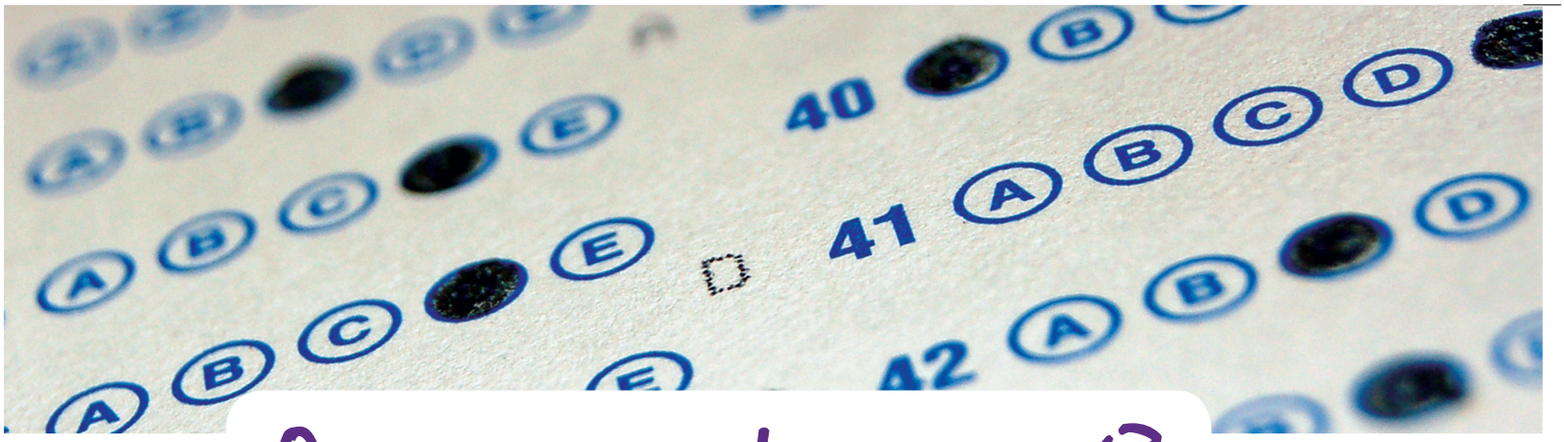
Dada a figura e sabendo sua área, calcule a medida do lado desconhecido



Como a área é calculada com o produto dos lados, temos que o lado desconhecido será:

$8yx^3 - 4y^3x^2 : 4yx = 2x^2 - y^2x.$





O que perguntam por aí?

1. (OBEMP 2009) Na expressão $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{29}{30}$ as letra a, b, c e d representam números inteiros de 1 a 9. Qual é o valor de a + b + c + d?

(A) 14

(B) 16

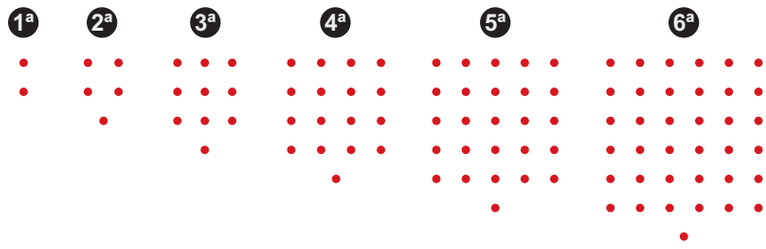
(C) 19

(D) 21

(E) 23

Comentário: O aluno, provavelmente, tentará encontrar os valores das incógnitas para resolver a questão. Entretanto não é possível definir os valores específicos das letras. Um método é observar que o enunciado pede a soma das incógnitas e que o universo são os inteiros de 1 a 9. Dessa forma, manipulando a expressão, podemos encontrar $\frac{ad+bc}{cd}=\frac{29}{30}$. Entendendo que cd=30, então os únicos números (no universo da questão) que multiplicados dão 30 são 5 e 6. Supondo que c=5 e d=6 encontraremos 6a + 5b= 29. Os únicos números do universo da questão que satisfazem a equação agora obtida são 4 e 1. Logo a soma será 16.

2. (Banco de Questões da Prova Brasil) As figuras mostradas abaixo estão organizadas dentro de um padrão que se repete.



Mantendo essa disposição, a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura de ordem n (n = 1, 2,...) é

(A) $n + 1$

(B) $n^2 - 1$

(C) $2n + 1$

(D) $n^2 + 1$

Comentário: É possível que o aluno tente resolver esta questão testando todas as alternativas, encontrando a expressão n^2+1 (D). Todavia outra forma é observar que cada conjunto de pontos é composto de um ponto e acima desse ponto o quadrado do número que representa a ordem ocupada por esse conjunto.

Equações e problemas do primeiro grau

Para início de conversa...

Diversas situações do cotidiano encontram na Matemática ferramentas para a tomada de decisões. Veja o seguinte exemplo:

Uma empresa de telefonia móvel oferece dois planos para seus clientes. No Plano A, o cliente paga por mês uma taxa fixa de R$20,00 e mais R$0,10 por minuto utilizado em ligações. Já no Plano B, o cliente só paga se usar o telefone, mas, nesse plano, um minuto em ligações custa R$0,20.

Por vezes nos vemos diante de problemas como esse e precisamos decidir qual das opções é mais econômica. Nesta unidade, estudaremos algumas ferramentas algébricas que nos auxiliam na solução de problemas que envolvam equações do 1º grau.

Objetivos de Aprendizagem

Ao término desta unidade, espera-se que os alunos adquiram as habilidades de:

- Reconhecer uma equação polinomial do 1º grau.
- Identificar a raiz de uma equação polinomial do 1º grau.
- Determinar a raiz de uma equação polinomial do 1º grau.
- Reconhecer um sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.
- Verificar se um par ordenado é ou não solução de um sistema.
- Determinar, caso exista, a solução de um sistema linear de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.
- Resolver problemas que envolvam equações polinomiais do 1º grau.

Introdução

Vamos retomar o problema da conta de celular apresentado no início desta unidade. As informações eram as seguintes:

- ➔ Plano A: o cliente paga por mês uma taxa fixa de R$20,00 e mais R$0,10 por minuto em ligações.
- ➔ Plano B: o cliente só paga se usar o telefone, mas, neste plano, um minuto em ligações custa R$0,20.

Responda às seguintes perguntas:

a) Uma pessoa precisou usar muito o telefone este mês em função do seu trabalho e fez ligações totalizando 1000 minutos. Se esta pessoa optou pelo plano A, quanto ela pagará? Se ela tivesse optado pelo plano B, quanto ela pagaria?

b) Uma pessoa usou muito pouco o telefone este mês, totalizando apenas 20 minutos em ligações. Quanto pagará esta pessoa, se ela optou pelo plano A? Quanto ela pagaria se optasse pelo plano B?

c) Uma pessoa não fez ligações este mês. Quanto ela pagará, se optou pelo plano A? Quanto ela pagaria se tivesse optado pelo plano B?

Note que, nos planos apresentados pela empresa de telefonia móvel, o valor a ser pago depende do tempo gasto pelo cliente em ligações.

d) Vamos supor que *t* indique o tempo gasto por uma pessoa em ligações. É possível obter uma expressão algébrica que indica quanto ela pagaria se optasse pelo plano A? E se tivesse optado pelo plano B?

Com este último exemplo, vemos que as **expressões algébricas** podem ser utilizadas para expressar grandezas em função de valores desconhecidos. Neste caso, o tempo *t*.

Vamos às respostas das perguntas anteriores:

a) Se foram utilizados 1000 minutos em ligações, o valor a ser pago por uma pessoa que optou pelo plano A é R$20,00 acrescidos de 1000 vezes R$0,10, ou seja, R$120,00. Já a pessoa que optou pelo plano B deveria pagar 1000 vezes R$0,20, totalizando R$200,00.

b) Para o uso de apenas 20 minutos em ligações, o valor a ser pago no plano A é R$20,00 acrescidos de 20 vezes R$0,10, nos dando um valor de R$22,00. Já no plano B, o valor a ser pago é 20 vezes R$0,20, isto é, R$4,00.

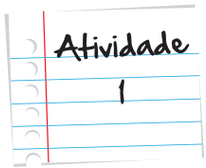
c) Uma pessoa que não fez ligações este mês pagará apenas a taxa fixa de R$20,00 pelo plano A. Como o valor a ser pago no plano B depende exclusivamente do tempo gasto em ligações, uma pessoa que não fez ligações nada pagará se optou pelo plano B.

d) Se *t* indica o tempo gasto em ligações, uma pessoa que optou pelo plano A deverá pagar R$20,00 acrescidos de *t* vezes R$0,10. Podemos escrever isso utilizando a notação matemática adequada: $20 + t.0,10$. Com raciocínio análogo, vemos que a expressão algébrica que dá o valor a ser pago no plano B em função do tempo *t* gasto em ligações é $t.0,20$.

Uma **sentença matemática** é uma frase redigida com simbologia matemática. A frase "o dobro de sete é quatorze" pode ser expressa na forma $2 . 7 = 14$. Da mesma forma, a frase "o consecutivo de um número desconhecido é maior que doze" pode ser expressa na forma $x + 1 > 12$. Note que neste exemplo, a sentença matemática envolve um termo desconhecido que denominaremos **incógnita**.

Uma **expressão algébrica** é uma forma de expressar grandezas em função de valores desconhecidos.

Uma **equação** é uma sentença matemática que expressa uma igualdade e que envolve termos desconhecidos, chamados incógnitas.



Escreva a sentença matemática correspondente a cada uma das frases a seguir.

a) O triplo de vinte é sessenta.	
b) A raiz quadrada de vinte e cinco é igual a cinco.	
c) O dobro de sete, acrescido de três unidades, é maior que dez.	
d) A metade de doze é menor que a terça parte de trinta.	
e) Um número desconhecido é menor ou igual a quatro décimos.	
f) O quadrado de um número desconhecido, acrescido de sete é igual a esse número desconhecido.	

Anote suas respostas em seu caderno

Escreva a expressão algébrica correspondente às seguintes situações.

a) O dobro de um número desconhecido.	
b) O triplo de um número desconhecido acrescido de uma unidade.	
c) O quádruplo do consecutivo de um número desconhecido.	
d) A metade do quadrado de um número desconhecido.	
e) A metade da raiz quadrada de um número desconhecido.	
f) A raiz quadrada da metade de um número desconhecido.	

Atividade 2

Anote suas respostas em seu caderno

(SAEB) Uma prefeitura aplicou R$ 850 mil na construção de 3 creches e um parque infantil. O custo de cada creche foi de R$ 250 mil. A expressão que representa o custo do parque, indicado pela letra *x*, em mil reais, é:

a. $x + 850 = 250$.

b. $x - 850 = 750$.

c. $850 = x + 250$.

d. $850 = x + 750$.

Atividade 3

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 1
Raiz de uma equação

Observe a Atividade 3 da seção anterior e diga, qual é o custo para a construção do parque infantil?

Ao tentarmos determinar o(s) valor(es) que a incógnita pode assumir em uma equação, de modo que seja obtida uma sentença verdadeira, buscamos encontrar as suas **raízes**.

Uma raiz de uma equação é o valor que a incógnita pode assumir e que torna a sentença matemática verdadeira.

Importante

Para a equação $4 - x = 2$, vemos que 2 é uma raiz, pois $4 - 2 = 2$. Por outro lado, 5 não é uma raiz dessa equação, pois não é verdade que $4 - 5 = 2$.

Observe outro exemplo: para a equação $x^2 - 4 = 0$, vemos que uma raiz é $x = 2$, pois $2^2 - 4 = 0$. Contudo, esse não é o único número que torna essa sentença matemática verdadeira. Note que -2 também é uma raiz, uma vez que $(-2)^2 - 4 = 0$.

Atividade 4

Verifique se os números são raízes das equações.

a. 5 para a equação $2x = 10$.

b. 1 para a equação $x = x^2$.

c. -1 para a equação $x = x^2$.

d. $\frac{1}{4}$ para a equação $2x - 3 = 5$.

e. -3 para a equação $|x| = 3$.

f. $-\frac{5}{3}$ para a equação $\sqrt{9+3x} = 2$.

Anote suas respostas em seu caderno

Já sabemos verificar se um número é ou não raiz de uma equação. Mas como podemos encontrar as raízes de uma equação? Será que temos que testar valores para a incógnita até descobrirmos um que satisfaça a igualdade?

Nossa, isso pode dar muito trabalho! Mas fique tranquilo, isso não é necessário. Vamos ver ao longo desse módulo que, dependendo do tipo de equação, existem métodos para a determinação de suas raízes.

Seção 2
Conjunto universo e Conjunto solução de uma equação

Observe a seguinte situação-problema:

A metade dos alunos de uma turma é composta por meninos. Se a turma possui 13 meninos, quantos são os alunos dessa turma?

Não sabemos quantos alunos a turma possui. Se designarmos por x o número de alunos, a expressão algébrica que dá a metade desse número é $\frac{x}{2}$ e a equação que podemos escrever com as informações do problema é $\frac{x}{2} = 13$ [lemos aqui que "a metade de um número desconhecido é igual a 13]. Neste caso, é fácil concluir que x = 26, ou seja, a turma possui 26 alunos.

Vejamos outra situação:

O dobro do número de meninos de uma turma é 27. Quantos são os meninos dessa turma?

Nessa situação, podemos designar por x o número de meninos e por 2x o dobro do número de meninos. As informações do problema nos levam à equação 2x = 27 [lemos aqui que "o dobro de um número desconhecido é igual a 27"], de modo que x = 13,5. Mas, se x representa o número de meninos, como podemos ter 13,5 alunos? Dessa forma, para esse problema, devemos considerar que a sua solução deve necessariamente ser um número inteiro positivo. Nesse caso, embora o número 13,5 seja o valor da incógnita que torna a igualdade verdadeira, nesse contexto ele não poderá ser considerado como uma resposta para esse problema.

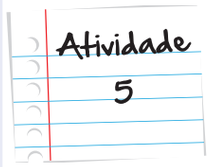
Com as duas situações propostas, vemos que, dependendo do problema que estamos resolvendo, existem soluções que não podem ser utilizadas, pois não se aplicam ao contexto da situação. Dessa forma, para algumas situações, existem restrições ao conjunto dos valores que a incógnita pode assumir. Esse conjunto, com as restrições a

que nos referimos anteriormente, será denominado **Conjunto Universo** da equação. Nesse conjunto estarão todos os possíveis valores que a incógnita poderá assumir. Já o conjunto que contém todas as raízes de uma equação é chamado **Conjunto Solução** de uma equação.

Conjunto Universo é o conjunto previamente definido de valores que a incógnita de uma equação pode assumir.

Conjunto Solução é o conjunto que contém todas as raízes de uma equação, e que pertencem ao seu conjunto universo.

Considere o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, determine quais dos elementos indicados no conjunto U podem ser raízes das equações a seguir, indicando assim o conjunto solução para cada uma dessas equações.



a. $2x + 1 = 3$

b. $x^2 - 4x = 0$

c. $\sqrt{x} = x$

d. $\frac{x}{2} + 1 = x$

e. $3x + 4 = 17$

f. $x^2 - 5x = 0$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Equação do 1º grau

Vamos retomar o exemplo que motivou o início desta unidade. No problema da conta de telefonia móvel, vimos que a empresa oferece um plano que cobra de seus clientes uma taxa fixa de R$20,00 acrescida de R$0,10 por minuto utilizado. Vimos que a expressão algébrica que dá o valor a ser pago em função do tempo t gasto em ligações, nesse caso, é $20 + t \cdot 0{,}10$. Quantos minutos utilizou a pessoa que pagou R$29,00 neste mês? A situação pode ser expressa pela equação $20 + t \cdot 0{,}10 = 29$. Diremos que esta é uma **equação do 1º grau**.

Importante

Uma equação do primeiro grau é uma equação que pode ser reduzida à forma $ax + b = 0$, sendo a e b constantes e $a \neq 0$ e x é a sua incógnita.

A equação $3x + 6 = 0$ é um exemplo de equação do 1º grau. Já a equação $4x^2 - 3x + 5 = 0$ não é uma equação do 1º grau.

No exemplo anterior, para determinarmos a raiz da equação $3x + 6 = 0$ devemos pensar em um valor para x que torne essa sentença matemática verdadeira. Vemos que -2 é uma raiz, já que $3(-2) + 6 = 0$. Escolha outros valores para x e verifique se eles são raízes desta equação.

Este método, baseado em tentativas para a determinação das raízes de uma equação, pode tomar muito tempo, ser muito trabalhoso e, por vezes, pouco eficiente. Veremos, então, que existem alguns princípios que permitem a solução de equações, ou seja, a determinação de suas raízes.

Faremos uma analogia entre uma equação e uma balança em equilíbrio. Na Figura 3.1, a balança equilibrada indica a igualdade entre os pesos dos dois objetos.

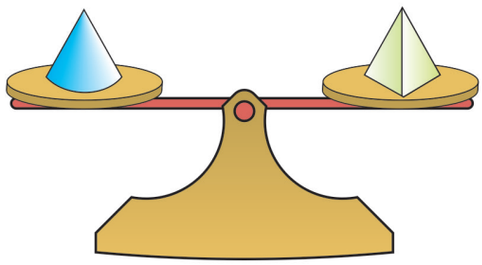


Figura 3.1: Balança em equilíbrio

Vamos, agora, considerar duas operações que preservam o equilíbrio da balança.

1) Acrescentar objetos idênticos aos lados da balança preserva o seu equilíbrio. A Figura 3.2 ilustra essa ideia: se o cone e a pirâmide estavam equilibrados, acrescentar cubos idênticos aos dois lados da balança não a desequilibra.

Em termos matemáticos, se A = B, podemos afirmar que A + C = B + C.

Para a expressão x = y, por exemplo, podemos dizer que x + 2 = y + 2 (acrescentamos 2 a ambos os membros da igualdade) ou podemos, ainda, dizer que x – 2 = y –2 (acrescentamos –2 a ambos os membros da igualdade).

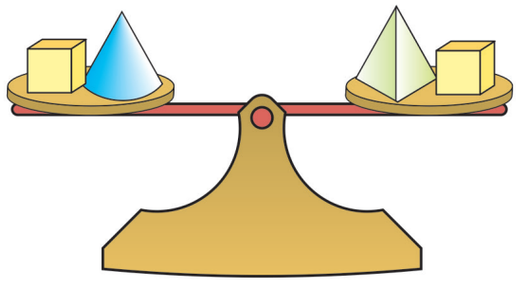


Figura 3.2: Operação que preserva o equilíbrio da balança

2) Multiplicar os pesos em equilíbrio pelo mesmo número diferente de zero preserva o equilíbrio da balança. A Figura 3.3 ilustra essa ideia: se um cone e uma pirâmide estão equilibrados, dois cones e duas pirâmides idênticos aos anteriores também estarão equilibrados. Note também que a metade do cone estará em equilíbrio com a metade da pirâmide.

Em termos matemáticos, se A = B, podemos afirmar que C.A = C.B.

Para a expressão x = y, por exemplo, podemos dizer que 2.x = 2.y (multiplicamos ambos os membros da igualdade por 2) ou podemos, ainda, dizer que x/2 = y/2 (multiplicamos ambos os membros da igualdade por 1/2).

Assim, sempre que estivermos resolvendo uma equação do 1º grau ax + b = 0, utilizaremos os dois princípios anteriores para encontrar sua raiz. Veja:

ax + b = 0

Vamos isolar o termo em que aparece a incógnita, somando (– b) a ambos os lados da igualdade:

ax + b + (- b) = 0 + (- b) ➔ ax = - b

Agora vamos dividir os dois lados por a e obter o valor de x: x = - b/a

Importante

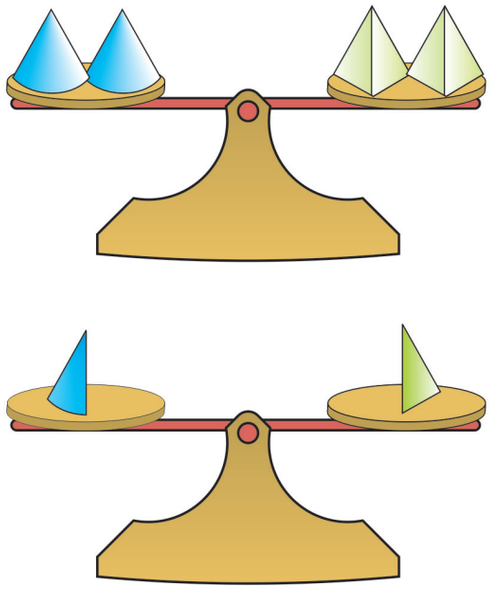


Figura 3.3: Operações que preservam o equilíbrio da balança

Multimídia

No endereço http://rachacuca.com.br/jogos/balanca-logica/, você pode encontrar um jogo que envolve ideias associadas ao princípio da balança apresentado anteriormente. Nel, você vai ter oportunidade de visualizar a balança sofrendo alterações conforme se alteram os pesos nos seus pratos. Não deixe de experimentar!

Os exemplos a seguir mostram a aplicação dos princípios discutidos anteriormente para reduzir uma equação à forma $ax + b = 0$ e a obtenção de sua raiz.

Exemplos:

a) Para a equação $2x - 4 = 0$, temos

$2x - 4 + 4 = 0 + 4$ ➔ somamos 4 (o simétrico de -4) a ambos os membros da equação. Como a soma de termos simétricos é igual a zero ($-4 + 4 = 0$), conseguimos isolar o termo algébrico na incógnita x. Teremos, então

$2x = 4$

$2x.\frac{1}{2} = 4.\frac{1}{2}$ ➔ multiplicamos ambos os membros por $\frac{1}{2}$

$x = 2$

De fato, 2 ➔ raiz da equação, uma vez que $2 . 2 - 4 = 0$.

b) Para a equação -3x + 7 = 0, temos

-3x + 7 + (-7) = 0 + (-7) ➔ somamos -7 (o simétrico de 7) a ambos os membros da equação para podermos isolar o termo na incógnita x.

$-3x = -7$

$-3x.\left(-\frac{1}{3}\right) = -7.\left(-\frac{1}{3}\right)$ ➔ multiplicamos ambos os membros por $-\frac{1}{3}$

$x = \frac{7}{3}$

Verifique que $\frac{7}{3}$ é raiz da equação anterior.

c) Para a equação 5x + 7 = 7x - 9, temos

5x + 7 + (-7) = 7x - 9 + (-7) ➔ somamos -7 a ambos os membros da equação

$5x = 7x - 16$

$5x + (-7x) = 7x - 16 + (-7x)$ ➔ somamos -7x a ambos os membros da equação

$-2x = -16$

$-2x.\left(-\frac{1}{2}\right) = -16.\left(-\frac{1}{2}\right)$ ➔ multiplicamos ambos os membros por $-\frac{1}{2}$

$x = 8$

Verifique que 8 é raiz da equação anterior.

d) Para a equação $\frac{x+2}{4} - 7 = \frac{x}{2} + 10$, temos

$\frac{x+2}{4}.4 - 7.4 = \frac{x}{2}.4 + 10.4$ ➔ è multiplicamos ambos os membros por 4 a fim de eliminarmos os denominadores.

$x + 2 - 28 = 2x + 40$

$x - 26 = 2x + 40$

x - 26 + 26 = 2x + 40 + 26 ➔ somamos 26 (o simétrico de -26) a ambos os membros da equação a fim de isolarmos o termo algébrico na incógnita x. Ficaremos, então, com a equação

$x = 2x + 66.$

Note que, nessa equação, temos termos algébricos que dependem de x em ambos os membros. A fim de obtermos uma equação com a incógnita no primeiro membro, somamos -2x a ambos os membros da equação, obtendo

x + (-2x) = 2x + 66 + (-2x)

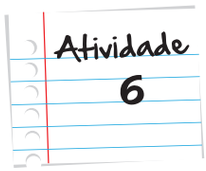
-x = 66

$-x(-1) = 66.(-1)$ ➔ multiplicamos ambos os membros por -1

$x = -66$

Verifique que, de fato, encontramos a raiz da equação.

Note que a decisão pela escolha de um termo a ser somado ou multiplicado aos membros da equação tinha por objetivo reduzir a sua quantidade de termos.



Para as equações a seguir, escreva-as na forma $ax + b = 0$ e, em seguida, identifique os coeficientes a e b:

a. $x + 2 = 0$

b. $2x - 5 = 7x - 3$

c. $4 - \frac{x}{2} = 7 + x - \frac{x}{3}$

d. $5(x-2) = 10$

e. $3x - (x-1) = x + 1$

f. $\frac{2(x-3)}{3} - 1 = x + 2$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Determine as raízes das seguintes equações:

a. $2x + 6 = x + 18$

b. $2x - 2 = 5x + 18$

c. $\frac{x}{4} - 1 = 5$

d. $x + 2 = \frac{2x}{3} - 3$

e. $4x - 2(x-1) = 3$

f. $2 - \frac{x}{2} = \frac{x+2}{2}$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 8

Em um teste de 25 questões, cada acerto vale 4 pontos e cada erro vale -1ponto.

a) Se um candidato acertou 15 questões, quantos pontos ele fez?

b) Suponha que um candidato tenha acertado x questões. Quantas questões ele errou? Escreva a expressão algébrica que dá o total de pontos desse candidato.

c) Se um candidato fez 65 pontos, quantas questões ele acertou?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Em um posto de gasolina, o litro de gasolina está custando R$ 2,89.

a) Quanto pagará uma pessoa que abastecer o seu veículo com 20 litros de gasolina?

b) Suponha que uma pessoa abasteceu o seu veículo com x litros de gasolina. Escreva a expressão algébrica que dá o valor a ser pago.

c) Uma pessoa que tem R$20,00 pode abastecer seu veículo com quantos litros de gasolina? Use a calculadora para obter uma resposta aproximada para esse problema.

Anote suas respostas em seu caderno

Multimídia

O livro *Temas e Problemas Elementares* possui uma variedade de problemas sobre diversos assuntos estudados nesse módulo 1.

Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. *Temas e Problemas Elementares*. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

Seção 4
Problemas envolvendo equações do 1º grau

Os últimos problemas da seção anterior nos mostraram como resolver problemas que recaiam em equações do 1º grau. De fato, diversos problemas do nosso cotidiano envolvem esse tipo de equação. Nesta seção, vamos desenvolver a habilidade de leitura e interpretação de problemas, bem como a sua solução através de equações.

A soma de dois números consecutivos é igual a 63. Calcule o maior desses números.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 10

A diferença entre as idades de dois irmãos é de 5 anos. Se a soma dessas idades é igual a 29 anos, calcule a idade do mais jovem.

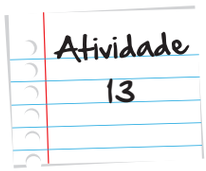
Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 11

Quando Maria nasceu, seu pai tinha 32 anos. Quando ela tiver 21 anos, qual será a soma da idade de Maria com a do seu pai.

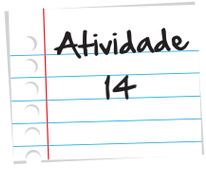
Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 12



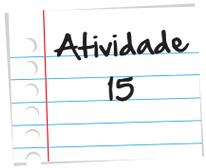
Marcos pensou em um número. Calculando o consecutivo do triplo desse número, obteve 97. Em que número Marcos pensou inicialmente?

Anote suas respostas em seu caderno



A soma de três números ímpares e consecutivos é igual a 39. Calcule esses números.

Anote suas respostas em seu caderno



A metade de um número é igual ao próprio número diminuído de três unidades. Calcule esse número.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 5
Sistemas de equações do 1º grau

Vamos retomar a situação-problema que motivou a discussão da seção 1 desta unidade. Imagine que a empresa de telefonia móvel ofereça um Plano C, cujo valor é determinado da seguinte forma: o cliente deve pagar uma taxa fixa de R$20,00 acrescidos de R$0,10 por minuto em ligações e R$0,50 por mensagem de texto enviada. Responda às seguintes perguntas:

a) Quanto pagará um cliente que usou 100 minutos e enviou 20 mensagens?

b) Se uma pessoa pagou R$100,00, quantos minutos ela usou? E quantas mensagens ela enviou? Será que existe uma única resposta para essa pergunta?

Ao respondermos a estas perguntas, percebemos que a situação proposta estabelece uma relação de dependência com dois valores desconhecidos: o valor a ser pago depende do *número de minutos utilizados* e do *número de mensagens enviadas*.

Nas seções anteriores, estudamos equações do 1º grau que envolviam apenas uma incógnita.

No entanto, veremos agora que uma equação pode envolver várias incógnitas.

A equação x + y = 2, por exemplo, possui duas incógnitas. Você seria capaz de imaginar uma solução para esta equação? Pense em dois números cuja soma é 2.

Note que x = 2 e y = 0 são valores para as incógnitas tais que 2 + 0 = 2.

Mas não existem apenas estes valores. A tabela a seguir apresenta apenas algumas possibilidades para essas incógnitas.

x	y	x + y = 2
1	1	1 + 1 + 2
6	-4	6 + (-4) = 2
0,5	1,5	0,5 + 1,5 =2

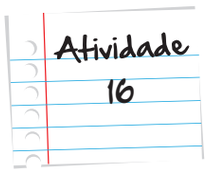
Tabela 1: Algumas soluções da equação x + y = 2

Vemos, dessa forma, que uma equação com duas incógnitas pode ter muitos pares de números que são suas soluções. Esses **pares ordenados** serão indicados da forma (x, y). Para a equação x + y = 2, uma solução pode ser o par ordenado (-1, 3).

O par ordenado é indicado da forma (x, y).

No par ordenado (*a*, *b*), os números *a* e *b* são chamados coordenadas. Sua ordem é importante: o par ordenado (1, 2) é diferente do par ordenado (2, 1), por exemplo.

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é um conjunto formado por equações desse tipo. Resolver um sistema é procurar soluções comuns a todas as equações que o formam. Por exemplo, a equação x + y = 2 possui muitas soluções: (2, 0), (-1, 3), (4, -2), entre outras. Já a equação x - y = 2 possui outras soluções: (6, 4), (0, -2), $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (2, 0), entre outras. Note que, entre as soluções apresentadas, (2, 0) é uma solução comum, isto é, tanto é solução da primeira equação, como é solução da segunda equação. Dessa forma, diremos que o par ordenado (2, 0) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$.



(SAEB) João e Pedro foram a um restaurante almoçar e a conta deles foi de R$ 28,00. A conta de Pedro foi o triplo do valor de seu companheiro. O sistema de equações do 1º grau que melhor traduz o problema é

a. $\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y = 28 \\ x = y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 28 \\ x = 3y \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 28 \\ x = y + 3 \end{cases}$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 17

(SAERJ) No restaurante, Laura pagou a quantia de R$ 7,00 por uma refeição e um suco. Rafael pagou a quantia de R$ 9,00 por uma refeição e dois sucos. Qual sistema representa esta situação?

a. $\begin{cases} x + y = 7,00 \\ x + 2y = 9,00 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y = 7,00 \\ x + 2y = 9,00 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 2y = 7,00 \\ 2x + y = 9,00 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 2y = 7,00 \\ 2x + y = 9,00 \end{cases}$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 18

Verifique se os pares ordenados são soluções dos sistemas.

e. $(-1,2)$ e $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

f. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{4}{7}\right)$ e $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 6
Métodos para resolução de um sistema

Já sabemos verificar se determinados pares ordenados são ou não soluções de um sistema de equações com duas incógnitas. Porém, verificamos que pode ser demasiado trabalhoso obter soluções de um sistema por tentativas. A fim de mostrar alguns métodos para a resolução de um sistema, vamos retomar a situação proposta na Atividade 11.

No restaurante, Laura pagou a quantia de R$ 7,00 por uma refeição e um suco. Rafael pagou a quantia de R$ 9,00 por uma refeição e dois sucos.

Percebemos que existem dois valores desconhecidos neste problema: o preço de uma refeição e o preço de um suco. É possível saber o preço de uma refeição e o preço de um suco? Uma solução para este problema seria perceber que Rafael consumiu um suco a mais do que Laura, de modo que a diferença entre os valores pagos por eles é o preço de um suco. Dessa forma, um suco custa R$9,00 – R$7,00 = R$2,00. Se Laura gastou R$ 7,00 em uma refeição e um suco e, além disso, o suco custa R$ 2,00, vemos que uma refeição custa R$5,00.

Outra forma de resolver esse problema é utilizar as ferramentas algébricas já adquiridas ao longo das aulas. Se indicarmos por x o preço de uma refeição e por y o preço de um suco, a frase *Laura pagou a quantia de R$ 7,00 por uma refeição e um suco* nos dá uma relação entre essas incógnitas: $x + y = 7$. Já a frase *Rafael pagou a quantia de R$ 9,00 por uma refeição e dois sucos* estabelece outra relação entre as incógnitas: $x + 2y = 9$. Dessa forma, resolver o problema de determinar os preços da refeição e do suco equivale a encontrar a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$. A ideia utilizada na primeira solução apresentada pode ser retomada aqui:

$9 - 7 = (x + 2y) - (x + y)$

$2 = x + 2y - x - y$

$2 = y$

Substituindo esse valor na equação $x + y = 7$ temos que $x + 2 = 7$ e, assim, $x = 5$.

Chamaremos esse processo de *Método da Adição* para resolução de sistemas, que pode ser sintetizado da seguinte forma:

Para o sistema , $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ podemos afirmar que A + C = B + D ou que A - C = B - D.

Importante

Utilizando o Método da Adição, resolva os seguintes sistemas:

Atividade 19

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

Anote suas respostas em seu caderno

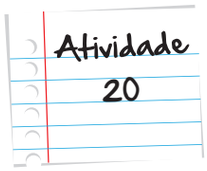
Vamos retomar outro exercício já analisado anteriormente.

João e Pedro foram a um restaurante almoçar e a conta deles foi de R$ 28,00. A conta de Pedro foi o triplo do valor de seu companheiro.

É possível determinar o valor pago por João e por Pedro? Uma solução para esse problema é verificar que devemos dividir o número 28 em duas partes, de modo que uma delas seja o triplo da outra. Estas partes são 7 e 21, já que 7 + 21 = 28 e 21 = 3 . 7, de modo que João pagou R$7,00 e Pedro pagou R$21,00.

Vejamos uma solução para este problema através das ferramentas algébricas adquiridas nesta unidade. As incógnitas deste problema são o valor pago por João (que designaremos por x) e o valor pago por Pedro (que designaremos por y). A frase *João e Pedro foram a um restaurante almoçar e a conta deles foi de R$ 28,00* estabelece uma relação

entre x e y : $x + y = 28$. Já a frase *A conta de Pedro foi o triplo do valor de seu companheiro* estabelece outra relação entre as incógnitas: $y - 3x$. Associamos, dessa forma, o problema ao sistema $\begin{cases} x + y = 28 \\ y = 3x \end{cases}$. A primeira equação do sistema pode ser escrita como $x + 3x = 28$, já que y pode ser substituído por 3x. Dessa forma, $4x = 28$ e, assim, $x = \frac{28}{4} = 7$. Como $y = 3x$, temos que $y = 3 \cdot 7 = 21$.



Utilizando o Método da Substituição, resolva os seguintes sistemas:

a. $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ y = 2x \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$

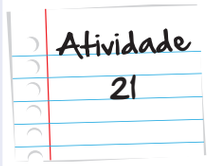
c. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$

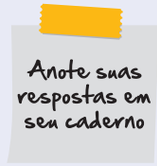
d. $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

Anote suas respostas em seu caderno

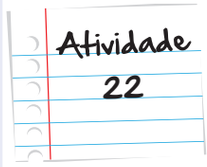
Vamos aplicar as habilidades adquiridas na resolução de problemas. Para os exercícios que se seguem, tente escrever as equações associadas ao problema e obtenha um sistema. Em seguida, resolva o sistema utilizando qualquer um dos métodos aprendidos e dê a resposta. A escolha do método para a resolução do sistema não influencia na sua resposta. Escolha o método que achar melhor na solução dos problemas a seguir.

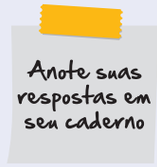
A soma de dois números é 39. O quociente do maior pelo menor é 2 e o resto é 3. Quais são os números?



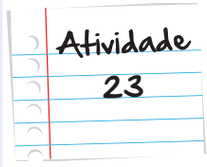


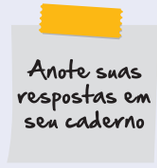
A diferença entre dois números é 28. O quociente do maior pelo menor é 3 e o resto é 2. Determine os números.

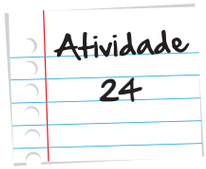




A soma de três números pares consecutivos é 36. Quais são os números?

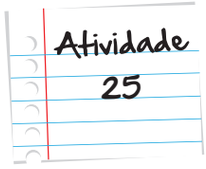






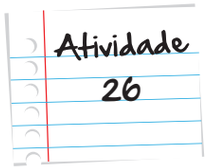
A soma de dois números ímpares consecutivos excede a terça parte do menor em 87 unidades. Quais são os números?

Anote suas respostas em seu caderno



A soma de três números ímpares consecutivos é 45. Determine os números.

Anote suas respostas em seu caderno



Numa festa de caridade, compareceram 400 pessoas. Os homens contribuíram com R$ 5.000,00 e as mulheres, com R$ 2.000,00. Houve uma renda de R$ 1.550.000,00. Quantos eram os homens e quantas as mulheres?

Anote suas respostas em seu caderno

Numa escola existem 200 alunos. A terça parte do número de meninos é igual à metade do número de meninas. Quantos são os meninos e quantas as meninas?

Atividade 27

Anote suas respostas em seu caderno

Pensei em um número. Acrescentei 15 e dividi a soma obtida por 7. Se o resultado foi 18, qual o número pensado?

Atividade 28

Anote suas respostas em seu caderno

Nesta Unidade, revisitamos os conteúdos relacionados à resolução de equações de primeiro grau. Este é um importante conteúdo estudado no Ensino Fundamental e do qual você vai precisar bastante durante o seu Ensino Médio. Há muitos problemas que podem ser resolvidos por meio deste objeto matemático, conforme você pode constatar nestes exercícios.

Resolva os exercícios propostos e não deixe que dúvidas se acumulem!

Abraços e até a próxima!

.

Resumo

Por época da avaliação, é importante que o aluno tenha a chance de re-visitar todas as unidades para relembrar os conceitos estudados.

- Escreva um resumo que possibilite ao aluno voltar à Unidade para estudar;
- Escreva um resumo que recupere o que foi apresentado em cada seção da Unidade;
- Se preferir, escreva em tópicos;

Veja Ainda

Nesta seção é importante inserir as sugestões comentadas de leitura, vídeos, sites etc. de interesse do aluno, relacionando os recursos aos conteúdos desenvolvidos.

Imagens

• http://www.sxc.hu/photo/1307593

• http://www.sxc.hu/photo/1105261

• http://www.sxc.hu/photo/618061

• http://www.sxc.hu/photo/1181526

• http://www.sxc.hu/photo/147608

• http://www.sxc.hu/photo/835946

• http://www.sxc.hu/photo/1155004

• http://www.sxc.hu/photo/1259942

- http://www.sxc.hu/photo/1032251

- http://www.sxc.hu/photo/1193228

- http://www.sxc.hu/photo/911431

Referências

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Georgetown: Edgard Blucher, 1991. 479 páginas.

Atividade 1

a. $3 \cdot 20 = 60$

b. $\sqrt{25} = 5$

c. $2 \cdot 7 + 3 > 10$

d. $\frac{12}{2} < \frac{30}{3}$

e. $x \text{ " } 0,4$

f. $x^2 + 7 = x$

Respostas das Atividades

Atividade 2

a. $2x$

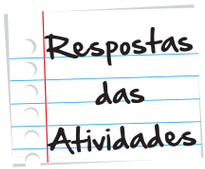
b. $3x + 1$

c. $4(x+1)$

d. $\frac{X^2}{2}$

e. $\frac{\sqrt{X}}{2}$

f. $\sqrt{\frac{X}{2}}$



Atividade 3

D

Atividade 4

a. Sim, pois $2 . 5 = 10$.

b. Não, pois $-1 \neq (-1)^2$.

c. Sim, pois $0 = 0^2$.

d. Não, pois $2.\frac{1}{4} - 3 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{3} \uparrow 5$.

e. Sim, pois $|-3| = 3$.

f. Sim, pois $-\frac{5}{3}$ e $\sqrt{9 + 3\left(-\frac{5}{3}\right)} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$

Atividade 5

a. $x = 1$

b. $x = 0$ ou $x = 4$

c. $x = 0$ ou $x = 1$

d. $x = 2$

e. A equação não possui solução em *U*.

f. $x = 0$

Atividade 6

a. $x + 2 = 0 \rightarrow a = 1$ e $b = 2$

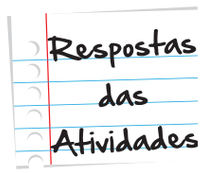
b. $-5x - 8 = 0 \rightarrow a = -5$ e $b = -8$

c. $-7x - 18 = 0 \rightarrow a = -7$ e $b = -18$

d. $x - 4 = 0 \rightarrow a = 1$ e $b = -4$

e. $x = 0 \rightarrow a = -1$ e $b = 0$

f. $-x - 15 = 0 \rightarrow a = -1$ e $b = -15$



Atividade 7

a. $x = 12$

b. $x = -\frac{20}{3}$

c. $x = 24$

d. $x = -15$

e. $x = \frac{1}{2}$

f. $x = 1$

Atividade 8

a. Se o candidato acertou 15 questões, ele errou 10 questões e sua pontuação será $15 . 4 + 10 . (-1) = 50$pontos.

b. Ele errou $25 - x$ questões e fez $4x + (25 - x) . (-1)$ pontos.

c. Ele acertou 18 questões.

Atividade 9

a. $20 . 2{,}89 = 57{,}80$ reais.

b. $2{,}89 . x$.

c. 6,92 litros.

Atividade 10

Dois números consecutivos desconhecidos: x e $x + 1$.

A soma de dois números consecutivos é 63: $x + x + 1 = 63$.

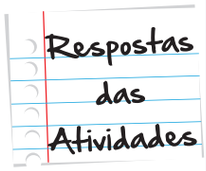
O maior deles é 32.

Atividade 11

Idades dos irmãos: x e $x - 5$.

A soma das idades é 29: $x + x - 5 = 29$.

A idade do mais jovem é 12.



Atividade 12

Quando ela tiver 21 anos, seu pai terá 53 anos. A soma de sua idade com a de seu pai será 74 anos.

Atividade 13

O consecutivo do triplo de um número desconhecido: $3x + 1$.

O consecutivo do triplo de um número desconhecido é 97: $3x + 1 = 97$.

O número que Marcos pensou foi 32.

Atividade 14

Se x é ímpar, $x + 2$ e $x + 4$ serão os outros dois ímpares consecutivos a ele.

A soma de três números ímpares e consecutivos é igual a 39: $x + x + 2 + x + 4 = 39$.

Os números são 11, 13 e 15.

Atividade 15

A metade de um número: $\frac{x}{2}$

O próprio número diminuído de 3 unidades: $x - 3$.

A metade de um número é igual ao próprio número diminuído de três unidades: $\frac{x}{2} = x - 3$

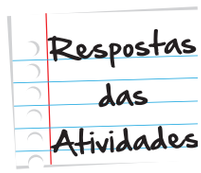
O número é 6.

Atividade 16

C.

Atividade 17

A.



Atividade 18

a. Sim.

b. Não.

Atividade 19

a. $S = \{(3, -1)\}$

b. $S = \{(2, 1)\}$

c. $S = \{(4, 0)\}$

d. $S = \left\{\left(\frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right)\right\}$

Atividade 20

a. $S = \{(2, 4)\}$

b. $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

c. $S = \left\{\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$

d. $S = \left\{\left(\frac{13}{19}, \frac{4}{19}\right)\right\}$

Atividade 21

27 e 12.

Atividade 22

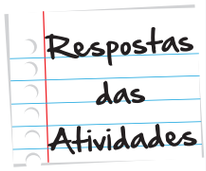
41 e 13.

Atividade 23

10, 12 e 14.

Atividade 24

51 e 53.



Atividade 25

13, 15 e 17.

Atividade 26

250 homens e 150 mulheres.

Atividade 27

120 meninos e 80 meninas.

Atividade 28

111.

O que pedem por aí ...

1. **(OBMEP 2011)** Um queijo foi partido em quatro pedaços de mesmo peso. Três desses pedaços pesam o mesmo que um pedaço mais um peso de 0,8 kg. Qual era o peso do queijo inteiro?

   (A) 1,2 kg

   (B) 1,5 kg

   (C) 1,6 kg

   (D) 1,8 kg

   (E) 2,4 kg

   COMENTÁRIO: Dizendo que ***q*** é a massa do queijo inteiro, logo poderemos concluir que $\frac{3q}{4} = \frac{q}{4} + 0,8$. Resolvendo esta encontramos q = 1,6 Kg.

2. **(Banco de Questões do Saerj/Saerjinho)**

(M100052ES) Veja a publicidade do Pesque-Pague do Juca.

> Pesque-Pague do Juca.
> Pesque seu próprio almoço!
> Apenas 8 reais pelo aluguel do equipamento e
> 6 reais por Kg de peixe pescado.

Jorge foi ao Pesque-Pague do Juca e, ao final, pagou um total de 50 reais.
Quantos quilogramas de peixe Jorge pescou?

A) 5,5
B) 7
C) 12,25
D) 16,3
E) 36

COMENTÁRIO: Tomando ***p*** como a quantidade de peixes é encontrada a equação 6p+8=50. Logo encontramos P = 7 Kg.

3. **(Banco de Questões do SARESP)** Uma companhia de telefonia celular possui dois planos de tarifação para seus usuários: Plano I: taxa de R$ 20,00 por mês, mais R$ 0,30 por minuto de conversação. Plano II: sem taxa mensal e R$ 0,50 por minuto de conversação. O plano I é o mais vantajoso para as pessoas que, por mês, falam

   (A) mais do que 100 minutos;

   (B) menos do que 100 minutos;

   (C) mais do que 40 minutos;

   (D) menos do que 40 minutos.

COMENTÁRIO: Esta questão usa os conceitos de igualdade desigualdade para chegar a uma resolução. No plano I a expressão 0,30x+20 molda a tarifa. Já no plano II 0,5x. Provavelmente, o aluno resolverá essa questão por eliminação. Testará as expressões até encontrar a resposta. Dessa forma, o plano 1 para 100 minutos custa R$ 50,00 e para 40 minutos R$ 32,00. O plano II, respectivamente, custará R$ 50,00 e R$ 20,00. Assim pensando que, se no plano I, forem gastos 101 minutos serão pagos R$ 50,30 e no outro, R$ 50,50. Logo o plano 1 é mais vantajoso para quem usa mais de 100 minutos.

4. **(Banco de Questões do SARESP)** O preço de uma corrida de táxi é composto de uma parte fixa, chamada bandeirada, de R$ 3,00, mais R$0,50 por quilômetro rodado. Uma firma contratou um táxi para levar um executivo para conhecer a cidade, estipulando um gasto menor que R$60,00. O número x de quilômetros que o motorista do táxi pode percorrer nesse passeio é representado por:

   (A) $x < 50$

   (B) $x < 60$

   (C) $x < 114$

   D)$x < 120$

COMENTÁRIO: Inicialmente você terá de construir a expressão 3+0,5x = 60. Sendo assim (1/2)x=57, logo x=114. Assim, o máximo de quilômetros que poderá percorrer com R$ 60,00 será 114. Dessa forma, x<114 (C)

5. **(PROVA BRASIL,2011)** Lucas comprou 3 canetas e 2 lápis, pagando R$ 7,20. Danilo comprou 2 canetas e 1 lápis, pagando R$ 4,40. O sistema de equações do 1º grau que melhor representa a situação é:

A) $\begin{cases} 3x + 2y = 7,20 \\ 2x + y = 4,40 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 3x - 2y = 7,20 \\ 2x - y = 4,40 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + y = 3,60 \\ x - y = 2,20 \end{cases}$

D) $\begin{cases} 3x + y = 7,20 \\ x + y = 4,40 \end{cases}$

Gabarito: letra A

COMENTÁRIO: Para representar, matematicamente, a situação descrita no enunciado do problema, deve-se reconhecer que cada frase descreve uma equação de duas variáveis . Se chamarmos a variável "preço de cada caneta" de x e a variável "preço de cada lápis" de y podemos escrever que 3x + 2y = 7,20 e que 2x + y = 4,40.

6. Um estacionamento cobra R$ 2,00 por moto e R$ 3,00 por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou R$ 277,00 para um total de 100 veículos. Quantas motos e carros usaram o estacionamento nesse dia?

COMENTÁRIO: Inicialmente representamos cada moto por M e cada carro por C, e montamos o sistema:

$$\begin{cases} M + C = 100 \\ 2M + 3C = 277 \end{cases}$$

Resolvendo por substituição, temos:C = 77 e M = 23.

Equações e problemas de segundo grau

Para início de conversa...

Um fazendeiro possui 100 metros de tela e deseja cercar uma região retangular para seus animais.

Figura 1: Cerca de tela

Devido à quantidade de animais que possui, esse fazendeiro julgou que a área cercada deve ser de 400 metros quadrados. Será que os 100 metros de tela são suficientes para atender a esta condição? Quais devem ser as dimensões (largura e comprimento) de um retângulo para que possua área de 400 metros quadrados? Nesta unidade, veremos que este problema pode ser resolvido através de equações do 2º grau.

Objetivos de Aprendizagem

- identificar uma equação do 2º grau e seus coeficientes numéricos;
- reduzir uma equação à forma $ax^2 + bx + c = 0$, quando for possível;
- resolver uma equação do 2º grau;
- resolver problemas que recaiam em equações do 2º grau;
- resolver sistemas do 2º grau;
- resolver problemas que recaiam em sistemas do 2º grau.

Definição

Nesta primeira parte da aula, vamos retomar e tentar resolver o problema inicial juntos. Funciona assim: primeiro você tenta resolvê-lo sozinho e, só depois de tentar bem tentado, vê a nossa solução, ok? Então vamos lá: um fazendeiro possui 100 metros de tela e deseja cercar uma região retangular para seus animais. Lembrando que a área de um retângulo é calculada pelo produto das suas dimensões (largura vezes comprimento), procure responder às seguintes perguntas:

a. Qual é a área de um retângulo de dimensões 20 metros e 30 metros?

b. Quais devem ser as dimensões de um retângulo de área 100 metros quadrados? Esta resposta é única?

c. Se o fazendeiro do problema proposto dispõe de 100 metros de tela e deseja usá-la para cercar uma região retangular, podemos dizer que o perímetro deste retângulo é 100 m. Represente em seu caderno um retângulo com dimensões que indiquem que seu perímetro é igual a 100 metros e, em seguida, calcule a sua área. Esta resposta é única? Tente desenhar outros retângulos com dimensões que indiquem que seu perímetro é de 100 metros e calcule suas respectivas áreas.

d. Entre as diferentes possibilidades de resposta para a questão anterior, é possível perceber algo em comum?

e. Tente resolver, então, o problema exposto na introdução desta unidade: Quais devem ser as dimensões (largura e comprimento) de um retângulo para que possua área de 400 metros quadrados?

Tentou? Conseguiu? Bom, de uma forma ou de outra, acompanhe as nossas resoluções:

a. A área desse retângulo é 20x30 = 600 m^2.

b. Para determinar as dimensões de um retângulo que tem área de 100 m^2, devemos procurar dois números cujo produto é 100. Teríamos como possibilidades: 10m e 10m, 5m e 20m, 2m e 50m, 2,5m e 40m, entre outras possibilidades.

c. A figura a seguir mostra uma possibilidade de resposta. Devemos desenhar um retângulo cuja soma das medidas dos lados seja igual a 100. Vamos lembrar que, em um retângulo, os lados opostos têm a mesma medida.

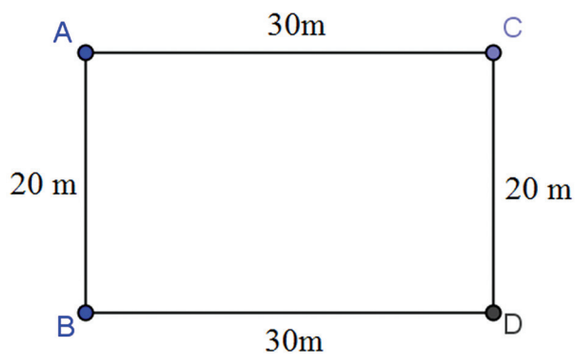


Figura 2 – Retângulo com lados 20m e 30m

d. Do exercício, vemos que a soma entre a largura e o comprimento é 50 m para todos os retângulos de perímetro igual a 100m.

e. Devemos pensar em dois números cuja soma é 50 e cujo produto é 400. Esses números são 10 e 40. Dessa forma, um retângulo de largura 10 m e comprimento 40 m tem perímetro 100 m e área 400m^2.

A atividade que acabamos de fazer juntos induz uma forma de resolver o problema proposto. Através de tentativas, podemos procurar a figura que atende às condições dadas na situação-problema e chegar à solução que procuramos. No entanto, existe uma outra maneira de resolver problemas como esse: utilizando as ferramentas algébricas exploradas nas unidades anteriores.

Saiba Mais

As ferramentas algébricas que hoje utilizamos foram desenvolvidas pelo francês François Viète, no século XVI. Gregos, hindus, egípcios e árabes, apesar de já lidarem com situações que levavam a equações do primeiro e do segundo grau, resolviam os problemas de uma forma bastante parecida com a que resolvemos a primeira atividade. Para que se tenha uma ideia, o papiro de Rhind, que já se refere a problemas de cálculo de áreas e volumes, foi escrito pelos egípcios por volta de 1650 A.C.

Supondo que a região retangular tenha dimensões (largura e comprimento) desconhecidas x e y, as informações dadas na situação-problema podem ser expressas através de sentenças matemáticas envolvendo esses valores desconhecidos. É importante também recordar que os lados opostos do retângulo têm a mesma medida. Veja na figura seguinte.

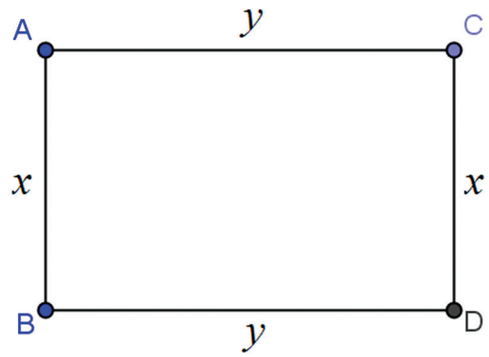
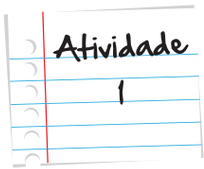


Figura 3: Retângulo

Podemos pensar da seguinte maneira: se dispusermos de 100 metros de tela, teremos $2x+2y=100$ (equação 1). Se a área cercada deve ser de 400 metros quadrados, teremos $x.y = 400$ (equação 2). Na equação 1, podemos dizer que $x+y=50$ (dividindo-se ambos os membros da equação por 2) e, ainda, podemos dizer que $y = 50 - x$. Substituindo-se y por $50 - x$ na equação 2, teremos $x.(50 - x) = 400$. Essa nova equação pode ser escrita na forma $50x - x^2 = 400$, ou, ainda, $-x^2 + 50x - 400 = 0$.

Diremos que esta é uma equação do 2º grau, e veremos nas próximas seções como resolver equações deste tipo. Mais formalmente, podemos dizer que equação do segundo grau é toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a um número real diferente de zero, b e c, números reais quaisquer e x, a incógnita.

Os números reais a, b e c são os coeficientes desta equação. Convencionaremos que a representa o número que multiplica o quadrado da incógnita, b representa o número que multiplica a incógnita e c representa o termo independente da incógnita.



Resolva as seguintes questões:

1. Identifique quais equações são do 2º grau e, para estas, identifique os seus coeficientes:
   a. $5x + 6 = 0$
   b. $3y^2 + 2y + 1 = 0$
   c. $\frac{z^2}{2} - 1 = 0$
   d. $3\sqrt{x} - x^2 = 2$
   e. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
2. Na unidade 6, vimos dois princípios que podem ser utilizados na resolução de equações. Podemos somar um mesmo termo a ambos os membros de uma equação ou podemos multiplicar ambos os membros de uma equação por um número diferente de zero que a igualdade não se altera. Aplicando esses princípios, escreva as equações a seguir na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Veja um exemplo: a equação x.(x + 4) = 7x + 2 pode ser escrita na forma $x^2 - 3x - 2 = 0$, pois

$x.(x+4) = 7x+2 \Rightarrow x^2 + 4x = 7x + 2$ (aplicando a propriedade distributiva)

$\Rightarrow x^2 + 4x - 7x - 2 = 0$ (somando-se $-7x-2$ a ambos os membros da equação)

$\Rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$ (somando-se os termos semelhantes)

Atividade 1

Agora é a sua vez...

a. $3x^2 = 5x - 1$

b. $y(y+4) = -5$

c. $(x-3)^2 - 4x = 0$

d. $x^2 - \frac{3-x}{5} = \frac{x-9}{15}$

e. $\frac{1}{t+1} + \frac{2}{t} = 1$

3. 240 figurinhas devem ser repartidas por um grupo de meninos, mas na hora de reparti-las 5 meninos não apareceram para pegar as suas figurinhas. Por causa disso, cada menino recebeu 8 figurinhas a mais.

   a. Se o grupo é composto por *x* meninos, escreva a expressão algébrica que dá o resultado da divisão de 240 figurinhas entre eles.

   b. Como 5 meninos não apareceram, a divisão das figurinhas foi feita entre quantos meninos?

   c. Escreva a expressão algébrica que dá o resultado da divisão das 240 figurinhas entre os meninos que compareceram no momento da divisão.

   d. A situação indica que o resultado da divisão entre os meninos que compareceram é igual ao resultado da divisão entre o total de meninos mais 8. Escreva a equação correspondente a esta situação. Reduza esta equação à forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Se resolvermos esta equação, descobrimos o número de meninos envolvidos no problema.

Anote suas respostas em seu caderno

Um dos nossos objetivos para esta aula é apresentar estratégias para a solução de equações do 2º grau. Para isso, é necessário fazer primeiro uma breve revisão dos produtos notáveis. Vamos a ela?

Breve revisão dos produtos notáveis

Os produtos notáveis são produtos envolvendo expressões algébricas e são ferramentas muito importantes para a solução de diversos problemas, entre os quais a resolução de equações do 2º grau.

O desenvolvimento dos produtos se dá pela propriedade distributiva do produto com a soma ou com a subtração. Vamos lembrar esta propriedade e ver como ela nos permite desenvolver os produtos notáveis.

Propriedade distributiva:

1. $m(n+p) = mn + mp$
2. $(m+n)(p+q) = mp + mq + np + nq$

Podemos associar figuras geométricas a estas operações a fim de facilitar a sua compreensão. Veja a figura a seguir.

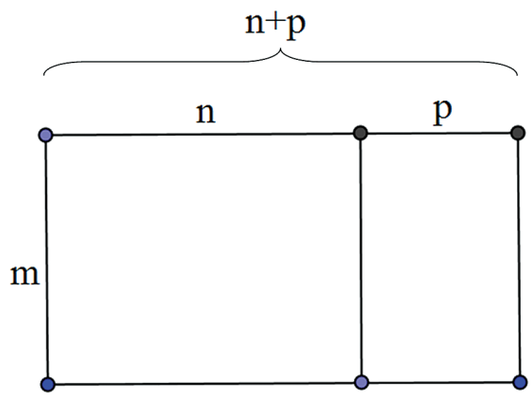


Figura 4: Propriedade distributiva

Se imaginarmos que o produto *mn* indica a área de um retângulo de dimensões *m* e *n*, o produto $m(n+p)$ indica a área de um retângulo de dimensões *m* e $n+p$. A figura anterior mostra que este retângulo é formado pela união de um retângulo de dimensões *m* e *n* e outro de dimensões *m* e *p*. Dessa forma, a área expressa por $m(n+p)$ é a soma das áreas *mn* e *mp*, isto é, $m(n+p) = mn + mp$.

Agora, o produto $(m+n)(p+q) = mp + mq + np + nq$ pode ser representado pela figura a seguir.

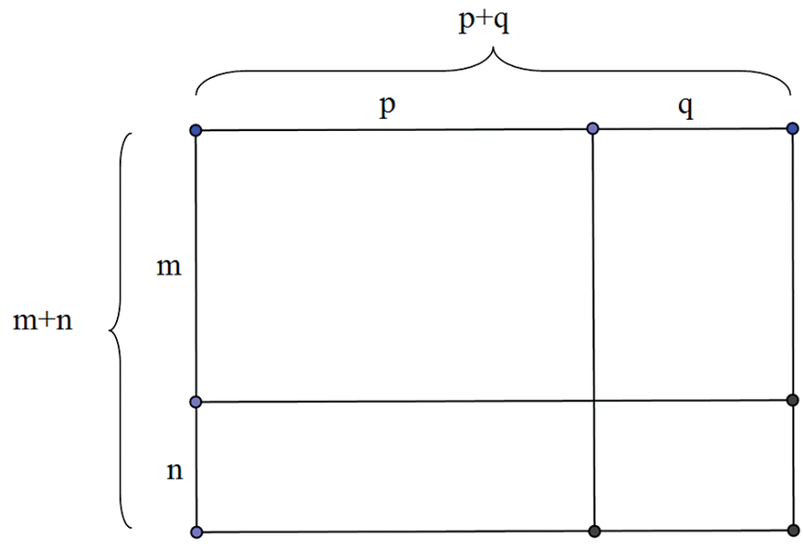


Figura 5: Propriedade distributiva

Note que, na Figura 4, podemos identificar 4 novos retângulos cujas áreas são *mp*, *mq*, *np* e *nq*. Dessa forma, temos uma representação geométrica para o produto $(m+n)(p+q) = mp + mq + np + nq$.

Vamos conhecer, então, alguns produtos notáveis

a. O quadrado da soma de dois termos: $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

De fato, $(m+n)^2 = (m+n)(m+n) = m^2 + mn + nm + n^2 = m^2 + 2mn + n^2$. A Figura 5 mostra a representação gráfica desse produto. Nela, vemos que o quadrado de lado $m + n$ é composto de um quadrado de lado *m*, um quadrado de lado *n* e dois retângulos de dimensões *m* e *n*.

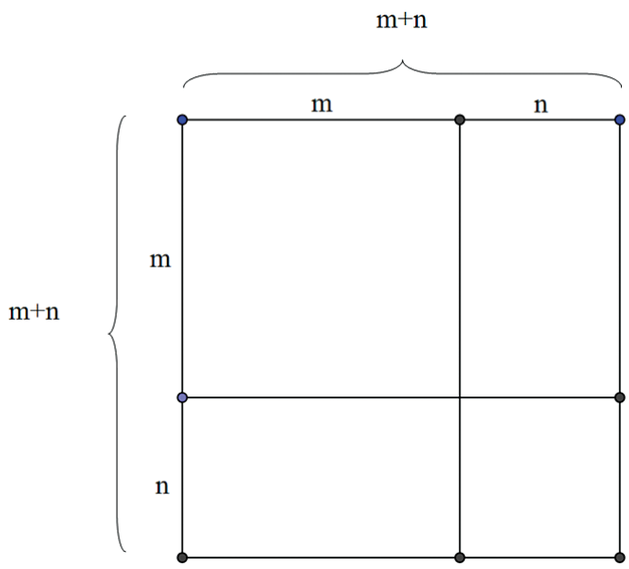


Figura 6: Quadrado da soma de dois termos

b. O quadrado da diferença de dois termos: $(m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$

A demonstração é análoga ao produto anterior:

$(m-n)^2 = (m-n)(m-n) = m^2 - mn - nm + n^2 = m^2 - 2mn + n^2$. A figura 6 ilustra esse produto. Nela, vemos que o quadrado de lado $m-n$ é obtido pela seguinte sequencia de operações:

retira-se do quadrado de lado *m* um retângulo de dimensões *m* e n;

acrescenta-se um quadrado de lado n;

retira-se outro retângulo de dimensões *m* e n.

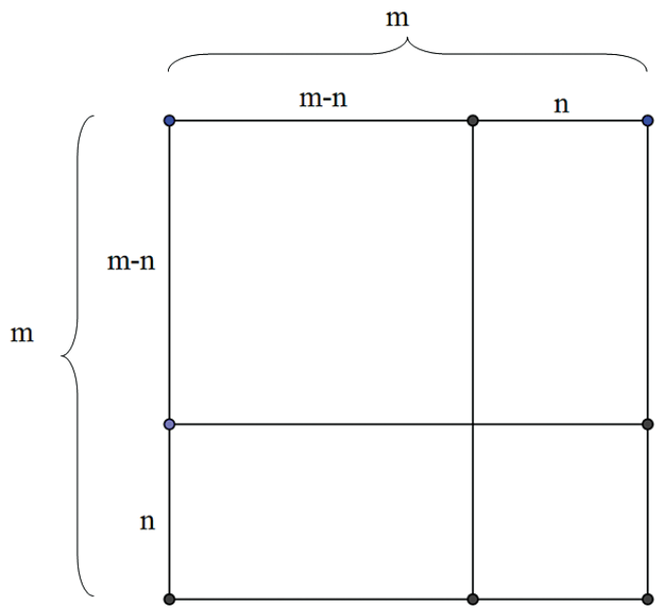


Figura 7: Quadrado da diferença de dois termos

c. O produto da soma pela diferença de dois termos: $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$

A demonstração deste produto também usa a propriedade distributiva:

$(m+n)(m-n) = m^2 - mn + nm - n^2 = m^2 - n^2$

Na Figura 8, temos um retângulo de dimensões *m* + *n* e *m* – *n*. Cortando-se este retângulo em dois trapézios, podemos girar um deles e encaixá-lo no outro, de modo que vemos uma nova figura, um quadrado de lado *m* menos um quadrado de lado *n*.

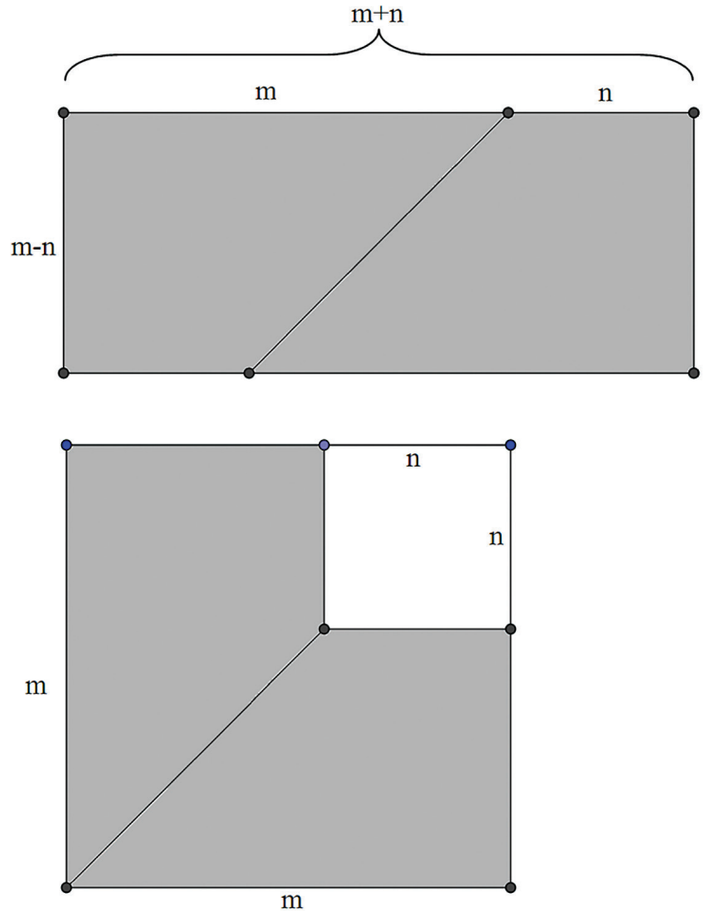


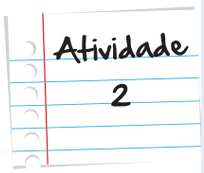
Figura 8: Produto da soma pela diferença de dois termos

d. $(x+m)(x+n) = x^2 + (m+n)x + mn$

Este produto é feito utilizando a propriedade distributiva e será muito útil na resolução de algumas equações do 2º grau, como veremos nas seções seguintes.

No endereço http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00101/toepassing_wisweb.en.html, você encontra um jogo para completar quadrados usando diferentes formas geométricas. Esse jogo constitui uma forma interativa para compreender as interpretações geométricas dos produtos notáveis aqui propostas.

Multimídia



Escreva a forma fatorada das seguintes expressões:

a. x^2+4x

b. $x^2+10x+25$

c. $x^2-12x+36$

d. $4x^2-49$

e. x^2+5x+6

f. x^2-x-6

Anote suas respostas em seu caderno

Resolução de equações do 2º grau

Finda a revisão dos produtos notáveis, vamos apresentar algumas estratégias para a resolução de equações do 2º grau. Dividiremos as equações em dois tipos. As equações incompletas são aquelas que apresentam pelo menos um dos coeficientes – b ou c - igual a zero. Se todos os coeficientes forem diferentes de zero, diremos que as equações são completas.

Equações incompletas

Exemplo 1: $5x^2=0$

A expressão algébrica à esquerda é composta pelo produto de dois fatores: 5 e x^2. Se o produto de dois fatores é zero, ou o primeiro é igual a zero ou o segundo é igual a zero. Como 5 é diferente de zero, temos que x^2 deve ser igual a zero. O único número cujo quadrado é zero é o próprio zero. Dessa forma, o conjunto solução dessa equação é $S=\{0\}$.

Exemplo 2: $x^2+4x=0$

Note que x é um fator comum que pode ser colocado em evidência. Dessa forma, a equação pode ser escrita na forma $x(x+4)=0$. Retomando a ideia utilizada no exemplo 1, temos duas possibilidades: ou $x=0$ ou $x+4=0$. Assim, as soluções desta equação são 0 e -4 e seu conjunto solução é $S=\{0,-4\}$.

Exemplo 3: $x^2-9=0$

Neste caso, como $9 = 3^2$, podemos reescrever a equação na forma $x^2 - 3^2 = 0$. Pelo produto notável c da seção anterior, podemos, ainda, reescrever a equação na forma $(x+3)(x-3) = 0$.

Termos, então, duas possibilidades: ou $x+3=0$ ou $x-3=0$.

Dessa forma, as soluções da equação serão -3 e 3 e seu conjunto solução é $S = \{-3, 3\}$.

Exemplo 4: $x^2 + 9 = 0$

O polinômio à esquerda não envolve nenhum dos produtos notáveis tratados na seção 3. Se tentássemos isolar o termo x^2, teríamos que $x^2 = -9$. Mas não há número real cujo quadrado seja um número negativo.

Concluímos, então, que esta equação não possui solução no conjunto dos números reais e seu conjunto solução é $S = \varnothing$.

Equações completas

Exemplo 1: $x^2 - 10x + 25 = 0$

O polinômio à esquerda pode ser escrito como $x^2 - 2.5.x + 5^2$ cuja forma fatorada (como visto na seção anterior, item b) é $(x-5)^2$. Dessa forma, a equação pode ser escrita na forma $(x-5)^2 = 0$.

Como o único número cujo quadrado é zero é o próprio zero, teremos que $x-5=0$.

Logo, a solução da equação é 5 e seu conjunto solução é $S = \{5\}$.

Exemplo 2: $x^2 + 14x + 49 = 0$

Com a mesma ideia utilizada no exemplo 5, vemos que o polinômio à esquerda pode ser escrito como $x^2 + 2.7.x + 7^2$ e sua forma fatorada é $(x+7)^2$ (seção anterior item a).

A equação será escrita na forma $(x+7)^2 = 0$, e, dessa forma, teremos que $x+7=0$.

A solução da equação é, -7 e seu conjunto solução é $S = \{-7\}$.

Exemplo 3: $x^2 + 5x + 6 = 0$

Com ideia análoga ao exemplo anterior, o polinômio $x^2 + 5x + 6$ pode ser escrito na forma $(x+2)(x+3)$ de acordo com o produto notável do item d) da seção anterior. Teremos, então, de resolver a equação $(x+2)(x+3) = 0$. Para que o produto de dois fatores dê zero, ou o primeiro é zero, ou o segundo é zero. Dessa forma, temos que $x+2=0$ ou $x+3=0$. Assim, as soluções serão $x=-2$ ou $x=-3$ e seu conjunto solução é $S = \{-2, -3\}$.

Completando quadrados

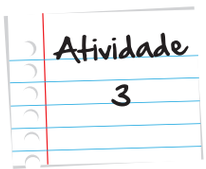
Para equações que não envolvam diretamente os produtos notáveis apresentados anteriormente, podemos utilizar a ideia de completar quadrados, isto é, tentar introduzir termos na equação de modo que apreçam trinômios quadrados perfeitos (expressões da forma $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$).

Figura 9: completando um quadrado

Vamos primeiro praticar como completar quadrados e, em seguida, vamos aplicar esta ideia na resolução de equações do 2º grau. Começamos dando um exemplo:

Considere a expressão $x^2 + 6x +$. Deseja-se preencher esta lacuna com um termo de modo que se obtenha uma expressão da forma $a^2 + 2ab + b^2$. Ora, o termo 6x pode ser escrito como 2.x.3, o que nos indica que b = 3

Comparando ambas as expressões, vemos que $a = x$ e $b = 3$. Dessa forma, a lacuna deve ser preenchida com o quadrado de *b*, isto é, 9. Assim, teremos que $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$. Agora é sua vez...



Complete os quadrados

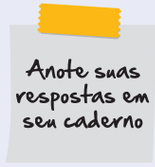
a. $x^2 + 4x +$

b. $x^2 - 14x +$

c. $4x^2 +$ $\quad +25$

d. $x^2 - 2x +$

e. $-12x + 9$



Agora veja mais este exemplo:

Confrontando a expressão $x^2 + 5x +$ com a expressão $a^2 + 2ab + b^2$, vemos que $a = x$ e *b* deve ser a metade de 5. Dessa forma, devemos preencher a lacuna com o quadrado da metade de 5, ou seja, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Tente, então, completar as lacunas de modo a obter trinômio quadrado perfeito

a. $x^2 + 3x +$

b. $x^2 - 7x +$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 4

Nosso exemplo agora envolve completar o quadrado e resolver a equação. Prontos?

Vamos resolver a equação $x^2 - 6x - 7 = 0$ como exemplo. Podemos escrever esta equação como $x^2 - 6x = 7$. Qual deve ser o fator que, acrescido ao primeiro membro desta equação ($x^2 - 6x$), nos dá um trinômio quadrado perfeito?

Vemos que o fator deve ser 9. Dessa forma, somamos 9 a ambos os membros da equação $x^2 - 6x = 7$ e ficamos com $x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$.

Esta equação pode ser escrita como $(x-3)^2 = 16$.

Como existem dois números cujo quadrado é 16 (4 e -4), teremos duas possibilidades: $x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4$. Assim, concluímos que $x = 7$ ou $x = -1$.

Agora é a sua vez.

Complete os quadrados e resolva as equações

a. $x^2 - 10x + 16 = 0$

b. $x^2 + 2x + 3 = 0$

c. $x^2 + 6x - 1 = 0$

d. $2x^2 + x - 1 = 0$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 5

Fórmula para a resolução de uma equação do 2º grau

A ideia de completar quadrados nos permite deduzir a fórmula para a resolução de uma equação do 2º grau em função de seus coeficientes. Nos livros didáticos brasileiros, esta fórmula é geralmente atribuída ao matemático indiano Bhaskara. No entanto, como já vimos anteriormente, as fórmulas como as conhecemos só surgiram séculos depois da morte desse matemático - que, apesar de não ter criado as fórmulas que lhe são atribuídas, foi de grande importância para o desenvolvimento da Matemática.

Multimídia

Para conhecer mais sobre a história do matemático Bhaskara e sobre a maneira que as civilizações antigas tratavam problemas que envolviam equações do segundo grau, veja o vídeo "Esse tal de Bhaskara", da coleção Matemática Multimidia, elaborada pela Unicamp. O endereço é https://www.youtube.com/watch?v=pozKHQxvFSoOs

Retomando, podemos partir de uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, e escrevê-la como $ax^2 + bx = -c$. Dividindo-se todos os termos por a, temos $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

Para que tenhamos, no 1º membro desta equação, um trinômio quadrado perfeito, devemos somar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os membros. Assim ficamos com $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$. Escrevendo-se o 1º membro na sua forma fatorada e o 2º membro com um único denominador, temos $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Assim, temos que $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, ou seja, $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Dessa forma, concluímos que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para a equação $2x^2 - 3x + 1 = 0$, por exemplo, temos que seus coeficientes são $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$. Aplicando a fórmula anterior, temos que as soluções desta equação são dadas por $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.2.1}}{2.2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$, ou seja,

$x = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ou $x = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Mesmo para equações incompletas, podemos usar a fórmula anterior.

Para a equação $3x^2 + 6x = 0$, por exemplo, seus coeficientes são $a = 3$, $b = 6$ e $c = 0$.

Aplicando a fórmula anterior temos que $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.3.0}}{2.3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 0}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{-6 \pm 6}{6}$,

ou seja, $x = \frac{-6+6}{6} = \frac{0}{6} = 0$ ou $x = \frac{-6-6}{6} = \frac{-12}{6} = -2$.

Vimos que as equações do 2º grau podem ter duas soluções, uma única solução ou nenhuma solução real.

O termo $b^2 - 4ac$, que aparece no radical da fórmula anterior, é responsável por determinar o número de soluções da equação do 2º grau da seguinte forma

se $b^2 - 4ac > 0$, a equação possui duas soluções distintas;

se $b^2 - 4ac = 0$, a equação possui apenas uma solução;

se $b^2 - 4ac < 0$, a equação não possui raiz real.

Figura 10: Ferrovia com várias opções de caminho.

Vimos, ao longo desta seção, diferentes estratégias para a solução de equações do 2º grau. Vimos que existe uma fórmula capaz de dar as soluções de qualquer equação do 2º grau em função de seus coeficientes. No entanto, a aplicação da fórmula demonstrada nesta seção envolve muitos cálculos, que, dependendo da situação, podem ser abreviados com o uso dos produtos notáveis, como mostrado anteriormente. Mas qual deve ser, então, o caminho para resolver essas equações? Cabe a você esta decisão. Vamos praticar um pouco?

1. Determine as soluções reais das seguintes equações:

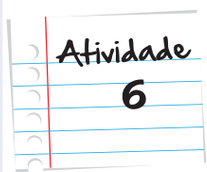
   a. $x^2 - 1 = 0$

   b. $(x-3)^2 - 4x = 0$

   c. $7x^2 - \frac{1}{2} = 5 + \frac{3x}{2}$

   d. $x^2 - \frac{3-x}{5} = \frac{x-9}{15}$

   e. $x + \frac{24}{x-1} = 3x - 4$



Atividade 6

2. A equação de 2º grau $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é –2. Qual é a outra raiz?

3. Quais são os valores do parâmetro **p**, para os quais a equação $x^2 + x + (p^2 - 7p) = 0$ tem uma raiz nula.

4. A equação do 2º grau cujas raízes são -1 e $\frac{1}{3}$ é:

   a. $3(x+1)(x-1)=0$

   b. $(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$

   c. $3(x+1)(x-3)=0$

   d. $(x+1)(3x-1)=0$

Anote suas respostas em seu caderno

Vamos retomar uma vez mais o problema inicial, em que o fazendeiro desejava cercar uma região conhecendo o seu perímetro e a sua área. No entanto, em vez de resolvê-lo por aproximação, vamos usar o que já aprendemos até aqui.

Vimos que, se dispusermos de 100 metros de tela para cercar uma região retangular de dimensões desconhecidas *x* e *y*, teremos a equação $x.y = 400$. Além disso, se a área cercada deve ser de 400 metros quadrados, teremos $x.y = 400$. Vimos, então, que essas equações com duas incógnitas nos levam à equação $-x^2 + 50x - 400 = 0$.

Anteriormente, aprendemos uma fórmula que resolve qualquer equação do 2º grau a partir dos seus coeficientes. Na equação $-x^2 + 50x - 400 = 0$, temos que $a = -1$, $b = 50$ e $c = -400$. Aplicando a fórmula para a resolução de uma equação do 2º grau teremos que as soluções são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4.(-1).(-400)}}{2.(-1)} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - 1600}}{-2} =$$

$$= \frac{-50 \pm \sqrt{900}}{-2} = \frac{-50 \pm 30}{-2}$$

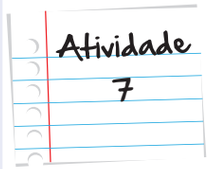
de onde teremos $x = \frac{-50+30}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10$ ou $x = \frac{-50-30}{-2} = \frac{-80}{-2} = 40$.

Se $x = 10$, vemos que $y = 40$ (já que o produto $x.y$ deve ser 400); de maneira análoga, se $x = 40$, $y = 10$. As dimensões da região retangular devem ser 10 metros e 40 metros.

A estratégia adotada na resolução desse problema foi, inicialmente, atribuir símbolos para designar o que era desconhecido no problema.

Em seguida, escrevemos equações com base nas informações do problema. Manipulamos essas equações de modo a obter uma equação que dependesse apenas de uma das incógnitas. Por fim, ao identificarmos que se tratava de uma equação do 2º grau, resolvemos o problema usando as ferramentas adquiridas nas seções anteriores.

Vamos praticar essa estratégia um pouco?



1. Maria disse a seus colegas: Estou pensando num número que, somado ao seu quadrado, é igual a 20. Este número expressa a quantidade de bombons que tenho. Quantos bombons Maria tem?

    a. 6

    b. 5

    c. 4

    d. 3

2. Suponha que num dia de outono a temperatura f (t), em graus, era uma função do tempo t, medido em horas, dada por $f(t) = t^2 - 7t$. A que horas desse dia a temperatura era igual a 18ºC?

    a. Às 2 horas.

    b. Às 5 horas.

    c. Às 6 horas.

    d. Às 7 horas.

    e. Às 9 horas.

3. Um quadro retangular tem 150cm² de área. O seu comprimento excede em 5cm a largura. A equação que representa as afirmações acima é:

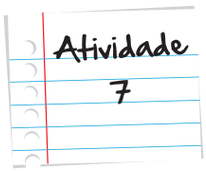
    a. $x^2 - 15x - 150 = 0$ d) $x^2 - 150x - 5 = 0$

    b. $x^2 + 5x - 150 = 0$ e) $x^2 + 5x + 150 = 0$

    c. $x^2 + 150x - 5 = 0$

4. Um pedaço de arame de 52cm é cortado em duas partes e cada parte é dobrada de modo a formar um quadrado. A área total dos dois quadrados vale 97cm². Determine os lados desses dois quadrados.

5. Se **x** é positivo e se o inverso de $x + 1$ é $x - 1$, determine o valor de x.



6. Dois automóveis partem ao mesmo tempo de São Paulo, ambos em direção a uma mesma cidade, distante 360 km. O primeiro percorre, em média, 30 km por hora mais que o segundo e, desse modo, chega duas horas antes ao destino. Quais são as velocidades médias de cada veículo?

Anote suas respostas em seu caderno

Sistemas do 2º grau

Considere a seguinte situação-problema[1]:

Na figura a seguir, o ponto R representa a localização, à beira-mar, de uma usina que capta o esgoto de certa região. Com o objetivo de lançar o esgoto no ponto T, uma tubulação RQT deverá ser construída. Sabe-se ainda que T se situa a 800 metros do cais, em frente ao ponto P, que dista 2000 metros de R, conforme ilustra a figura a seguir.

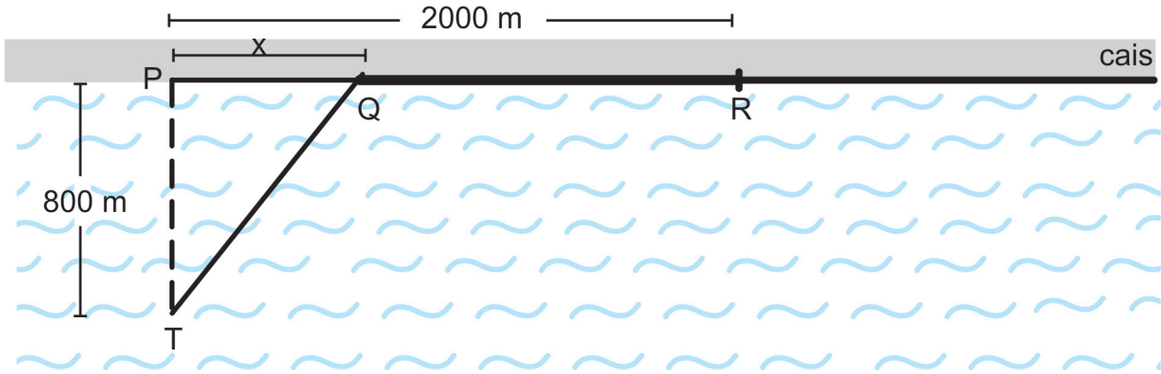


Figura 11: Representação da situação problema.

Por imposição do projeto, os trechos TQ e QR da tubulação devem ter o mesmo comprimento. Com base nas informações, é possível determinar o valor de x nessa figura? A tubulação RQT é composta de dois trechos que satisfazem às seguintes condições:

1. Como PR = 2000 e PQ = x, concluímos que QR = $2000 - x$;
2. Se a distância TQ = y, como os trechos TQ e QR devem ter o mesmo comprimento, temos que $y = 2000 - x$;
3. Como o triângulo é TPQ é retângulos, temos, pelo Teorema de Pitágoras, que $y^2 = x^2 + 800^2$.

1 Situação adaptada de questão do vestibular da UFF de 2003.

Note que, nesta situação-problema, conseguimos relacionar as incógnitas por meio de duas equações de modo que, pelo menos, uma delas envolva termos do 2º grau, ou seja, as incógnitas aparecem elevadas ao quadrado. Poderíamos escrever tais equações na forma

$$\begin{cases} y = 2000 - x \\ y^2 = x^2 + 800^2 \end{cases}$$

Diremos que esse é um sistema do 2º grau. Mais formalmente, podemos dizer que um sistema do 2º grau envolve um conjunto de equações tais que, pelo menos, uma delas é do 2º grau.

Mas como determinaremos as soluções de um sistema do 2º grau? Vamos antes lembrar o que significa encontrar uma solução de um sistema.

Uma solução de um sistema de equações com duas incógnitas é um par ordenado (a,b) que é solução de todas as equações do sistema. Resolver um sistema significa, então, procurar soluções comuns a todas as equações que o compõem.

Importante

Para ilustrar esta ideia bem simples, já trabalhada em unidades anteriores, vejamos o sistema do 1º grau $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$. Vamos listar algumas soluções da primeira equação:

(1,0), (0,1), (2,-1), (-2,3), ... As soluções são pares de números que somados dão 1.

Vejamos agora algumas soluções da segunda equação do sistema.

(3,4), (0,1), (-1,0), (2,3), ... As soluções são pares de números cuja diferença entre eles é -1.

Notamos que o par (0,1) é solução comum às duas equações. Dessa forma, esse par é uma solução do sistema apresentado. Como já visto em unidades anteriores, existem métodos para a solução de sistemas. Mostraremos que o Método da Substituição é útil na resolução de sistemas do 2º grau. Acompanhe o exemplo:

Para resolvermos o sistema $\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

1. podemos, a partir da primeira equação, dizer que $x = 5 + y$;
2. substituindo x por $5 + y$ na segunda equação, teremos $(5 + y)^2 + y^2 = 13$;
3. Vamos resolver esta equação:

$$(5 + y)^2 + y^2 = 13$$
$$25 + 10y + y^2 + y^2 = 13$$
$$2y^2 + 10y + 12 = 0$$

$y^2 + 5y + 6 = 0$

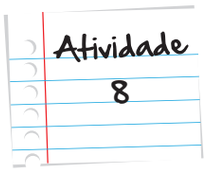
$(y+2).(y+3) = 0$ (em vez de fatorar, você também poderia usar a fórmula já vista anteriormente, ok?)

$y = -2$ ou $y = -3$

Se $y = -2$, temos que $x = 5 + (-2) = 3$.

Se $y = -3$, temos que $x = 5 + (-3) = 2$.

Os pares ordenados que são soluções do sistema são (3,-2) e (2,-3).



1. Resolva os seguintes sistemas:

   a. $\begin{cases} x^2 - y^2 = -9 \\ x - y = -9 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} x = 2 + y \\ x^2 + xy - y^2 = 31 \end{cases}$

2. A soma de dois números inteiros é 120 e o quociente do maior pelo menor é igual a 7. Determine o maior desses números.
3. A razão de dois números e a diferença dos seus quadrados é 63. Determine o menor desses números.
4. A idade de uma criança daqui a 4 anos será igual ao quadrado da idade que tinha há 2 anos. Qual é a idade atual dessa criança?

Anote suas respostas em seu caderno

Referência

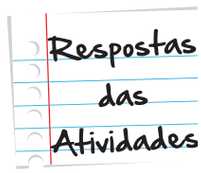
- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1331388

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1440673

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1070609

Atividade 1



1. As equações do 2º grau estão apresentadas nas letras b e c. Na equação $3y^2+2y+1=0$, seus coeficientes são $a=3$, $b=2$ e $c=1$. Já na equação $\frac{z^2}{2}-1=0$, $a=\frac{1}{2}$, $b=0$ e $c=-1$.

2.

a. $3x^2=5x-1$ (somando-se $-5x+1$ a ambos os membros)

$3x^2-5x+1=0$

b. $y(y+4)=-5$ (aplicando-se a propriedade distributiva)

$y^2+4y=-5$ (somando-se 5 a ambos os membros)

$y^2+4y+5=0$

c. $(x-3)^2-4x=0$ (desenvolvendo-se o quadrado da diferença de dois termos)

$x^2-6x+9-4x=0$ (somando-se os termos semelhantes)

$x^2-10x+9=0$

d. $x^2-\frac{3-x}{5}=\frac{x-9}{15}$ (multiplicando-se todos os termos por 15)

$15x^2-3(3-x)=x-9$ (aplicando-se a propriedade distributiva)

$15x^2-9+3x=x-9$ (somando-se $-x+9$ a ambos os membros)

$15x^2-9+3x-x+9=0$ (somando-se os termos semelhantes)

$15x^2+2x=0$

e. $\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t}=1$ (multiplicando-se todos os termos por t)

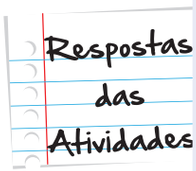
$\frac{t}{t+1}+2=t$ (multiplicando-se todos os termos por $t+1$)

$t+2(t+1)=t(t+1)$ (aplicando-se a propriedade distributiva)

$t+2t+2=t^2+t$ (somando-se $-t^2-t$ a ambos os membros)

$t+2t+2-t^2-t=0$ (somando-se os termos semelhantes)

$-t^2+2t+2=0$



3.

a. $\frac{240}{x}$.

b. A divisão foi feita entre $x-5$ meninos.

c. $\frac{240}{x-5}$.

d. A equação é $\frac{240}{x-5}=\frac{240}{x}+8$. Vamos escrevê-la na forma $ax^2+bx+c=0$.

$\frac{240}{x-5}=\frac{240}{x}+8$ (multiplicando todos os termos por x)

$\frac{240x}{x-5}=240+8x$ (multiplicando todos os termos por $x-5$)

$240x=240(x-5)+8x(x-5)$ (aplicando a propriedade distributiva)

$240x=240x-1200+8x^2-40x$ (somando-se $-240x$ a ambos os membros)

$0=-240x+240x-1200+8x^2-40x$ (somando-se os termos semelhantes)

$0=8x^2-40x-1200$

Atividade 2

a. $x^2+4x=x(x+4)$

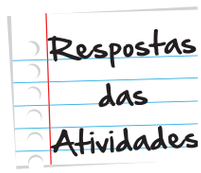
b. $x^2+10x+25=x^2+2.5.x+5^2=(x+5)^2$

c. $x^2-12x+36=x^2-2.6.x+6^2=(x-6)^2$

d. $4x^2-49=(2x)^2-7^2=(2x+7)(2x-7)$

e. $x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+(2.3)=(x+2)(x+3)$

f. $x^2-x-6=x^2+(-3+2)+(-3.2)=(x-3)(x+2)$



Atividade 3

a. $x^2 + 4x = x^2 + 2.2.x$. Dessa forma, devemos preencher a lacuna com $2^2 = 4$ ficando com $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

b. $x^2 - 14x = x^2 - 2.7.x$. Devemos preencher a lacuna com $7^2 = 49$ ficando com $x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$.

c. $4x^2 = (2x)^2$ e $25 = 5^2$. Devemos preencher a lacuna com $2.2x.5 = 20x$ ficando com $4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$.

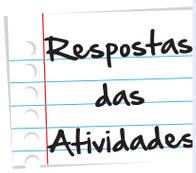
d. $x^2 - 2x = x^2 - 2.1.x$. Devemos preencher a lacuna com $1^2 = 1$ ficando com $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

e. $12x = 2.2x.3$ e $9 = 3^2$. Devemos preencher a lacuna com $(2x)^2 = 4x^2$ ficando com $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$.

Atividade 4

a. $x^2 + 3x = x^2 + 2.\frac{3}{2}x$. Devemos preencher a lacuna com $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ficando com $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$.

b. $x^2 - 7x = x^2 - 2.\frac{7}{2}x$. Devemos preencher a lacuna com $\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ ficando com $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$.



Atividade 5

a. $x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x = -16$ (para completar quadrado no primeiro membro, devemos somar 25 a ambos os membros)

$$x^2 - 10x + 25 = -16 + 25$$

$$(x-5)^2 = 9$$

Como existem dois números cujo quadrado é 9 (3 e -3), temos duas possibilidades, $x - 5 = 3$ ou $x - 5 = -3$. Assim, as soluções são $x = 8$ ou $x = 2$.

b. $x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = -3$ (para completar quadrado no primeiro membro, devemos somar 1 a ambos os membros)

$$x^2 + 2x + 1 = -3 + 1$$

$$(x+1)^2 = -2$$

Como não existe número real cujo quadrado é -2, diremos que esta equação não possui solução real.

c. $x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 1$ (para completar quadrado no primeiro membro, devemos somar 9 a ambos os membros)

$$x^2 + 6x + 9 = 1 + 9$$

$$(x+3)^2 = 10.$$

Como existem dois números cujo quadrado é 10 ($\sqrt{10}$ e $-\sqrt{10}$), temos duas possibilidades, $x + 3 = \sqrt{10}$ ou $x + 3 = -\sqrt{10}$. Assim, as soluções são $x = -3 + \sqrt{10}$ ou $x = -3 - \sqrt{10}$.

d. $2x^2 + x - 1 = 0$ (dividindo todos os termos por 2)

$$x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$ (para completar quadrado no primeiro membro, devemos somar $\frac{1}{16}$ a ambos os membros)

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Como existem dois números cujo quadrado é $\frac{9}{16}$ ($\frac{3}{4}$ ou $-\frac{3}{4}$), temos duas possibilidades, $x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ou $x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$. Assim, $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$.

Atividade 6

1.

a. $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

b. $(x-3)^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 4x = 0$ (desenvolvendo-se o quadrado de $x-3$)

$x^2 - 10x + 9 = 0$ (somando-se os termos semelhantes)

Aplicando a fórmula para resolver a equação do 2º grau, temos que

$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$, ou seja,

$x = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ou $x = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

c. $7x^2 - \frac{1}{2} = 5 + \frac{3x}{2}$ (multiplicando-se todos os termos por 2)

$14x^2 - 1 = 10 + 3x$ (somando-se $-10 - 3x$ a ambos os membros)

$14x^2 - 1 - 10 - 3x = 0$ (somando-se os termos semelhantes)

$14x^2 - 3x - 11 = 0$

Aplicando a fórmula para resolver a equação do 2º grau, temos que

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.14.(-11)}}{2.14} = \frac{3 \pm \sqrt{9+616}}{28} = \frac{3 \pm \sqrt{625}}{28} = \frac{3 \pm 25}{28}$, ou seja,

$x = \frac{3+25}{28} = \frac{28}{28} = 1$ ou $x = \frac{3-25}{28} = \frac{-22}{28} = -\frac{11}{14}$.

d. $x^2 - \frac{3-x}{5} = \frac{x-9}{15}$ (multiplicando-se todos os termos por 15)

$15x^2 - 3(3-x) = x - 9$ (aplicando-se a propriedade distributiva)

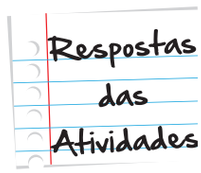
$15x^2 - 9 + 3x = x - 9$ (somando-se $-x + 9$ a ambos os membros)

$15x^2 - 9 + 3x - x + 9 = 0$ (somando-se os termos semelhantes)

$15x^2 + 2x = 0$ (colocando-se x em evidência)

$x(15x + 2) = 0$

Temos duas possibilidades: $x = 0$ ou $15x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{15}$



e. $x+\frac{24}{x-1}=3x-4$ (multiplicando-se todos os termos por $x-1$)

$x(x-1)+24=(3x-4)(x-1)$ (aplicando-se a propriedade distributiva)

$x^2-x+24=3x^2-3x-4x+4$ (somando-se os simétricos dos termos à direita a ambos os membros)

$x^2-x+24-3x^2+3x+4x-4=0$ (somando-se os termos semelhantes)

$-2x^2+6x+20=0$

Aplicando a fórmula para resolver a equação do 2º grau, temos que

$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4.(-2).20}}{2.(-2)}=\frac{-6\pm\sqrt{36+160}}{-4}=\frac{-6\pm\sqrt{196}}{-4}=\frac{-6\pm14}{-4}$, ou seja,

$x=\frac{-6+14}{-4}=\frac{8}{-4}=-2$ ou $x=\frac{-6-14}{-4}=\frac{-20}{-4}=5$.

2. Se –2 é raiz da equação $ax^2-4x-16=0\Rightarrow a(-2)^2-4(-2)-16=0$

$\Rightarrow 4a+8-16=0\Rightarrow 4a-8=0\Rightarrow 4a=8\Rightarrow a=2$.

Dessa forma, a equação é $2x^2-4x-16=0$. Aplicando a fórmula para resolver a equação do 2º grau, temos que

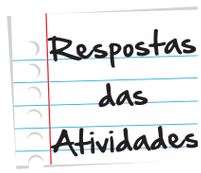
$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.2.(-16)}}{2.2}=\frac{4\pm\sqrt{16+128}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{144}}{4}=\frac{4\pm12}{4}$, ou seja,

$x=\frac{4+12}{4}=\frac{16}{4}=4$ ou $x=\frac{4-12}{4}=\frac{-8}{4}=-2$.

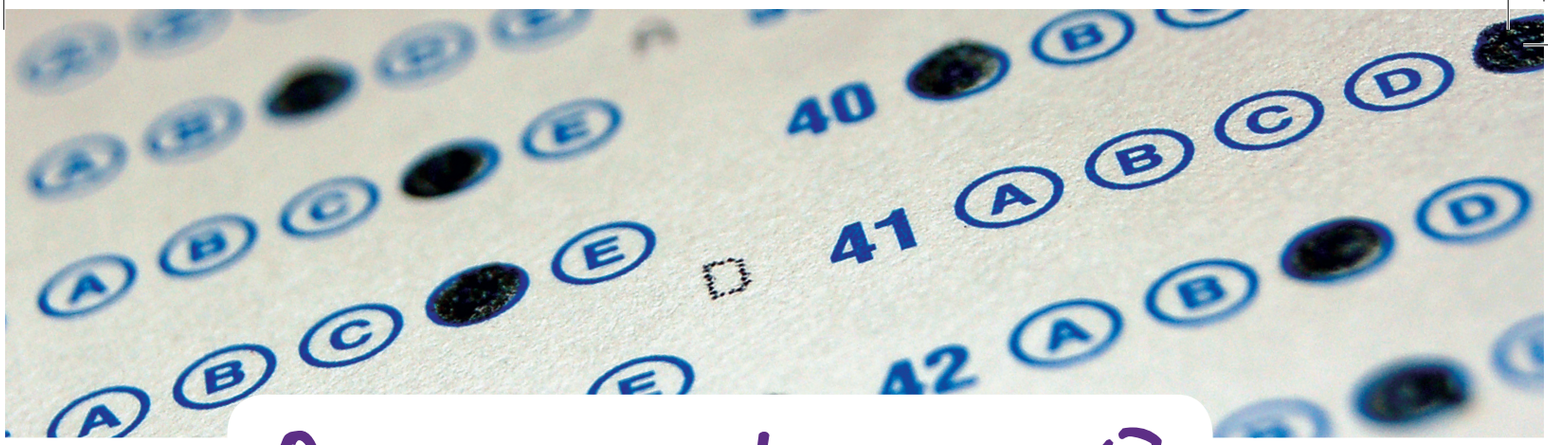
3. Para que a equação tenha uma raiz nula, uma das raízes deve ser $x=0$. Dessa forma, substituindo x por zero na equação $x^2+x+(p^2-7p)=0$, temos $0^2+0+(p^2-7p)=0$ $\Rightarrow p^2-7p=0$. Colocando-se p em evidência, temos $p(p-7)=0$. Dessa forma, $p=0$ ou $p=7$.

4. Em todas as equações devemos substituir x por –1 e por $\frac{1}{3}$ a fim de obter uma sentença matemática verdadeira. Dessa forma, vemos que a equação é $(x+1)(3x-1)=0$.

Atividade 7



1. Se x representa o número que somado ao seu quadrado, é igual a 20, temos que $x + x^2 = 20$. Essa equação pode ser escrita na forma $x^2 + x - 20 = 0$ cujas soluções são $x = -5$ ou $x = 4$. Como x não pode ser um número negativo, Maria tem 4 bombons.
2. Deseja-se saber para que valor de t temos que $t^2 - 7t = 18$. Essa equação é equivalente a $t^2 - 7t - 18 = 0$ cuja soluções são t = 9 e t = -2. Logo, às 9 horas a temperatura foi de 18ºC.
3. Se x representa a largura do quadro retangular, temos que o seu comprimento é $x + 5$. Se a área de um retângulo é calculada pelo produto da largura pelo comprimento, temos que $x(x + 5) = 150$. Essa equação pode ser escrita na forma $x^2 + 5x - 150 = 0$.
4. Se x representa o comprimento de um dos pedaços do arame, o outro pedaço mede $52 - x$ cm. Se formarmos um quadrado com um arame de comprimento x, a medida do lado desse quadrado é $\frac{x}{4}$ e sua área $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$. Da mesma forma, se formarmos um quadrado com um arame de comprimento $52 - x$, a medida do seu lado é $\frac{52-x}{4}$ e sua área $\left(\frac{52-x}{4}\right)^2 = \frac{(52-x)^2}{16}$. Se a soma das áreas desses quadrados é 97cm², teremos a equação $\frac{x^2}{16} + \frac{(52-x)^2}{16} = 97$, cujas soluções são 36 e 16. Logo os quadrados possuem lados de medidas 36 : 4 = 9 cm e 16 : 4 = 4 cm.
5. O inverso de $x + 1$ é $\frac{1}{x+1}$. Dessa forma, $\frac{1}{x+1} = x - 1$. Essa equação é equivalente a $x^2 - 2 = 0$ cujas soluções são $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$. Como x é positivo, $x = \sqrt{2}$.
6. Se x km/h é a velocidade média do segundo automóvel, a velocidade média do primeiro é $x + 30$ km/h. Se ambos percorrem 360 km, os tempos gastos pelos veículos para percorrer tal distância são, respectivamente, $\frac{360}{x}$ e $\frac{360}{x+30}$. Como o veículo mais rápido gasta duas horas a menos que o mais lento, temos que $\frac{360}{x+30} = \frac{360}{x} - 2$. Essa equação é equivalente a $x^2 + 30x - 5400 = 0$, cujas soluções são $x = 60$ ou $x = -90$. Logo, a velocidade do segundo automóvel é de 90km/h e a velocidade do primeiro é 60 + 30 = 90 km/h.



O que perguntam por aí?

1. (Banco de Questões da Avaliação Externa do Município do Rio de Janeiro) A figura a seguir representa o trinômio quadrado perfeito $x^2 + 6x + 9$.

3x	9
x^2	3x

A forma fatorada desta expressão algébrica é

a. $(x + 3)^2$.

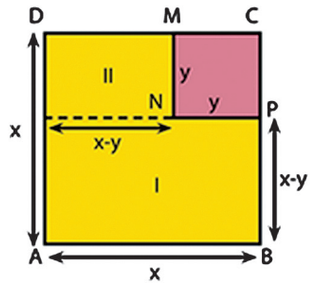
b. $(x – 3)^2$.

c. $3x (x^2 + 9)$.

d. $(x +3) (x – 3)$.

Comentário: Esta questão explora a temática de produtos notáveis com um enfoque algébrico. Você perceberá que a área do quadrado é de $x^2 + 2 (3x) +9$. Para calcular esta área, é necessário elevar ao quadrado o lado da figura que é (x+3). Logo a resposta será a alternativa (B).

2. Na figura abaixo, o lado do quadrado ABCD mede x e o lado do quadrado CMNP mede y. Observe e responda:



Indique o produto que fornece a área da Figura I.

Indique o produto que fornece a área da Figura II.

Solução: A questão propõe as diferentes formas de associar os produtos notáveis às representações geométricas.

$(x - y)\, x = x^2 - xy$

$(x-y)\, y = xy - y^2$

3. (Enem) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a. $V=10.000+50x-x^2$.

b. $V=10.000+50x+x^2$.

c. $V=15.000-50x-x^2$.

d. $V=15.000+50x-x^2$.

e. $V=15.000-50x+x^2$.

Solução: Se é dado um desconto de x centavos, temos que o preço de cada litro de combustível é 1,50-x.0,01 e que a quantidade de combustível vendida por dia é 10000+100x. O valor arrecadado é $V=(1,50-x0,01)(10000+100x)=15000+150x-100x-x^2=15000+50x-x^2$

4. O custo de uma produção, em milhares de reais, de x máquinas iguais é dado pela expressão $C(x) = x^2 - x + 10$. Se o custo foi de 52 mil reais, então, o número de máquinas utilizadas na produção foi

a. 6

b. 7.

c. 8.

d. 9.

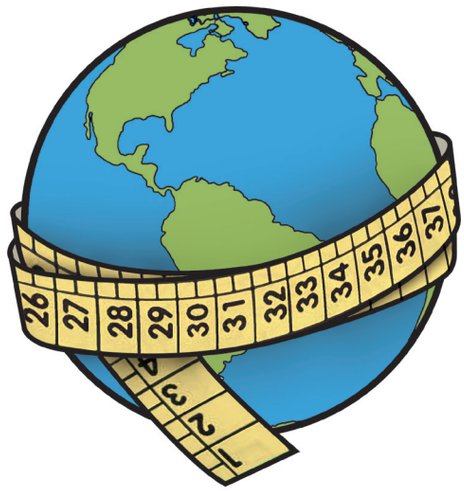
Solução: Queremos descobrir o valor de x de modo que C(x) seja igual a 52. Cabe aqui salientar que você pode supor que, nesse problema, C(x) = 52000. Porém, é importante lembrar que, no enunciado, C é dado em milhares de reais. Dessa forma, $52 = x^2 - x + 10$, equação que pode ser escrita como $x^2 - x - 42 = 0$. Fatorando o polinômio do 1º membro, teremos $(x - 7)(x + 6) = 0$, que nos dá como soluções x = 7 ou x = –6. Como, nesse caso, x não pode assumir valor negativo, a resposta é a letra B.

Introdução à Geometria

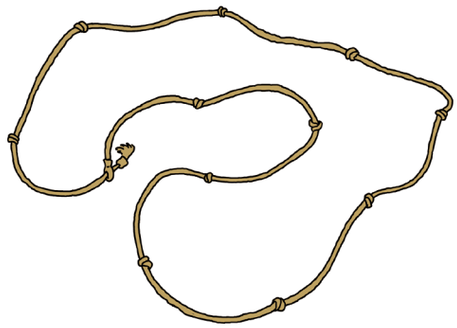
Para início de conversa...

Você já deve ter ouvido alguém falar a palavra geometria, ou até mesmo visto alguns objetos que apresentam uma "forma geométrica". Mas ao iniciar esta aula, quero lhe fazer uma pergunta. Você sabe o que quer dizer geometria?

A palavra geometria vem do grego e pode ser dividida em duas outras palavras: geo e metria. Como geo significa terra e metria significa medida, geometria quer dizer medida da terra.



A origem do nome remonta à antiguidade porque os povos antigos sempre se preocuparam em medir. Mediam as terras, a largura dos rios, a altura das estátuas, a quantidade de grãos que colhiam etc. No entanto, como naquele tempo não havia instrumentos para a medição, alguns povos usavam pedaços de cordas com nós para fazer suas medições. Isso mesmo! Eles estipulavam uma medida para a distância entre dois nós consecutivos e contavam quantas vezes aquele pedaço caberia no todo que estavam medindo.



Dentre os povos antigos que mais contribuíram para o desenvolvimento da matemática estão os gregos. Por volta de 300 a.C., viveu na Grécia um matemático chamado Euclides, que se tornou muito famoso por escrever livros sobre toda a Matemática que se conhecia à época. Seu maior trabalho se chama Os Elementos, um compêndio de 13 volumes, nos quais podemos encontrar as definições conhecidas na época - e que ainda hoje utilizamos. Euclides escreveu sobre os primeiros elementos e conceitos geométricos (o ponto, a reta e o plano), as figuras, as propriedades dessas figuras, ensinou a calcular área, volume e muitas coisas mais.

Multimídia

Os elementos de Euclides já estão em domínio público, e a parte dedicada à Geometria pode ser baixada, em português, no site do MEC. Ao contrário do que pode parecer, o texto em si é de fácil leitura e os conceitos são bastante familiares, principalmente se levarmos em conta que o livro foi escrito há mais de dois mil anos. Dê um pulinho lá e veja o que o Euclides tem a dizer! O endereço é http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf

E sabe o que é mais interessante? Desde aquele tempo, quando foram definidos os primeiros conceitos de geometria, este assunto não parou de ser estudado – e mais: deixou de ser interesse exclusivo dos matemáticos, atraindo a atenção de profissionais de várias outras áreas.

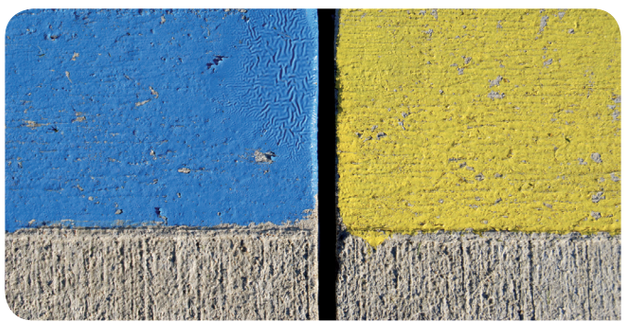


Figura 1: O pintor holandês Piet Mondrian usou, em grande parte de sua obra, formas geométricas de uma maneira muito semelhante à da figura acima. Os trabalhos de Mondrian podem ser apreciados online no site da Galeria Tate, do Reino Unido: http://www.tate.org.uk/art/artists/piet-mondrian-1651

Nesta aula, vamos iniciar nosso estudo sobre Geometria e veremos vários conceitos importantes, ensinados por Euclides já naquele tempo.

Objetivos de Aprendizagem

- Conhecer os entes geométricos primitivos: ponto, reta e plano.
- Definir reta, semirreta e ângulos.
- Reconhecer as posições entre duas retas em um plano.
- Resolver problemas utilizando retas paralelas cortadas por transversais.
- Reconhecer as figuras geométricas planas.
- Classificar polígonos, triângulos e quadriláteros.

Seção 1
Entes geométricos primitivos

A primeira pergunta que pode surgir é a seguinte: O que são entes geométricos primitivos?

Em uma análise geral, podemos dizer que são os elementos que formam a base para o estudo da geometria, são os fundamentos da geometria. Esses elementos são o ponto, a reta e o plano. Não há uma definição formal para eles, podemos reconhecê-los ou compreendê-los de forma intuitiva.

A partir dessas noções e das relações que podemos estabelecer entre elas, toda a geometria será construída. Essas relações têm nomes meio estranhos – axiomas e teoremas, por exemplo – mas são elas que nos permitem desenvolver toda a teoria relacionada com a geometria. Assim, quando encontrar com elas pelo nosso texto, fique tranquilo, pois são nossas aliadas!

Para nos referirmos a um ponto, vamos associar uma letra maiúscula de nosso alfabeto à sua representação geométrica, vejam na figura:

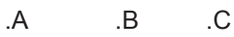


Figura 2: Pontos A, B e C

É importante observar que o ponto não tem dimensão, ou seja, não tem altura, largura ou comprimento.

Para nos referirmos a uma reta, utilizamos letras minúsculas de nosso alfabeto associadas à sua representação geométrica:

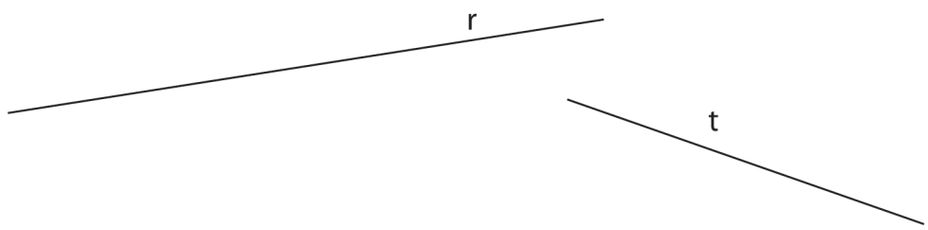


Figura 3: Retas r e t

Note que este desenho apenas representa a reta, geometricamente as retas são infinitas nos dois sentidos. Quanto às dimensões, a reta tem apenas uma dimensão: o comprimento.

Para nos referirmos a um plano, utilizamos uma letra do alfabeto grego associada à sua representação geométrica. Na figura, usamos a letra alfa (a).

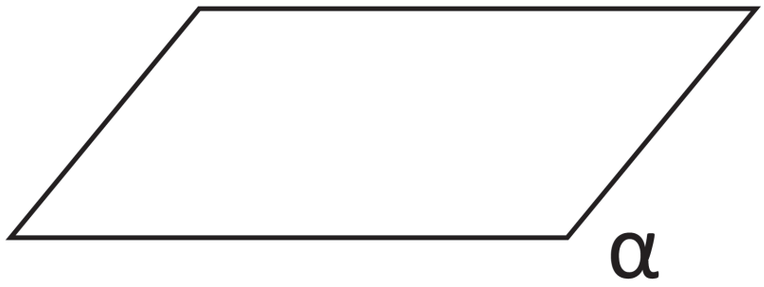


Figura 4: Plano α

Geralmente representamos um plano com um quadrilátero, porém, lembre-se, é uma representação: os planos são infinitos.

Observe a ilustração a seguir:

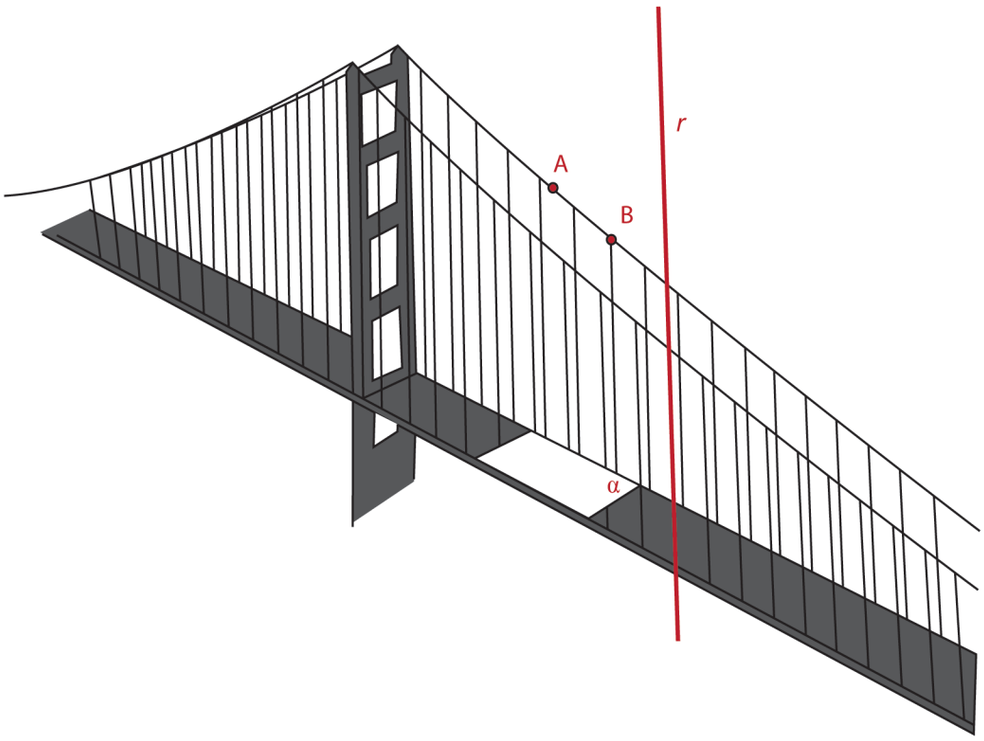


Figura 5: Ponte com pontos, retas e planos assinalados.

É muito fácil identificar os entes geométricos em nosso dia a dia. Por exemplo, na ilustração anterior, a estrada pode representar parte de um plano, as hastes de sustentação podem representar partes de retas e os nós de amarração são uma representação dos pontos.

Escreva em seu caderno quais elementos geométricos podem ser sugeridos por:

a. Uma linha de pipa esticada;

b. As estrelas no céu;

c. O tampo de uma mesa;

d. O vidro de uma janela;

e. O cabo de uma vassoura;

Anote suas respostas em seu caderno

Dos pontos às retas, das retas aos planos

Você já fez uma linha pontilhada no seu caderno alguma vez? Não? Então vamos fazer agora. Faça uma linha pontilhada, igual ao exemplo a seguir:

. . . . . .

Pense no que acontece se, entre dois, pontos você colocar outro ponto e, ainda, repetir esse procedimento infinitas vezes. O que teremos?

Isso mesmo, teremos a representação gráfica de uma reta! Podemos concluir então que uma reta é um conjunto infinito de pontos dispostos linearmente. Quando dois ou mais pontos pertencem a uma mesma reta, diremos que são pontos colineares.

Agora outra pergunta: e se colocarmos uma reta ao lado da outra infinitamente, sem mudar direção nem inclinação, do mesmo modo que fizemos com os pontos?

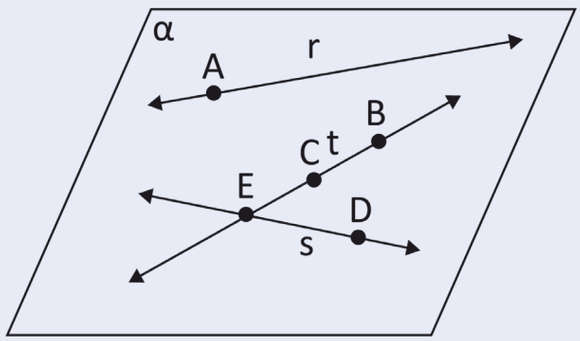
O que teremos?

Isso mesmo! Teremos a representação gráfica de um plano.

É importante lembrar sempre que uma reta tem infinitos pontos e que um plano tem infinitas retas. Assim, podemos dizer que a um plano pertencem infinitos pontos. Se duas ou mais retas estão contidas em um plano, diremos que essas retas são coplanares.

Considerando os pontos e as retas em um mesmo plano, conforme o desenho, responda:

Atividade 2



a. Quais pontos são colineares a C ?

b. As retas t e s são coplanares? Justifique.

c. Os pontos A e E são colineares ? Justifique.

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Retas, semirretas e segmentos de retas

Você já observou as linhas do seu caderno? Escolha duas linhas e faça diferentes medições da distância entre elas. Você verá que a medida é sempre a mesma. Se cada linha da folha de caderno representar uma reta, diremos que essas retas são paralelas. Observe o desenho a seguir:

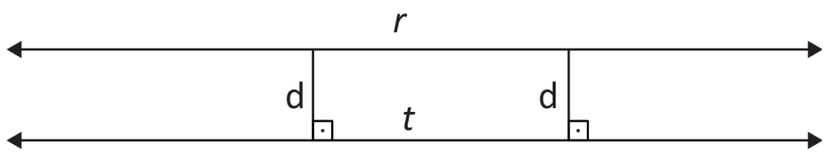


Figura 6: As retas r e t são paralelas, separadas por uma distância d

A distância d entre as retas r e t é sempre a mesma, assim, diremos que estas retas são paralelas.

E se as retas não forem paralelas? Neste caso temos duas opções:

1. Todos os pontos são comuns, isto é, as retas são coincidentes. Neste caso, diremos que r é coincidente a t ou r é igual a t

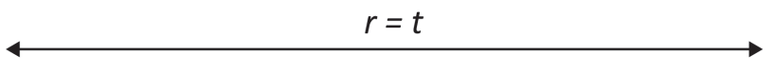


Figura 7: A reta r é coincidente à reta t

2. Existe apenas um ponto em comum, ou seja as retas são concorrentes. Neste caso, diremos que a reta r é concorrente à reta t, que a reta t é concorrente à reta r ou que ambas são concorrentes.

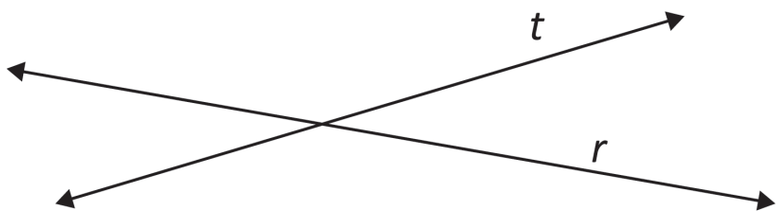


Figura 8: A reta r é concorrente à reta t

No que tange à nomenclatura, fazemos assim: quando duas retas são paralelas - por exemplo, a reta r e reta t - representaremos o paralelismo escrevendo r//t, que se lê a reta r é paralela à reta t. Se as mesmas retas r e t forem

concorrentes, representaremos a concorrência por r x t, ou seja, a reta r é concorrente à reta t. E, finalmente, se forem coincidentes, representaremos a coincidência escrevendo r=t, ou seja, a reta r é coincidente com a reta t.

Figura 9: Os trilhos de uma ferrovia são uma boa aproximação para retas paralelas, uma vez que se estendem por muitos quilômetros e se mantêm a uma distância constante um do outro.

Semirretas

Pense um pouco sobre a seguinte pergunta: é possível dividirmos uma reta ao meio? Se for possível, o que acontecerá quando fizermos essa divisão?

Bom, guardadas as devidas proporções, dividir uma reta pode ser algo bem parecido com cortar uma linha com a tesoura. No entanto, nosso maior problema seria definir o meio da reta, pois, se a reta é infinita, como poderíamos estabelecer exatamente onde é a metade do infinito? Complicado? Nem tanto.

Vamos fazer o seguinte, sem nos preocuparmos com a localização do meio da reta, vamos marcar um ponto P qualquer sobre ela:

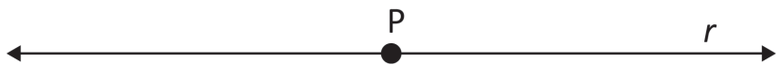


Figura 10: Reta r com um ponto P marcado sobre ela

Note que dividimos a reta em duas partes. Uma do ponto P para a direita e outra do ponto P para a esquerda. Como forma de orientação, vamos marcar mais dois pontos: A e B a uma mesma distância do ponto P.

Figura 11: Reta r com os pontos A, P e B

Agora ficou mais fácil: temos uma parte de P até B e outra parte de P até A, certo? A pergunta é: Qual é a maior? PA ou PB?

Independente do que possa parecer olhando para o desenho, PA e PB têm infinitos pontos. Lembre-se que uma reta é infinita para os dois lados, assim, não há como comparar o tamanho – não sabemos onde ela começa e termina, não é mesmo? Diremos então que ambas são infinitas.

Chamaremos de semirreta a cada uma das partes geradas pela divisão da reta. Assim, quando destacarmos um ponto qualquer de uma reta, ficarão definidas duas semirretas: a semirreta PB e a semirreta PA.

Depois dessa conversa sobre retas e semirretas, você pode estar se perguntado: como é que metade de algo infinito é, ainda, algo infinito? Como a metade de uma coisa tem o mesmo tamanho dessa coisa? Isso ocorre porque o infinito, para os matemáticos, é bastante diferente daquele infinito que usamos no dia-a-dia. Saiba mais sobre esse sofisticado conceito assistindo esse vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=Cen2gGh0gww

Segmento de reta

Se marcarmos dois pontos na reta, estaremos limitando uma parte dessa reta. A essa parte chamaremos de segmento de reta.

Veja o exemplo:

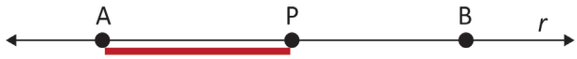


Figura 12: Reta r com o segmento PA destacado

A parte limitada pelos pontos P e A é um segmento de reta. Na figura, podemos destacar ainda os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{AB}$.

Quanto à nomenclatura, alguns comentários: segmentos contidos em uma mesma reta são chamados segmentos colineares. Na figura seguinte, por exemplo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares.

Figura 13: Reta r com os pontos A, B, C e D

Se dois segmentos tem uma extremidade em comum, são ditos consecutivos. Na parte à esquerda da figura seguinte, os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ são consecutivos. Na parte à direita, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos

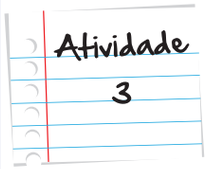
Figura 14: Segmentos consecutivos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$, à esquerda e $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, à direita.

Se dois segmentos colineares possuem apenas uma extremidade em comum – ou seja, são também consecutivos - são chamados de adjacentes. Na figura seguinte, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são adjacentes.

Figura 15: Reta r com os segmentos adjacentes $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$

Finalmente, segmentos que têm a mesma medida são chamado segmentos congruentes.

Observando a figura abaixo, podemos afirmar que:



a. ( ) $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são consecutivos.
b. ( ) $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são adjacentes.
c. ( ) $\overline{AB}$ e $\overline{BM}$ são adjacentes.
d. ( ) $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ não são colinares.

Anote suas respostas em seu caderno

Quanto à representação de retas, semirretas e segmentos, algumas considerações. Usaremos como base a figura a seguir. Acompanhe conosco!

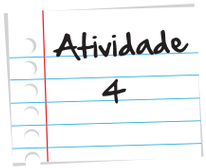
Figura 16: Reta r com os pontos A, P e B marcados sobre ela

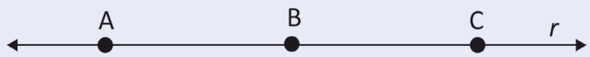
Retas são representadas por letras minúsculas – no caso, a letra r - e podem ser definidas por dois pontos, por exemplo, os pontos A e B. Podemos representar por $\overleftrightarrow{AB}$.

Representaremos as semirretas com o ponto inicial e o outro ponto que indica a direção, bem como uma seta colocada sobre as letras. Por exemplo, a semirreta PB é representada assim: $\overrightarrow{PB}$

Quanto aos segmentos, basta definir os limites do segmento (ponto de origem e ponto de extremidade) e colocar um traço sobre as letras que representam os pontos. O segmento AB é representado assim: $\overline{AB}$

É importante perceber que a reta, por ter infinitos pontos, nos permite definir sobre ela infinitas semirretas e infinitos segmentos.





Tomando como base a reta acima, defina:

a. Quantos e quais segmentos podemos definir

b. Quantos e quais semirretas podemos definir partindo do ponto B

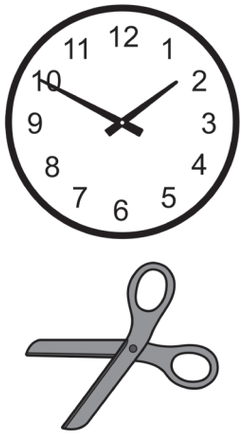
c. Quantas retas podem passar, pelos pontos A e C

d. Quantas retas podem passar pelo ponto B

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 3
Ângulos

Você já observou com atenção os ponteiros de um relógio? E as lâminas de uma tesoura?



Vamos considerar as lâminas da tesoura e os ponteiros do relógio como uma representação de duas semirretas que partem de um mesmo ponto, ou de uma mesma origem. Note que conforme os ponteiros se movimentam, cria-se um espaço entre eles. O mesmo acontece com as lâminas da tesoura. Vejam na figura a seguir

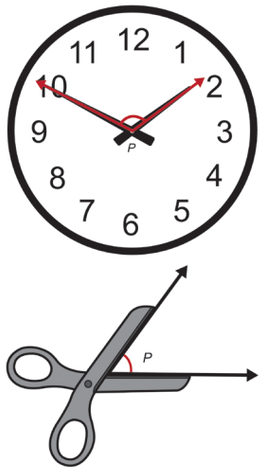


Figura 17: Lâminas da tesoura e ponteiros do relógio têm em comum o fato de formarem ângulos entre si. Na figura, os ângulos estão marcados em vermelho.

A esta abertura, representada pelo arco em vermelho, chamaremos ângulo. O ponto P, origem das semirretas, é chamado vértice.

Um ângulo é formado por duas semirretas (chamadas lados do ângulo) de mesma origem (vértice do ângulo) e pela região determinada entre estas semirretas. Note que quando traçamos duas semirretas de mesma origem, podemos ter dois ângulos.

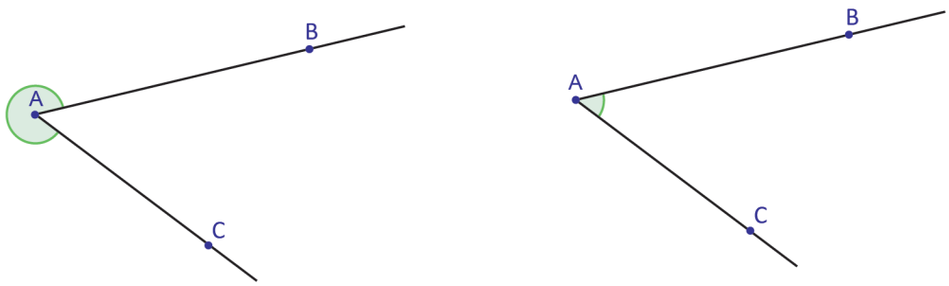


Figura 18: Semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e os dois ângulos formados entre elas

Quando não houver indicação de qual ângulo adotar, normalmente consideramos o menor ângulo. Para nomear os ângulos, podemos usar uma letra do alfabeto grego ou agrupar os nomes dos 3 pontos que constituem o ângulo, colocando o ponto do vértice como segunda letra e marcando-a com acento circunflexo. O ângulo da figura anterior seria o ângulo BÂC (ou CÂB).

Medindo os ângulos

Utilizaremos como unidade de medida dos ângulos o grau. Mas o que é um grau?

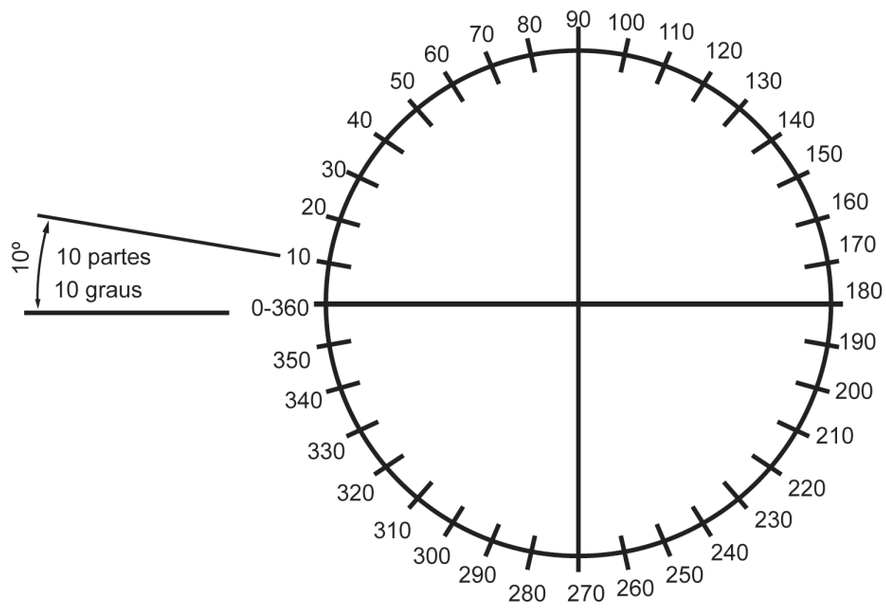


Figura 19: Circunferência dividida em 360 partes iguais

A figura anterior representa uma circunferência dividida em 360 partes iguais. Cada uma dessas partes é denominada grau. Dessa forma, vamos considerar que uma circunferência tem 360 graus. Representaremos a medida de um grau da seguinte forma:

1 grau = 1°

Para efetuar a medida dos ângulos podemos utilizar um instrumento chamado ***transferidor***.

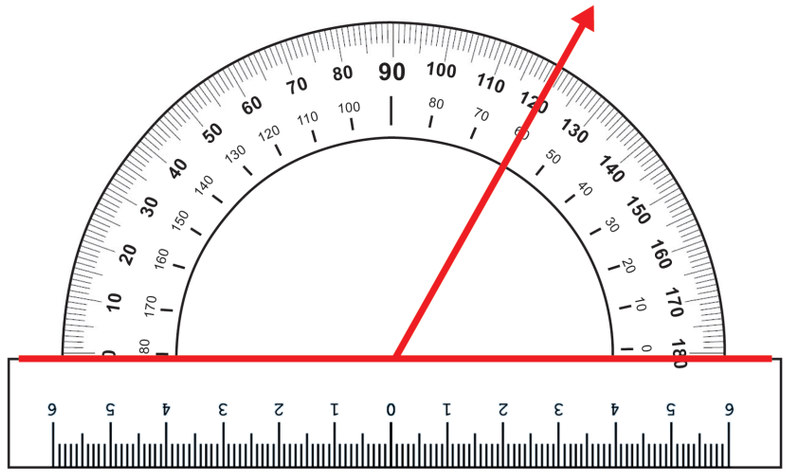


Figura 20: Transferidor com um ângulo marcado.

Faremos sempre as medições da direita para a esquerda. O centro do transferidor deve ser posicionado sobre o vértice e a linha base (em vermelho) sobre uma das semirretas que definem o ângulo. A outra semirreta vai indicar o tamanho desse ângulo. No exemplo da figura, temos um ângulo de 60° (usamos a escala interior do transferidor).

Para classificar os ângulos, são bastante úteis as seguintes considerações.

Quando dois ângulos tiverem medidas iguais, diremos que os ângulos são congruentes. Por exemplo, se sabemos que dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ dados têm a mesma medida, diremos que eles são congruentes e representaremos essa igualdade de medidas da seguinte forma $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Além disso,

Um ângulo de 90° é denominado ângulo reto.

- Se o ângulo tem medida menor que 90 ° é chamado ângulo agudo.
- Se o ângulo tem medida maior que 90 ° é chamado ângulo obtuso.
- Quando a soma de dois ângulos for igual a 90° , diremos que os ângulos são complementares.
- Quando a soma de dois ângulos for igual a 180° , diremos que os ângulos são suplementares.

Atividade 5

Classifique os ângulos quanto a serem retos, agudos ou obtusos:

a. 45°

b. 97°

c. 123°

d. 90°

e. 23°

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Dê o complementar de cada ângulo

a. 45°

b. 78°

c. 17°

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Dê o suplementar da cada ângulo

a. 23°

b. 165°

c. 90°

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Retas paralelas interceptadas por transversais

Por volta de 545 a. C., viveu na Grécia um matemático chamado Tales de Mileto. Ele é considerado como um dos sete sábios da antiguidade, visto que suas contribuições, tanto na Engenharia quanto na Filosofia e Astronomia, foram muito grandes. É curioso como Tales descobriu tantas coisas sem ter ao seu lado um computador, *internet* ou outra tecnologia. Suas únicas ferramentas de trabalho eram a régua e o compasso.

Tales descobriu, por exemplo, que num conjunto de linhas paralelas (que chamamos feixe de paralelas), interceptadas por retas transversais, existem algumas propriedades muito interessantes e também importantes. Aqui nesta unidade, iremos estudar as relações entre os ângulos formados quando uma reta transversal corta duas retas paralelas. Mais adiante, voltaremos a falar sobre o feixe de paralelas e as medidas dos segmentos obtidos quando esse feixe é cortado por duas ou mais transversais.

Observe a construção a seguir. São duas retas paralelas cortadas por outra reta transversal. Para facilitar, colocamos um transferidor marcando a medida do ângulo.

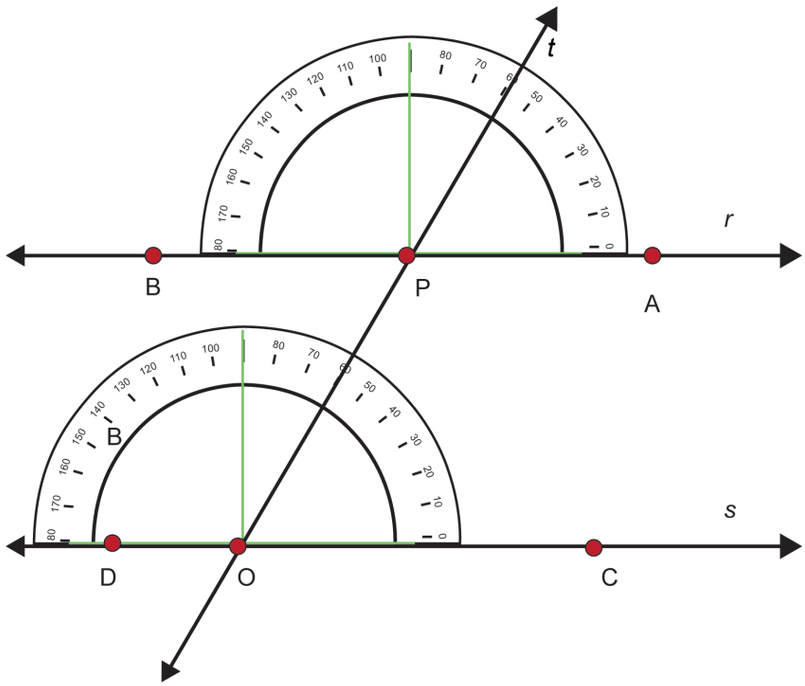


Figura 21: Duas retas paralelas, r e s, cortadas pela transversal t. Os transferidores estão posicionados nos vértices dos ângulos $A\hat{P}O$ e $C\hat{O}P$.

Você pode perceber que o ângulo formado pelas retas r e t é o mesmo ângulo formado pelas retas s e t. Isso somente é possível pelo fato de as retas r e s serem paralelas. Mas podemos saber mais!

Um ângulo raso tem 180°, certo? Assim, pelo desenho acima, o ângulo *CÔP* é suplemento do ângulo *PÔD* - isto é, a soma destes ângulos é 180°. Note que o mesmo acontece com os ângulos formados pelas retas r e t marcados no transferidor.

Para avançarmos ainda mais no estudo deste tópico, precisamos nos familiarizar com alguns nomes. Observe o desenho a seguir:

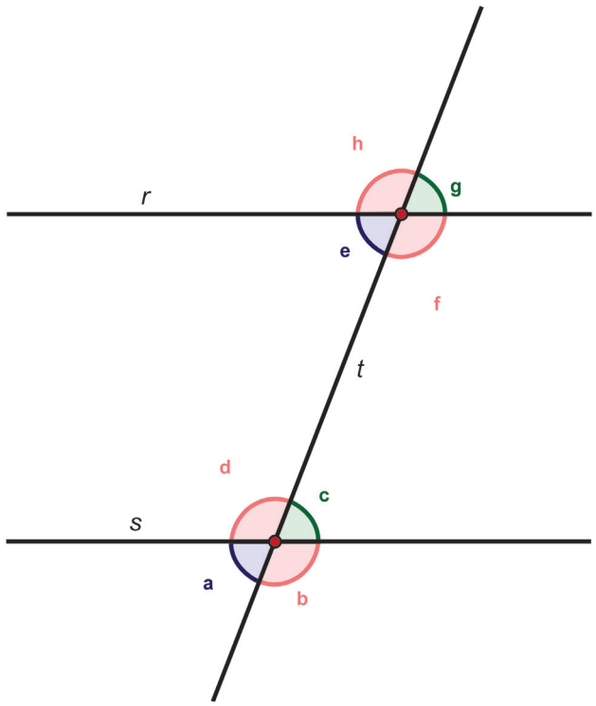


Figura 22: Duas retas paralelas cortadas por uma transversal, com ângulos marcados.

Acompanhe na figura anterior: os ângulos $\hat{g}$ e $\hat{c}$ são chamados ângulos correspondentes porque ocupam, relativamente, a mesma posição. O mesmo acontece com $\hat{h}$ e $\hat{d}$; $\hat{e}$ e $\hat{a}$; $\hat{f}$ e $\hat{b}$. Ângulos correspondentes tem sempre a mesma medida, isto é, são congruentes.

Ângulos opostos pelo vértice também têm a mesma medida. Por exemplo, os ângulos $\hat{g}$ e $\hat{e}$ são congruentes.

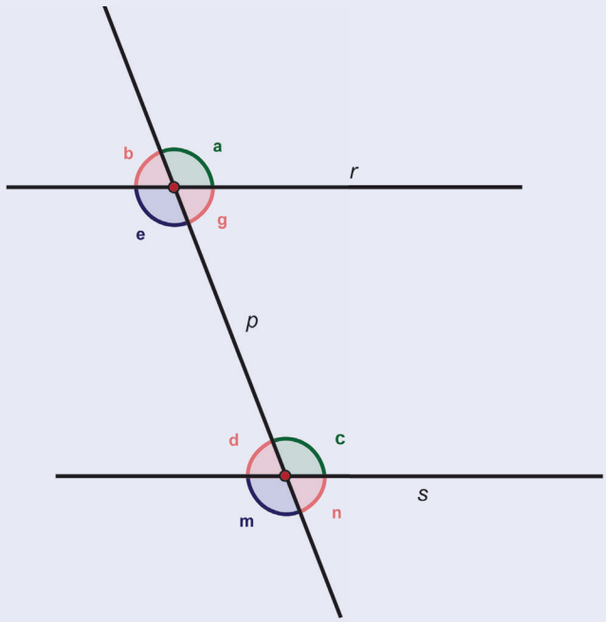
Os ângulos e $\hat{c}$ são congruentes. Estes ângulos são denominados alternos internos. O mesmo acontece com os ângulos alternos externos, por exemplo, $\hat{a}$ e$\hat{g}$.

Os ângulos $\hat{f}$ e $\hat{c}$ estão do mesmo lado da reta t e estão entre as retas r e s. Por isso, são chamados de colaterais internos. Ângulos colaterais internos são suplementares, isto é $\hat{f} + \hat{c} = 180°$.

O mesmo acontece com os ângulos colaterais externos, ou seja, ângulos que estão do mesmo lado da reta t, mas não estão entre as retas r e s. Estes ângulos também são suplementares. Por exemplo $\hat{a}$ e $\hat{h}$. Desta forma, $\hat{a}+\hat{h}=180°$.

Atividade 8

Dadas as retas r e s, cortadas pela reta transversal p, escreva quais são os ângulos pedidos:



a. Ângulos correspondentes.

b. Ângulos alternos internos.

c. Ângulos alternos externos.

d. Ângulos colaterais internos.

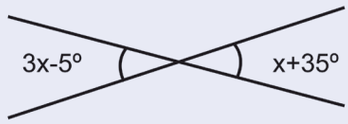
e. Ângulos colaterais externos.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Resolva os problemas:

a. Observando a figura, podemos afirmar que x é igual a:



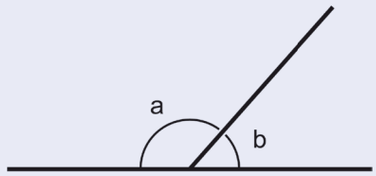
a. 15º

b. 25º

c. 18º

d. 20º

b. Na figura, temos a = 5b. Então:



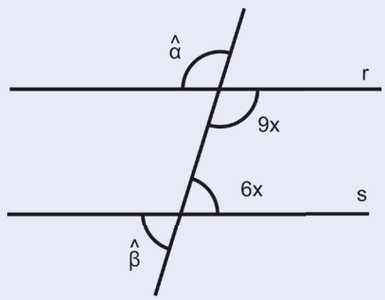
a. ( ) a = 120° e b = 24°

b. ( ) a = 150° e b = 30°

c. ( ) a = 160° e b = 32°

d. ( ) a = 100° e b = 20°

c. Se r é paralela a s, então $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ medem, respectivamente:



a. 120º e 60º

b. 100º e 80º

c. 108º e 72º

d. 150º e 30º

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 5
Poligonos

De uma forma geral, podemos chamar de polígono a toda forma geométrica plana formada por segmentos de retas e cujo contorno é fechado. Esta palavra tem origem grega, sendo formada por duas outras palavras: poly (muitos) e gon (ângulo). Muitos ângulos implicam em muitos lados.

Outro artista plástico a utilizar formas geométricas em seu trabalho é o pintor paulista Luiz Sacilotto. Visite o site do artista, em http://www.sacilotto.com.br/, e veja a quantidade de situações em que o artista usa figuras fechadas formadas por segmentos de retas (particularmente na seção que armazena as obras na década de 1980). Independente do número de lados de cada figura (tem que ter no mínimo três, é claro...), elas recebem o nome polígono.

Multimídia

Nomenclatura dos polígonos

O nomes dos polígonos são dados de acordo como o número de ângulos (ou lados) que eles possuem:

- 3 ângulos ou 3 lados – Triângulo.
- 4 lados – Quadrilátero.
- 5 lados – Pentágono.
- 6 lados – Hexágono.
- 7 lados – Heptágono.
- 8 lados – Octógono.
- 9 lados – Eneágono.
- 10 lados – Decácono.

Se os polígonos tiverem todos os lados e ângulos iguais, diremos que são polígonos regulares. A figura seguinte representa um hexágono regular, pois tem os 6 lados iguais e os 6 ângulos iguais. Os polígonos regulares têm propriedades especiais e muito interessantes. Tão especiais e tão interessantes que, mais adiante no material, nos dedicaremos exclusivamente a eles. Quer saber quais são? Aguarde só mais um pouquinho – a espera vai valer a pena!

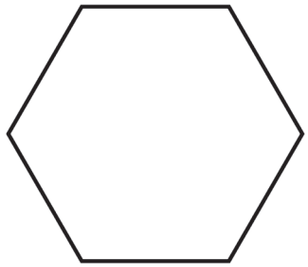
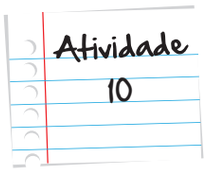


Figura 23: Hexágono regular com ângulos internos destacados

Quanto à classificação, podemos dividir os polígonos em dois grupos: convexos e não convexos

Convexos – O polígono será convexo se todos os segmentos com as extremidades internas ao polígono tiverem todos os seus pontos também internos ao polígono

Não convexo – O polígono será não convexo se existir um segmento de reta com os extremos internos ao polígono, mas com algum ponto do segmento fora do polígono.



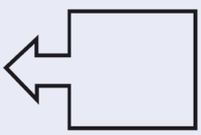
Identifique cada figura como sendo polígono ou não polígono, em caso de ser polígono, classifique quanto ao número de lados.

a.

b.

c.

d.

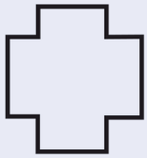


Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 13

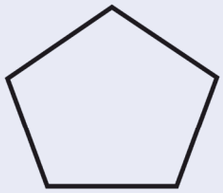
Identifique cada polígono como sendo não convexo ou convexo:

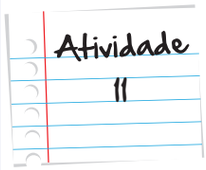
a.



b.

c.





Anote suas respostas em seu caderno

Triângulos

Como vimos na nomenclatura de polígonos, o triângulo é um polígono de três lados.

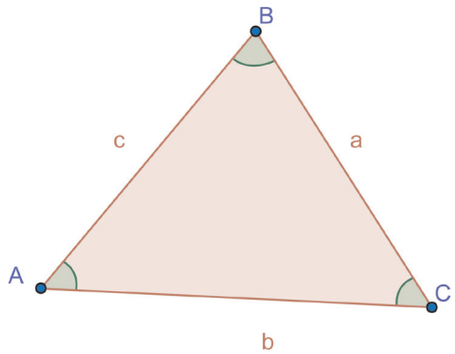


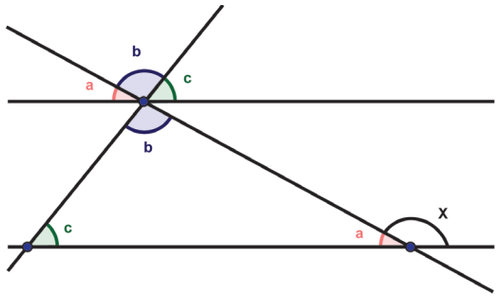
Figura 24: Triângulo ABC

Os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ são chamados lados do triângulo, os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos internos do triângulo e os pontos A, B e C são os vértices do triângulo. Além disso, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Quer saber como chegamos a essa conclusão sobre a soma dos ângulos internos? Veja o boxe a seguir.

Saiba Mais

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°

Observe no desenho que os ângulos em azul são opostos pelo vértice, sendo assim, têm a mesma medida. Os ângulos em verde são correspondentes, sendo assim congruentes. O mesmo acontece com os ângulos em vermelho.



Assim, podemos escrever que $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^o$

Assim, concluímos que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°.

Desta conclusão decorre também que em qualquer vértice do triângulo, o ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos opostos.

Os triângulos podem ser classificados de duas formas: quanto às medidas de seus lados e quanto às medidas de seus ângulos.

No que diz respeito às medidas dos seus lados, eles podem ser equiláteros, isósceles ou escalenos. Veja na figura seguinte

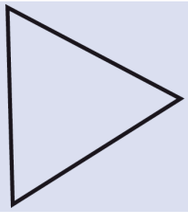
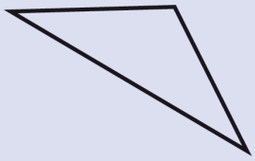
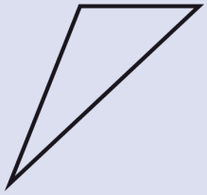
Equilátero	Isósceles	Escaleno
		
Possui os três lados iguais	Possui pelo menos dois lados iguais	Possui os três lados diferentes

Figura 25: Classificação de triângulos de acordo com os lados

Quanto às medidas dos seus ângulos, podem ser retângulos, acutângulos ou obtusângulos. Novamente, acompanhe na figura a seguir.

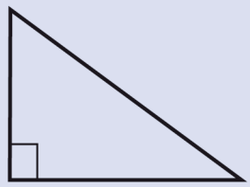
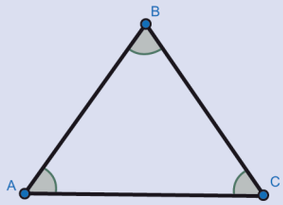
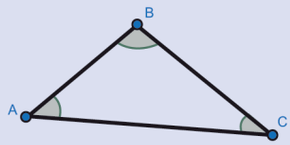
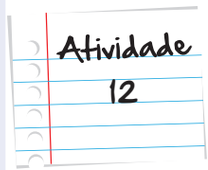
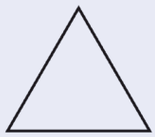
Retângulo	Acutângulo	Obtusângulo
		
Possui um ângulo reto	Possui todos os ângulos internos agudos	Possui um ângulo interno obtuso

Figura 26: Classificação de triângulos de acordo com os ângulos

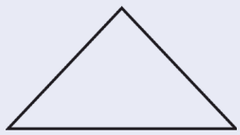


Com a utilização de uma régua, classifique os triângulos abaixo quanto à medida dos seus lados:

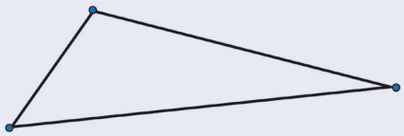
a.



b.



c.

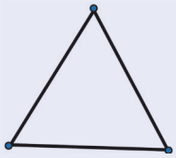


Anote suas respostas em seu caderno

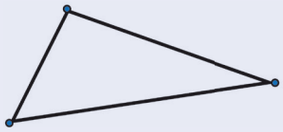
Atividade 13

Utilizando um transferidor, verifique e classifique os triângulos abaixo quanto aos seus ângulos:

a.



b.



c.

Anote suas respostas em seu caderno

Quadriláteros

Como já vimos anteriormente, quadrilátero é o nome dado ao polígono de quatro lados.

Observe a representação do quadrilátero a seguir:

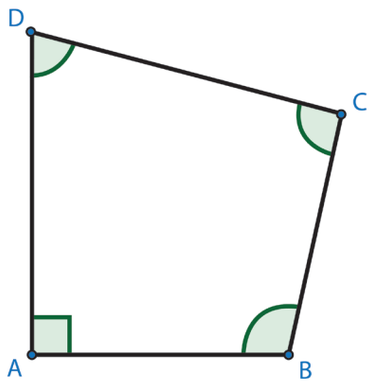


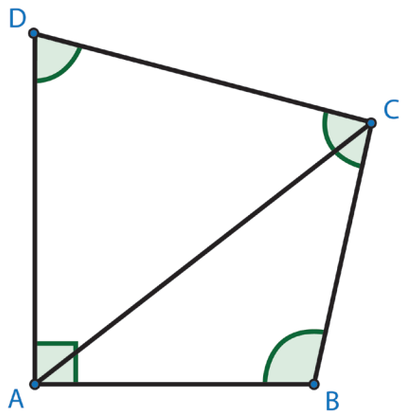
Figura 27: Quadrilátero ABCD

Os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{AD}$ são chamados de lados do quadrilátero. Os ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$ são os ângulos internos do quadrilátero. Os pontos A, B, C e D são os vértices do quadrilátero. Além disso, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Quer saber como chegamos a essa conclusão? Leia o boxe a seguir

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°

Observe que, ao dividirmos o quadrilátero com uma diagonal, estamos na verdade construindo dois triângulos. No caso da figura, os triângulos DABC e DCDA. É importante também perceber que os ângulos $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$ do quadrilátero serão divididos em duas partes e cada uma dessas partes irá compor um triângulo. No caso, o ângulo $D\hat{A}B$ será dividido nos ângulos $D\hat{A}C$ (do triângulo superior) e $C\hat{A}B$ (do triângulo inferior), de forma que $D\hat{A}B = D\hat{A}C + C\hat{A}B$. Mesma coisa para o ângulo $D\hat{C}B$.

Saiba Mais



Vimos anteriormente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Como a soma de todos os ângulos dos triângulos é igual à soma de todos os ângulos do quadrilátero, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero será 180° + 180° = 360°.

Diagonal de um polígono convexo

Chamaremos diagonal ao segmento que une dois vértices não consecutivos de um polígono.

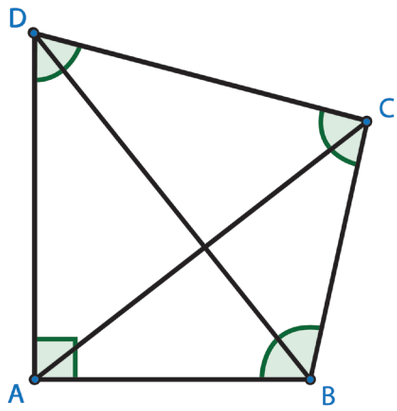


Figura 28: Quadrilátero ABCD com as duas diagonais traçadas

O quadrilátero ABCD tem duas diagonais, a saber: AC e BD. O número de diagonais de um polígono é dado pela equação $d = \frac{n.(n-3)}{2}$, onde n é o número de lados do polígono convexo.

Quadriláteros Notáveis

Vamos destacar alguns quadriláteros, a saber, os paralelogramos, os retângulos, os losangos, os quadrados e os trapézios.

Todo quadrilátero que possui dois lados opostos e congruentes é um paralelogramo.

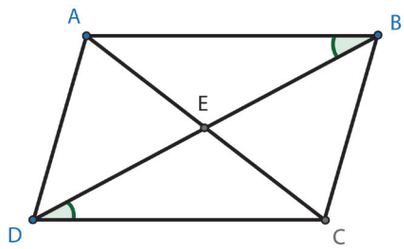


Figura 29: Paralelogramo ABCD com as duas diagonais traçadas

Sobre os paralelogramos podemos destacar as seguintes propriedades:

- Em qualquer paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.
- Em qualquer paralelogramo, os lados opostos são congruentes.
- Em qualquer paralelogramo, as diagonais se cortam ao meio.

Um caso particular do paralelogramo é o retângulo. Quando os quatro ângulos do paralelogramo são congruentes, ou seja, todos medem 90°, teremos um retângulo. Neste caso, as diagonais do paralelogramo são congruentes.

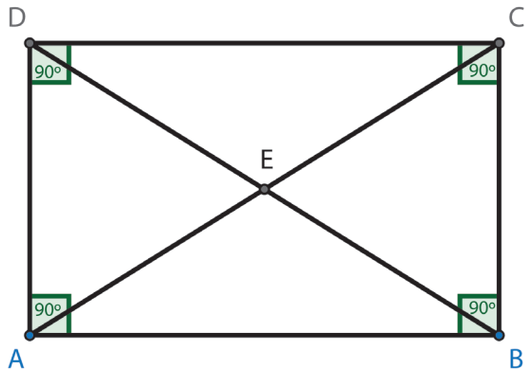


Figura 30: Retângulo ABCD com as duas diagonais traçadas

Outro caso particular do paralelogramo é o losango. Observe que ele mantém as propriedades de um paralelogramo, ou seja, os ângulos opostos são congruentes, os lados opostos são congruentes e as diagonais cortam-se ao meio. A característica que define e diferencia o losango é a perpendicularidade entre as diagonais. Portanto, todo paralelogramo que tem as diagonais perpendiculares é um losango.

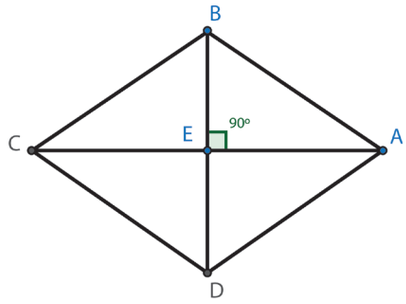


Figura 31: Losango ABCD com as duas diagonais traçadas

De todos os paralelogramos, talvez o mais interessante seja o quadrado. Afinal, todo quadrado é paralelogramo, é retângulo e também é losango, pois tem todas as propriedades inerentes a estas figuras – e mais algumas!

Podemos relacionar as propriedades do quadrado:

- Suas diagonais são congruentes e cortam-se no ponto médio das diagonais e são perpendiculares.
- Seus lados são congruentes.
- Seus ângulos são congruentes.

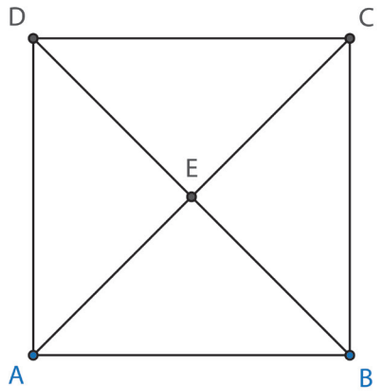


Figura 31: Quadrado ABCD com as duas diagonais traçadas

Multimídia

Para reforçar seu conhecimento sobre quadrados e quadriláteros em geral, acesse o site http://www.youtube.com/watch?v=NCeL6wFFHXk e acompanhe as duas personagens na confecção de uma colcha cuja estampa é formada exclusivamente por figuras geométricas. O vídeo é bem interessante, vale a pena conferir!

Já o trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos. Podemos classificar os trapézios em isósceles, retângulo e escaleno.

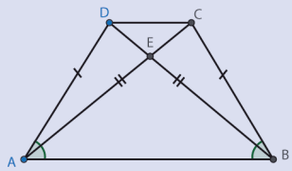
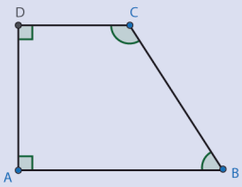
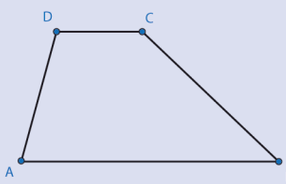
Trapézio Isósceles	Trapézio retângulo	Trapézio escaleno
		

Figura 32: Três tipos de trapézios.

No trapézio isósceles, os ângulos da base são congruentes e as diagonais são congruentes, além dos lados não paralelos. No trapézio retângulo, dois ângulos, adjacentes às bases, são retos. Já o trapézio escaleno não tem regularidades que mereçam destaque.

Atividade 14

Classifique cada afirmativa como Verdadeira (V) ou falsa (F).

a. Toda figura com quatro lados iguais é um quadrsado.

b. Todo quadrado também é um retângu.lo

c. Todo paralelogramo é um retângulo.

d. Todo trapézio tem pelo menos um ângulo reto.

e. A soma dos ângulos internos do trapézio é maior que a soma dos ângulos Internos do retângulo.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 15

Em todo losango, as diagonais:

a. são perpendiculares entre si;

b. são paralelas;

c. têm a mesma medida;

d. são coincidentes.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 16

Dado o quadrilátero seguinte, o valor de x é:

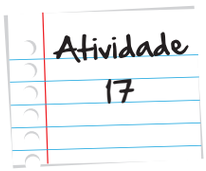
a. 36°

b. 60°

c. 15°

d. 30°

Anote suas respostas em seu caderno



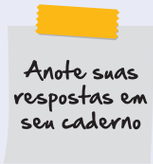
Num trapézio, as medidas dos ângulos internos são dados por x + 20°, 2x, 2x + 20° e 3x. As medidas desses ângulos são:

a. 50°, 60°, 80° e 90°

b. 60°, 80°, 100° e 120°

c. 70°, 100°, 120° e 150°

d. 65°, 90°, 110° e 135°



Veja ainda

No endereço http://www.uff.br/cdme/jct/jct-html/jct-br.html, você pode acessar um jogo sobre a classificação dos triângulos. A única exigência é ter o software Java instalado. Como este software é utilizado por uma grande quantidade de aplicativos e páginas, é muito provável que você já o tenha na sua máquina.

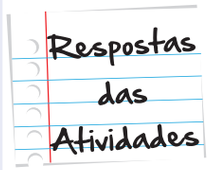
Resumo

- Os entes geométricos primitivos são o ponto a reta e o plano.
- O ponto é representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.
- A reta é representada por uma letra minúscula do nosso alfabeto.
- As retas são infinitas e contém infinitos pontos.
- Os planos são infinitos e contém infinitas retas e pontos.
- As semiretas são formadas pela divisão de uma reta em duas partes por um ponto.
- A abertura formada por duas semirretas é chamado de ângulo.
- Os ângulos são medidos em graus.
- Ângulos de mesma medida são chamados de ângulos congruentes.
- Ângulos opostos pelo vértice tem a mesma medida.

- Ângulos suplementares são os ângulos cuja soma é igual a 180° .
- Ângulos complementares são ângulos cuja soma é 90° .
- Ângulos colaterais internos são suplementares.
- Ângulos colaterais externos são suplementares.
- Ângulos alternos internos são congruentes.
- Ângulos alternos externos são congruentes.
- Polígono é toda forma geométrica fechada e plana, formado por segmentos de reta.
- Um triângulo pode ser classificado em relação ao tamanho de seus lados como equilátero (três lados iguais), isósceles (dois lados iguais) ou escaleno (três lados diferentes).
- Um triângulo pode ser classificado em relação ao tamanho de seus ângulos como acutângulo (três ângulos agudos), retângulo (um ângulo reto) ou obtusângulo(um ângulo obtuso).
- Os quadriláteros notáveis são: quadrado (quatro lados e quatro ângulos congruentes, retângulo (lados opostos congruentes e quatro ângulos congruentes), paralelogramo (lados opostos congruentes), losango (quatro lados congruentes), trapézio (exatamente um par de lados paralelos).
- Um trapézio pode ser classificado em Isósceles, retângulo, escaleno.

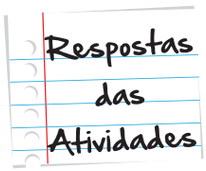
Atividade 1

a. Lembra uma reta.
b. Pontos em um plano.
c. Um plano.
d. Um plano.
e. Uma reta.



Atividade 2

a. São colineares a C os pontos B e E.
b. Sim, pois as retas t e s estão contidas dentro do mesmo plano.
c. Não. Pois pertencem a retas diferentes.



Atividade 3

a. Falso. Não há ponto em comum.

b. Falso. Precisa ter um ponto em comum.

c. Verdadeiro. O ponto B é comum a ambos os segmentos.

d. Falso. Os segmentos estão sobre a mesma reta.

Atividade 4

a. 3 segmentos. AB, AC, BC.

b. 2 semirretas. BC, BA

c. Dois pontos definem uma única reta.

d. Por um ponto podem passar infinitas retas.

Atividade 5

a. Agudo.

b. Obtuso.

c. Obtuso.

d. Reto.

e. Agudo.

Atividade 6

a. $90^0 - 45^o = 45^o$

b. $90^0 - 78^o = 12^o$

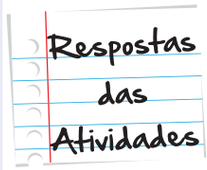
c. $90^o - 17^o = 73^o$

Atividade 7

a. $180^o - 23^o = 157^o$

b. $180^\circ - 165^o = 15^o$

c. $180^o - 90^o = 90^o$



Atividade 8

a. Ângulos correspondentes: $\hat{c}$ e $\hat{g}$; $\hat{d}$ e $\hat{h}$; $\hat{a}$ e $\hat{e}$; $\hat{b}$ e $\hat{f}$

b. Ângulos alternos internos: $\hat{c}$ e $\hat{e}$; $\hat{d}$ e $\hat{f}$

c. Ângulos alternos externos: $\hat{a}$ e $\hat{g}$; $\hat{b}$ e $\hat{h}$

d. Ângulos colaterais internos: $\hat{c}$ e $\hat{f}$; $\hat{d}$ e $\hat{e}$

e. Ângulos colaterais externos: $\hat{b}$ e $\hat{g}$; $\hat{a}$ e $\hat{h}$

Atividade 9

a. $3x - 5^\circ = x + 35^\circ \therefore 3x - x = 35^\circ = 5^\circ \therefore 2x = 40^\circ \therefore x = 20^\circ$

Letra d.

b. $a + b = 180 \therefore 5b + b = 180 \therefore 6b = 180 \therefore b = 30$. Como $a = 5b$, $a = 5.30 = 150$;

$a = 150$ e $b = 30$. Letra b.

c. $\alpha = 9x$ e $\beta = 6x$. Como $9x + 6x = 180^\circ$, teremos $15x = 180^\circ \therefore x = 12^\circ$

$\alpha = 9x \therefore \alpha = 9.12^\circ \therefore \alpha = 108^\circ$

$\beta = 6x \therefore \beta = 6.12^\circ \therefore \beta = 72^\circ$

Letra c.

Atividade 10

a. Não.

b. Sim, 5 lados.

c. Não.

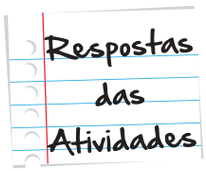
d. Sim, 11 lados.

Atividade 11

a. Não convexo.

b. Convexo.

c. Convexo.



Atividade 12

a. Triângulo escaleno.

b. Triângulo equilátero.

c. Triângulo isósceles.

Atividade 13

a. Obtusângulo.

b. Acutângulo.

c. Retângulo.

Atividade 14

a. FALSO.

b. VERDADEIRO.

c. FALSO.

d. FALSO.

e. FALSO.

Atividade 15

a. São perpendiculares entre si.

Atividade 16

$5x + 5x + x + x = 360^o$

$12x = 360^o$

$x = 30^o$

Letra d.

Atividade 17

$x + 20° + 2x + 2x + 20° + 3x = 360°$

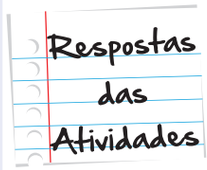
$8x + 40° = 360° \therefore 8x = 320° \therefore x = 40°$

$x + 20° = 60°$

$2x = 80°$

$2x+20° = 100°$

$3x = 120°$



Referências

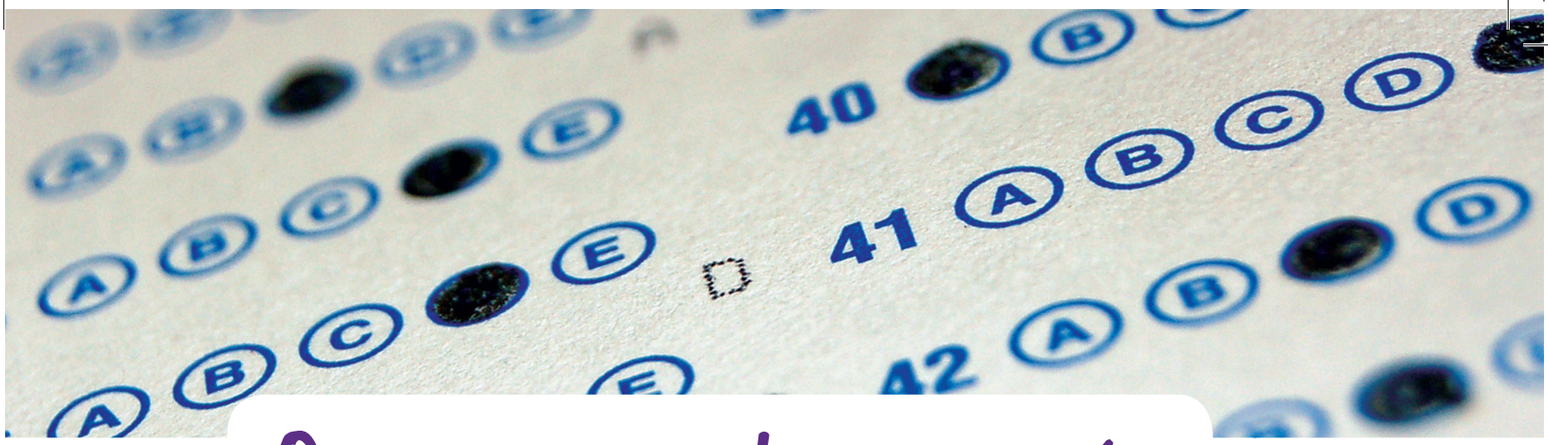
Imagens

- http://www.sxc.hu/photo/475767

- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=862610

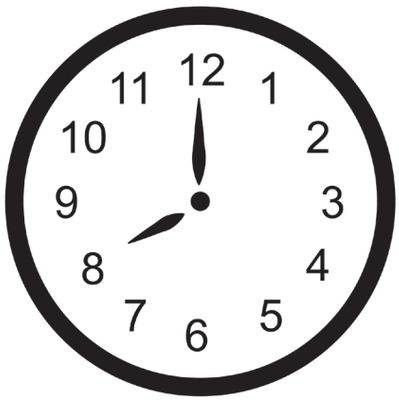
- http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1433371

- http://www.sxc.hu/photo/517386



O que perguntam por aí...

1. (SAERJ) O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 8 horas é:



(A) agudo

(B) obtuso

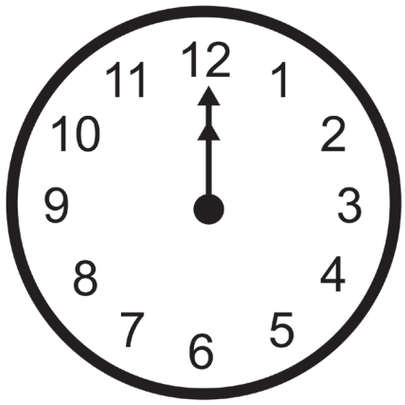
(C) reto

(D) raso

RESPOSTA: Letra B

A questão é de aplicação do conceito de nomenclatura para ângulos em objetos do cotidiano. A partir da questão é possível também o reconhecimento da determinação de volta completa na circunferência e demonstração de que a cada hora teremos um ângulo diferente entre os ponteiros.

2. Observe os ponteiros nesse relógio:



Decorridas 3 horas, qual é o ângulo formado pelos ponteiros?

(A) 15°

(B) 45°

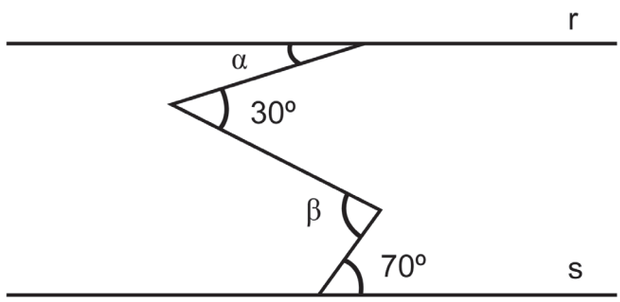
(C) 90°

(D) 180°

RESPOSTA: Letra C

A questão apresentada tem como objetivo compreender a ideia de ângulo como mudança de direção, o que também leva a compreensão de que se uma circunferência completa tem valor de 360° e equivale a um período de 12 horas, podemos concluir que cada hora tem 30°. Como o enunciado fala na passagem de 3 horas, concluímos que o ângulo é de 90°.

3. Na figura a seguir tem-se as retas r e s, paralelas entre si, e os ângulos assinalados têm medidas, em graus. Nessas condições, α + β é igual a:



a. 50°

b. 70°

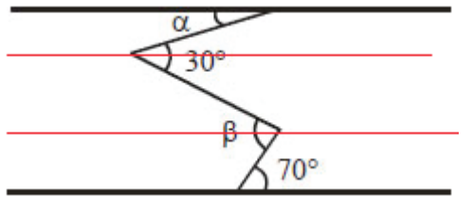
c. 100°

d. 110°

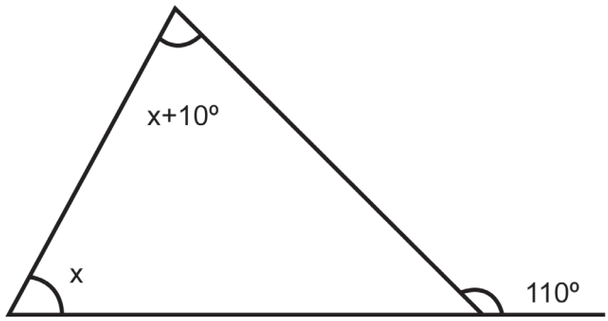
e. 130°

RESPOSTA: Letra C

A questão trabalha com o conceito de retas paralelas cortadas por uma transversal, com aplicação imediata das propriedades. Considerando que podemos traçar mais duas paralelas, ficamos então com o ângulo de 30° e β divididos em dois, ficando assim entre essas retas com dois ângulos alternos internos que são congruentes. Então temos:



4. (SAERJ) Observe o triângulo a seguir.



O valor de x é

(A) 110°

(B) 80°

(C) 60°

(D) 50°

RESPOSTA: Letra D

A questão proposta leva o aluno a reconhecer a soma dos ângulos internos de um triângulo e a identificar a propriedade de um ângulo externo sendo igual a de dois internos não adjacentes.

$x + x + 10 = 110°$

$2x = 100°$

$x = 50°$

ou

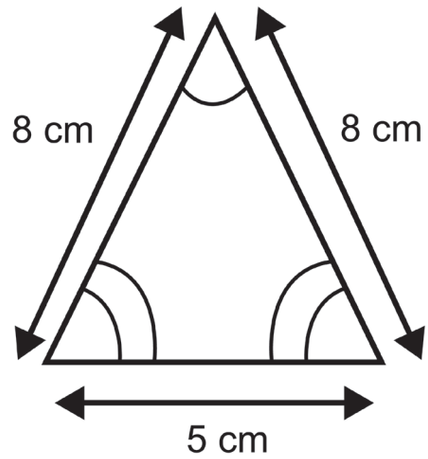
$y \quad 110° = 180°$

$y = 70°$

$x + x + 10° + 70° = 180°$

$x = 50°$

5. (SAEB) A professora desenhou um triângulo no quadro.



Em seguida, fez a seguinte pergunta: –– "Se eu ampliar esse triângulo em 3 vezes, como ficarão as medidas de seus lados e de seus ângulos?"

Alguns alunos responderam:

Fernando: –– "Os lados terão 3 cm a mais cada um. Já os ângulos serão os mesmos."

Gisele: –– "Os lados e ângulos terão suas medidas multiplicadas por 3."

Marina: –– "A medida dos lados eu multiplico por 3 e a medida dos ângulos eu

mantenho as mesmas."

Roberto: –– "A medida da base será a mesma (5 cm), os outros lados eu multiplico por 3 e mantenho a medida dos ângulos."

Qual dos alunos acertou a pergunta da professora?

(A) Fernando

(B) Gisele

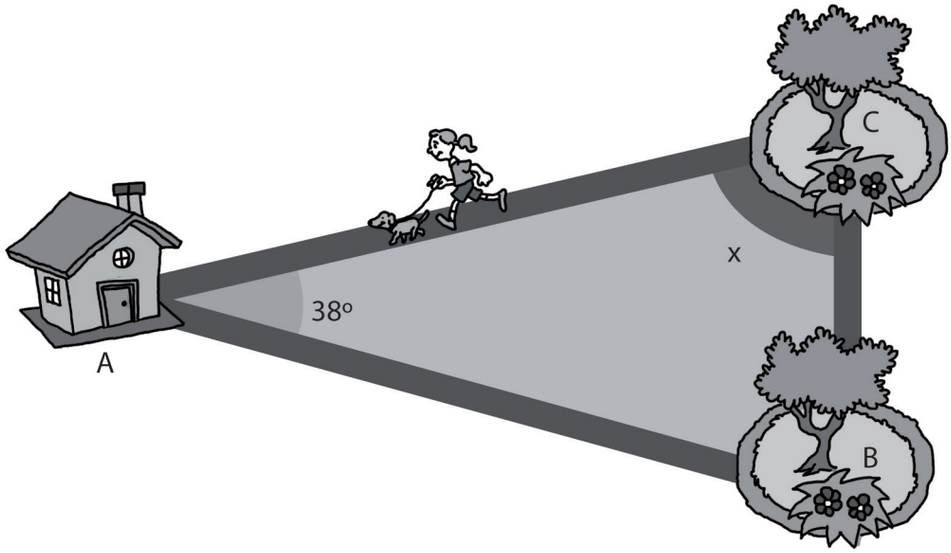
(C) Marina

(D) Roberto

RESPOSTA: Letra C

A questão apresentada tem como objetivo reconhecer as propriedades dos triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos

6. Ana caminha diariamente com seu cachorro, fazendo o seguinte percurso: Saiu de sua casa (A) e foi em linha reta até a esquina (B), seguiu até a praça (C) e voltou para a casa (A). Conforme o esquema abaixo.



Sabendo que as distâncias AB e AC são iguais, determine a medida x indicada.

RESPOSTA: 71°

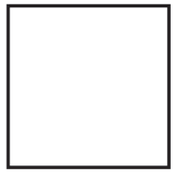
A questão proposta tem como objetivo resolver problemas utilizando as propriedades dos triângulos, no caso, um triângulo isósceles, que possui ângulos da base iguais. Portanto podemos obter a equação:

x + x + 38° = 180°(soma dos ângulos internos)

x = 71°

7. (Prova Brasil ,2011) Observe as figuras abaixo:

retângulo



quadrado

Considerando essas figuras,

(A) os ângulos do retângulo e do quadrado são diferentes.

(B) somente o quadrado é um quadrilátero.

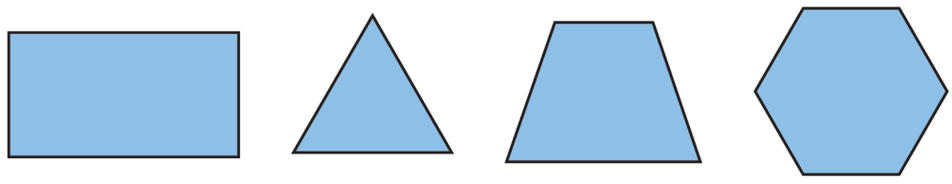
(C) o retângulo e o quadrado são quadriláteros.

(D) o retângulo tem todos os lados com a mesma medida.

RESPOSTA: Letra C

O quadrado e o retângulo têm lados paralelos dois a dois e todos os ângulos internos retos. O quadrado é o quadrilátero regular: todas as medidas de seus lados são iguais. Esses conhecimentos são essenciais para encontrar a alternativa correta.

8. (Matriz de Referência Prova Brasil, 2008) Abaixo, estão representados quatro polígonos.



retângulo triângulo trapézio hexágono

Qual dos polígonos mostrados possui exatamente 2 lados paralelos e dois lados não paralelos?

(A) Retângulo (B) Triângulo (C) Trapézio (D) Hexágono

RESPOSTA: Letra C

Proporcionalidade e Semelhança de polígonos

Para início de conversa...

Em uma embalagem de suco concentrado para refresco de maracujá, há uma orientação de como a mistura deve ser feita.

Figura 1: Garrafa de suco concentrado

Beatriz e Estela prepararam refrescos seguindo a orientação do rótulo, mas Beatriz usou um copo com 200ml de capacidade e Estela usou outro com 300ml de capacidade. O que ocorre nesta situação? Será que os refrescos feitos pelas meninas ficaram iguais? O que você acha? Vamos analisar a situação.

Figura 2: Estela e Beatriz preparando refrescos

Veja na figura anterior: Beatriz preparou 1 litro de refresco (200ml de concentrado + 800ml de água) enquanto Estela preparou 1,5 litros (300ml de concentrado + 1200ml de água).

No entanto, em ambas as misturas, o volume de água é quatro vezes o volume de concentrado. Logo, os sucos possuem a mesma concentração, ou seja, um não ficou mais fraco do que o outro. Nesse caso, dizemos que foi usada a mesma proporção de suco em relação à quantidade de água. Mas o que significa isso? E se quiséssemos preparar 12 litros de refresco, usando copos de 500 ml, quanto de concentrado precisaria ser utilizado? Mais de uma garrafa?

Existem outras situações práticas em que precisamos tomar decisão que requeiram esse tipo de raciocínio?

Nesta unidade, vamos estudar as razões e as proporções através da resolução de diversos problemas. Também utilizaremos os conceitos de razão e proporção para resolver problemas envolvendo figuras semelhantes.

Objetivos de Aprendizagem

- Identificar uma proporção.
- Resolver problemas que envolvam grandezas diretamente e inversamente proporcionais.
- Resolver problemas que envolvam aplicações do Teorema de Tales e do Teorema de Pitágoras.

Seção 1
Razões e proporções

Na primeira parte desta aula, a ideia é que façamos alguns problemas juntos. Nós formulamos o problema, você pensa um pouco, tenta fazer a sua solução e, depois disso, dá uma lida na solução que nós apresentamos. Pronto?

Considere a seguinte afirmativa: com R$1,00 compro 5 pães. OK? Muito bem! Procure agora responder às seguintes perguntas:

a. Quais são as grandezas envolvidas nessa situação?

b. Quantos pães comprarei com R$2,00?

c. Qual é o preço unitário do pão?

d. Quanto pagarei por 7 pães?

Fez a sua solução? Mesmo? Ótimo! Agora dê uma lida na nossa: as grandezas envolvidas são o valor a ser pago e o número de pães que podemos comprar. Se compro 5 pães com R$1,00, para comprar o dobro de pães também gastarei o dobro: comprarei 10 pães com R$2,00. Já para obter o preço unitário do pão, basta dividir R$1,00 por 5. Um pão custa 1:5 = R$0,20. Finalmente, se o preço unitário do pão é R$0,20, 7 pães custarão 7.0,20 = R$1,40. Podemos ainda construir uma tabela que associe o valor a ser pago ao número de pães, veja só:

Tabela 1: Valor x Número de pães

Valor a ser pago	Número de pães
R$1,00	5
R$2,00	10
R$0,20	1
R$1,40	7

Perceba que os números que aparecem na coluna da direita (o número de pães) são iguais aos seus correspondentes na coluna da esquerda multiplicados por 5.

Vamos à segunda série de perguntas? Muito bem! Considere primeiro a seguinte afirmação: um carro percorre 12km com 1 litro de gasolina. Procure agora responder às seguintes perguntas.

a. Quantos quilômetros ele percorrerá com 10 litros de gasolina?

b. Para percorrer uma distância de 396 quilômetros, o veículo precisa de quantos litros de gasolina?

c. O tanque desse veículo tem capacidade para 50 litros de gasolina. Quantos quilômetros, no máximo, esse carro pode percorrer se iniciar seu trajeto com o tanque cheio?

Fez a sua solução? Ótimo! Veja a nossa, agora. Se o carro percorre 12km com 1 litro de combustível, com 10 vezes essa quantidade de combustível ele percorrerá uma distância dez vezes à anterior. Logo, ele percorrerá 10.12 = 120 km. Vimos, no item anterior, que a distância percorrida é calculada pelo produto da quantidade de combustível por 12. Precisamos procurar um número que multiplicado por 12 dê 396 como resultado. Basta então efetuarmos a divisão 396:12. Assim, ele precisará de 396:12 = 33 litros. Para responder ao item c, basta multiplicar a quantidade de combustível por 12. O carro percorrerá com 50 litros de gasolina 50.12 = 600km.

Construímos novamente uma tabela que associa a quantidade de combustível e a distância percorrida:

Tabela 2: Quantidade de combustível x Distância percorrida

Quantidade de combustível	Distância percorrida
1 litro	12 km
10 litros	120 km
33 litros	396 km
50 litros	600 km

Nesse exemplo, os números que aparecem na coluna da direita são iguais aos seus correspondentes na coluna da esquerda multiplicados por 12.

Prontos para mais uma? Continua valendo aquele nosso acordo, certo? Façam primeiro a solução de vocês e, depois, vejam a nossa. Vamos lá!

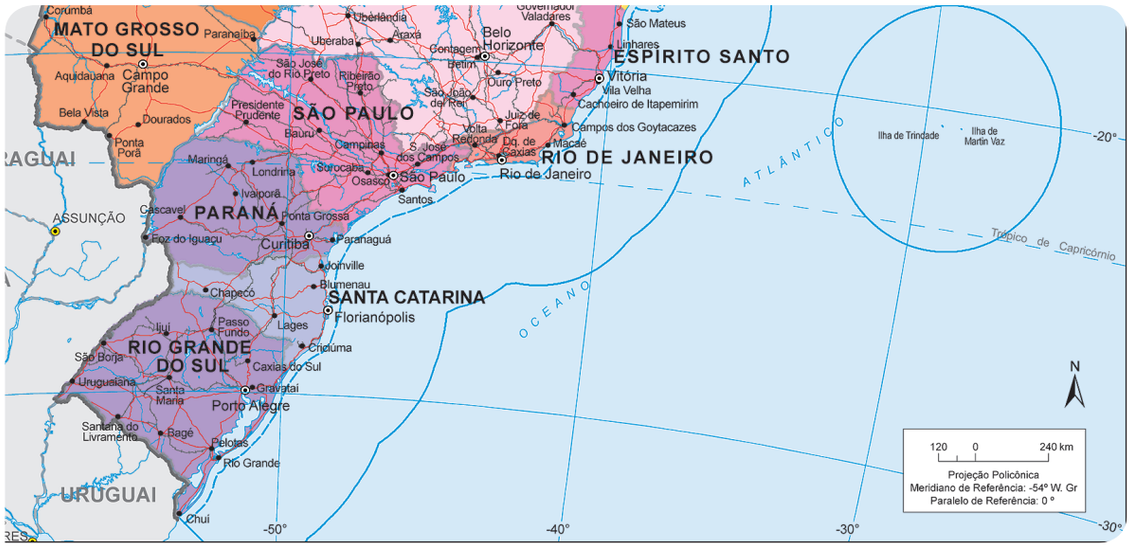


Figura 3: Fragmento do mapa do Brasil (fonte: Atlas Geográfico Escolar do IBGE)

A figura anterior traz uma representação do território brasileiro – um mapa, se quiser usar um termo mais comum. Perceba que, no canto direito inferior, há um segmento de reta com alguns números. Você sabe para que servem esses números? Eles servem como referência para que sejam estimadas as distâncias entre as cidades que aparecem no mapa. O nome técnico desta informação é escala. Mas como será que você pode usar essas informações? Procure resolver as perguntas seguintes! Temos certeza de que, ao final do processo, você terá entendido tudo!

a. Com uma régua, meça, na escala, o comprimento do segmento que liga o ponto associado ao número zero e o ponto associado ao número 240. Isso indica o seguinte: esta medida em centímetros no mapa corresponde a uma distância real de 240 km.

b. Use a resposta do item anterior para dizer quantos quilômetros correspondem a 1cm.

c. Preencha a tabela a seguir. Coloque, na segunda coluna, a distância no mapa (em centímetros, medidos com a régua) entre as cidades da primeira coluna. Em seguida, calcule a distância real entre essas cidades, utilizando a escala.

Cidade	Distância no mapa	Distância real
Rio de Janeiro e Vitória		
Florianópolis e Curitiba		
São Paulo e Campo Grande		

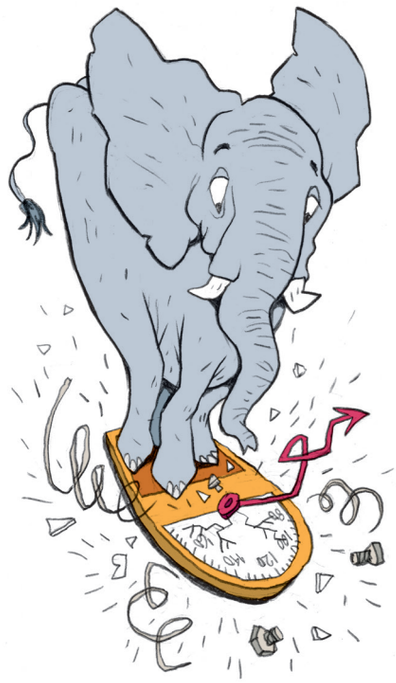
Multimídia

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística lançou um Atlas Geográfico Escolar online, que está no endereço http://atlasescolar.ibge.gov.br. Nele, você pode encontrar mapas, ilustrações e animações muito interessantes, além de links para download gratuito da publicação. Acesse!

Seção 2

Ajustando as unidades de medida ao contexto: múltiplos e submúltiplos

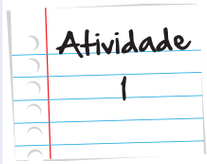
As grandezas são medidas a partir de uma unidade predeterminada. Medimos comprimentos usando o metro como unidade padrão, assim como medimos volume usando o litro como unidade. Porém, em algumas situações, é muito mais conveniente usar os múltiplos ou os submúltiplos dessas unidades.



Se você vai medir o comprimento de um palito de fósforo, por exemplo, certamente a melhor unidade não será o metro, muito menos o quilômetro, pois teríamos de usar números muito pequenos para representar esta medida nessas unidades; também não seria interessante medir a massa de um animal muito pesado usando o grama como unidade, visto que, nesse caso, teríamos de trabalhar com um número gigantesco. E para calcular a quantidade de

calmante que deve ser dada a um paciente? Devemos usar o litro? Claro que não! Desta forma, precisamos ter bom senso na hora de usarmos as unidades de medida, certo?

Que tal praticar um pouco?



Moro a 10 quilômetros do meu local de trabalho.

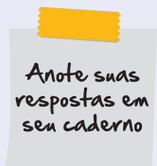
Meu quarto possui 2,86 metros de comprimento.

Minha filha nasceu com 52 centímetros.

Para a construção de uma estante, usei placas de mdf com 25 milímetros de espessura.

Em todas as frases anteriores, utilizamos múltiplos e submúltiplos do metro. Experimente escrever todas as medidas de comprimento anteriores em centímetros e reescreva as frases, a fim de verificar a escolha inadequada de uma unidade de medida para cada situação. Por exemplo, como 10 km equivalem a 1.000.000 cm, diríamos "moro a 1.000.000 de centímetros do meu local de trabalho". Faça o mesmo para as outras situações.

Se achar que precisa refrescar a memória em relação aos múltiplos e submúltiplos do metro, aqui vai uma dica: os submúltiplos são o decímetro (dm), o centímetro (cm) e o milímetros (mm). Estas unidades são tomadas de modo que 1m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm. Já os múltiplos são o decâmetro (dam), o hectômetro (hm) e o quilômetro (km). Estas unidades são tomadas de modo que 1 km = 10 hm = 100 dam = 1000 m.



Quer saber mais sobre as demais unidades do sistema de medidas? Acesse o site do INMETRO. No endereço http://www.inmetro.gov.br/consumidor/unidLegaisMed.asp, você encontrará informações históricas sobre o Sistema Internacional de Medidas, bem como o documento que contém todas as unidades que o compõem.

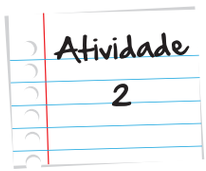
Seção 3
Razão entre as medidas de duas grandezas

Na situação-problema do início desta unidade, vimos que Beatriz e Estela faziam refresco usando 1 copo de concentrado e 4 copos de água. Podemos dizer que a razão entre o número de copos de concentrado e o número de copos de água necessários para fazer o refresco é 1/4. Nessa mesma situação, vimos que Estela fez 1500 ml (1,5l) de refresco usando 1200ml de água e 300ml de concentrado. Podemos dizer que a razão entre o volume de refresco feito por ela e a quantidade de água utilizada para fazê-lo é $\frac{1500}{1200}$, que poderia ser escrita de forma mais simples como 5/4 (dividimos os termos por 300).

Já na situação-problema envolvendo mapas e escalas, vimos um mapa na escala 1:3.200.000. Nesse caso, podemos dizer que a razão entre uma distância medida no mapa e a distância real correspondente é $\frac{1}{3.200.000}$.

Falando mais formalmente, podemos determinar a razão entre as medidas de duas grandezas através do quociente entre os números que expressam suas medidas. A razão entre os números A e B pode ser representada na forma $\frac{A}{B}$ ou na forma $A : B$.

Prontos para mais uma atividade? Então vamos lá!



1. Um cômodo de uma casa possui 2 metros de largura e 3 metros de comprimento. Determine a razão entre a largura e o comprimento desse cômodo.

2. Numa câmara de vereadores composta por 40 políticos, apenas 5 compareceram ao expediente. Determine a razão entre:
   a. o número de políticos que compareceram ao expediente e o número total de vereadores.
   b. o número de vereadores ausentes e o número de vereadores presentes.

3. De um carro cujo comprimento é de 4,5 metros foi feita uma miniatura de 20 centímetros de comprimento.
   a. Expresse as duas medidas de comprimento na mesma unidade.
   b. Determine a razão entre e comprimento do carro e o comprimento da miniatura.
   c. O comprimento do carro é quantas vezes o comprimento da miniatura?

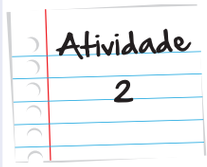
4. Tenho 36 fitas gravadas. Para cada 3 fitas de música brasileira, tenho uma fita de música estrangeira. Tenho, então:

   a. 9 brasileiras e 27 estrangeiras

   b. 27 brasileiras e 9 estrangeiras.

   c. 24 brasileiras e 12 estrangeiras.

   d. 12 brasileiras e 24 estrangeira



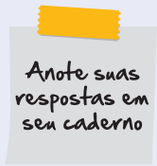
5. A razão $\left(1-\frac{2}{3}\right):\left(2-\frac{1}{6}\right)$ equivale a:

   a. 2/11

   b. 2/13

   c. 10/13

   d. 10/11



Proporcionalidade

Dois conjuntos de números são proporcionais se é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que, dado qualquer elemento de um dos conjuntos, obtemos o seu correspondente no outro conjunto multiplicando-o por um número fixo. Esse número fixo será chamado razão de proporcionalidade. Duas grandezas são proporcionais se os conjuntos dos números que expressam suas medidas são proporcionais.

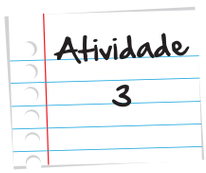
Vejamos um exemplo de situação que envolva grandezas proporcionais. Em um posto de gasolina, suponha que o preço de 1 litro de gasolina custe R$2,89. Vamos verificar que a quantidade de combustível e o preço a ser pago são grandezas proporcionais. A tabela a seguir mostra o valor a ser pago de acordo com o volume de combustível.

Tabela 3: Volume de combustível x Valor a ser pago.

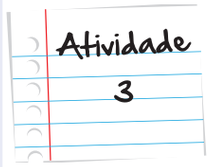
Volume de combustível	Valor a ser pago
1 litro	R$ 2,89
2 litros	R$ 5,78
10 litros	R$ 28,90

Nesta tabela, o volume de combustível (expresso em litros) relaciona-se ao valor a ser pago (expresso em reais) de modo que o número à direita é obtido pelo produto do seu correspondente à esquerda por 2,89. Dessa forma, tratam-se de grandezas proporcionais.

Figura 4: A prescrição de determinado tipo de medicamento também envolve duas grandezas proporcionais, pois a quantidade de gotas a serem administradas é calculada a partir do peso do paciente: 10 gotas a cada 20 quilos de peso, por exemplo.



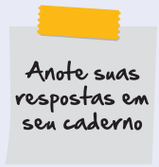
1. Densidade demográfica é um número que expressa a quantidade média de habitantes de uma região que ocupam uma área equivalente a 1 quilômetro quadrado; assim, a densidade demográfica é expressa pela razão entre o número total de habitantes de uma região e a área da superfície total dessa região. O município do Rio de Janeiro, segundo dados do IBGE, possuía 6320446 habitantes no ano de 2010. Considerando que o município possui uma extensão territorial de aproximadamente 1200 quilômetros quadrados, determine a densidade demográfica desse município no ano de 2010. Use a calculadora para auxiliar nos cálculos.



2. Velocidade média é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no trajeto.
    a. Qual é a velocidade média de um automóvel que percorreu 30 quilômetros em 2 horas?
    b. Qual foi a distância percorrida por um automóvel que, com velocidade média de 60 km/h, chegou ao seu destino após 1hora e 30 minutos?
    c. Quanto tempo levou um motorista para atingir seu destino, a 100 km de distância, andando a uma velocidade média de 80 km/h?

3. Num mercado, um pote de 500g da maionese custa R$3,50. Já o pote de 1kg custa R$6,50. Qual deles é mais econômico?

4. Para a produção de um medicamento, 20mg de um composto químico devem ser diluídos em 5ml de solução. Quantos miligramas de composto devem ser utilizados na produção do medicamento com 40ml dessa solução?



Regra de 3 simples

A regra de três é um método de resolução de problemas que envolvem grandezas proporcionais. Vamos retomar um dos problemas da atividade anterior como motivação para entendermos a Regra de três simples: para a produção de um medicamento, 20mg de um composto químico devem ser diluídos em 5ml de solução. Quantos miligramas de composto devem ser utilizados na produção do medicamento com 40ml dessa solução?

Figura 5: Composto químico sendo adicionado a uma solução

As grandezas envolvidas neste problema são a massa de composto químico (expressa em miligramas) e o volume de solução (expresso em mililitros). Podemos dizer que se trata de grandezas proporcionais? Vamos colocar as informações do enunciado em uma tabela, uma vez que sabemos que a cada 20mg de composto, precisamos de 5ml de solução.

Tabela 4: Massa x Volume

Massa do composto	Volume de solução
20mg	5ml
40mg	10ml
60mg	15ml
80mg	20ml

Vemos que os números da primeira coluna podem ser obtidos multiplicando-se os correspondentes da segunda coluna por 4 (note que 20 = 5.4). Assim, as grandezas são proporcionais e podemos determinar a massa do composto para 40ml de solução multiplicando 40 por 4 e obtendo 160mg.

Porém, podemos resolver este problema de outra forma, nos valendo do conceito de proporção. Uma proporção é uma igualdade entre duas razões, que pode ser escrita como $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. As proporções têm uma propriedade fundamental, que pode ser escrita da seguinte maneira. Sempre que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ teremos que $ad=bc$.

De posse desse conhecimento, construímos uma outra tabela, em que x é a massa de composto para 40ml de solução.

Tabela 5: Massa X Volume

Massa do composto	Volume de solução
20mg	5ml
x mg	40ml

Se as grandezas são proporcionais, os números à direita são obtidos multiplicando-se os correspondentes da esquerda por 4. E, se isso acontece, podemos dizer que há uma igualdade entre as razões - o que, como acabamos de ver, é a definição de proporção. Esta proporção pode ser escrita assim: $\frac{20}{5} = \frac{x}{40}$. Agora, basta aplicar a propriedade fundamental das proporções e escrever que 5.x = 20.40. Assim, x = 160mg.

Este processo de resolução é chamado Regra de Três Simples

Vamos praticá-lo em outro problema?

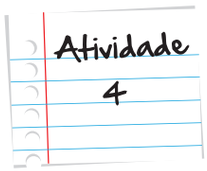
Um pintor utilizou 18 litros de tinta para pintar 60m^2 de parede. Quantos litros de tintas serão necessários para pintar 450 m^2, nas mesmas condições?

Podemos organizar as informações do problema em uma tabela.

Tabela 6: Volume de tinta x Área de parede

Volume de tinta	Área de parede
18 litros	60m^2
x litros	450m^2

As grandezas envolvidas neste problema são proporcionais, pois, se multiplicarmos o volume de tinta por um número, a área de parede pintada ficará multiplicada pelo mesmo número. Assim, podemos afirmar que $\frac{18}{60} = \frac{x}{450}$. Aplicando a propriedade fundamental, temos 60.x = 450.18, ou seja, x = 135 litros.



Resolva os seguintes problemas:

1. Em um mapa de escala 1 **:** 1 000 000, a distância entre duas cidades **A** e **B** é 10 cm, em linha reta. Logo, em linha reta, a distância real em quilômetros entre duas cidades é:
   a. 10 000 km
   b. 1 000 km
   c. 100 km
   d. 10 km

2. O valor de **x** na proporção $\frac{x}{x+1}=\frac{15}{21}$ é:
   a. $\frac{5}{12}$
   b. $-\frac{5}{12}$
   c. $\frac{5}{2}$
   d. $-\frac{5}{2}$

4. Um parafuso penetra 3,2 mm a cada 4 voltas. Quantas voltas deverá dar para penetrar 16 mm?

5. Sabe-se que 8 kg de café cru dão 6 kg de café torrado. Quantos kg de café cru devem ser levados ao forno para obtermos 27 kg de café torrado?

6. 40 pintores pintam um edifício em 10 dias. Querendo fazer o mesmo serviço em 8 dias, quantos pintores com a mesma produtividade dos primeiros seriam necessários?

7. 8 máquinas produzem 600 peças de metal por hora. Quantas máquinas idênticas às primeiras são necessárias para produzir 1 500 peças de metal por hora?

8. Um automóvel consome, na estrada, 30 litros de gasolina ao percorrer 360 km; para percorrer 450 km, o mesmo automóvel consumirá:
   a. 37,5ℓ
   b. 37ℓ
   c. 40ℓ
   d. 45ℓ

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 4
Proporcionalidade e Geometria – Teorema de Tales e triângulos semelhantes

Teorema de Tales

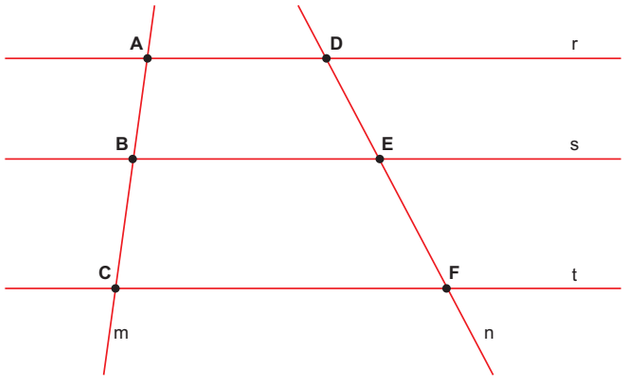


Figura 6: Feixe de paralelas cortadas por transversais

Na Figura 6, as retas r, s e t são paralelas e formam um feixe de retas paralelas. As retas m e n intersectam r, s e t e, dessa forma, são chamadas de transversais ao feixe de paralelas. Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos determinados pelas intersecções das transversais com o feixe de paralelas: A corresponde a D; B corresponde a E; C corresponde a F. Podemos, também, estabelecer uma correspondência entre os segmentos determinados sobre as transversais: $\overline{AB}$ corresponde a $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ corresponde a $\overline{EF}$; $\overline{AC}$ corresponde a $\overline{DF}$.

Faça o seguinte experimento: na Figura 6, meça com uma régua os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$. Usando uma calculadora, determine a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, entre $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ e, por fim, entre $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$. O que podemos afirmar?

Atividade 5

Anote suas respostas em seu caderno

Essa proporção entre os segmentos é a base do teorema que conhecemos como Teorema de Tales, que afirma o seguinte: um feixe de paralelas determina sobre retas transversais segmentos proporcionais.

Multimídia

No site http://www.matematica.br/historia/tales.html é possível encontrar informações históricas sobre Tales de Mileto e suas estratégias para a solução de problemas envolvendo medidas.

No caso da Figura 6, por exemplo, o teorema de Tales nos permite afirmar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$. O objetivo da atividade anterior foi justamente verificar empiricamente esta igualdade entre as razões. As pequenas flutuações encontradas devem ser atribuídas ao fato de as réguas escolares utilizadas na medição não serem instrumentos de alta precisão.

Vejamos um outro exemplo. A figura a seguir apresenta um feixe de paralelas cortadas pelas transversais a e b.

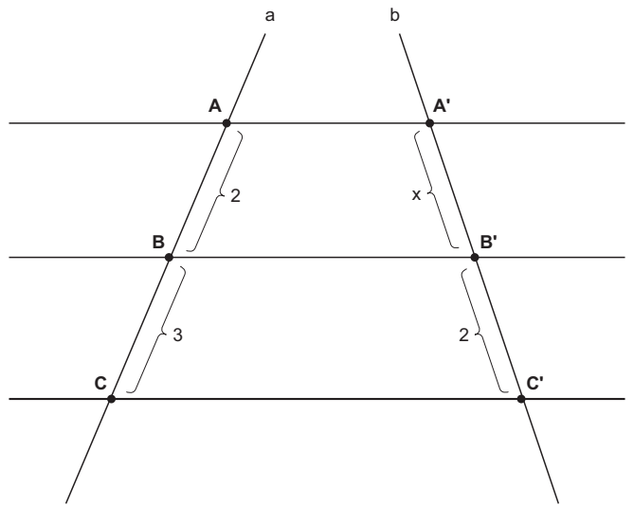
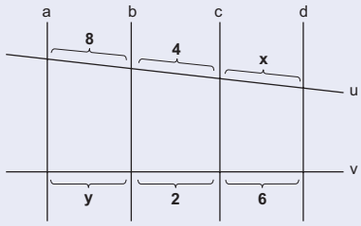


Figura 7: Retas paralelas cortas pelas transversais a e b

Pelo Teorema de Tales temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}; \frac{2}{3} = \frac{x}{2}; 3x = 4$ e, finalmente, $x = \frac{4}{3}$.

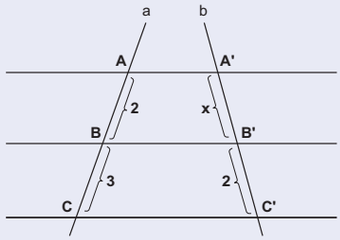
Atividade 6

1. Na figura a seguir, as retas a, b, c e d são paralelas e as retas u e v, transversais. Então, x e y valem:



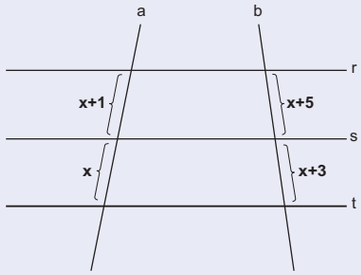
   a. 12 e 5.
   b. 12 e 3.
   c. 12 e 4.
   d. 8 e 4.

2. Na figura a seguir, r // s // t e A'C' = 15. Então, x e y valem, respectivamente:



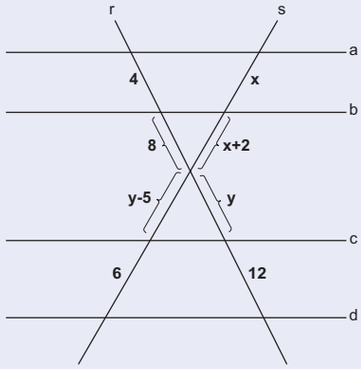
   a. 3 e 5.
   b. 9 e 6.
   c. 8 e 6.
   d. 6 e 9.

3. A figura a seguir mostra r // s // t. Sendo a e b duas transversais, então x é igual a:



   a. 5.
   b. 4.
   c. 3.
   d. 2.

4. Na figura a seguir, a // b // c // d. Os valores respectivos de x e y são:



   a. 2 e 10.
   b. 10 e 2.
   c. 4 e 8.
   d. 5 e 10.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

5. Duas transversais são cortadas por um feixe de quatro paralelas. A primeira, nos pontos A, B, C e D; a segunda, em A', B', C' e D'. Sabendo que AB = 3cm, CD = 8cm, B'C' = 10cm e AD = 16cm, então $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ medem, respectivamente:

   a. 16cm e 6cm.

   b. 5cm e 10cm.

   c. 6cm e 16cm.

   d. 8cm e 16cm.

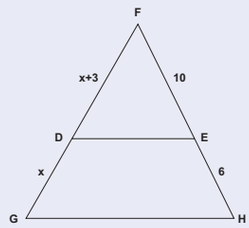
6. No triângulo FGH (figura), sendo DE // GH, x é igual a:

   a. 4,0.

   b. 4,5.

   c. 5,0.

   d. 5,54.



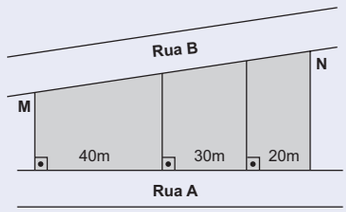
7. A figura mostra três terrenos, com frentes para as ruas A e B. As frentes para a rua A têm as medidas indicadas. Sendo MN = 135m, as frentes para a rua B medem:

   a. 0, 40, 45.

   b. 60,45, 30.

   c. 60, 40, 35.

   d. 35, 45, 55.



Anote suas respostas em seu caderno

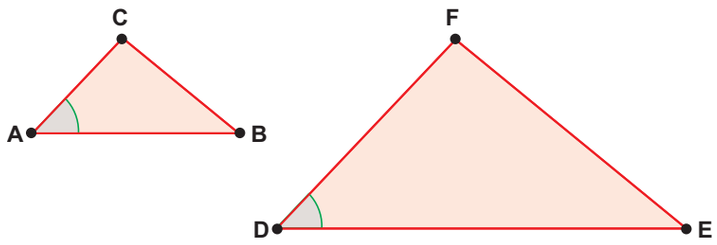
Triângulos semelhantes

Para saber se dois polígonos são semelhantes, vimos que precisamos verificar as medidas de todos os ângulos internos e as medidas de todos os lados. Se os ângulos internos forem iguais e os lados de um polígono forem proporcionais aos do outro, então eles serão semelhantes.

Para triângulos, é possível estabelecer condições mínimas suficientes para garantir que dois triângulos são semelhantes. Essas condições são dadas pelos casos de semelhança de triângulos.

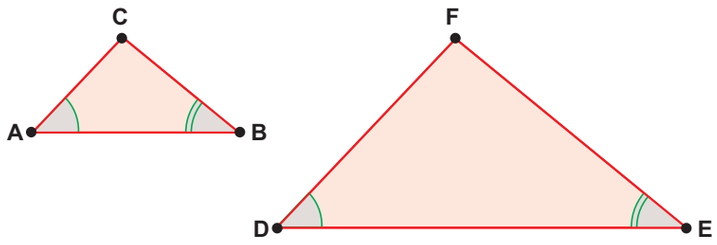
Caso LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Dados os triângulos ABC e DEF, se $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ e $\hat{A} = \hat{D}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.



Caso AA (Ângulo-Ângulo)

Dados os triângulos ABC e DEF, se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.



Caso LLL (Lado-Lado-Lado)

Dados os triângulos ABC e DEF, se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

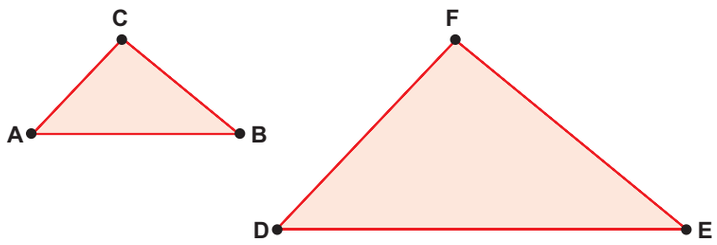


Figura 8: Casos de semelhança de triângulos e respectivas condições

Vejamos um exemplo. Observe a figura a seguir, que apresenta dois triângulos retângulos, ADE e ABC. Deseja-se determinar as medidas desconhecidas x e y.

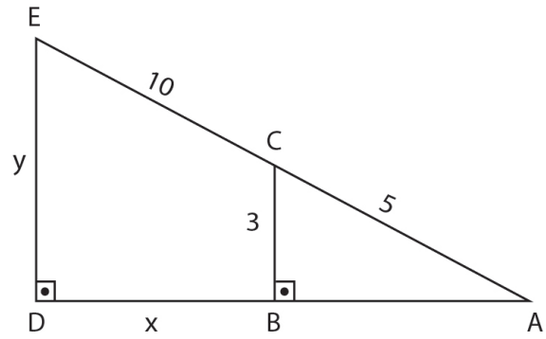
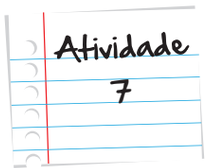


Figura 9: Triângulos ABC e ADE

Notemos que os triângulos ADE e ABC são tais que ambos possuem um ângulo reto e, também, o ângulo Â em comum. Pelo Caso A.A. de semelhança, esses triângulos são semelhantes. Dessa forma, os lados desses triângulos são proporcionais, isto é, $\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$. Isso nos permite determinar os valores desconhecidos x e y. Como AE=15, AC=5, DE=y, BC=3, AD=x+4 e AB=4, temos $\frac{15}{5}=\frac{y}{3}=\frac{x+4}{4}$.. Concluímos que y=9 e x=8.



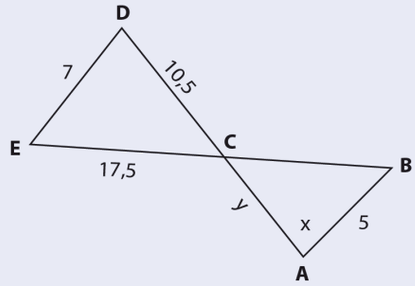
1. Observe a figura a seguir, onde $\overline{ED}$ // $\overline{AB}$. Os valores de x e de y, são, respectivamente:

   a. 7,5 e 12,5

   b. 12,5 e 7,5

   c. 14,7 e 24,5

   d. 24,5 e 14,7



2. Dois triângulos isósceles são semelhantes e suas bases medem 14cm e 7cm. Se o perímetro do segundo triângulo mede 27cm, cada lado congruente do primeiro mede:

   a. 10cm

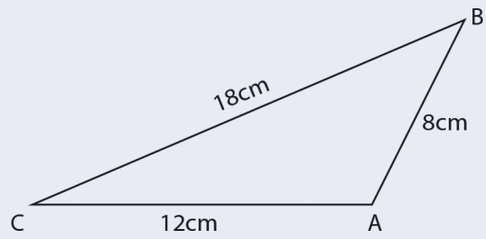
   b. 5cm

   c. 15cm

   d. 20cm

3. Os lados de um triângulo ABC medem AB = 8cm, BC = 18cm e CA = 12cm. Calcule as medidas dos lados de um triângulo semelhante a esse, cujo perímetro é 76cm.

Atividade 7



4. Para determinar a altura de um edifício, seu zelador usou um artifício. Mediu a sombra do prédio, que deu 6 metros, e mediu sua própria sombra, que deu 0,20 metros. Sabendo-se que sua altura é 1,60 metros, qual a altura do prédio?
5. Sabendo-se que um poste de 6m projeta uma sombra de 4,0m, a altura de um prédio que projeta uma sombra de 124m mede:
   a. 82,6cm
   b. 31m
   c. 186m
   d. 20,6m

Anote suas respostas em seu caderno

Teorema de Pitágoras

O estudo da Geometria está associado a diversas aplicações práticas no cotidiano, como, por exemplo, o estudo das figuras geométricas planas na construção civil. Um pedreiro, ao erguer um prédio, precisa garantir determinadas propriedades geométricas. Para construir um cômodo de uma casa, precisamos garantir que as paredes formam ângulo de 90º (ou ângulo reto). O instrumento utilizado para a construção de ângulos retos em construções é o esquadro. Para grandes construções, é utilizado um esquadro cujas medidas dos lados são 60cm, 80cm e 100cm.

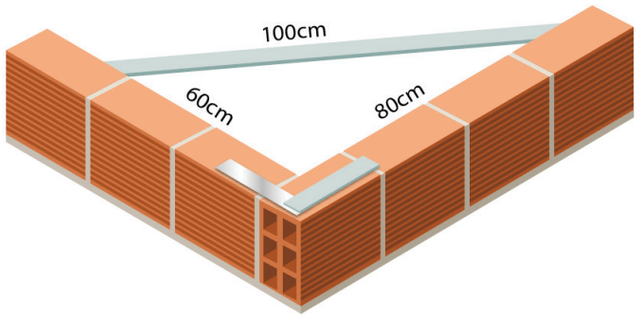


Figura 10: Esquadro para grandes construções.

Vamos relembrar algumas definições para os triângulos retângulos.

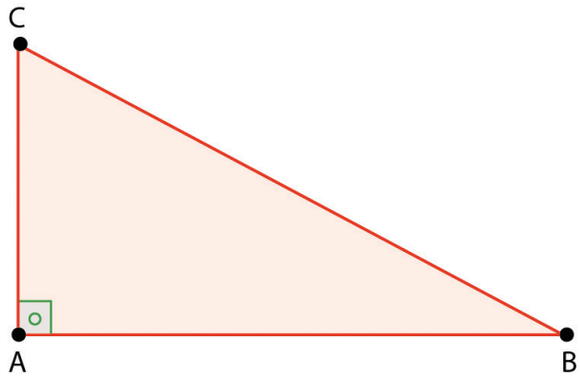


Figura 11: Triângulo retângulo

Triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo interno de medida 90º (também denominado ângulo reto). O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa desse triângulo. Os outros dois lados são os catetos desse triângulo.

Na Figura 10,

o ângulo $\hat{A}$ mede 90º e será indicado como mostra a figura;

o lado $\overline{BC}$ é a hipotenusa;

os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os catetos.

Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Matematicamente $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ ou, se chamarmos a hipotenusa de a e os catetos de b e c, $a^2 = b^2 + c^2$. Quer saber como Pitágoras chegou a essa conclusão? Veja o boxe a seguir

No endereço http://www.ies-math.com/math/java/geo/pythagoras.html, são encontradas diversas atividades interativas que apresentam a demonstração original e demonstrações alternativas para o Teorema de Pitágoras.

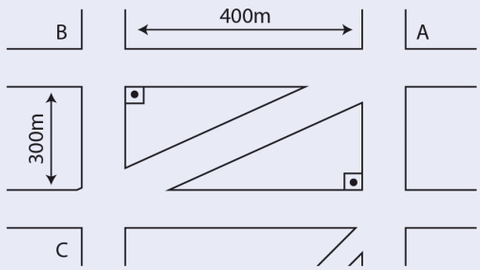
Multimídia

Retomando o exemplo apresentado na figura 11, se os catetos de um triângulo retângulo medem 60 cm e 80 cm, pelo Teorema de Pitágoras, teremos que $a^2 = 60^2 + 80^2$, sendo a a medida da hipotenusa. Ao resolvermos essa equação, temos $a^2 = 60^2 + 80^2 \Rightarrow a^2 = 3600 + 2400$ cm.

Atividade 8

1. Uma pessoa encontra-se no cruzamento A, dirigindo-se à esquina C. Tendo escolhido o caminho mais curto (AC), essa pessoa andou:

   a. 700m
   b. 600m
   c. 500m
   d. 400m



2. Num triângulo retângulo isósceles, a hipotenusa mede $3\sqrt{2}$ cm. Então, cada cateto mede:

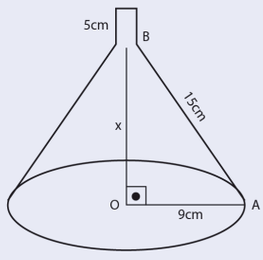
   a. 2cm b. $\sqrt{2}$ cm c. 9cm d. 3cm

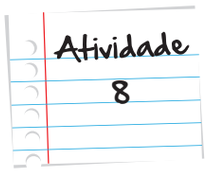
3. O lado de um triângulo equilátero mede 4cm; logo, a sua altura mede:

   a. $4\sqrt{3}$ cm b. $2\sqrt{3}$ cm c. $8\sqrt{3}$ cm d. 4cm

4. A altura do funil representado pela figura seguinte é:

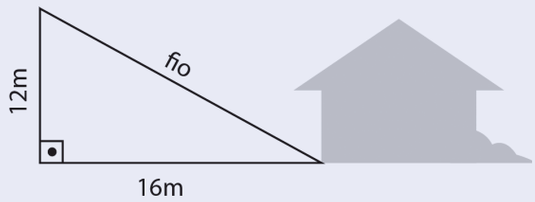
   a. 12cm
   b. 15cm
   c. 17cm
   d. 20cm





5. Quantos metros de fio são necessários para "puxar luz" de um poste de 12m de altura até a caixa de luz (figura), que está ao lado da casa a 16m do poste?

   a. 20m
   b. 25m
   c. 28m
   d. 30m



Anote suas respostas em seu caderno

Grandezas inversamente proporcionais

Vamos retomar aquela estratégia do início da aula e fazer, juntos, um problema. Considere que, em uma festa, 200 docinhos devem ser igualmente divididos entre os convidados. Procure responder agora às seguintes perguntas:

a. Quais são as grandezas envolvidas nesta situação?

b. Se a festa tem 50 convidados, quantos docinhos cada um receberá?

c. E se fossem 100 convidados, quantos docinhos cada um receberia?

No exemplo, as grandezas envolvidas são o número de convidados e o número de docinhos que cada um receberá. Vamos, mais uma vez, montar uma tabela que associe o número de convidados à quantidade de docinhos que cada um receberá.

Tabela 5: Exemplo

Número de convidados	Número de docinhos por convidado
50	200:50 = 4
100	200:100 = 2

Note que, nessa situação, os valores da segunda coluna NÃO são obtidos multiplicando-se os números da primeira coluna pelo mesmo número. Notamos que o aumento no número de convidados acarreta em diminuição no número de docinhos que cada um receberá. No exemplo, ao dobrarmos o número de convidados, o número de

docinhos por convidado cai pela metade. Matematicamente, ao multiplicarmos o número de convidados por 2 (passamos de 50 para 100 convidados) o número de docinhos ficou multiplicado por $\frac{1}{2}$ (passamos de 4 para 2 docinhos por convidados). Se tivéssemos multiplicado o número de convidados por 4, passando de 100 para 200 convidados, o número de docinhos ficaria multiplicado por 1/4 , passando de 4 para 1 docinho por convidado.

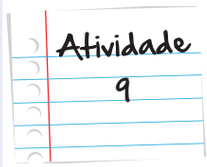
Generalizando, sempre que multiplicamos uma das grandezas por um fator k, a outra é multiplicada por um fator 1/k. Grandezas que guardam essa proporção entre si são chamadas grandezas inversamente proporcionais.

Pense agora na seguinte situação: dirigindo a 80km/h, João atinge seu destino após 2 horas. Perguntamos:

a. Qual é a distância que João deve percorrer?

b. Se João percorresse a mesma distância a 120 km/h demoraria quanto tempo para atingir o seu destino?

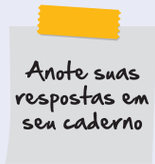
c. Podemos afirmar que a velocidade e o tempo nessa situação são grandezas inversamente proporcionais?



1. Um plano de saúde cobra de seus clientes uma taxa fixa mensal de R$50,00 mais R$10,00 por consulta feita neste mês.
   a. Quanto pagará uma pessoa que precisou de 5 consultas neste mês? E uma pessoa que precisou de 10 consultas, quanto pagará?
   b. O preço a ser pago e o número de consultas são grandezas proporcionais?

2. A área de um quadrado é calculada elevando-se ao quadrado a medida do seu lado.
   a. Se triplicarmos a medida do lado de um quadrado, triplicamos a sua área? Esboce o desenho de um exemplo para ajudá-lo na resposta.
   b. Qual a razão entre as áreas desses quadrados?
   c. O lado do quadrado e a sua área são grandezas diretamente proporcionais?

3. Um taxista cobra R$4,20 pela bandeirada e mais R$1,10 por quilômetro rodado.
   a. Quanto pagará uma pessoa que percorreu 10 km com esse taxi?
   b. Qual é a distância máxima que pode ser percorrida por uma pessoa que possui R$20,70?
   c. José pagou R$10,00 por uma corrida neste táxi. João pagou R$20,00 por outra corrida. Podemos dizer que João percorreu o dobro da distância que José?



Resumo

- Dois conjuntos de números são **proporcionais** se é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que, dado qualquer elemento de um dos conjuntos, obtemos o seu correspondente no outro conjunto multiplicando-o por um número fixo. Este número fixo será chamado **Razão de Proporcionalidade**.
- Regra de Três Simples é um processo para a resolução de problemas que envolvam duas grandezas proporcionais baseado na aplicação da propriedade fundamental: Na proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, temos que ad = bc.
- Teorema de Tales: Um feixe de paralelas determina sobre retas transversais segmentos proporcionais.
- Os casos de semelhança de triângulos são condições suficientes para garantir a semelhança entre dois triângulos. Consideramos os seguintes casos: Caso LAL (Lado-Ângulo-Lado), Caso AA (Ângulo-Ângulo) e o Caso LLL (Lado-Lado-Lado).
- Teorema de Pitágoras: o quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos seus catetos.
- Duas grandezas são inversamente proporcionais se multiplicarmos a medida de uma delas por um fator k, a outra ficará multiplicada pelo fator $\frac{1}{k}$.
- Nem todos os problemas do cotidiano envolvem grandezas proporcionais.

Veja Ainda

- Sugerimos a realização da atividade encontrada no endereço http://www.ies-math.com/math/java/geo/pythasvn/pythasvn.html. Trata-se de um quebra-cabeça cujo desafio é montar o quadrado sobre a hipotenusa, a partir de peças obtidas com os quadrados sobre os catetos.

Imagens

• http://www.sxc.hu/photo/475767 • Miguel Ugalde

• http://atlasescolar.ibge.gov.br/images/atlas/mapas_brasil/brasil_politico.pdf

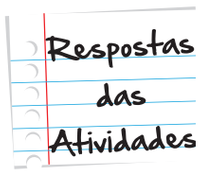
• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=93679

• http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=574983

• http://www.sxc.hu/photo/517386 • David Hartman

Atividade 1

Nesta atividade, as respostas são pessoais devido à possibilidade de erros provenientes do uso de instrumentos de medida com pouca precisão, como uma régua comum. Contudo, a comparação dos resultados dos alunos deve dar valores próximos.



Ativdade 2

1. A razão é $\frac{2}{3}$.
2.

a. Se o número de vereadores que compareceram ao expediente é 5 e o número total de vereadores é 40, a razão entre esses números é $\frac{5}{40}$. Essa razão pode ser escrita de forma simplificada $\frac{1}{8}$ (dividimos ambos os termos por 5).

b. O número de vereadores ausentes é 35 e o número de vereadores presentes é 5, logo, a razão pedida é $\frac{35}{5}$ (ou 7 se verificarmos que se trata de uma divisão exata).

3.

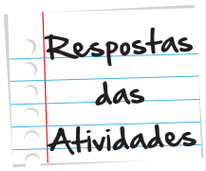
a. Para convertermos uma medida dada em metros para a medida equivalente dada em centímetros, multiplicamos esse número por 100. Dessa forma, 4,5 metros correspondem a 450 cm. Expressando ambas as medidas em centímetros teremos 450 cm e 20 cm.

b. Se o comprimento do carro é 450 cm e o comprimento da miniatura é 20 cm, a razão entre essas medidas é $\frac{450}{20} = 22{,}5$.

c. O comprimento do carro é 22,5 vezes o comprimento da miniatura.

4. Para cada 4 fitas, 3 são de música brasileira e uma é de música estrangeira. Como 36 é 9 vezes 4, terei 9 vezes 3 fitas de música brasileira, ou seja, 27 e 9 fitas de música estrangeira. Resposta: B

5) $\left(1-\frac{2}{3}\right):\left(2-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{12}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}:\frac{11}{6}=\frac{1}{6}.\frac{6}{11}=\frac{6}{33}=\frac{2}{11}.$



Atividade 3

1. Se o município do Rio de Janeiro possuía 6320446 habitantes em 2010 e sua extensão territorial é de 1200 quilômetros quadrados, a densidade demográfica desse município é a razão entre esses números, isto é, $\frac{6320446}{1200} \cong 5267$ habitantes por quilômetro quadrado.

2.

a. Se a distância percorrida foi de 30 km e o tempo gasto para percorrê-la foi de 2 horas, a velocidade média é a razão entre esses números, isto é, $\frac{30}{2} = 15$ quilômetros por hora (15 km/h).

b. Se a velocidade foi de 60 km/h, em uma hora ele percorreu 60 km. Nos trinta minutos restantes (a metade de 1 hora), ele percorreu outros 30 km (a metade de 60km), totalizando 90 km de trajeto.

c. A 80 km/h ele percorre 80km em uma hora. Os 20 quilômetros restantes (que correspondem à quarta parte de 80 km) seriam percorridos em 15 minutos (que correspondem à quarta parte de uma hora). Logo, o tempo de viagem é de 1h15min.

3. Se 500g custam R$3,50, 1 kg (o dobro de 500g) custaria o dobro de R$3,50, ou seja, R$7,00. Como o pote de 1kg custa R$6,50, esse pote é mais econômico.

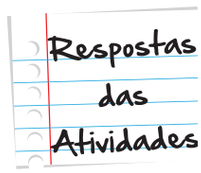
4. Como 40 ml são 8 vezes os 5 ml, devemos ter 8 vezes 20 mg, ou seja, 160 mg de composto químico.

Atividade 4

1. Se a escala é 1 : 1 000 000, isso significa que 1 cm no mapa corresponde a 1 000 000 cm de distância real. Se x é a distância real correspondente aos 10 cm medidos no mapa, podemos organizar essas informações em uma tabela.

Distância no mapa	Distância real
1cm	1 000 000cm
10 cm	x cm

Aplicando a regra de três, temos $\frac{1}{1000000} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 10000000\text{cm} = 100\text{km}.$



2. Aplicando a propriedade das proporções, $\frac{x}{x+1}=\frac{15}{21}\Rightarrow 21x=15(x+1)\Rightarrow 21x=15x+15\Rightarrow 6x=15\Rightarrow x=\frac{15}{6}$. Resposta: C

3. Se um parafuso penetra 3,2mm a cada 4 voltas e se x é o número desconhecido de voltas para penetrar 16 mm, podemos organizar essas informações em uma tabela.

Comprimento penetrado pelo parafuso	Número de voltas
3,2mm	4 voltas
16mm	x voltas

Aplicando a regra de três, teremos $\frac{3,2}{4}=\frac{16}{x}\Rightarrow 3,2x=4.16\Rightarrow 3,2x=64\Rightarrow x=\frac{64}{3,2}=20$ voltas

20 voltas.

4. Se 8kg de café cru dão 6kg de café torrado e x é a quantidade de café cru para obtermos 27 kg de café torrado, podemos organizar essas informações em uma tabela.

Quantidade de café torrado	Quantidade de café cru
6kg	8kg
27kg	x kg

Aplicando a regra de três, teremos $\frac{6}{8}=\frac{27}{x}\Rightarrow 6x=8.27\Rightarrow 6x=216\Rightarrow x=\frac{216}{6}=36\text{kg}.$

5. Se 40 pintores pintam um edifício em 10 dias e x pintores são necessários para fazer o serviço em 8 dias, podemos organizar as informações em uma tabela.

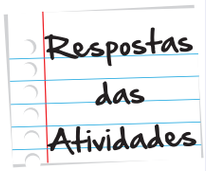
Número de dias de trabalho	Número de pintores
10 dias	40 pintores
8 dias	x pintores

Aplicando a regra de três, teremos $\frac{10}{40}=\frac{8}{x}\Rightarrow 10x=8.40\Rightarrow 10x=320\Rightarrow x=\frac{320}{10}=32$

32 pintores.

6. Se 8 máquinas produzem 600 peças por hora e x é o número de máquinas necessários para fazer 1500 peças por hora, podemos organizar as informações em uma tabela.

Número de peças produzidas por hora	Número de máquinas
600 peças	8 máquinas
1500 peças	x máquinas



7. Se 8 máquinas produzem 600 peças por hora e x é o número de máquinas necessários para fazer 1500 peças por hora, podemos organizar as informações em uma tabela.

Número de peças produzidas por hora	Número de máquinas
600 peças	8 máquinas
1500 peças	x máquinas

Aplicando a regra de três, teremos $\frac{600}{8} = \frac{1500}{x} \Rightarrow 600x = 8.1500 \Rightarrow 600x = 12000 \Rightarrow x = \frac{12000}{600} = 20$ máquinas.

8. Se 360km são percorridos com 30 litros de combustível e x é o número de litros consumidos para percorrer 450 km, podemos organizar essa informações em uma tabela.

Número de quilômetros percorridos	Número de litros de combustível
360km	30l
450	x l

Aplicando a regra de três, teremos $\frac{360}{30} = \frac{450}{x} \Rightarrow 360x = 450.30 \Rightarrow 360x = 13500 \Rightarrow x = \frac{13500}{360} = 37{,}5$ litros.

Atividade 5

Nesta atividade, as respostas são pessoais devido à possibilidade de erros provenientes do uso de instrumentos de medida com pouca precisão, como uma régua comum. Contudo, a comparação dos resultados dos alunos deve dar valores próximos. A conclusão é que as três razões devem ter o mesmo resultado (ou valores muito próximos, provenientes dos erros de medição).

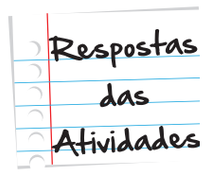
Atividade 6

1. $\frac{8}{y} = \frac{4}{2} \Rightarrow 4y = 8.2 \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{4} = 4$

   $\frac{4}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow 2x = 4.6 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{2} = 12$

   Resposta C

Respostas das Atividades



2. Pelo Teorema de Tales, podemos dizer que $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}$. Como a medida de A'C' é 15, podemos dizer que x + y = 15. O sistema associado ao problema é $\begin{cases}\frac{2}{x}=\frac{3}{y}\\ x+y=15\end{cases}$.

   Dessa forma, temos que x = 6 e y = 9.

   Resposta: D

3. Pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{x+1}{x+5}=\frac{x}{x+3}\Rightarrow (x+1)(x+3)=x(x+5)\Rightarrow x=2$$

Resposta: D

4. Pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{4}{x}=\frac{8}{x+2}\Rightarrow x=2$$
$$\frac{y-5}{y}=\frac{6}{12}\Rightarrow y=10$$

Resposta: A

5. Como AB = 3cm, CD = 8cm e AD=16cm, concluímos que BC=5cm. Como B'C'=10cm (o dobro da medida do seu correspondente BC), temos que A'B'=2AB e C'D'=2CD. Resposta: C.

6. Pelo Teorema de Tales, temos $\frac{x+3}{x}=\frac{10}{6}\Rightarrow x=4{,}5$.

Resposta: B

7. Se as frentes dos três terrenos para a rua B medem x, y e z, temos que $\begin{cases}\frac{x}{40}=\frac{y}{30}=\frac{z}{20}\\ x+y+z=135\end{cases}$. Logo, x = 60m, y = 45m e z = 30m.

Resposta: B

Respostas das Atividades

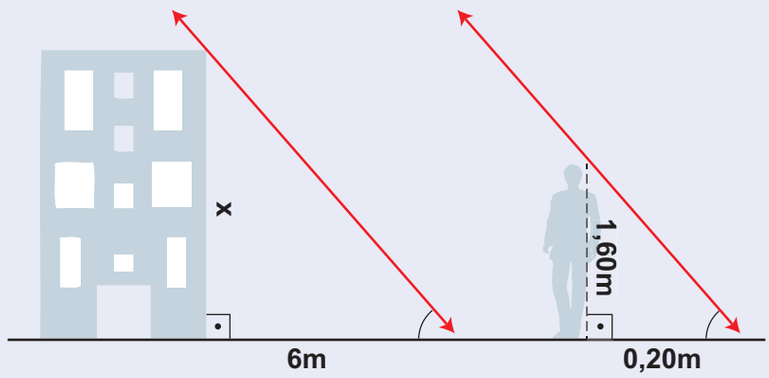
Atividade 7

1. Como $\overline{ED} // \overline{AB}$, os ângulos $D\hat{E}C$ e $A\hat{B}C$ têm a mesma medida. Além disso, os ângulos $E\hat{C}D$ e $B\hat{C}A$ são opostos pelo vértice e, consequentemente, de mesma medida. Pelo caso A.A. de semelhança, os triângulos DEC e ACB são semelhantes. Assim, os lados correspondentes são proporcionais: $\frac{7}{5} = \frac{10,5}{y} = \frac{17,5}{x}$.
   Assim, $x = 12,5$ e $y = 7,5$. Resposta: B

2. Se as bases desses triângulos medem 14cm e 7cm, a razão de semelhança entre esses triângulos é $\frac{14}{7} = 2$. Se o perímetro do segundo triângulo, de base 7cm, é 27cm, cada um dos outros dois lados mede 10cm . Assim, como a razão de semelhança é 2, teremos que os lados congruentes no primeiro triângulo medem 2.10 = 20cm. Resposta: D

3. O perímetro de ABC é 8+18+12=38cm. Se o triângulo A'B'C' tem perímetro 76 cm e é semelhante ao triângulo ABC, a razão de semelhança entre eles é $\frac{76}{38} = 2$, isto é, cada lado do triângulo A'B'C' tem o dobro da medida do seu correspondente no triângulo ABC. Logo, os lados medem 8.2=16cm, 18.2=36cm e 2.12=24cm.

4. A figura a seguir ilustra a situação proposta.



Os triângulos da figura são semelhantes. Dessa forma, temos que

$\frac{x}{1,60} = \frac{6}{0,20} \Rightarrow x = 48$ metros.

5. A situação é análoga ao problema 4. Tente fazer uma figura que ilustre a situação. Se x é a altura do prédio que projeta uma sombra de 124m, temos que $\frac{x}{124} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = 186$ metros.

Respostas das Atividades

Atividade 8

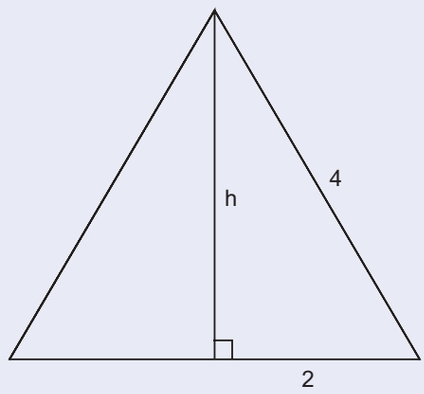
1. O caminho AC é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos $AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow AC^2 = 300^2 + 400^2 \Rightarrow AC^2 = 90000 + 160000 \Rightarrow AC^2 = 250000 \Rightarrow AC = \sqrt{250000} = 500$ metros

Resposta: C.

2. Se o triângulo retângulo é isósceles, os catetos têm a mesma medida. Se x indica a medida dos catetos e $3\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos $(3\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 9.2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$.

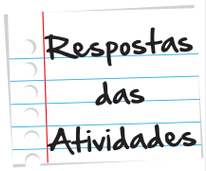
Resposta: D.

3. O triângulo equilátero possui os três lados de mesma medida. Ao traçarmos uma de suas alturas (altura de um triângulo é o segmento de liga um vértice ao lado oposto formando com este ângulo reto), ela divide um lado desse triângulo ao meio. Veja a figura a seguir.



Aplicando o Teorema de Pitágoras em um dos triângulos retângulos da figura, temos $4^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow 16 = h^2 + 4 \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Resposta: B.



4. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura, temos $15^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 225 = x^2 + 81 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$. Logo a sua altura será $12 + 5 = 17$cm.

Resposta: C.

5. O comprimento x do fio é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 12m e 16m. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos $x^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow x^2 = 144 + 256 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow 20$ metros

Resposta: A.

Atividade 9

1.

a. Uma pessoa que fez 5 consultas pagará R$50,00 mais 5 vezes R$10,00, ou seja, R$100,00. Já uma pessoa que fez 10 consultas pagará R$50,00 acrescidos de 10 vezes R$10,00, ou seja, R$150,00.

b. Não. Dobramos o número de consultas, mas o preço não dobrou.

2.

a. Não. Um quadrado de lado 1cm tem área $1cm^2$. Já um quadrado de lado 3cm tem área $9cm^2$.

b. A razão é 9.

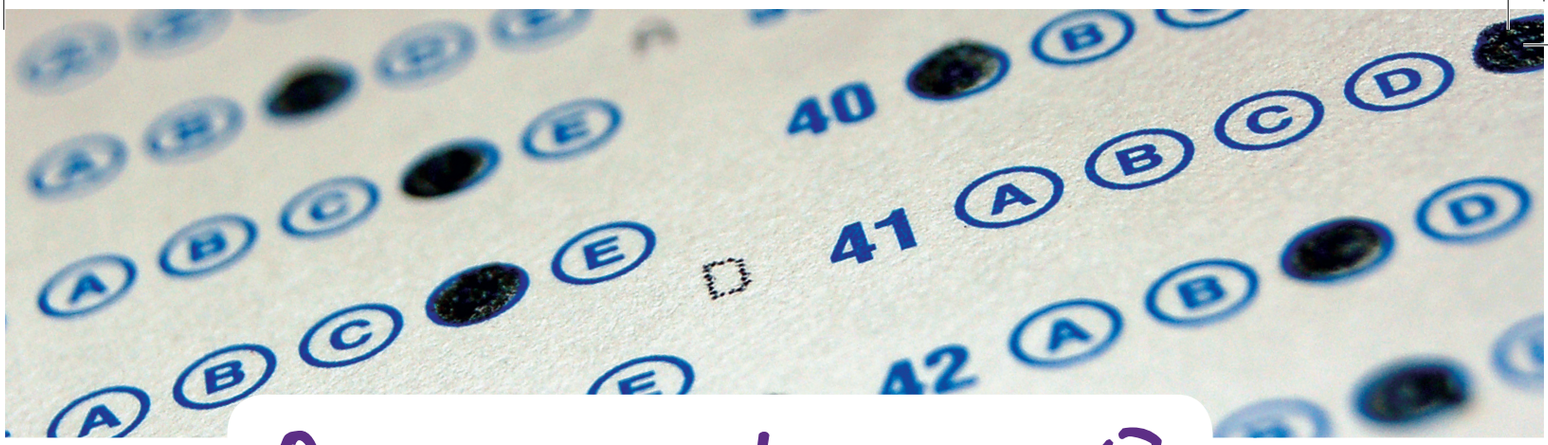
c. Não. Triplicamos a medida do lado do quadrado mas isso não implica que a área ficou multiplicada por 3.

3.

a. Essa pessoa pagará R$4,20 acrescidos de 10 vezes R$1,10, ou seja, R$15,20.

b. Se a distância máxima é x, devemos ter que $4,20 + 1,10.x = 20, 70$, ou seja, $x = 15$km.

c. Não. A distância percorrida por José é calculada pela equação $4,20 + 1,10.x = 10$. Já a distância percorrida por João é calculada pela equação $4,20 + 1,10.x = 20$. Resolva essas equações e verifique os resultados.



O que perguntam por aí?

1. **(Enem 2004)** As "margarinas" e os chamados "cremes vegetais" são produtos diferentes, comercializados em embalagens quase idênticas. O consumidor, para diferenciar um produto do outro, deve ler com atenção os dizeres do rótulo, geralmente em letras muito pequenas. As figuras que seguem representam rótulos desses dois produtos.

Peso Líquido 500g **MARGARINA** 65% de Lipídios	Peso Líquido 500g **CREME VEGETAL** 35% de Lipídios
Valor energético por porção de 10g: **59 Kcal**	Valor energético por porção de 10g: **32 Kcal** **Não recomendado** **para uso culinário**

Uma função dos lipídios no preparo das massas alimentícias é torná-las mais macias. Uma pessoa que, por desatenção, use 200 g de creme vegetal para preparar uma massa cuja receita pede 200 g de margarina, não obterá a consistência desejada, pois estará utilizando uma quantidade de lipídios que é, em relação à recomendada, aproximadamente

a. o triplo;

b. o dobro;

c. a metade;

d. um terço;

e. um quarto.

Gabarito: Letra C – A metade, pois ao usar o creme vegetal estará usando 70g de lipídios ao invés de 130g se usasse a margarina.

2. Saerjinho - A idade de Pedro está para a idade de Paulo, assim como 5 está para 6. Quantos anos têm Pedro e Paulo sabendo-se que as duas idades somadas totalizam 55 anos?

Chamaremos a idade de Pedro por **a** e a idade de Paulo por **b**. A partir do enunciado, temos que **a** está para **b**, assim como **5** está para **6**. Utilizando-nos de uma propriedade das proporções temos:

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{5+6}{6}$$

Sabemos que a soma **a** e **b** resulta em **55**, assim como **5** mais **6** resulta em **11**. Substituindo estes valores na proporção temos:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{5+6}{6}\Rightarrow\frac{55}{b}=\frac{11}{6}\Rightarrow b.11=55.6\Rightarrow b=\frac{55.6}{11}\Rightarrow b=30$$

Para calcularmos o valor de **a** temos:

$$a+b=55\Rightarrow a+30=55\Rightarrow a=55-30\Rightarrow a=25$$

Logo, Pedro tem 25 anos e Paulo tem 30 anos.

3. (ENEM-2010) Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de RS 10,00 por trabalhador por dia de trabalho, e RS 1.000,00 pelo aluguel diário de cada maquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a RS 25.000,00. Para atender as exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria:

a. manter sua proposta;

b. oferecer 4 maquinas a mais;

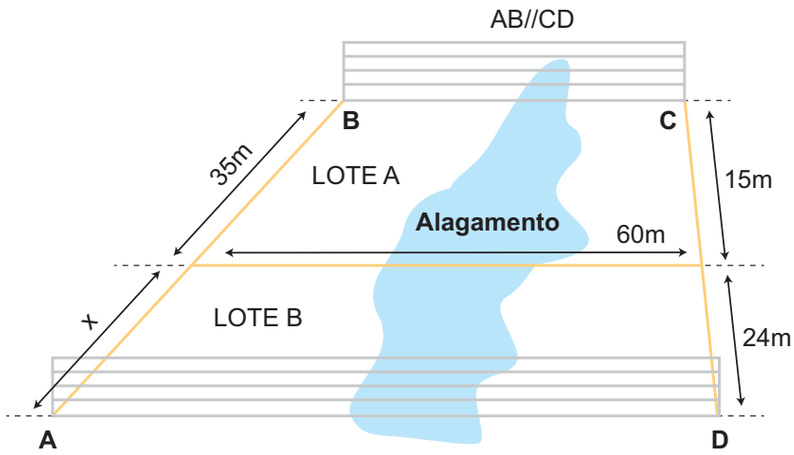
c. oferecer 6 trabalhadores a mais;

d. aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias;

e. reduzir em RS 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

Gabarito: Letra D – A opção (a) não se enquadra, já que a produção seria a mesma: 20 ha/dia=120 ha em 6 dias. Na opção (b), oferecendo 4 máquinas a mais, teríamos 8 máquinas, que, em 6 dias, estourariam o orçamento, já que custariam R$48.000,00. Na opção (c), oferecendo 6 trabalhadores a mais, chegaríamos a 18 trabalhadores, ao custo de R$10,00 o dia. Em 6 dias, resulta em R$1.080,00. Somando-se os gastos com as 4 máquinas que custam juntas R$4.000,00/dia (R$24.000,00 nos 6 dias), teríamos trabalhadores + máquinas custando R$25.080,00, o que também não atende ao combinado. Na opção (e), só reduzindo em R$400,00 o aluguel diário de uma máquina, as mesmas 4 máquinas não atendem já que a produção seria a mesma. A única opção é a (d), já que o regime de trabalho é diretamente proporcional à produção, chega-se à colheita de 180 ha em 6 dias.

4. João precisa da medida dos fundos do lote B, porém não pode efetuar essa medida no próprio local, por conta de um alagamento. Como João poderá determinar esse valor, e que valor é esse?



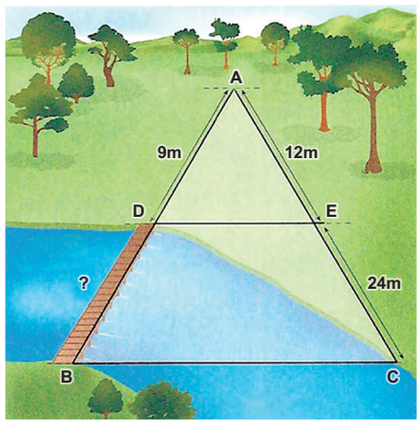
O valor dessa medida será obtido mediante o Teorema de Tales.

Utilizando a regra de três na proporcionalidade advinda desse Teorema, tem-se:

$$\frac{35}{x} = \frac{15}{24}$$
$$15x = 24 \cdot 35$$
$$x = 56$$

Gabarito: Esse valor é de 56 m.

5. Calcule o comprimento da ponte sobre o rio.



$\overline{DE} // \overline{BC}$

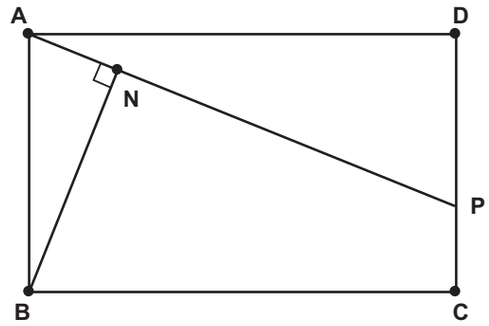
Este comprimento será obtido por meio da semelhança de triângulos.

Utilizando a regra de três na proporcionalidade advinda deste Teorema, tem-se

$$\frac{9}{9+x}=\frac{12}{36}$$
$$12(9+x)=36\cdot 9$$
$$x=18$$

Gabarito: Esse comprimento é de 18 m.

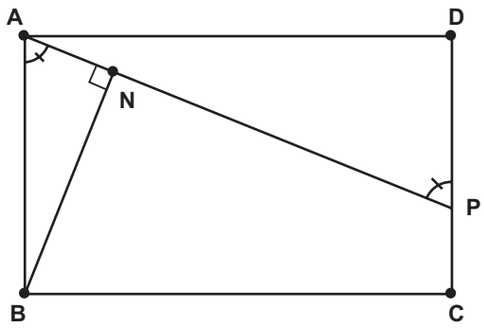
6. (OBMEP-2011) ABCD é um retângulo, AD =5 e CD = 3.



Se BN é perpendicular a AP, calcule AP x BN.

Os ângulos BÂN e AP D possuem a mesma medida, pois são complementos do ângulo DÂP. Desse modo, neste exercício será utilizada a semelhança de triângulos .

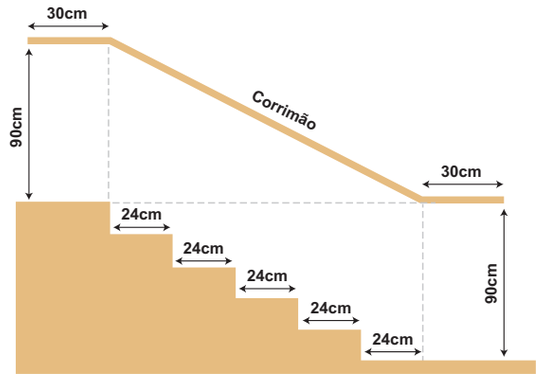
Em função da afirmação anterior, os triângulos ANB e PDA são semelhantes. Logo:



$\frac{BA}{AP}=\frac{BN}{AD}$, daí AP **.** BN = BA **.** AD = 15

Gabarito: AP **.** BN = 15

7. (ENEM-2006)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

a. 1,8 m.

b. 1,9 m.

c. 2,0 m.

d. 2,1 m.

e. 2,2 m.

Gabarito: Observe que parte do corrimão é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 90 cm e 120 cm. Pelo Teorema de Pitágoras, essa parte tem comprimento 150 cm. Assim, o corrimão tem comprimento 30 cm + 150 cm + 30 cm = 210 cm = 2,10m (D).

8. Duas pessoas, partindo de um mesmo local, caminham em direções ortogonais. Uma pessoa caminhou 12 metros para o sul, a outra, 5 metros para o leste. Qual a distância que separa essas duas pessoas?

a. 7m

b. 13m

c. 17m

d. 60m

e. 119m

Gabarito: A situação pode ser representada por um triângulo retângulo cujos catetos medem 12 m e 5 m. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância entre as pessoas (o comprimento da hipotenusa) é de 13 m (B).

Cálculo de área

Para início de conversa...

Figura 1: Estádio do Maracanã

De acordo com o site Portal da Copa, criado e mantido pelo governo federal, o plantio do novo gramado do Maracanã foi realizado entre os dias 10 e 13 de março de 2014. As 360 placas de grama utilizadas foram cultivadas numa fazenda em Saquarema (Região dos Lagos, Estado do Rio) recortadas, armazenadas em grandes rolos e depois transportadas por caminhões até o estádio. Ao todo, foram plantados nove mil metros quadrados de área.

Para ler a reportagem na íntegra, acesse o Portal da Copa, no endereço http://www.copa2014.gov.br/pt-br/noticia/finalizado-o-plantio-do-gramado-do-maracana

Multimídia

Aliás, você já foi ao Maracanã? A algum outro estádio? Nossa, assistir a um jogo ao vivo é simplesmente fantástico, não acha? Recentemente, o Maracanã foi todo reformado, e o gramado ficou perfeito! Na reportagem anterior, vemos que foram utilizadas 360 placas de grama para cobrir nove mil metros quadrados de área. Você tem ideia de qual seria o tamanho de cada placa?

Não é raro encontrarmos situações em que precisamos resolver problemas envolvendo áreas de figuras planas. Esta unidade tem justamente este foco: estudar algumas ferramentas que ajudam na solução deste tipo de problema.

Objetivos de Aprendizagem

Nesta unidade, espera-se que você:

- aplique o conceito de área de uma figura plana;
- relacione os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado;
- aplique os princípios relacionados à equivalência de áreas de figuras planas;
- calcule as áreas das principais figuras planas.

Seção 1
Conceito de área de uma superfície

Mas o que exatamente é a área de uma superfície? Vamos fazer uma atividade juntos para formalizarmos esta ideia? A ideia é a seguinte: nós apresentamos a pergunta e você, primeiramente, tenta resolver do seu jeito. Somente depois de fazer a sua solução é que você deve ler a nossa. Combinado? Muito bem, vamos lá!

A figura a seguir é uma planta baixa de um salão retangular medindo 3 metros por 5metros, representado em uma malha quadriculada onde cada quadradinho tem 0,5 metro de lado. Há três tipos de pisos que podem ser utilizados para revestir este salão:

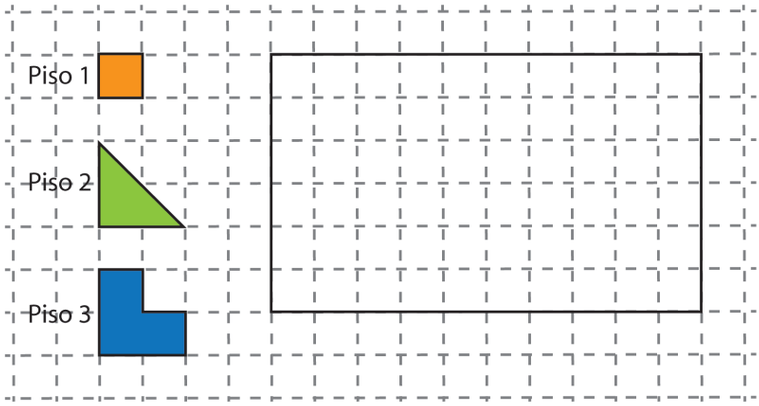


Figura 2: Planta do salão retangular

Nossa primeira pergunta é: se revestíssemos o salão com um único tipo de piso, quantos pisos de cada tipo seriam necessários para cobri-lo?

Pensou a sua solução? Muito bem, eis a nossa: observando atentamente a Figura 2, podemos ver que ela é formada por 6 fileiras de 10 quadrados, idênticos ao piso do tipo 1. Assim, são necessários 60 pisos tipo 1 para preencher o salão. Já o piso 2 pode ser usado de maneira que 10 pisos preencham duas fileiras de quadrados de uma vez. Serão então necessários 30 pisos do tipo 2 para preencher o salão. Veja na figura

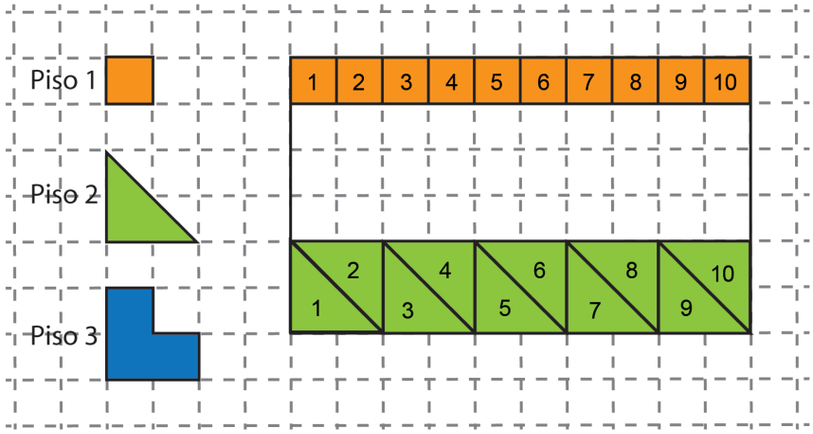


Figura 3: Planta do salão retangular preenchida por pisos do tipo 1 e do tipo 2.

Há , ainda, outra solução: se vocês olharem bem, o piso tipo 2 é duas vezes maior do que o piso tipo 1 – vocês conseguem ver isso? Se nós cortarmos a ponta direita do triângulo do piso tipo 2 e rodarmos essa ponta para cima, até que ela se junte à que restou do triângulo e forme um retângulo, esse retângulo terá o tamanho de dois pisos do tipo 1. Veja na Figura 4. Dessa forma, como o piso tipo 2 é duas vezes maior que o piso tipo 1 – e precisamos de 60 pisos tipo 1 para pavimentar o salão – precisaremos apenas de 30 pisos tipo 2 para fazer a mesma tarefa.

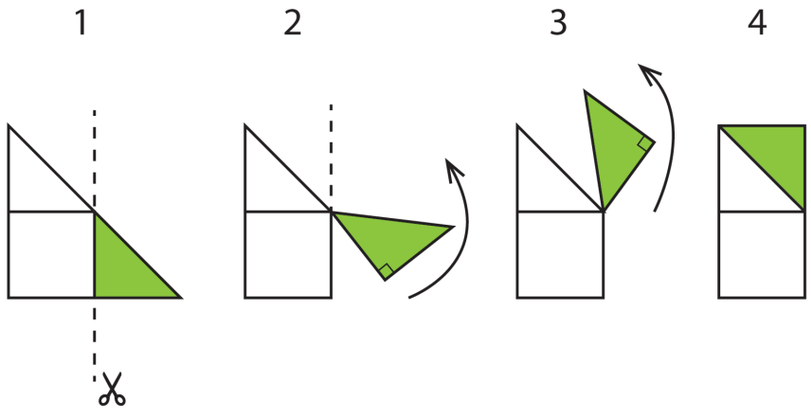
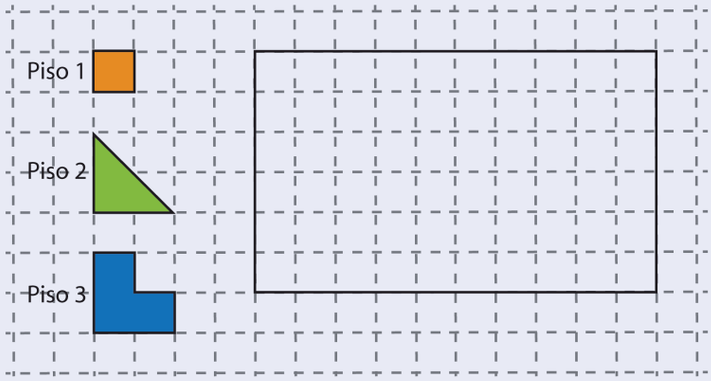


Figura 4: O piso tipo 2 tem duas vezes o tamanho do piso tipo 1

Fizemos juntos a primeira e a segunda pergunta. Será que você consegue fazer a terceira por conta própria? Ei-la:



Atividade 1

Quantos pisos do tipo 3 serão necessários para preencher o mesmo salão dos exemplos anteriores?

Anote suas respostas em seu caderno

Vamos fazer mais uma juntos? Ótimo! Procure agora um lápis, uma borracha e uma malha quadriculada, como a da figura a seguir. Nossa dica é a já tradicional folha de papel quadriculado. Arranjou? Muito bem: desenhe nela 3 figuras, de maneira que cada uma delas seja obtida com a utilização de 10 pisos do mesmo tipo. Os pisos, convém lembrar, são os mesmos dos exemplos e atividades anteriores. Qual das figuras que você desenhou ocupa a maior parte da malha quadriculada? E qual ocupa a menor parte?

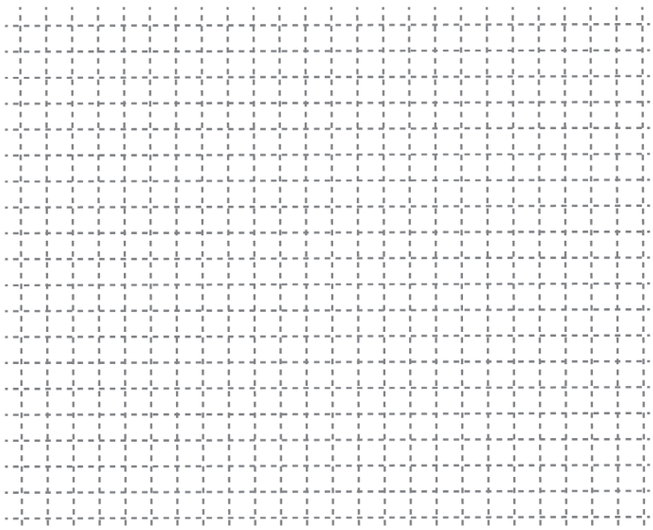
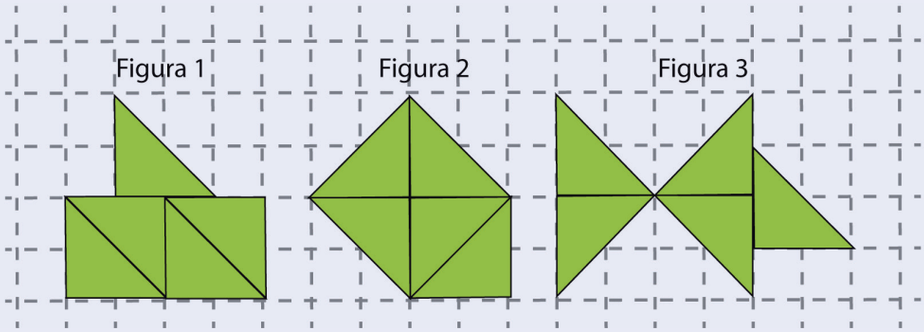


Figura 5: Malha quadriculada

Do ponto de vista da forma, o problema admite uma quantidade muito grande de soluções. No entanto, é importante perceber que o piso do tipo 3 ocupa uma parte maior da malha quadriculada em relação aos pisos de outros tipos. Por isso, a figura criada com 10 pisos do tipo 3 ocupa a maior parte da malha. Como um piso do tipo 1 ocupa uma parte menor da malha em relação aos outros, a figura obtida com 10 pisos do tipo 1 ocupa a menor parte da malha. A figura obtida com 10 pisos do tipo 2 tem tamanho intermediário. Que tal mais uma atividade?

Atividade 2

A figura a seguir mostra diferentes figuras, que foram cobertas com 5 pisos do tipo 2. Essas figuras ocupam partes iguais ou diferentes da malha quadriculada?



Anote suas respostas em seu caderno

Formalizando...

A área de uma figura é a medida do tamanho da sua superfície. A medida da área de uma região é obtida por comparação: comparamos a superfície cuja área queremos determinar com outra cuja área conhecemos. O resultado desta comparação indica a medida da área da primeira região medida em unidades do tamanho da segunda região. Lembrando dos pisos das atividades anteriores, podemos dizer que a área do piso 3 é três vezes a área do piso 1 e que a área do piso 2 é duas vezes a área do piso 1.

A unidade padrão de medida de área é o metro quadrado, que é a área de uma região equivalente à região delimitada por um quadrado com um metro de lado.

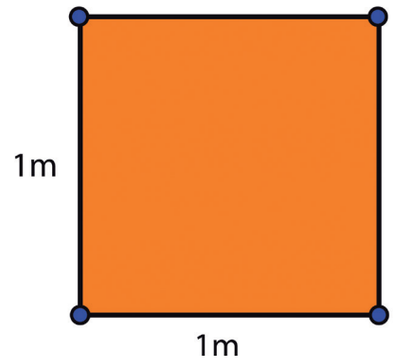
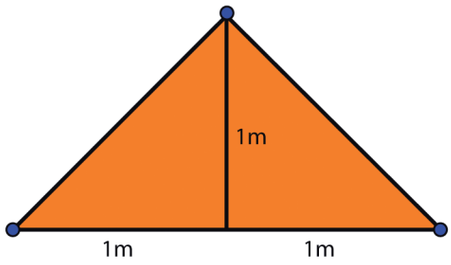
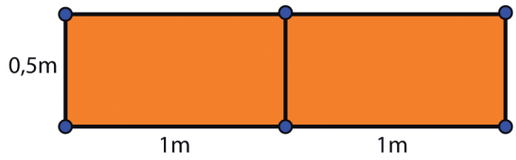


Figura 6: Quadrado com um metro quadrado de área

Ter um metro quadrado de área não é propriedade exclusiva dos quadrados: Se dividirmos o quadrado anterior em dois triângulos, podemos reagrupá-los de modo que formem um novo triângulo com $1m^2$ de área (na figura, à esquerda). Agora, se dividirmos o quadrado anterior em dois retângulos, podemos formar um novo retângulo que também tem $1m^2$ de área. (na figura, à direita)





Saiba Mais

Seção 2
O metro quadrado, seus múltiplos e submúltiplos

Certamente você já conhece o metro quadrado, não é? Da mesma forma que o metro, ele também tem seus múltiplos e submúltiplos. Vamos conhecê-los?

Os múltiplos do metro quadrado são o decâmetro quadrado, o hectômetro quadrado e o quilômetro quadrado.

Um decâmetro quadrado (dam^2) é a área ocupada por um quadrado, cujo lado mede um decâmetro. Como 1dam vale 10 metros, é uma área equivalente a 10 m x 10 m = 100 m^2.

Um hectômetro quadrado (hm^2) é a área ocupada por um quadrado, cujo lado mede um hectômetro. Como 1 hm vale 100 metros, é uma área equivalente a 100 m x 100 m = 10.000 m^2. O hectômetro quadrado também é chamado de hectare.

Um quilômetro quadrado (km^2) é a área ocupada por um quadrado, cujo lado mede um quilômetro. Como 1 km vale 1000 metros, é uma área equivalente a 1000 m x 1000 m = 1.000.000 m^2.

Os submúltiplos do metro quadrado são unidades menores que o metro quadrado, construídas como subdivisões do metro quadrado. Vejam só.

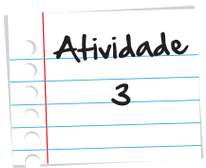
Um decímetro quadrado (dm^2) é a área ocupada por um quadrado, cujo lado mede um decímetro. Como 1 dm vale 0,1 metro, logo, é uma área equivalente a 0,1 m x 0,1 m = 0,01 m^2.

Um centímetro quadrado (cm^2) é a área ocupada por um quadrado, cujo lado mede um centímetro. 1 cm vale 0,01 metro, logo, é uma área equivalente a 0,01 m x 0,01 m = 0,0001 m^2.

Um milímetro quadrado (mm^2) é a área ocupada por um quadrado, cujo lado mede um milímetro. Como 1 mm vale 0,001 metro, logo, é uma área equivalente a 0,001 m x 0,001 m = 0,000001 m^2.

Estas unidades derivadas do metro quadrado são pouco usadas na prática, exceção feita ao hectômetro quadrado, que costuma aparecer nas transações rurais por meio do seu equivalente, o hectare.

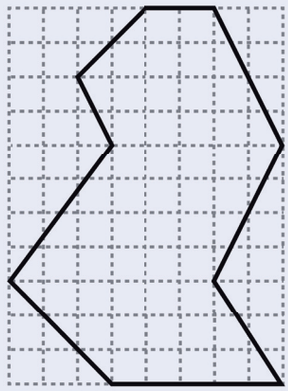
Vamos praticar um pouco? Tente resolver os exercícios propostos a seguir!



Jorge deseja colocar piso em sua casa que possui 55 m^2. Ele usará o mesmo piso em toda a casa, que é vendido em caixas com quantidade suficiente para cobrir uma área de 2,2 m^2. Quantas caixas de piso, no mínimo, Jorge deve comprar?

Anote suas respostas em seu caderno

(PIC-OBMEP-Apostila 3[1]) Na figura a seguir, cada quadrícula representa uma unidade de área. Qual é a área do polígono que aparece no interior do quadriculado?



Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

1 Texto disponível em http://www.obmep.org.br/docs/Apostila3-teorema_de_pitagoras.pdf.

Seção 3
O Tangram

O Tangram é um famoso quebra-cabeça de origem chinesa, cujas peças são usadas para criar formas humanas, animais e letras do nosso alfabeto, entre outras formas geométricas. As sete peças do Tangram – cinco triângulos retângulos, um quadrado e um paralelogramo - são obtidas a partir de cortes realizados em um quadrado. Veja na figura.

Figura 7: Tangram

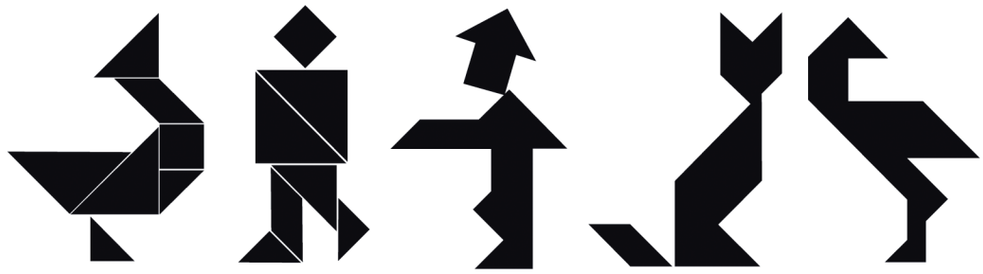
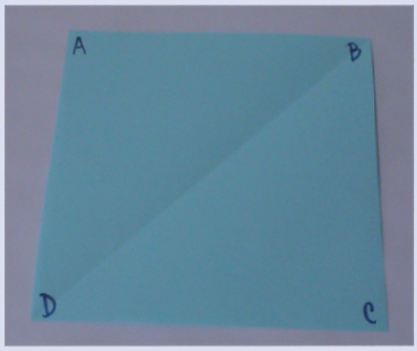
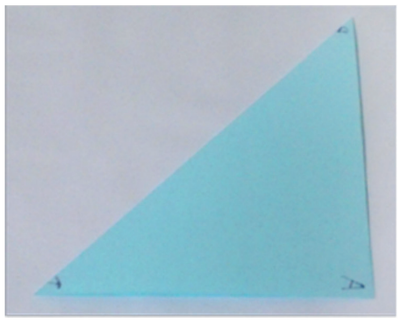
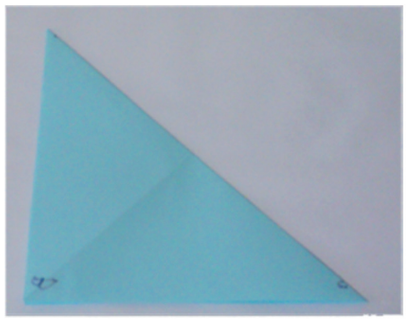
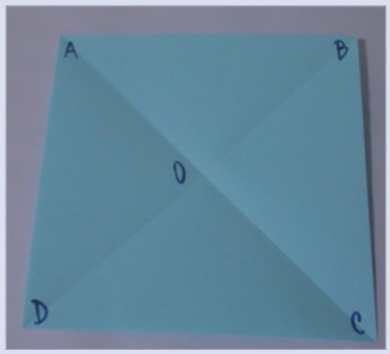
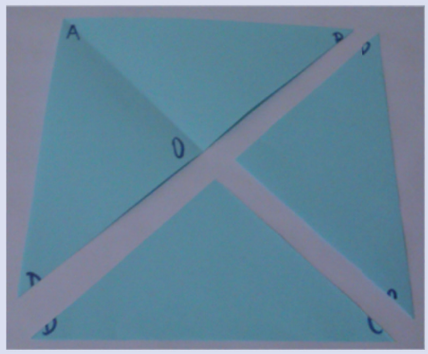
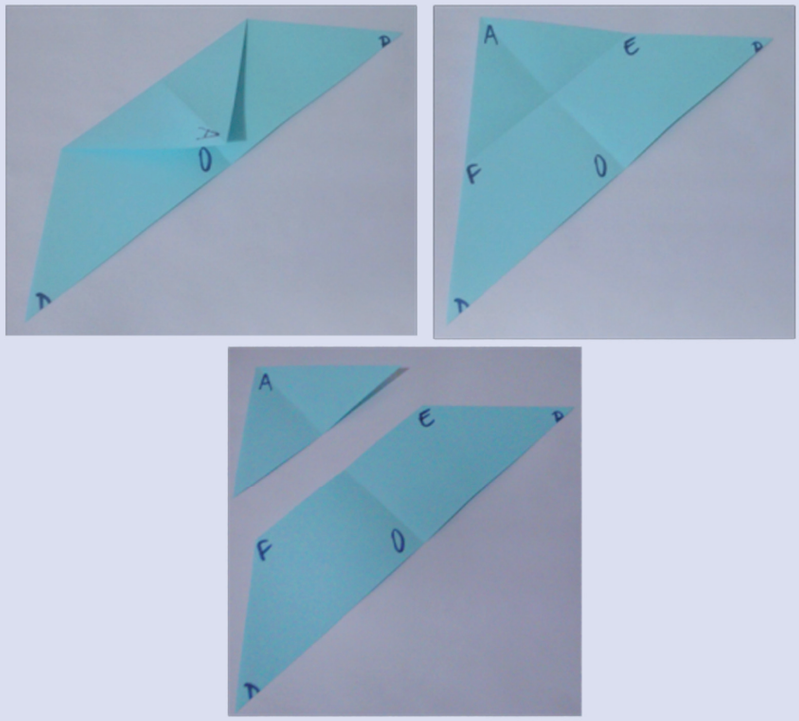
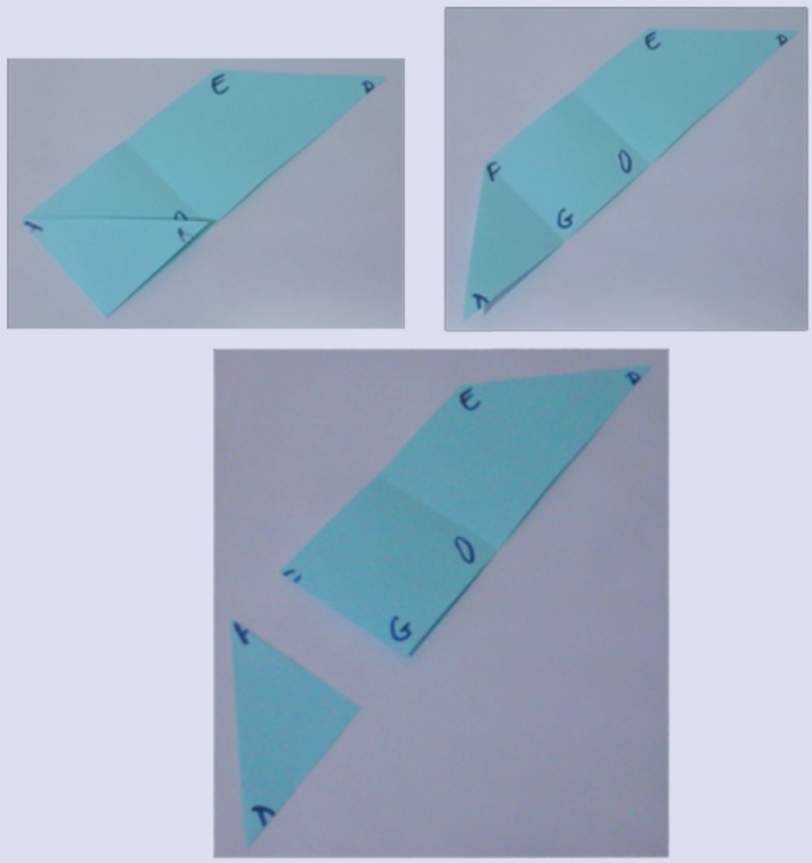
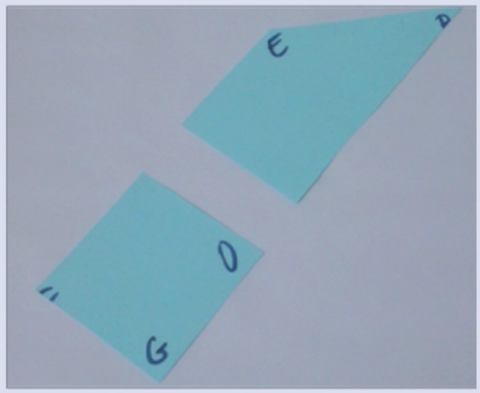
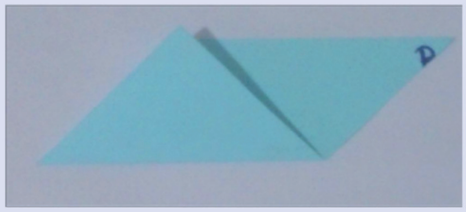
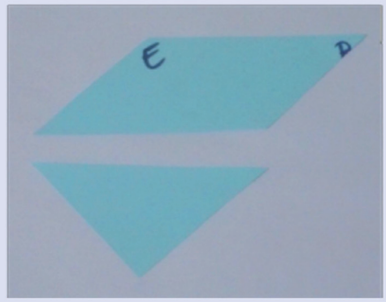
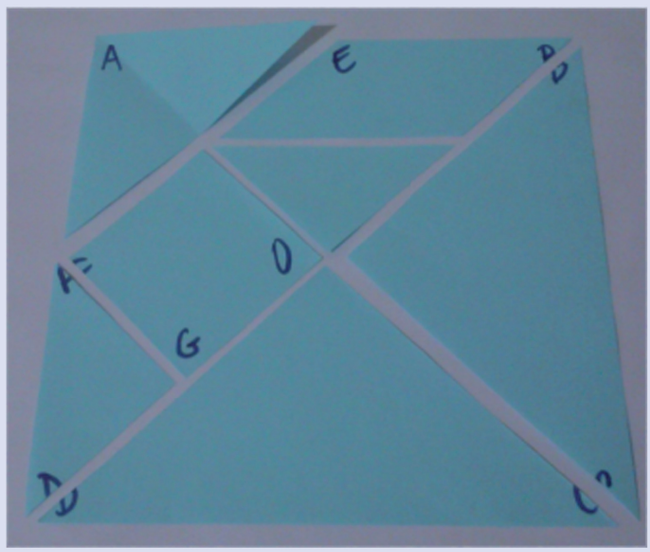


Figura 8: Exemplos de figuras obtidas com o Tangram

Vamos construir um Tangram para usar nas próximas atividades? Para isso, precisaremos de uma folha A4 e de uma tesoura. Veja o passo a passo na tabela a seguir

1		Com a folha de papel, recorte um quadrado. Escreva, no verso da folha, as letras A, B, C e D próximo a cada vértice desse quadrado.
2	 	Dobre o quadrado fazendo coincidir os vértices A e C. Abra e faça o mesmo com os vértices B e D.
3	 	Escreva a letra O perto do ponto de encontro das diagonais AC e BD. Recorte sobre as dobras os triângulos BOC e COD.

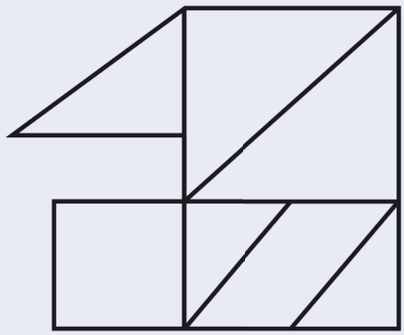
4		Dobre de maneira que o vértice A coincida com o ponto O. A dobra encontrará as arestas AB e AD nos pontos E e F, respectivamente. Recorte o triângulo AEF.
5		Dobre de maneira que o vértice D coincida com o ponto O. A dobra encontrará a diagonal BD no ponto G. Recorte o triângulo DFG.

6		Note que a diagonal AC deixou uma dobra passando pelo ponto O. Corte sobre esta dobra e obtenha o quadrado com vértices F, G e O, além de um quarto vértice não nomeado em nosso roteiro.
7	 	Dobre de maneira que o vértice O coincida com o ponto E. Corte sobre esta dobre e obtenha os polígonos que restam: um triângulo e um paralelogramo.
8		O resultado final deve ser como o da imagem.

Tudo cortado? Ótimo, hora das atividades

Atividade 5

1. Com as 7 peças recortadas no item a, tente montar as figuras apresentadas na Figura 8.
2. As figuras montadas com as peças do Tangram têm áreas iguais ou diferentes?
3. Forme, com as peças do Tangram, a figura desenhada a seguir



O que acontece com a área e com o perímetro da figura, quando:

deslocamos o quadrado até ele encostar no triângulo médio?

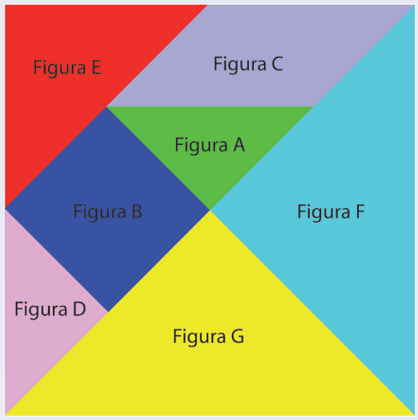
retiramos o quadrado?

recolocamos o quadrado e retiramos o paralelogramo?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 6

Calcule a área de cada peça do Tangram utilizando uma delas como unidade. Registre as respostas na tabela a seguir. A unidade de área é dada na primeira coluna.



Atividade 6

Observe o exemplo: A Figura A cabe uma vez na Figura A, duas vezes na Figura B, duas vezes na Figura C, uma vez na Figura D, duas vezes na Figura E, quatro vezes na Figura F e quatro vezes na Figura G. A segunda linha da tabela foi preenchida com essas informações. Agora é sua vez!

Unidade de área	Figura A	Figura B	Figura C	Figura D	Figura E	Figura F	Figura G
Figura A	1	2	2	1	2	4	4
Figura B							
Figura C							
Figura D							
Figura E							
Figura F							
Figura G							

Se a área da figura C fosse 12 cm^2, qual seria a área de cada uma das outras figuras?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 7

Responda às questões propostas a seguir:

1 - Um retângulo ABCD possui área 24 cm^2. Se BD é uma de suas diagonais, qual é a área do triângulo ABD?

2 - Um triângulo equilátero ABC possui área 20 m^2. Se AH é uma altura, qual é a área do triângulo AHB?

3 - Um círculo tem área 27 cm^2 e foi dividido em partes iguais como mostra a figura abaixo. Qual é a área da parte hachurada nessa figura?

Atividade 7

Anote suas respostas em seu caderno

Há alguns pontos importantes que os exercícios que você acabou de fazer abordam. Veja quais são:

Figuras planas iguais têm a mesma área.

Se uma figura plana é dividida em várias partes, qualquer figura nova montada com todas essas partes tem a mesma área da figura original.

Se você divide uma figura plana em partes iguais, as áreas dessas partes serão iguais.

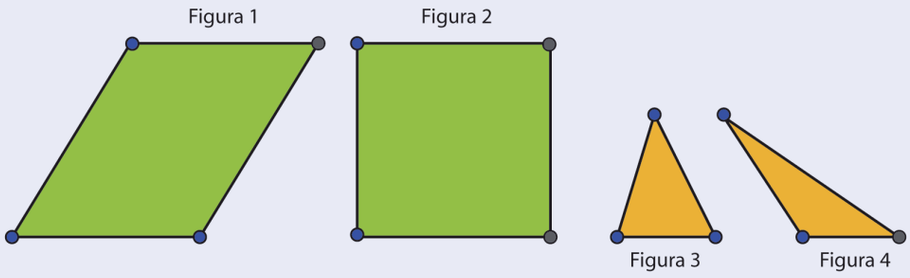
Vamos continuar tentando resolver exercícios?

Na figura a seguir, temos 4 polígonos tais que:

as figuras 1 e 2 são polígonos que têm a mesma área;

as figuras 3 e 4 são polígonos que têm a mesma área.

Atividade 8



Atividade 8

Responda às seguintes perguntas:

d. As figuras a seguir foram construídas unindo-se alguns destes polígonos. Quais dessas figuras têm a mesma área?

Figura A

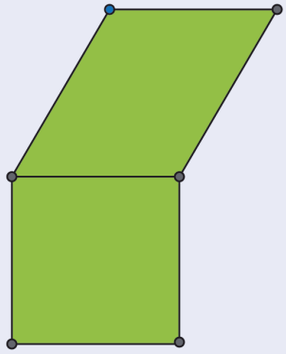


Figura B

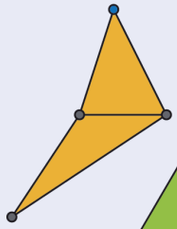


Figura C

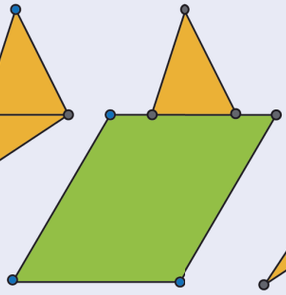


Figura D

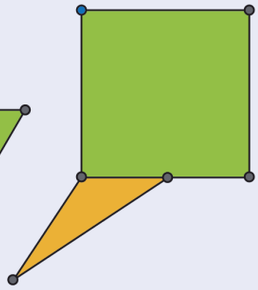


Figura E

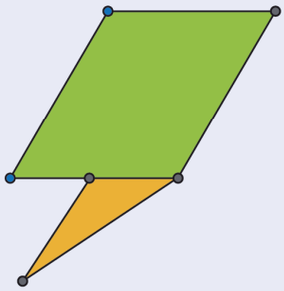
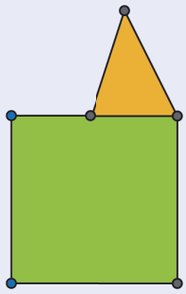
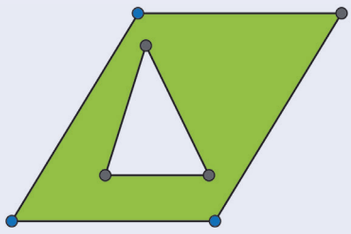
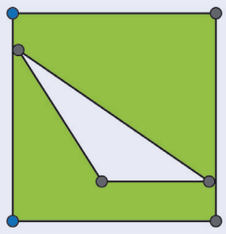


Figura F



e. As figuras a seguir foram obtidas a partir dos polígonos 1 e 2 abrindo-se "buracos" com o formato dos polígonos 3 e 4. O que podemos afirmar sobre as áreas destas figuras resultantes?





Anote suas respostas em seu caderno

Sabe o que podemos concluir a partir desse exercício?

Se duas figuras planas têm a mesma área e delas retiramos ou acrescentamos outras figuras planas de mesma área, as figuras resultantes também têm a mesma área.

Excelente! Já vimos o que é área e algumas unidades padronizadas de medida de área. Vimos ainda alguns princípios importantes no estudo de áreas.

Importante

Figuras planas iguais têm a mesma área.

Se uma figura plana é dividida em várias partes, qualquer figura nova montada com todas essas partes tem a mesma área da figura original.

Se você divide uma figura plana em partes iguais, as áreas dessas partes serão iguais.

Se duas figuras planas têm a mesma área e delas retiramos ou acrescentamos outras figuras planas de mesma área, as figuras resultantes também têm a mesma área.

Vamos agora ver como calcular a área de alguns polígonos particulares: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, losango e trapézio.

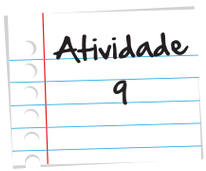
Seção 4
Áreas das principais figuras planas

Nesta seção, vamos construir juntos as fórmulas que permitem calcular as áreas das principais figuras planas. A primeira fórmula que abordaremos é a que permite calcular a área de um retângulo a partir do comprimento dos seus lados. Para conhecê-la, realizaremos uma atividade. Vamos lá?

Atividade 9

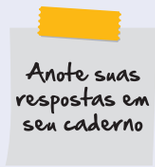
Considere como unidade de medida um quadrado de lado 1 cm, isto é, 1 cm^2. Desenhe as figuras especificadas em cada item e, a partir do desenho, responda quantas vezes o quadrado de lado 1 cm cabe

1. Em um retângulo de dimensões 3 cm e 4 cm?
2. Em um quadrado de lado 5 cm?



3. Em um retângulo de dimensões 3,5 cm e 4 cm?

4. Em um retângulo de diensões 3,5 cm e 4,5 cm?



Generalizando, podemos dizer que a área A de um retângulo de dimensões (largura e comprimento) b e h pode ser calculada pelo produto da largura pelo comprimento, ou seja, $A = b \times h$. Não se esqueça de que as dimensões devem ser medidas na mesma unidade de comprimento.

Como um quadrado é um retângulo com largura e comprimento iguais, sua área A será calculada pelo quadrado do lado (L), ou seja, $A = L \times L = L^2$.

Vamos ver mais algumas relações que permitem calcular áreas?

Área do paralelogramo

Um paralelogramo é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos. A Figura 9 mostra um paralelogramo e as medidas de um dos seus lados (que denominaremos de sua base, de medida b) e da altura relativa a esse lado (de medida h).

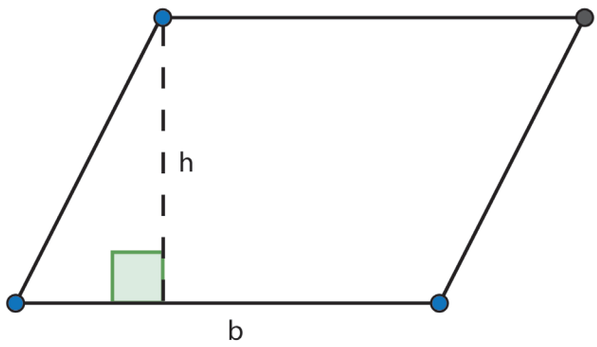


Figura 9: Paralelogramo.

Já sabemos determinar a área de um retângulo. Na figura a seguir, cortamos o paralelogramo em duas partes: um triângulo retângulo e um trapézio. Em seguida, mudamos colamos essas partes de outra forma, de modo a obter um retângulo. Veja a figura a seguir.

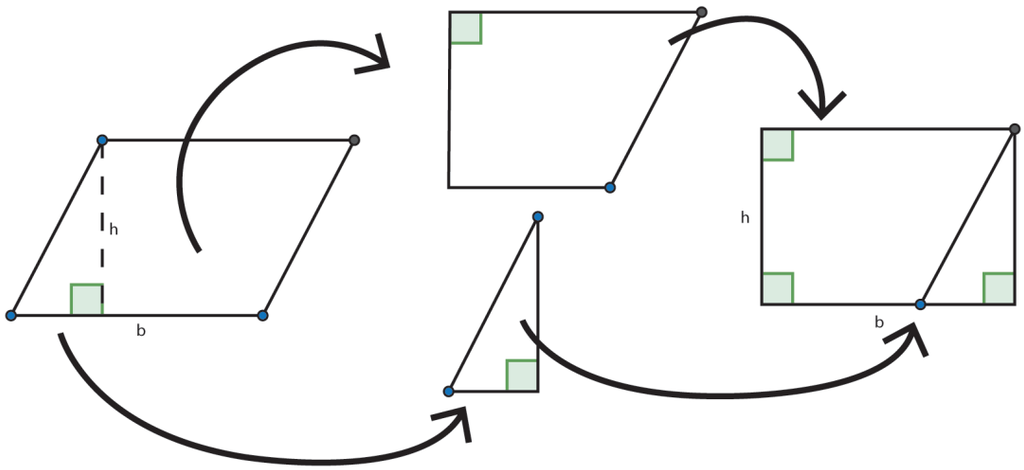


Figura 10: Montando o retângulo a partir de um paralelogramo.

O retângulo que encontramos assim tem dimensões b e h, logo, sua área é dada por bxh. Como o retângulo novo foi obtido de partes que formavam o paralelogramo original, podemos afirmar que estes polígonos possuem a mesma área. Assim, a área de um paralelogramo de base b e altura h é bxh. Mas cuidado: a medida h da altura não coincide com a medida do seu lado que está inclinado com relação à base.

Área do triângulo

A Figura 11 mostra um triângulo, com um lado de medida b, que será chamado de base, e com a altura h relativa a esse lado. Podemos refletir este triângulo em relação a um de seus lados. Veja:

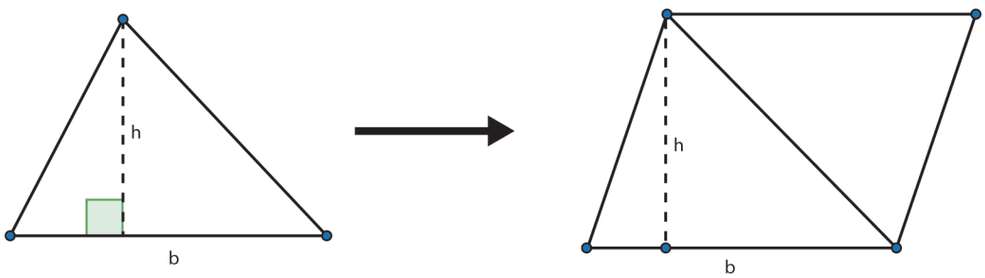


Figura 11: Triângulo com base b e altura h isolado (à esquerda) e acrescido de sua reflexão (à direita)

Vocês observaram que a figura formada pelo triângulo e o outro refletido é um paralelogramo? Então a área do triângulo inicial é metade da área desse paralelogramo, ou seja, é a metade da área do paralelogramo de base b e altura h, isto é, $\frac{b.h}{2}$.

Área do losango

Um losango é um quadrilátero que possui lados de mesma medida. Em um losango, os lados opostos são paralelos e as diagonais se cruzam formando ângulo de 90º. A fFgura 12 mostra um losango, as medidas dos seus lados e as medidas das suas diagonais.

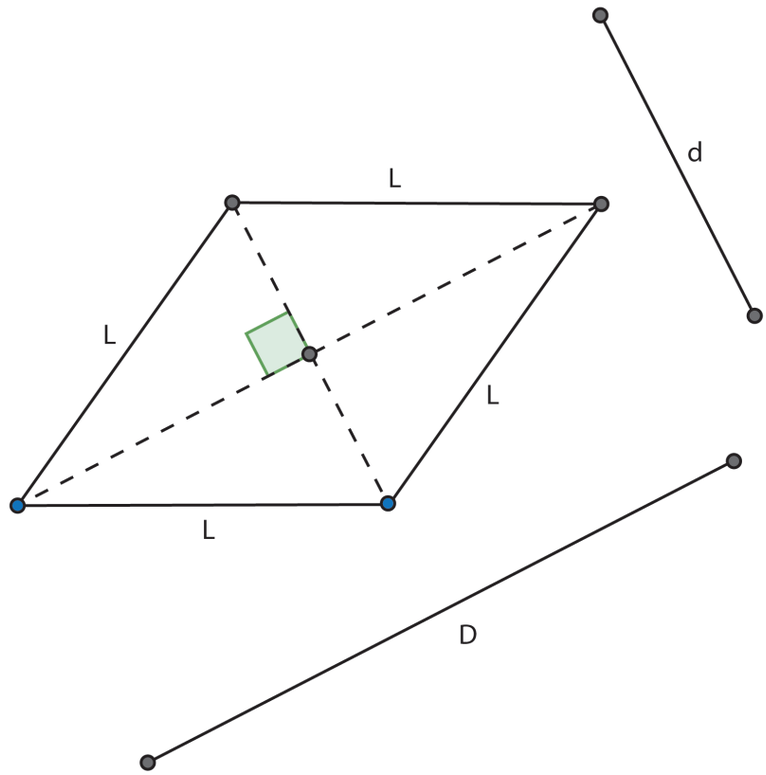


Figura 12: Losango com as medidas dos lados e diagonais

Você observou que, quando traçamos as diagonais do losango, nós o dividimos em quatro triângulos iguais? Bem, se conseguirmos calcular a área de um desses triângulos, basta multiplicar por quatro e teremos a área do losango!

Então, esses triângulos são triângulos retângulos onde os catetos (lados que formam o ângulo reto) medem metade de cada diagonal. Então a área de cada um desses triângulos é igual a $\frac{\frac{d}{2}\cdot\frac{D}{2}}{2}=\frac{d\cdot D}{8}$. Já estamos prontos então para determinar a área do losango: será igual a $4\cdot\frac{d\cdot D}{8}=\frac{d\cdot D}{2}$

Área do trapézio

Um trapézio é um quadrilátero que possui dois lados paralelos. Os lados paralelos são chamados de base maior (de medida B) e base menor (de medida b) e a distância h entre essas bases é a medida da altura do trapézio. A Figura 13 mostra um trapézio.

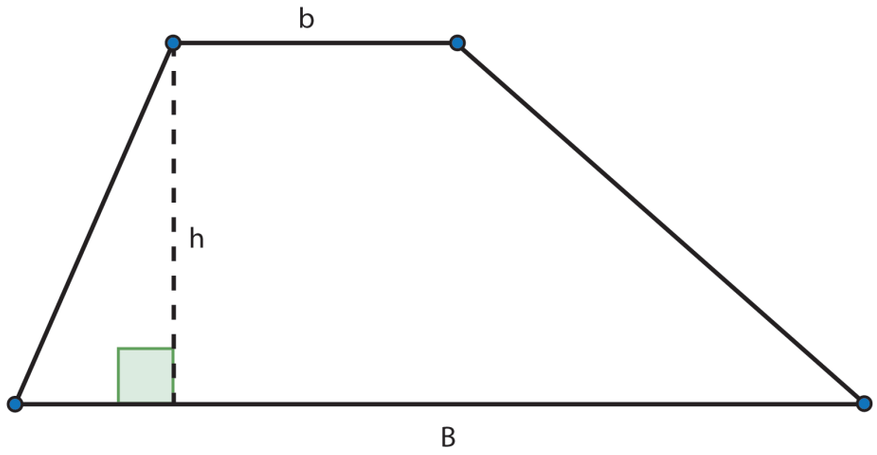


Figura 13: Trapézio com base maior B, base menor b e altura h.

Se juntarmos dois trapézios iguais podemos sempre formar um paralelogramo. Veja a figura 14.

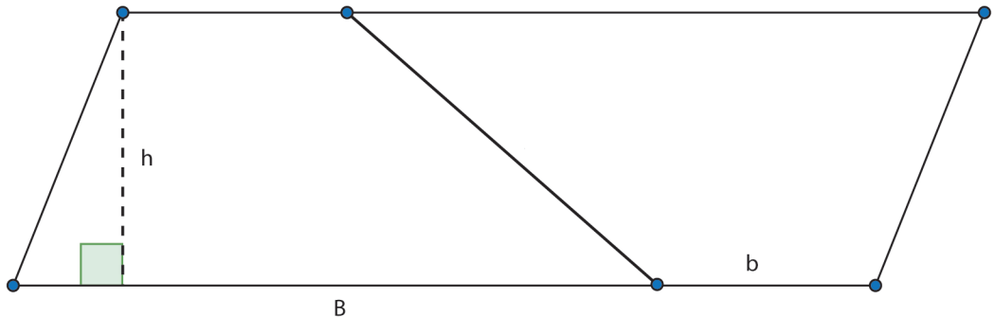


Figura 14: Dois trapézios idênticos juntos, formando um paralelogramo.

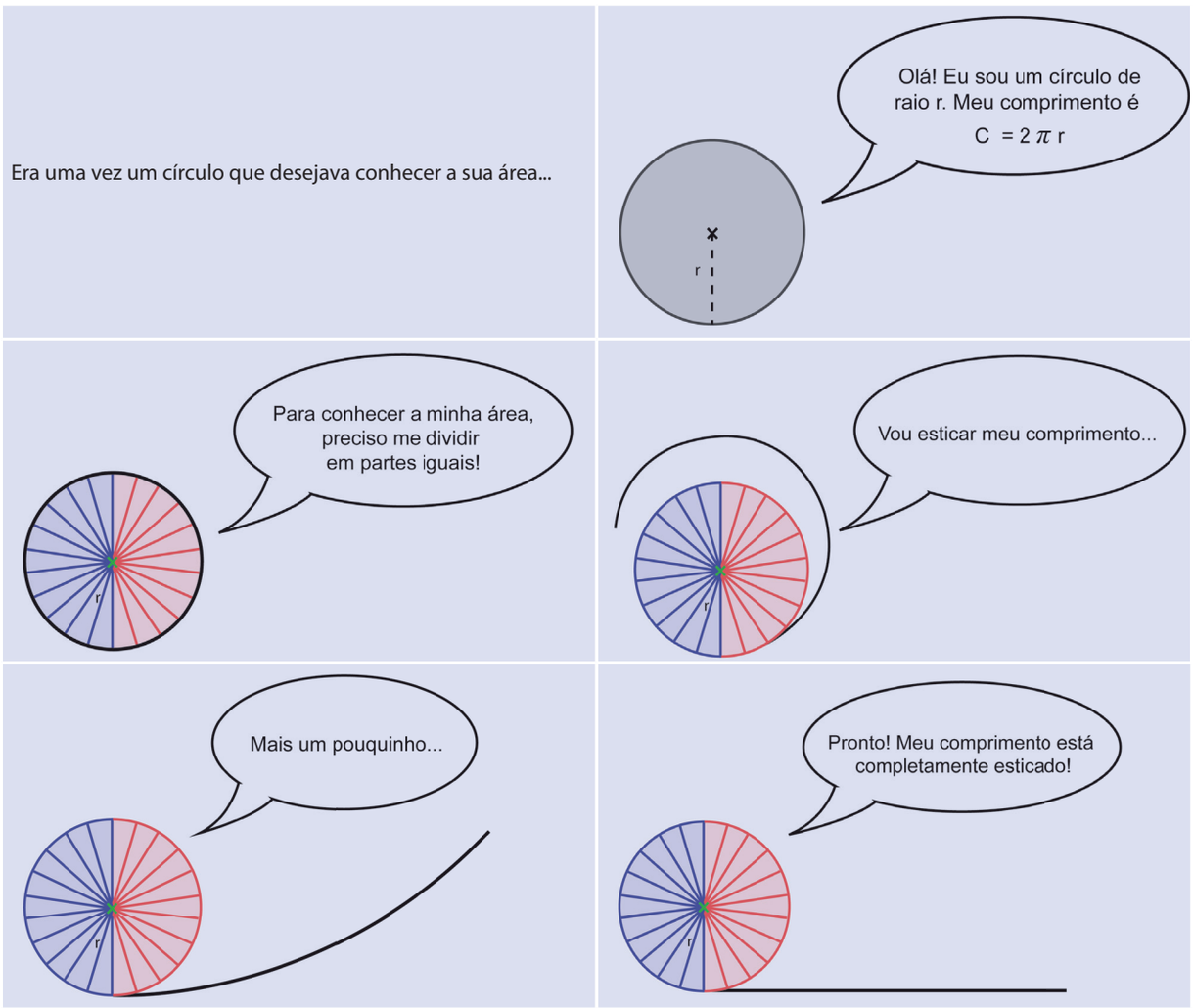
Esta observação nos ajuda a determinar a área do trapézio: ela será a metade da área do paralelogramo de base B+b e altura h, isto é, $\frac{(B+b)\times h}{2}$.

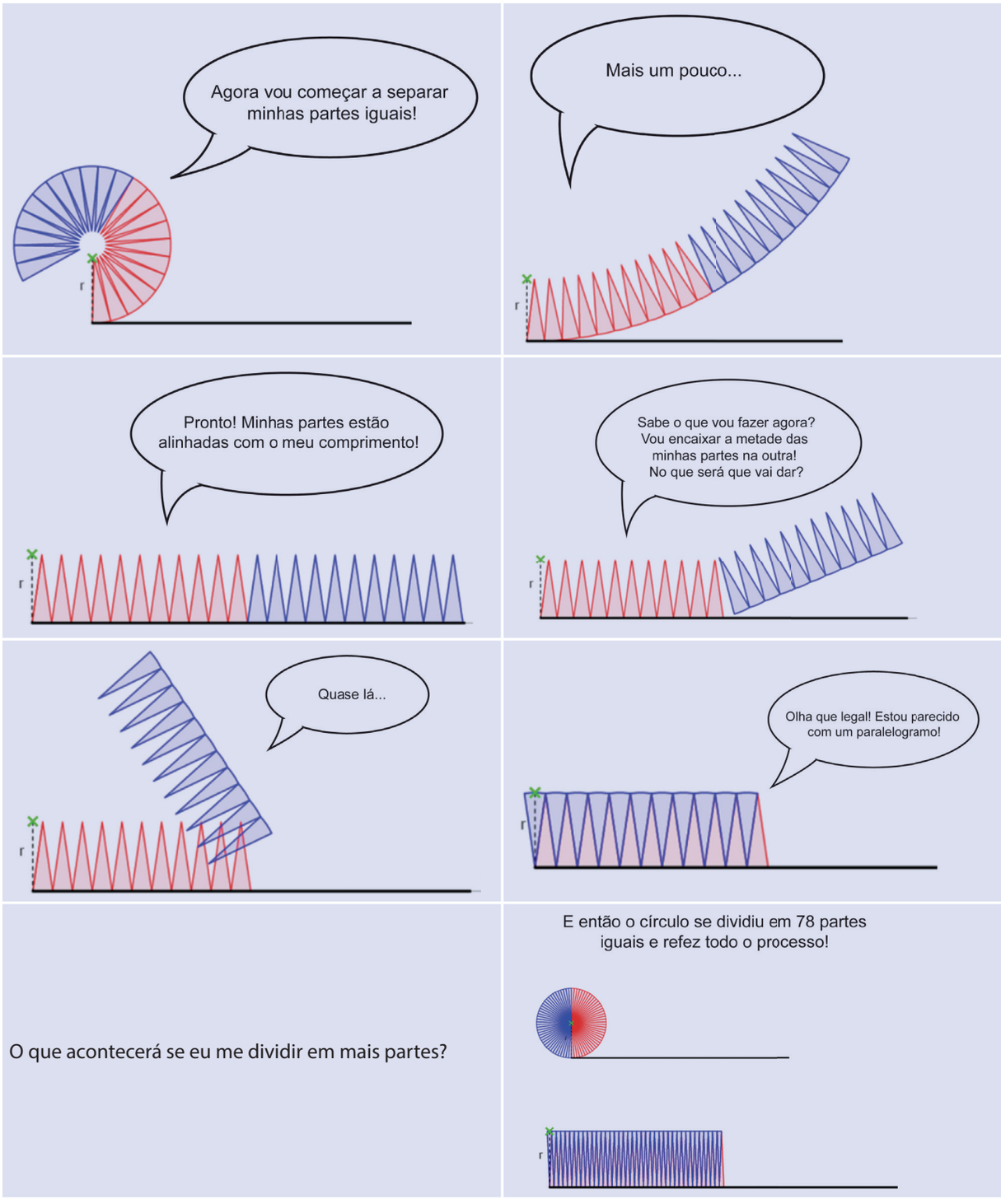
E a área de um círculo, como pode ser calculada?

Área do círculo

O círculo não pode ser decomposto em figuras planas, como triângulos, retângulos etc., e, por isso, um bom tempo se passou até que os matemáticos conseguissem encontrar uma maneira de calcular exatamente sua área. Durante esse tempo, desenvolveram várias estratégias de cálculo aproximado da área de um círculo e encontraram uma propriedade surpreendente – e muito interessante: se dividirmos o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro, encontraremos sempre o mesmo valor, independentemente do tamanho que essa circunferência venha a ter. Esse valor, que também surge na modelagem de vários fenômenos naturais, foi batizado com a letra grega pi (π).

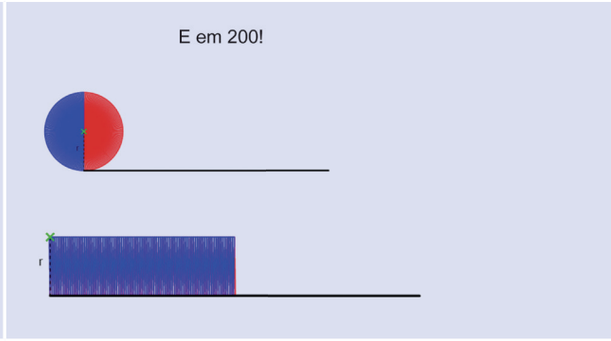
Veja a seguir uma história em quadrinhos que explica uma das estratégias utilizadas para encontrar a área do círculo.




Agora vou começar a separar minhas partes iguais!
r
Mais um pouco...
r
Pronto! Minhas partes estão alinhadas com o meu comprimento!
r
Sabe o que vou fazer agora? Vou encaixar a metade das minhas partes na outra! No que será que vai dar?
r
Quase lá...
r
Olha que legal! Estou parecido com um paralelogramo!
r
O que acontecerá se eu me dividir em mais partes?
E então o círculo se dividiu em 78 partes iguais e refez todo o processo!
r

E sabe o que ele percebeu?

Que em quanto mais partes ele se dividir, mais parecido com um retângulo ele ficará. Esse retângulo terá base igual à metade do comprimento do círculo e altura igual ao seu raio!



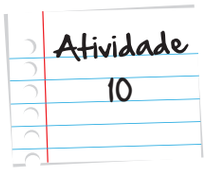
E então agora ele consegue encontrar a sua área! Se a área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura, então a área do círculo é igual ao produto da metade do comprimento do círculo (π . r) pelo seu raio r, ou seja, é igual a π . r^2

Essa é uma das maneiras de mostrar que a área de um círculo pode ser calculada pela expressão πr^2 .

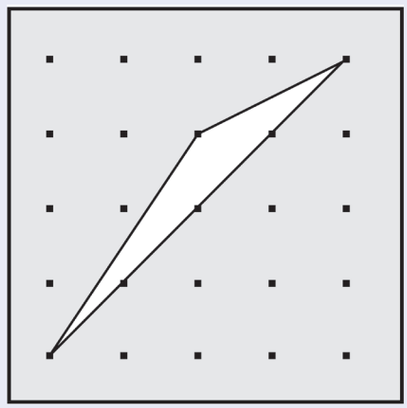
No endereço http://www.geogebratube.org/student/m159 você encontrará uma tela interativa que permite aumentar o número de lados de um polígono e verificar como este se aproxima de um círculo.

Já no endereço http://www.geogebratube.org/student/m279 você encontra uma animação interativa com a história que acabamos de apresentar.

Vamos exercitar um pouco?



(FUVEST) Considere o triângulo representado na malha pontilhada, formada por quadrados de lados iguais a 1 cm. A área do triângulo, em cm^2, é



a. 2

b. 3

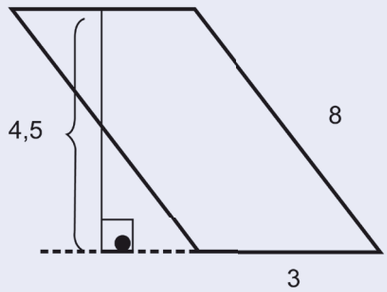
c. 4

d. 5

e. 6

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 10



A área do paralelogramo ABCD abaixo vale:

a. 36

b. 13,5

c. 18

d. 27

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 11

Atividade 12

(ENEM 2009) O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

biomas continentais brasileiros	área aproximada (Km^2)	Área / total Brasil
Amazônia	4.196.943	49,29%
Cerrado	2.036.448	23,92%
Mata atlântica	1.110.182	13,04%
Caantiga	844.453	9,92%
Pampa	176.496	2,07%
Pantanal	150.355	1,76%
Área Total Brasil	8.514.877	

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com as medidas de 120 m x 90 m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?

a. 1.400

b. 14.000

c. 140.000

d. 1.400.000

e. 14.000.000

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 13

Um triângulo equilátero é tal que o seu lado mede 10 cm.

1 - Calcule a medida da sua altura.

2 - Determine a sua área.

Anote suas respostas em seu caderno

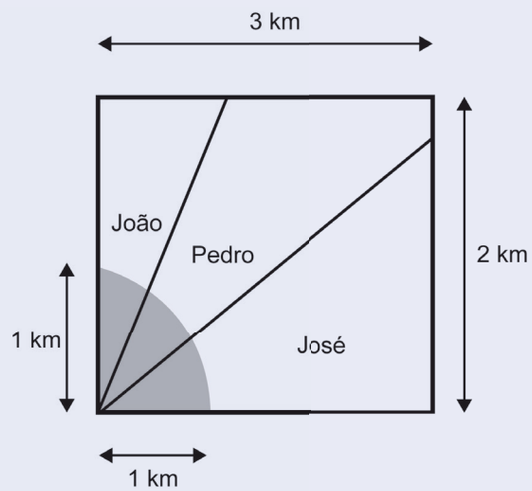
Atividade 14

Um triângulo retângulo possui catetos que medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Determine a área desse triângulo.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 15

(ENEM 2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km. O terreno contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



Atividade 15

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$)

a. 50%.

b. 43%.

c. 37%.

d. 33%.

e. 19%.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 16

Dado o losango ABCD, sabe-se que a sua área é de 33 metros quadrados e sua diagonal AD mede 8,8m. Logo, a diagonal BC mede:

a. 6,55 m

b. 3,75 m

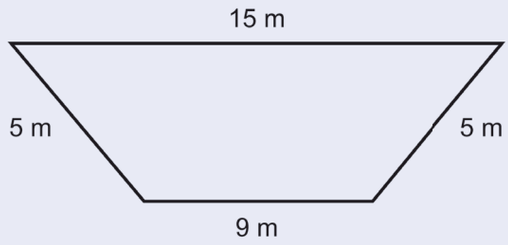
c. 15 m

d. 7,5 m

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 17

(UNIRIO) Considere um tablado para a Escola de Teatro da UNIRIO com a forma trapezoidal a seguir.



Quantos metros quadrados de madeira serão necessários para cobrir a área delimitada por esse trapézio?

a. 75 m^2

b. 36 m^2

c. 96 m^2

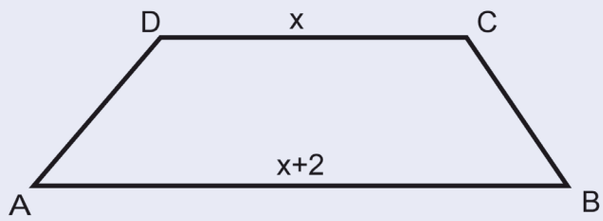
d. 48 m^2

e. 60 m^2

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 18

No trapézio, a área mede 21 cm^2 e a altura, 3 cm. Então, AB e DC valem, respectivamente:



Atividade 18

a. 4 cm e 6 cm.

b. 6 cm e 8 cm.

c. 6 cm e 4 cm.

d. 8 cm e 6 cm.

e. nenhuma das resposta anteriores.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 19

Deseja-se cobrir uma mesa circular de diâmetro 2 metros com um tecido cujo metro quadrado custa R$15,00. Quanto custa, aproximadamente, o círculo de tecido que cobre exatamente essa mesa, sem sobra ou falta? (aproxime π por 3)

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 20

Calcule a área de um círculo cujo comprimento da circunferência mede 22π cm.

Anote suas respostas em seu caderno

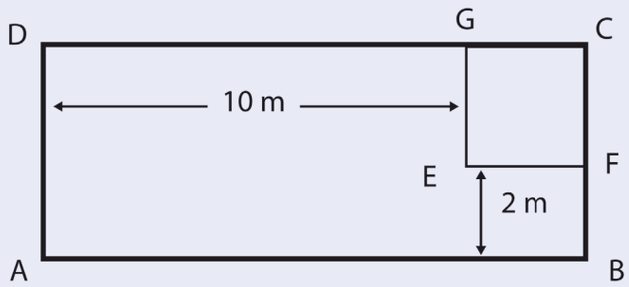
A área de um retângulo é 28 m^2. Aumentando-se 1m em cada lado, a área aumenta 12 m^2. Quais as medidas dos lados?

Atividade 21

Anote suas respostas em seu caderno

Na figura abaixo, está representado o retângulo (ABCD), com 105 m^2 de área. Usando as medidas indicadas (DG = 10 m e BF = 2 m), verificamos que o lado do quadrado (EFCG) mede:

Atividade 22



a. $\sqrt{85}$ m

b. 42,5 m

c. 8 m

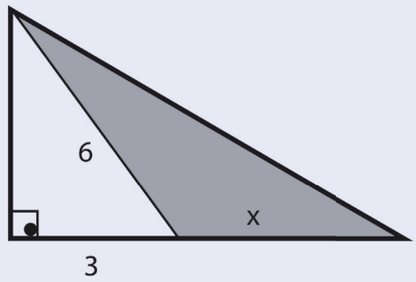
d. 5 m

e. 3 m

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 23

A área hachurada na figura abaixo é 45 cm^2. Então, o valor de x é:



a. $5\sqrt{3}cm$
b. $10\sqrt{3}cm$
c. $3\sqrt{5}cm$
d. $6\sqrt{5}cm$

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 24

Seja um paralelogramo de base 7 cm e área 35 cm^2 e um losango que tem uma das diagonais de medida igual à altura do paralelogramo e área 15 cm^2. A outra diagonal do losango mede:

a. 3 cm
b. 1,5 cm
c. 10 cm
d. 6 cm
e. nenhuma das anteriores.

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 25

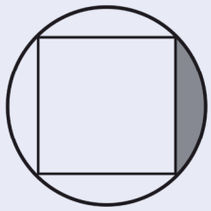
Sabendo-se que o raio do círculo é $3\sqrt{2}$ cm e o lado do quadrado é 6 cm, a área da figura hachurada vale, aproximadamente:

a. 2,4 cm^2

b. 10,3 cm^2

c. 41,2 cm

d. 5,13 cm^2



Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 26

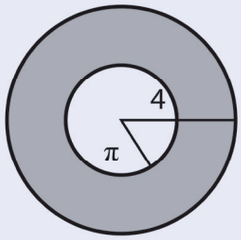
O valor da área da figura hachurada é:

a. 19,28

b. 21,34

c. 16,73

d. 17,56



Anote suas respostas em seu caderno

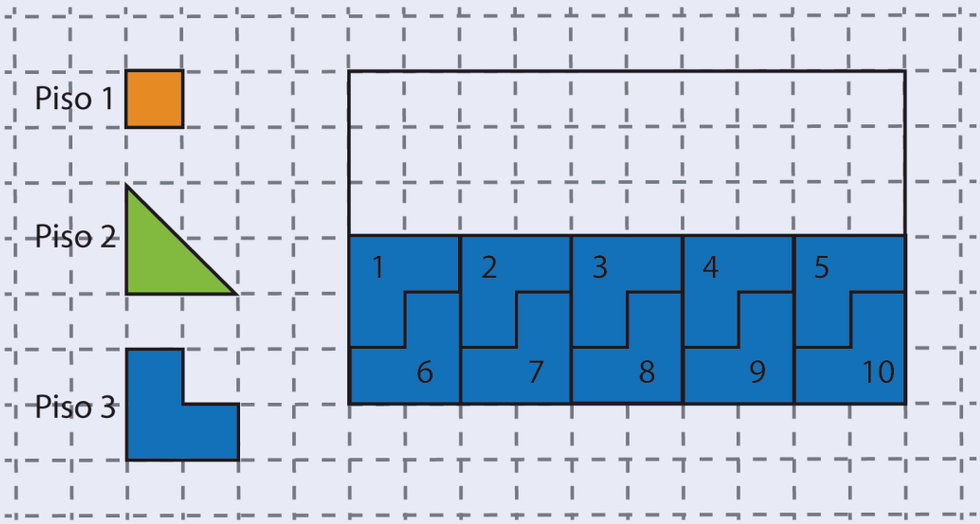
Resumo

- A área de uma figura F é obtida ao compararmos sua superfície com a de outra figura, tomada como unidade.
- Convencionalmente, utilizamos o metro quadrado como unidade padrão para medir áreas. Um metro quadrado (indicado pela notação $1m^2$) é a área coberta por um quadrado cujo lado mede um metro.
- Os princípios relacionados ao estudo de áreas de figuras planas são:
- Princípio 1 - Figuras planas congruentes têm a mesma área.
- Princípio 2 - Suponha que uma figura plana é dividida em várias partes. Qualquer figura nova montada com essas partes tem a mesma área da figura original.
- Princípio 3 - Se duas figuras planas têm a mesma área e delas retiramos ou acrescentamos outras figuras planas de mesma área, as figuras resultantes também têm a mesma área.
- A área A de um retângulo de dimensões (largura e comprimento) b e h é tal que A = b x h.
- A área de um paralelogramo de base b e altura h é A = b x h.
- A área de um triângulo de base b e altura h é $A = \frac{b.h}{2}$.
- A área de um losango de diagonais D e d é $A = \frac{d.D}{2}$
- A área de um trapézio de bases B e b e altura h, isto é, $A = \frac{(B+b).h}{2}$.
- A área de um círculo de raio R é dada pela expressão πR^2.

Atividade 1

Respostas das Atividades

O piso tipo 3 pode ser encaixado de forma que 10 pisos preencham as 3 fileiras de baixo do salão. Como temos um total de 6 fileiras, bastariam 20 pisos tipo 3 para pavimentar completamente o salão. Outra forma de raciocinar seria percebendo que um piso tipo 3 tem 3 vezes o tamanho de um piso tipo 1 e, depois de lembrar que precisamos de 60 pisos tipo 1 para pavimentar o salão, concluir que precisaremos apenas de 20 pisos tipo 3 para fazer a mesma tarefa.



Atividade 2

Todas as figuras têm a mesma área, pois foram obtidas com 5 pisos do tipo 2.

Atividade 3

Se cada caixa contém piso suficiente para 2,2 m^2 e Jorge deseja colocar piso em uma área de 55 m^2, ele precisará de 55/2,2 = 25 caixas.

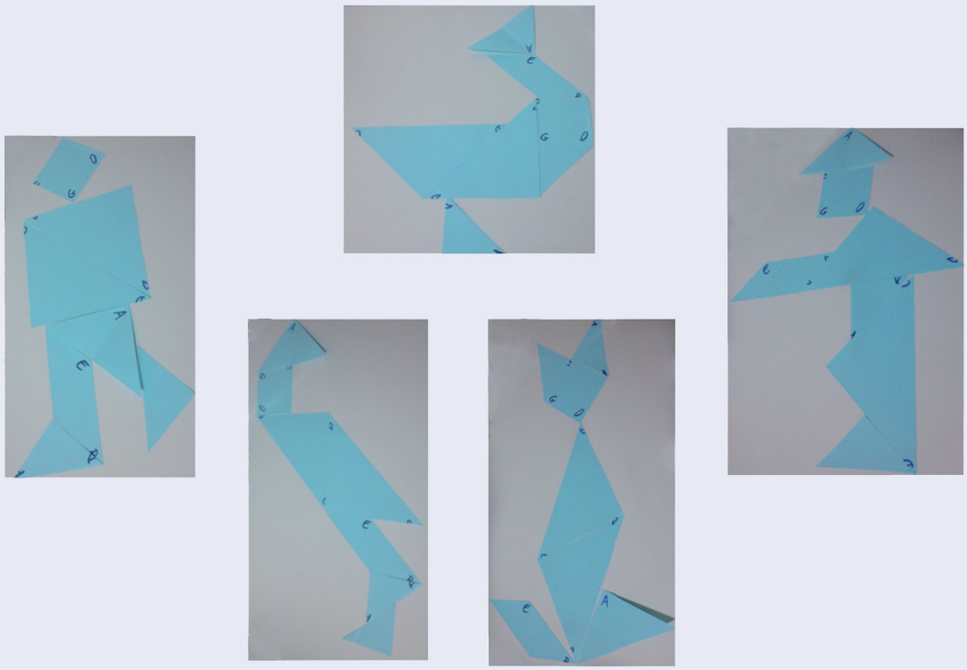
Atividade 4

Contando os quadradinhos que cabem no interior dessa figura, teremos 55 quadradinhos e meio.

Respostas das Atividades

Atividade 5

1. As imagens a seguir ilustram como podem ser montadas com o Tangram as imagens da atividade.



2. Todas as figuras têm a mesma área, pois foram obtidas apenas por arrumações diferentes com as mesmas peças do Tangram.

3.

Quando deslocamos o quadrado até ele encontrar o triângulo médio, a área não se altera e o perímetro diminui.

Quando retiramos o quadrado, a área e o perímetro diminuem.

Quando recolocamos o quadrado e retiramos o paralelogramo, a área em relação ao original diminui e o perímetro aumenta.

Atividade 6

Unidade de área	Figura A	Figura B	Figura C	Figura D	Figura E	Figura F	Figura G
Figura A	1	2	2	1	2	4	4
Figura B	1/2	1	1	1/2	1	2	2
Figura C	1/2	1	1	1/2	1	2	2
Figura D	1	2	2	1	2	4	4
Figura E	1/2	1	1	1/2	1	2	2
Figura F	1/4	1/2	1/2	1/4	1/2	1	1
Figura G	1/4	1/2	1/2	1/4	1/2	1	1

Se a área de C é 12 cm^2, então:

Fig. A	Fig. B	Fig. C	Fig. D	Fig. E	Fig. F	Fig. G
6	12	12	6	12	24	24

Atividade 7

1. A diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos congruentes. Logo, a área de cada um deles é a metade da área do retângulo, isto é, 12 cm^2.
2. Idem ao anterior. A altura de um triângulo equilátero o divide em dois triângulos congruentes. Logo, a área de cada um deles é a metade da área do triângulo, isto é, 10 m^2.
3. A área hachurada é a terça parte da área do círculo, isto é, 9cm^2.

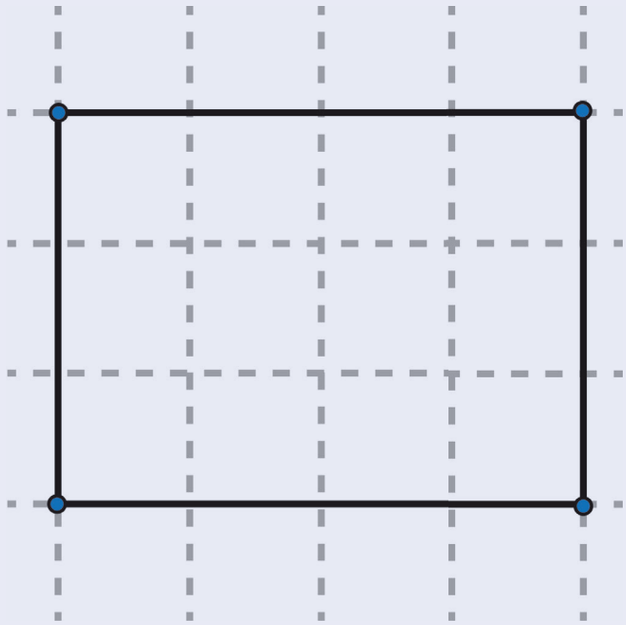
Atividade 8

1. Têm a mesma área as figuras C, D, E e F.
2. São iguais! Pois se duas figuras planas têm áreas de mesma medida e delas retiramos outras figuras planas de áreas de mesma medida, as figuras resultantes também têm áreas de mesma medida.

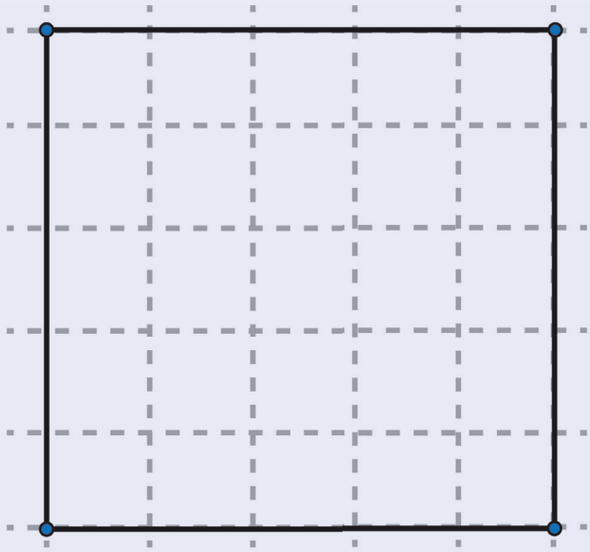
Respostas das Atividades

Atividade 9

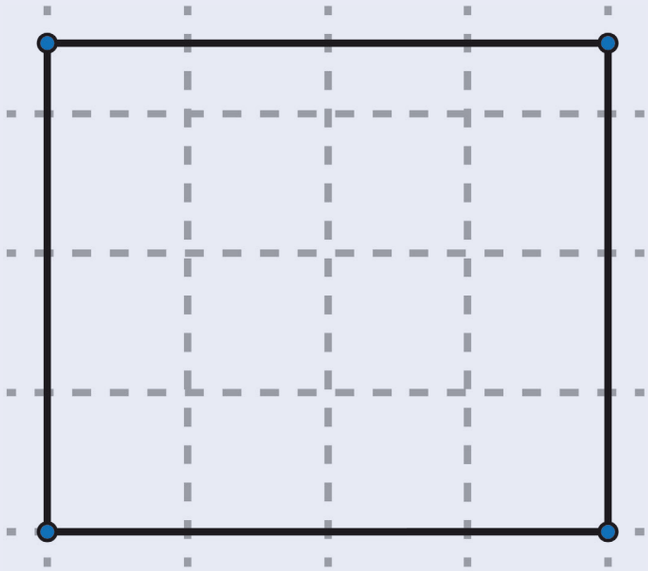
1. 12 vezes. Veja a figura.



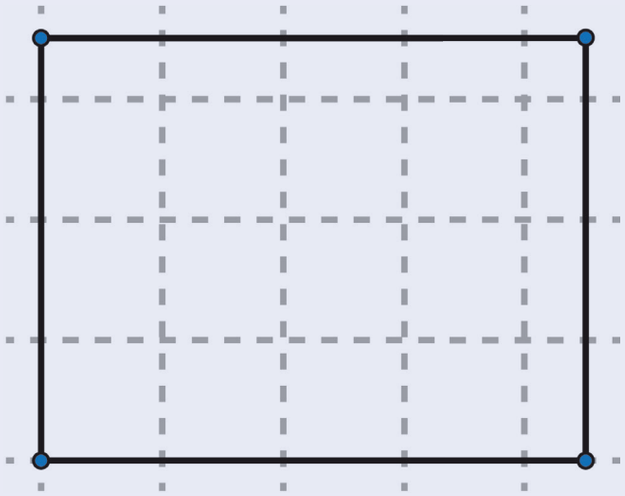
2. 25 vezes. Veja a figura.



3. 14 vezes. Na figura a seguir, vemos 12 quadradinhos além de 4 metades de quadradinhos que, juntas, formam 2 quadradinhos.



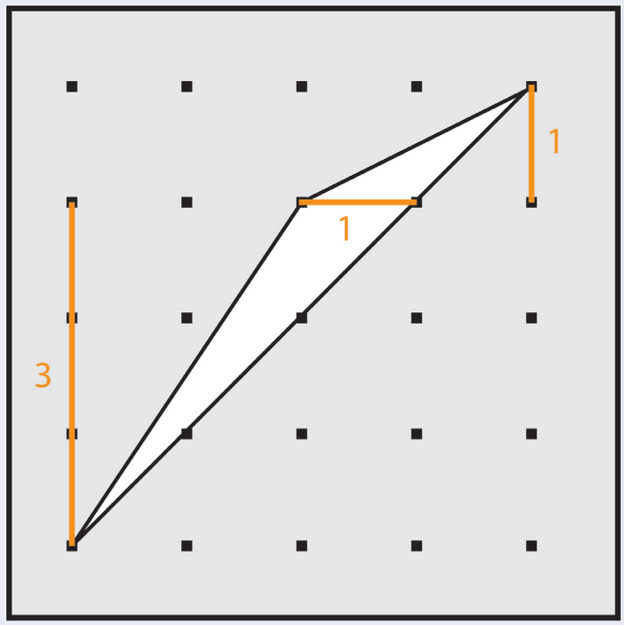
4. Na figura a seguir, vemos 12 quadradinhos além de 7 metades de quadradinhos e, ainda, uma quarta parte de quadradinho. Como 7 metades nos dão 3,5 quadradinhos e uma quarta nos dá 0,25 quadradinhos, temos que o quadradinho de lado 1 cm cabe 15,75 vezes nesse retângulo.



Respostas das Atividades

Atividade 10

O triângulo pode ser dividido em outros dois: um cuja base mede 1 e altura também mede 1, outro cuja base mede 1 e a altura mede 3. Veja a figura a seguir.



Dessa forma, a área do triângulo da figura é a soma das áreas dos triângulos indicados anteriormente, isto é, 1x1/2 + 1x3/2 = 2.

Resposta: A

Atividade 11

A base do paralelogramo mede 3 e a altura relativa à base mede 4,5. Logo, a sua área será dada pelo produto 3x4,5 = 13,5.

Resposta: B

Atividade 12

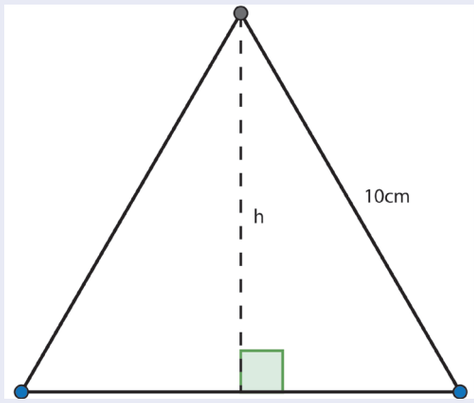
A área de um campo de futebol será dada pelo produto 120 x 90 = 10800 m^2 = 0,0108 km^2. Convertemos para km^2 pois as informações do quadro são dadas nesta unidade. Para descobrir quantos campos de futebol cabem da área do Pantanal, basta dividir sua área por 0,0108. Dessa forma, 150355:0,0108 é aproximadamente 14000000.

Resposta: E

Atividade 13

Respostas das Atividades

A figura a seguir ilustra um triângulo equilátero cujo lado mede 10 cm com uma de suas alturas traçadas. A altura de um triângulo equilátero toca sua base no ponto médio.



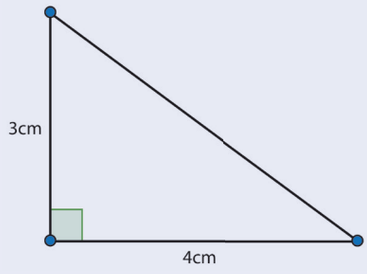
5. A medida h da altura do triângulo equilátero pode ser determinada pelo Teorema de Pitágoras.

$$h^2 + 5^2 = 10^2$$
$$h^2 + 25 = 100$$
$$h^2 = 75$$
$$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

6. Como a área de um triângulo é a metade do produto da medida da sua base pela medida da sua altura, teremos que a área do triângulo equilátero, cujo lado mede 10 cm, é dada por $\frac{10 \times 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$ cm².

Atividade 14

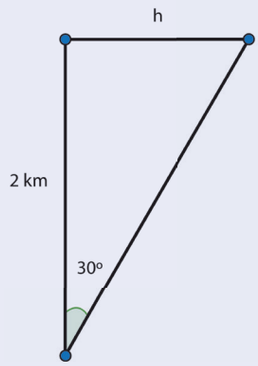
A figura a seguir ilustra a situação proposta.



Se escolhermos um dos catetos para ser a base do triângulo, o outro cateto nos dará a medida da altura relativa a essa base. Dessa forma, a área desse triângulo é dada por $\frac{3\times 4}{2} = 6$ cm².

Atividade 15

A área total do terreno é 3x2 = 6 km². A área que coube a João é ilustrada na figura a seguir. Trata-se de um triângulo retângulo que possui um ângulo de 30º já que, pela regra da partilha, a região de extração de outro (uma parte de um círculo delimitada por um ângulo de 90º) foi dividida em 3 partes iguais.



O cateto de medida h da figura pode ser determinado pela tangente de 30º. Convém lembrar que a tangente de um ângulo é razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Se tiver mais dúvidas a esse respeito, consulte a unidade 9.

$$tg30^0 = \frac{h}{2}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{2}$$
$$0,58 = \frac{h}{2}$$
$$h = 1,16$$

Dessa forma, vemos que a área que coube a João é dada por $\frac{2\times 1,16}{2} = 1,16$ km², que corresponde a aproximadamente 19% dos 6 km².

Resposta: E

Atividade 16

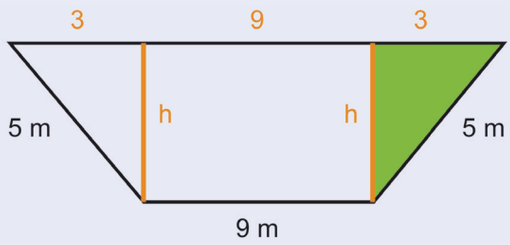
A área do losango é dada pela metade do produto entre as medidas de suas diagonais. Assim, temos

$33 = \frac{8{,}8 \times BC}{2}$. Dessa forma, concluímos que $BC = 7{,}5$ m.

Resposta: D

Atividade 17

Para determinarmos a área de um trapézio, precisamos da medida da sua altura. A figura a seguir ilustra uma forma de determinarmos a altura de um trapézio isósceles. Duas alturas determinam um retângulo tal ,que a base menor do trapézio nos dá a medida de dois de seus lados opostos.



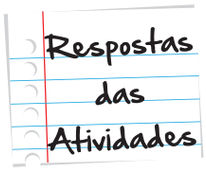
Aplicando o Teorema de Pitágoras, no triângulo destacado em verde, na figura anterior, temos que $h^2 + 3^3 = 5^2 \Rightarrow h = 4$ m. Logo, a área do trapézio será dada por $\frac{(15+9)\times 4}{2} = 48$ m².

Resposta: D

Atividade 18

Como as bases do trapézio de área 21 cm² medem, respectivamente, x e x+2 e sua altura mede 3 cm, temos

$$21 = \frac{(x + x + 2)\times 3}{2}$$
$$42 = (2x + 2)\times 3$$
$$14 = 2x + 2$$
$$12 = 2x$$
$$x = 6$$



Logo, as bases AB e DC medem, respectivamente, 8 cm e 6 cm.

Resposta: D.

Atividade 19

Se o diâmetro do círculo mede 2m, seu raio mede 1m e sua área é dada por $\pi.1^2 = \pi$ m². Essa área é de, aproximadamente, 3m². Como o metro quadrado do tecido custa R$ 15,00, 3m² custarão 3x15 = R$45,00.

Atividade 20

Como o comprimento de um círculo de raio R é dado pela expressão $2\pi R$, temos que $22\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 11cm$. Assim, a área desse círculo será dada por $\pi.11^2 = 121\pi$ cm2.

Atividade 21

Se as medidas da base e da altura do retângulo são, respectivamente, b e h, teremos que b.h = 28. Se aumentarmos essas medidas em 1 m, teremos um novo retângulo cujas medidas da base e da altura são, respectivamente b+1 e h+1 e cuja área é 40 m², isto é, a área anterior acrescida de 12 m². Teremos, então, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} bh = 28 \\ (b+1)(h+1) = 40 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, teremos que uma solução é b = 4m e h = 7m.

Atividade 22

Se x é a medida do lado do quadrado, teremos que as dimensões do retângulo ABCD são 10 + x e 2 + x. Como a área desse retângulo é de 105 m², teremos a seguinte equação (10 + x)(2 + x) = 105, cujas soluções são x = 5 e x = - 17. Como x indica a medida do lado do quadrado, x = 5 m.

Atividade 23

Pela figura, vemos que x é a medida da base desse triângulo cuja altura h pode ser determinada através do Teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 3^2 = 6^2$$
$$h^2 + 9 = 36$$
$$h^2 = 27$$
$$h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Como a área desse triângulo é de 45 cm², temos que $\frac{x.3\sqrt{3}}{2} = 45 \Rightarrow x = 10\sqrt{3}$ cm.

Resposta: B

Atividade 24

Digamos que h seja a medida da altura do paralelogramo cuja base mede 7 cm e de área 35 cm². Dessa forma, 7h = 35, h = 5 cm. Se D é a medida desconhecida de uma das diagonais do losango de área 15 cm², teremos que 5.D/2=15, D = 6 cm.

Resposta: D

Atividade 25

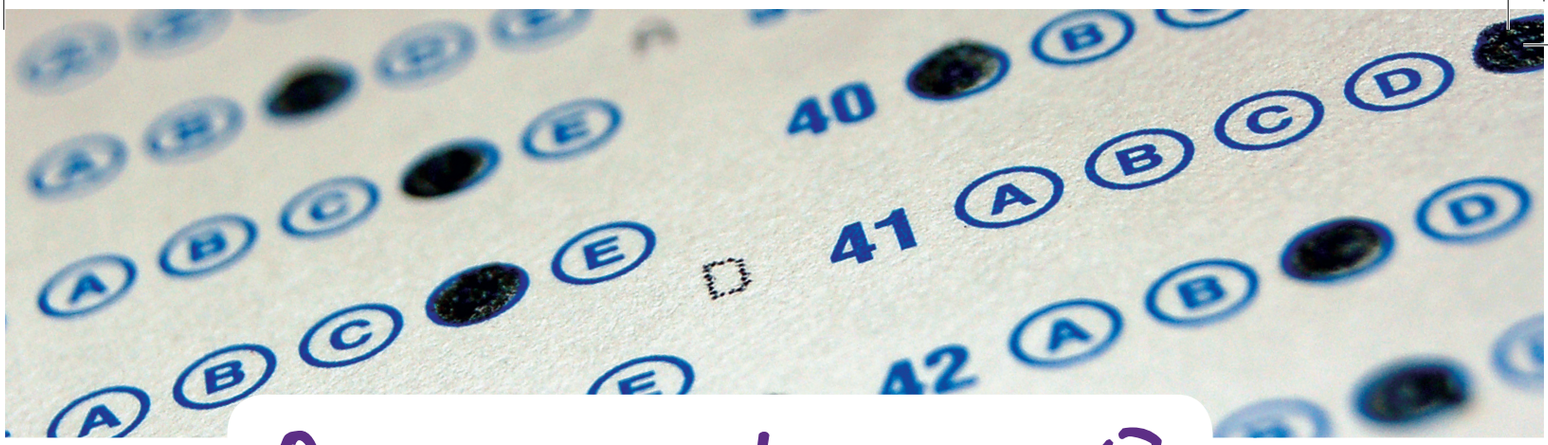
Observe que, se juntarmos a figura hachurada ao quadrado 4 vezes, obtemos o círculo. Dessa forma, a área hachurada é a quarta parte da diferença entre a área do círculo e a área do quadrado, isto é, $\frac{\pi.(3\sqrt{2})^2 - 6^2}{4} = \frac{18\pi - 36}{4}$ cm². Aproximando π por 3,14, teremos que a área vale 5,13 cm².

Resposta: D

Atividade 26

A área hachurada é a diferença entre a área de um círculo de raio 4 e um círculo de raio π. Assim, a área será dada por $\pi.4^2 - \pi.\pi^2$. Aproximando π por 3,14, temos que a área é, aproximadamente, 19,28.

Resposta: A



O que perguntam por aí?

1. (ENEM) O Tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

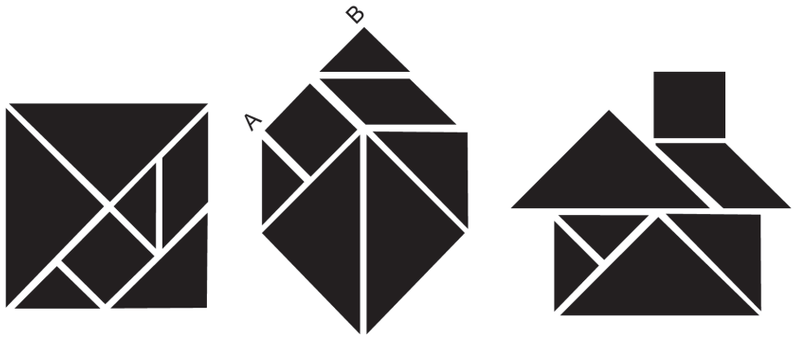


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a. 4 cm^2.

b. 8 cm^2.

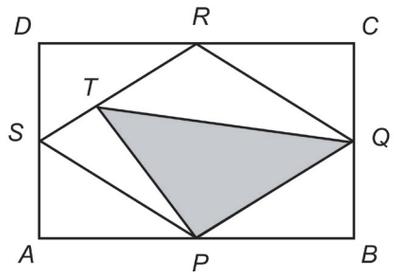
c. 12 cm^2.

d. 14 cm^2.

e. 16 cm^2.

Solução: A área da casinha é a mesma área do quadrado da Figura 1, pois as figuras são formadas pelas mesmas peças do Tangram. Note que o segmento AB, de medida 2 cm, corresponde à metade da diagonal do quadrado da Figura 1. Dessa forma, esse quadrado tem diagonal de medida 4 cm e, pelo Teorema de Pitágoras, lado de medida cm. Dessa forma, a medida de sua área será igual cm^2.

2. (Banco de Questões da OBMEP) Na figura, o retângulo ABCD tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do retângulo e T está no segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



a. 10 cm^2

b. 12 cm^2

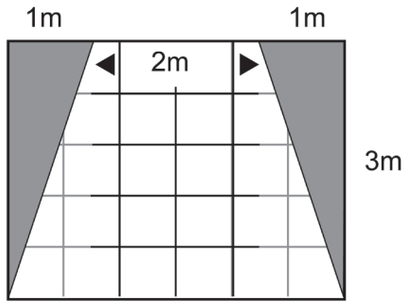
c. 14 cm^2

d. 16 cm^2

e. 18 cm^2

Solução: A área do quadrilátero PQRS é metade da área do retângulo - é a soma das áreas dos triângulos RDS, RCQ, PAS e PBQ, ou seja, 20 cm^2. Voltamos agora para a figura do enunciado e traçamos uma paralela TU ao segmento PS. Os triângulos PST e UTP são congruentes, bem como os triângulos UTQ e RQT. Como o triângulo PQT é a união dos triângulos UTP e UTQ, segue-se que sua área é a metade da área do quadrilátero PQRS, ou seja, 10 cm^2.

3. Prova Brasil - O piso de entrada de um prédio está sendo reformado. Serão feitas duas jardineiras nas laterais, conforme indicado na figura, e o piso restante será revestido em cerâmica.



Qual é a área do piso que será revestido com cerâmica?

a. 3 m^2

b. 6 m^2

c. 9 m^2

d. 12 m^2

Solução: A ideia é perceber que a indicação das seguintes áreas: a do retângulo, a do triângulo retângulo e a área do trapézio. Assim, por meio do cálculo da área, em m^2, delimitada pelo trapézio, vem que: [(2 + 4) . 3] / 2 = 9.

Números naturais

Para início de conversa...

Você já parou para observar a quantidade de números que nos cerca?

Qual a sua idade? Qual o seu peso? Que dia é seu aniversário?

Em casa, no mercado, nas festas, em qualquer lugar, sempre nos deparamos com alguma pergunta ou exclamação que respectivamente pode ser respondida ou está relacionada aos números, quer sejam placas de automóveis, o número da casa onde moramos, o capítulo de um livro ou uma vela de aniversário.

Houve uma época em que o ser humano não sabia contar ou calcular, apenas conseguia fazer algumas poucas associações, tais como grupos de dois, três ou quatro elementos. Com o passar dos anos, começou a associar estas quantidades

aos dedos das mãos ou dos pés. Todavia, apesar do avanço, ainda continuava limitado nas quantidades, visto que o máximo que podia contar estando só era 20, isto é, dez dedos nas mãos e dez dedos nos pés.

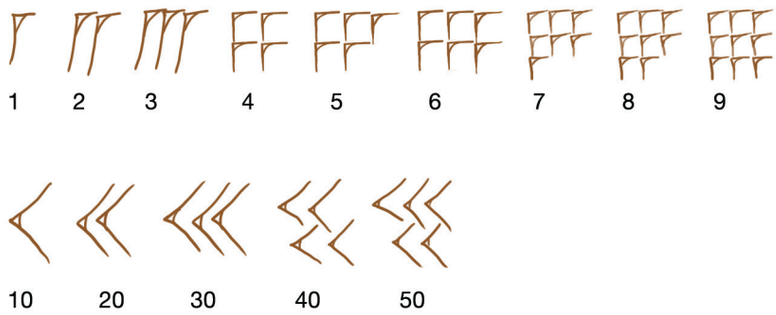
Mas como contar uma manada inteira de bois, ou todo o resultado de uma pesca? Em época de guerra, como relacionar a quantidade de soldados? Como representar a quantidade de cestos de milho colhidos no campo? O avanço na utilização dos números, quer seja para registrar a quantidade de caça ou pesca, o número de soldados, o resultado de uma colheita ou outra quantidade trouxe a necessidade de melhorar a representação através dos números.

A partir dessas necessidades, alguns povos construíram e desenvolveram sistemas de numeração. Para que isto fosse possível, perceberam a necessidade de criar símbolos que representassem essas medidas ou quantidades. Nas paredes das cavernas onde supostamente habitavam os primeiros seres humanos, encontram-se representações de símbolos associados a quantidades. Obviamente, cada povo criou sua representação.

Por exemplo, os egípcios utilizavam uma simbologia baseada em desenhos (hieróglifos)

A combinação destes desenhos permitia a construção de números, por exemplo, o número 12 ficaria representado da seguinte forma: ∩ ||, ou seja dez + um + um = 12.

Já os babilônios representavam de forma diferente. Para começar, a base de numeração deste povo não era composta de apenas dez algarismos como o nosso, isto é, utilizamos os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 perfazendo 10 símbolos; os babilônios utilizavam o sistema de base 60 e usavam cunhas para representar os números. Daí ser chamado de sistema cuneiforme.



Outro povo que estabeleceu um diferente sistema de numeração foi o povo romano.

Eles utilizavam apenas 7 símbolos para representar os números. Veja no quadro abaixo:

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Através da combinação destes símbolos é possível escrever os números.

Obviamente, como todo sistema, existem regras para utilizar os símbolos. E você sabe como é que eles usavam esses símbolos? Por exemplo, qual a diferença entre IV e VI? Note que os conjuntos de símbolos são os mesmos, porém escritos de forma invertida.

É simples! A regra indica que um símbolo (de valor menor) colocado à esquerda está subtraindo, enquanto à direita está adicionando.

IV = 4 ou seja, subtraindo 1 de 5: 5 - 1 = 4

VI = 6 isto é, somando 1 a 5: 5 + 1 = 6

Outros exemplos:

345 = CCCXLV (cem + cem + cem + (cinquenta – dez) + cinco

No sistema de numeração Romana, um mesmo símbolo pode ser repetido em um número no máximo três vezes; assim, o número 444 não será escrito CCCCXXXXIIII, mas CDXLIV (ou seja, CD = 500 – 100 = 400, XL = 50 – 10 = 40 e como já vimos acima, IV = 5 – 1 = 4.

Importante

93 = XCIII (cem – dez) + um + um + um

Ainda hoje utilizamos muitas vezes os algarismos romanos, por exemplo, nos relógios, capítulos de livros, etc.

Como será que era escrito o número 4.258? E o número 1.528.635? Será que eram usados muitos algarismos?

Pesquise em http://www.infoescola.com/matematica/numeros-romanos/

Multimídia

E o nosso sistema de numeração?

No ano de 825 d.C, um matemático Hindu chamado Al-Khowarizmi escreveu um livro de Matemática onde apresentava os símbolos matemáticos para a representação dos números. Estes símbolo, quando associados e a partir de um grupo de regras, se constituiu na forma de representar qualquer valor numérico. Estava criado o sistema de numeração decimal.

Os símbolos que utilizamos hoje, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 nem sempre foram escritos desta forma. Com o passar do tempo sofreram diversas mudanças; todavia, apesar de mudar o desenho do símbolo, continuam representando a mesma quantidade e seguindo as mesmas regras.

Podemos fazer uma analogia da utilização dos símbolos numéricos e as letras do alfabeto. Em ambos os casos, há um conjunto de regras a serem respeitadas. A partir destas regras e símbolos, ao utilizarmos o alfabeto, podemos escrever infinitas palavras, bem como, ao utilizamos nosso sistema de numeração, podemos escrever infinitos números.

	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove	zero
século VI (indiano)										
século IX (indiano)										
século X (árabe oriental)										
século X (europeu)										
século XI (árabe oriental)										
século XII (europeu)										
século XIII (árabe oriental)										
século XIII (europeu)										
século XIII (árabe ocidental)										
século XIII (árabe oriental)										
século XV (europeu)										

Na seção a seguir, vamos estudar o conjunto dos números naturais. Este conjunto contém os primeiros números, ou seja, as primeiras representações numéricas utilizadas, a partir das necessidades encontradas na época. Daí o seu nome.

No endereço eletrônico http://www.youtube.com/watch?v=sJghjRMvVEk, você poderá assistir um excelente vídeo sobre a criação dos números. Vale a pena conferir.

Multimídia

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer o conjunto dos números naturais.
- Construir sequências de números naturais.
- Efetuar operações de adição e subtração de números naturais, bem como resolver problemas.
- Efetuar operações de multiplicação e divisão de números naturais, bem como resolver problemas.
- Construir sequências de múltiplos e divisores de um número natural dado.
- Reconhecer os números primos e a decomposição em fatores primos.
- Representar e resolver potências.

Seção 1
Conjunto dos Números Naturais

No tópico anterior, observamos que o homem, com o passar dos anos, avançou na ideia de registrar suas contagens. Para tanto, criou diferentes sistemas de numeração, utilizando os símbolos (algarismos) para representar as medidas ou quantidades.

A palavra algarismo deriva do nome do matemático MOHAMMED AL-KHOWARIZMI, que em 825 d. C. escreveu o livro "A arte de Calcular", que continha as explicações sobre o nosso sistema de numeração, chamado de indo-arábico.

É importante lembrar que algarismo é toda representação simbólica de nosso sistema de numeração que utilizamos para compor os infinitos números.

Por exemplo, o número 54 utiliza os algarismos 5 e 4.

Estes símbolos a partir de um conjunto de regras, formam o nosso sistema de numeração. Através deste sistema podemos representar qualquer quantidade. No desejo de organizar estes números, foi criado um conjunto que os relaciona, e para este conjunto deu-se o nome de conjunto dos números naturais, representando-o pela letra N maiúsculo. Assim, o conjunto relacionado fica:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$

Observação: A presença dos três pontos ao final da representação do conjunto significa que ele é infinito.

O conjunto dos números naturais começa em zero ou em 1?

Alguns autores divergem nesta questão. Segundo historiadores, o zero foi o último algarismo a ser criado, partindo da necessidade de representar a falta de elementos. O sistema de numeração romano por exemplo não contém este algarismo.

Para o nosso universo de estudos, vamos considerar o zero como número natural, e a representação do conjunto dos números naturais sem o zero será feita pela presença do asterisco. Assim: $N^* = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 ...\}$

Base Dez

Como falamos anteriormente, nosso sistema de numeração é conhecido como sistema de numeração decimal, isto tem a ver com a utilização de nossos dedos para a contagem. São dez algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), com os quais é possível escrever qualquer quantidade.

A composição de um número no sistema decimal leva em conta a posição do algarismo nesse número, e é feita em unidades, dezenas e centenas. Por exemplo, o número 456 (400 + 50 + 6) é composto de 6 unidades, 5 dezenas e 4 centenas, isto é:

4x 100 = 400
5 x 10 = 50
6 x 1 = 6

Total = 456

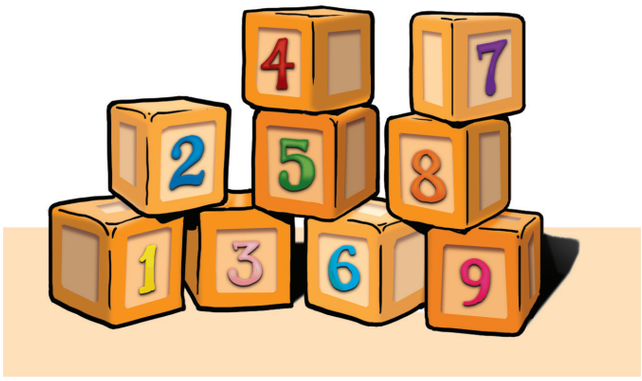
Se mudarmos a posição desses mesmos algarismos formaremos um novo número, com novas unidades, dezenas e centenas. Por exemplo o número 645 possui 5 unidades, 4 dezenas e 6 centenas e pode ser escrito: 600 + 40 + 5 = 6 x 100 + 4 X 10 + 5 x 1.

Observe que podemos construir diferentes números com os mesmos algarismos. Utilizamos os algarismos 4,5 e 6. Com eles podemos escrever os números 456, 465, 564,546, 645 e 654. Interessante? E se repetirmos os algarismos?

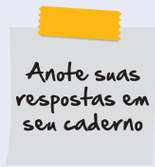
Se tomarmos dois algarismos, por exemplo 4 e 5. Quantos números podemos formar, repetindo ou não os algarismos?

É simples, vamos escrever os números começando com 4: 45 e 44

Agora vamos escrever os números começando com 5: 54, 55. A resposta ao problema é o conjunto formado pelos números (44,45,54,55)



Escreva todos os números possíveis com os algarismos 1, 2 e 3



Podemos organizar a representação de um número no Quadro de Valor e Lugar (ou Quadro Posicional) da seguinte forma:

Divisão em ordens e classes								
Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades simples		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas simples	Dezenas simples	Unidades simples

Se aumentarmos a tabela para a esquerda, continuaremos a construir novos números: bilhão, trilhão etc.

Exemplo:

234567. Este número possui 6 ordens e duas classes, e é composto da seguinte forma

7 unidades simples (1ª ordem)

6 dezenas simples (2ª ordem)

5 centenas simples (3ª ordem, completando a primeira classe, das unidades simples)

4 unidades de milhar (4ª ordem)

3 dezenas de milhar (5ª ordem)

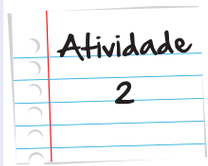
2 centenas de milhar (6ª ordem, completando a 2ª classe, das unidades de milhar)

Por extenso, podemos escrever: duzentos e trinta e quatro mil (ou unidades de milhares), quinhentos e sessenta e sete (unidades simples).

Na verdade, o que estamos fazendo é desmembrar o número em partes.

Observe a tabela a seguir:

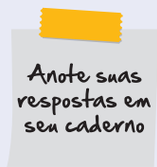
Descrição	Representação numérica	Total de unidades
7 unidades simples	7	7
6 dezenas simples	6x 10	60
5 centenas simples	5 x 100	500
4 unidades de milhar	4 x 1000	4000
3 dezenas de milhar	3 x 10 000	30 000
2 centenas de milhar	2 x 100 000	200 000
	TOTAL	**234 562**

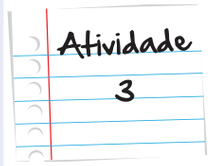


Escreva os números abaixo, decompondo-os em suas respectivas ordens e classes.

a. 3456

b. 12 345



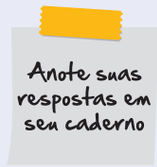


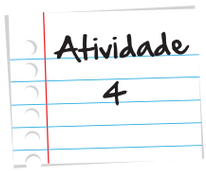
Se quiser, utilize a calculadora para esta atividade.

Quantas unidades há em:

a. 5 dezenas e 2 centenas

b. 3 unidades de milhar, 4 centenas e 5 unidades





Escreva no caderno o conjunto formado pelos algarismos utilizados na construção de cada número:

a. 234

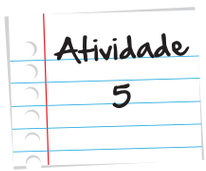
b. 12356

c. 3445

d. 12333

e. 999

Anote suas respostas em seu caderno



Escreva por extenso cada número:

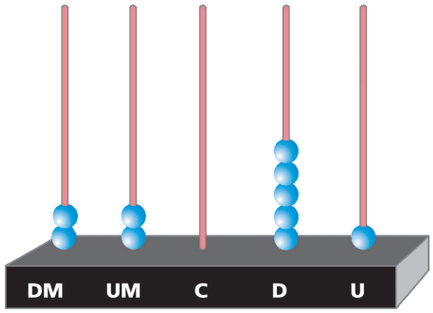
a. 234

b. 7092

c. 123906

Anote suas respostas em seu caderno

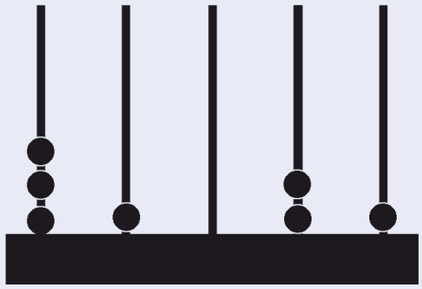
O ábaco é um instrumento criado para facilitar na contagem. Podemos dizer que o ábaco foi a primeira calculadora a ser criada. Ainda hoje utilizada em alguns países, este instrumento composto por uma estrutura, na maioria das vezes de madeira e algumas bolinhas. Estas bolinhas servem para marcar as quantidades de unidades, dezenas e centenas.



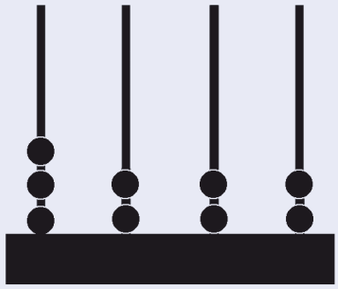
Atividade 6

Represente numericamente as quantidades marcadas nos ábacos a seguir:

a.

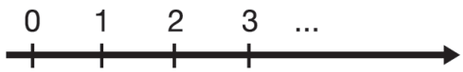


b.



Anote suas respostas em seu caderno

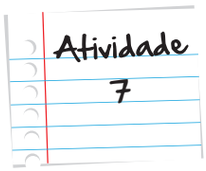
Os números naturais formam uma sequência que pode ser representado em uma reta numérica. Para isso, traçamos uma reta e marcamos o ponto inicial, ao qual chamamos zero. Partindo deste ponto, para a direita, marcamos espaços iguais e numeramos cada ponto.



Observe que cada número tem um sucessor (o próprio número mais 1), e também um antecessor (o próprio número menos 1).

Apenas o zero não tem antecessor, pois ele é o primeiro elemento do conjunto.

O antecessor de 3 é o 2 e o sucessor de 3 é o 4.



Indique o antecessor e o sucessor de cada número natural

a. _____ 45 _____

b. _____ 239 _____

c. _____ 109 _____

d. _____1090 _____

e. _____90909_____

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Operações com Números Naturais

As operações com números naturais são as que mais costumamos usar em nosso cotidiano, uma vez que números naturais representam muitas vezes resultados de contagem. Vamos relembrar como fazê-las?

Adição

Adicionar números naturais é o mesmo que unir as quantidades que eles representam. Por exemplo, 3 borrachas adicionadas a 4 borrachas nos dá o total de 7 borrachas. Representamos assim:

$3 + 4 = 7$

Ao somarmos por exemplo 235 + 357:

235 → parcela
+ 357 → parcela

592 → adição ou soma

Ao armar a adição, colocamos as casas organizadas, isto é unidades com unidades, dezenas com dezenas e assim por diante.

Vamos somar primeiramente as unidades 5 + 7 = 12. Você lembra? 12 = 10 + 2 Assim ficarão duas unidades e temos uma dezena para adicionar com as demais, é o famoso "vai um" que será acrescentado às dezenas, lembra?

Na casa das dezenas temos 3 + 5 = 8, mas veio uma dezena da casa das unidades, então teremos 3 + 5 + 1 = 9.

Agora falta somar apenas as centenas 2+3 = 5.

Ficamos então com 5 centenas = 500
9 dezenas = 90
2 unidades = 2 totalizando 592. Logo, 235+357 = 592

Atividade 8

Efetue as adições

a. 347 + 789

b. 38908 + 10074

c. 230 + 1209

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 9

Fui ao mercado comprar feijão e arroz. Cada pacote de 5 Kg de arroz, custa R$ 12,00, enquanto que o pacote de 1 kg de feijão custa 3,00. Comprei 5Kg de arroz e 2 Kg de feijão. Quanto paguei?

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 10

Marcos tem 123 figurinhas e ganhou mais 234. Felipe ganhou 256 figurinhas para juntar com as 112 que já possuía. Quem ficou com mais figurinhas no final?

Anote suas respostas em seu caderno

Subtração

Subtrair é retirar uma quantidade de outra. Por exemplo, você recebe seu pagamento e retira a parte do aluguel, logo, o valor do aluguel foi subtraído do salário.

Ex.

Salário 1.800

Aluguel 300,00, então, teremos 1800 – 300

$$\begin{array}{r} 1800 \\ -\ 300 \\ \hline 1500 \end{array}$$

Porém, muitas vezes o valor do algarismo de onde queremos subtrair é menor. Veja o exemplo:

123 – 98, armando a expressão fica:

$$\begin{array}{rl} 123 & \rightarrow \text{ minuendo} \\ -\ 98 & \rightarrow \text{ subtraendo} \\ \hline 25 & \rightarrow \text{ resto ou diferença} \end{array}$$

Como é possível de 3 unidades retirarmos 8 unidades? Lembre que o algarismo 2 no número 123 representa a casa das dezenas, então, na verdade são 20 unidades. Se tomarmos uma dezena de 20 e "passarmos" para a casa das unidades, o 20 ficará 20 – 10 – 10 (ou seja 1 dezena) e o 3 ficará igual a 3 + 10, ou seja, teremos 13 unidades. Logo, 13 – 8 = 5.

Observe passo a passo:

123	113	113
98	98	98
	5	25
Uma dezena passa para a casa das unidades que fica valendo 13	Subtraindo 8 de 13 temos 5 na casa das unidades	Agora, teremos onze menos 9 = 2

Não se esqueça de armar as adições e subtrações sempre combinando os elementos de acordo com as ordens e classes.

Importante

Atividade 11

Em uma partida de vídeo game, Maria fez 34890 pontos , enquanto que João fez 29670 pontos. Quantos pontos Maria fez a mais que João**?**

Anote suas respostas em seu caderno

Atividade 12

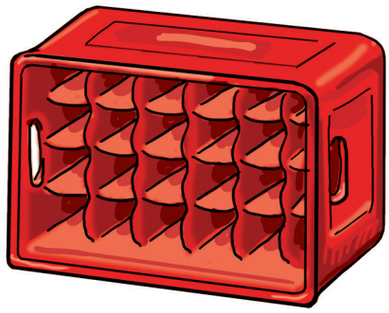
Comprei uma televisão no valor de 1890,00. O vendedor deu um desconto no valor de 120,00. Quanto paguei pela televisão?

Anote suas respostas em seu caderno

Multiplicação

Multiplicar dois números é o mesmo que efetuar uma adição repetitiva. Por exemplo, se você fizer a adição 5 + 5 + 5 + 5, isto é, somar a parcela 5 com ela mesma quatro vezes, você está fazendo um multiplicação, que será representada por 4 x 5 (que será lida 4 vezes cinco). Assim como 5 x 4 representa uma adição de 5 parcelas iguais a 4, isto é, 4 + 4 + 4 + 4 + 4. Percebeu a diferença? O resultado até será o mesmo, mas a forma de representar cada situação é diferente!

Você gosta de refrigerante? Os engradados de garrafas de refrigerantes são dispostos em linhas e colunas. Observe a figura:



Note que, em cada fileira, cabem 6 unidades, como temos 4 fileiras, teremos 6 + 6 + 6 +6, isto é igual a representarmos através da multiplicação 4 x 6 , pois o 6 repete-se 4 vezes.

E se analisarmos as colunas? Bem, em cada coluna cabem 4 unidades; como são 6 colunas, teremos 4+4+4+4+4+4, ou seja, o mesmo que representar 6 x 4, pois o 4 se repete 6 vezes.

Note que 6x4 = 4 x 6 = 24. Podemos dizer que a ordem dos fatores não altera o resultado da multiplicação. Estamos falando de uma importante propriedade matemática, a comutatividade.

Imagine que você vá ao supermercado para comprar 7 quilos de feijão, onde o quilo custa R$3,00. Como o preço de um quilo custa 3,00, teremos:

3,00 + 3,00 + 3,00 + 3,00 + 3,00 + 3,00 + 3,00 = 21,00

Através da multiplicação, podemos representar da seguinte forma: 7 x 3,00 = 21,00

Vamos multiplicar 4 x 234.

Como já vimos 234 = 4 unidades, 3 dezenas e 2 centenas. Logo, ao multiplicar por 4, teremos

4 x 4 unidades = 16 unidades = 1 dezena + 6 unidades

4 x 3 dezenas = 12 dezenas = 1 centena + 2 dezenas

4 x 2 centenas = 8 centenas

Totalizando, teremos 6 unidades, 3 dezenas, 8 centenas = 836

234 → fator
X 4 → fator

836 → produto

Note que multiplicamos por um número de um único algarismo. Se multiplicarmos por números com mais algarismos, procederemos assim:

$$\begin{array}{r} 124 \\ \times\ 231 \\ \hline \end{array}$$

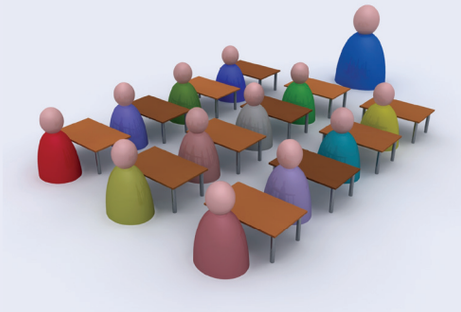
Vamos multiplicar 124 por cada algarismo do número 231. Sempre recuando uma casa.

$$\begin{array}{r} 124 \\ \times\ 231 \\ \hline 124 \\ 372 \\ 248 \\ \hline 28644 \end{array}$$

Também podemos pensar assim:

$231 \times 124 = 231 \times (100 + 20 + 4) = 231 \times 100 + 231 \times 20 + 231 \times 4 = 23100 + 4620 + 924 = 28644$

Atividade 13



Bianca quer saber quantos alunos cabem em uma sala de aula de sua escola. A professora disse que cada fileira comporta 7 alunos e que cada sala tem 5 fileiras de carteiras. Qual a capacidade de alunos sentados nessa sala de aula?

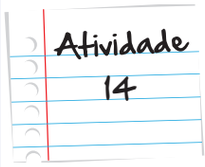
Anote suas respostas em seu caderno

Arme e efetue as operações:

a. 3 x 147

b. 45 x 122

c. 3454 x 2341



Anote suas respostas em seu caderno

Observe que, se tomarmos um número qualquer e multiplicarmos pela sucessão números naturais, teremos um novo conjunto. Observe, vamos usar o número 3.

N = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,...}

3 x 0 = 0

3 x 1 = 3

3 x 2 = 6

3 x 3 = 9 .....

Formaremos um novo conjunto, a saber {0,3,6,9,12,15,18, ...}.

Do mesmo modo que o conjunto dos números naturais, este conjunto também será infinito.

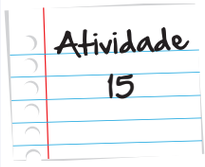
Chamaremos este novo conjunto de conjunto dos múltiplos, neste caso, conjunto dos múltiplos de 3 e representaremos por M(3).

Construa o conjunto dos cinco primeiros múltiplos de cada número dado:

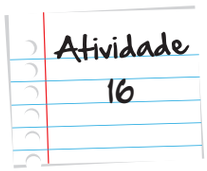
a. 5

b. 11

c. 7



Anote suas respostas em seu caderno



Os conjuntos a seguir representam os múltiplos de qual número?

a. {0, 6, 12, 18, 24, 30, ...}

b. {0, 10, 20, 30, 40, 50, ...}

Anote suas respostas em seu caderno

Divisão

Quem nunca passou por uma situação onde é preciso dividir?

Até mesmo dividir um pedaço de bolo, ou ainda dividir o refrigerante etc?

Dividir nada mais é do que separar em partes iguais.

Se dividirmos 8 em 4 partes iguais teremos 2 + 2 + 2 + 2 = 8, ou seja 8 dividido por 4 é igual a 2;

Podemos representar 8 : 4 = 2; assim, também podemos observar que a divisão é a operação inversa da multiplicação, pois se 8 : 4 = 2, então 4 x 2 = 8.

Neste caso, podemos pensar a divisão como uma sucessão de subtrações, para ver quantas vezes o 4 "cabe dentro" do 8. Assim teríamos:

8 – 4 = 4

4 – 4 = 0.

Ou seja, o 4 "cabe" duas vezes dentro do 8. Logo, 8 : 4 = 2

Por exemplo, usando a mesma ideia acima, como dividir 26 por 7?

Vamos verificar quantas vezes o 7 cabe no 26, fazendo a subtrações sucessivas:

26 – 7 = 19

19 – 7 = 12

12 – 7 = 5

5 – 7 como não conseguimos retirar 7 unidades de 5 unidades, concluímos que o 7 cabe 3 vezes em 26 e ainda restam 5 unidades; diremos que 5 é o resto da divisão de 26 por 7. Observe ainda que poderemos escrever 26 = 3 x 7 + 5, indicando que 26 dividido por 7 dá 3 e deixa resto igual a 5.

Quando escrevemos que 26 = 3 x 7 + 5, cada um desses números recebe um nome apropriado:

26 – dividendo (D)

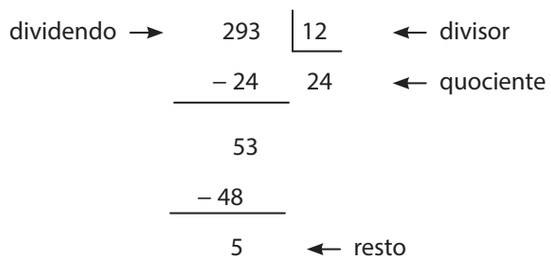
3 – quociente (q)

7 – divisor (d)

5 – resto (r)

Assim, sempre poderemos representar uma divisão assim: D = q x d + r

Vamos tomar um exemplo, 293 : 12 e representá-lo através de um esquema:



Note que 12 x 24 = 288 + 5 = 293

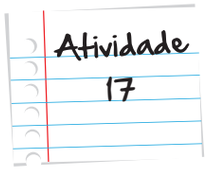
Vamos fazer esta divisão passo a passo:

293 | 12

No dividendo, vamos separar duas casas da esquerda para a direita, isto nos dará a divisão de 29 por 12.

29'3	12	2 x 12 = 24. Subtrai-se 24 de 29 para achar o resto.
– 24	2	
5		Sobraram 5. Vamos descer a próxima (última) casa decimal da esquerda para a direita.

29'3	12	Efetua-se a divisão de 53 por 12.
– 24	24	Acrescenta-se o resultado ao lado do quociente.
53		
– 48		4 x 12 = 48. Subtrai-se 48 de 53 para achar o resto.
5		Pronto! 293 : 12 = 24 com resto 5, o que facilmente se comprova. 12 x 24 + 5 = 293.



Arme as operações e efetue. Destacando o resto quando houver.

a. 745 : 5

b. 234 : 11

c. 897:34

Anote suas respostas em seu caderno

Se construirmos um conjunto com os valores que, ao serem divididos, deixam resto zero, isto é, têm divisão exata, chamaremos este conjunto de conjunto dos divisores do número dado.Por exemplo, o número 12

12: 1 = 12 resto zero

12: 2 = 6 resto zero

12:3 = 4 resto zero

12:4 = 3 resto zero

12:6 = 2 resto zero

12:7 = 2 resto 1

12:12 = 1 resto zero

12:5

Os números {1,2,3,4,6,12} formam o conjunto dos divisores de 12 e representamos por D(12).

O número 7 não pertence ao conjunto dos divisores de 12, pois a divisão de 12 por 7 não é exata.

Observe que o número natural cinco não pertence a este conjunto, pois deixa resto diferente de zero

O conjunto dos divisores é um conjunto finito

No site http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/regras-divisibilidade.htm você encontrará regras de divisibilidade que podem ajudar a encontrar os divisores de um número natural.

Escreva o conjunto de todos os divisores de cada um dos números abaixo

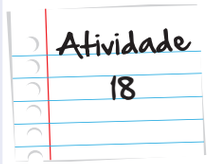
a. 8

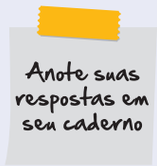
b. 15

c. 22

d. 7

e. 13





O que você observou em relação a esses conjuntos na atividade 18?

Isso mesmo! O número 1 pertence a todos eles e ao próprio número também. O que você pode concluir então?

E em relação aos números dos itens *d* e *e*, o que você observou? Esses números são especiais. Você saberia dizer por quê?

Exatamente! Eles só possuem dois divisores: o 1 e ele próprio!

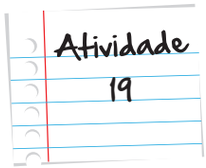
Alguns números admitem apenas dois divisores; o um e ele próprio, como é o caso dos números 7 e 13. Existem infinitos outros, por exemplo: 2,3,5,11,17, ...

Estes números que não admitem outros divisores além do um e dele próprio são chamados números primos.

Saiba Mais

Eratóstenes

Na Grécia antiga (276 – 194 a. C.), viveu um matemático chamado Eratóstenes. Ele construiu um crivo de números primos até 1000. Para isto, ele construiu a tabela com os números naturais de um a 1000 e depois começou eleiminando todos os que têm divisores. Fez assim: primeiro eliminou o 1, depois todos os números divisíveis por 2, depois os divisíveis por 3 e assim por diante. Todos os números que sobraram são primos.



Construa a lista de números primos contidos entre 1 e 50.

Anote suas respostas em seu caderno

Observamos que, segundo Eratóstenes, basta fazer o teste de divisores para verificar se o número é primo. Assim, se o número não é primo, ele terá mais de 2 divisores.

Vamos testar o número 9

9:3 = 3

3:3 = 1

Note que {1,3,9} são divisores de 9. Note também que dividimos o 9 duas vezes por 3. Podemos escrever o 9 assim: 9 = 3x3x1

Vamos testar agora o número 16.

16:2 = 8

8:2 = 4

4:2 = 2

2:2 = 1 Obviamente, 16 não é primo, pois ele admite como divisores os números {1,2,4,8,16}

Podemos escrever 16 como sendo 2x2x2x2x1, ou simplesmente 2x2x2x2, afinal o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, isto é, multiplicar por 1 não altera o resultado da multiplicação.

Quando se decompõe em números primos (chamaremos de decomposição em fatores primos), na maioria das vezes, há a repetição de fatores iguais. Por exemplo, 128 = 2x2x2x2x2x2x2.

Existe uma forma especial de escrever esta multiplicação sucessiva de fatores. É a potenciação.

Potenciação

Uma potência é representada da seguinte forma

3^4 ← expoente (o número de vezes que a base se repete)
↑
Base. (O valor que será repetido)

$3^4 = 3x3x3x3 = 81$

Outros exemplos:

$2^3 = 2x2x2 = 8$

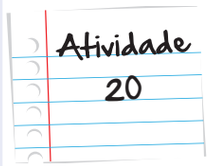
$5^3 = 5x5x5 = 125$

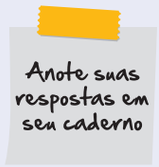
Calcule as potências:

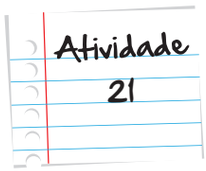
a. 4^5

b. 3^6

c. 2^9







Escreva os produtos em forma de potência

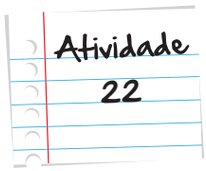
a. 6x6x6x6x6x6 =

b. 9x9x9x9x9 =

c. 10x10x10x10x10 =

d. 2x2x2x2x3x3x3x3=

Anote suas respostas em seu caderno



Decompor os números em fatores primos

a. 36

b. 48

Anote suas respostas em seu caderno

Nesta unidade, revisamos as ideias principais relacionadas ao estudo dos números naturais. Vimos que números não apenas quantificam, mas também organizam a informação, como números de telefone, ou indicam uma posição, por exemplo.

Revimos também as operações com números naturais, as quatro operações principais: soma, subtração, multiplicação e divisão.

Resumo

- Os números nasceram da necessidade que o homem tem de contar e medir
- Nosso sistema de numeração é o sistema decimal e é composto por 10 algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)
- O conjunto dos números naturais é representado pela letra N. Começa no zero e vai até o infinito; todo número natural tem um sucessor, que o excede em uma unidade; todo número natural tem um antecessor, exceto o zero, que é o primeiro natural.
- A adição é a operação inversa da subtração.
- Multiplicação é uma adição sucessiva de parcelas iguais.
- A divisão é a operação inversa da multiplicação.
- O conjunto dos múltiplos de um número é aquele formado pelos números obtidos a partir do produto desse número pela sucessão dos números naturais. Esse conjunto é infinito.
- O conjunto dos divisores de um número é o conjunto formado por todos os valores que dividem o número dado deixando resto zero. Este conjunto é finito.
- Há números que só possuem dois divisores: a unidade e ele mesmo. Esses números são chamado primos.
- Todo número que não é primo pode ser escrito (decomposto) como um produto de fatores primos.
- Potenciação é uma forma de representar uma multiplicação sucessiva.

Veja Ainda

- Procure na Internet sobre a história da Matemática e a invenção dos números. A seguir veja algumas sugestões de sites na Internet onde você pode saber mais sobre este assunto:
  - http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/vidacantor.htm
- A seguir você tem alguns endereços eletrônicos onde você pode saber mais sobre os múltiplos e divisores.
  - http://www.youtube.com/watch?v=aAOAIOsV5tw
  - http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/multiplos-divisores.htm

Referências

- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Georgetown: Edgard Blucher, 1991. 479 páginas.

Imagens

• http://www.sxc.hu/photo/475767 • Miguel Ugalde

• http://www.sxc.hu/photo/504180

• http://www.sxc.hu/photo/768526

• http://www.sxc.hu/photo/986832

• http://www.sxc.hu/photo/1373852

• http://www.sxc.hu/photo/1380082

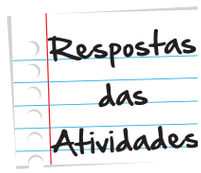
• http://t0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTiiMk2Qu4EePht6ltlxRVeufSUeNTJeW2Nf4vy0SdnpA_qqnFy

• http://www.sxc.hu/photo/957040

• http://www.sxc.hu/photo/990536

• http://www.sxc.hu/photo/640457

• http://www.sxc.hu/photo/517386 • David Hartman



Atividade 1

Vamos iniciar escrevendo todos os números iniciados com 1;

111, 112, 113, 121,122,123,131,132,133

Vamos escrever agora os números iniciados por 3:

211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233

Finalizando, escrevemos os números iniciados pelo algarismo 3:

311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

Atividade 2

É importante lembrar que a decomposição deve partir sempre da direita para a esquerda.

a. 6 unidades simples, 5 dezenas simples, 4 centenas simples e 3 unidades de milhar.

b. 5 unidades simples, 4 dezenas simples, 3 centenas simples, 2 unidades de milhar e 1 dezena de milhar.

Atividade 3

a. 5 dezenas = 50 unidades e 2 centenas = 200 unidades, total é 150 unidades

b. 3 unidades de milhar é igual a 3000 unidades, 4 centenas é igual a 400 unidades com mais 5 unidades, teremos 3000 + 400 + 5 = 3405 unidades.

Atividade 4

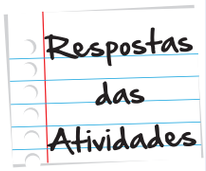
a. { 2, 3, 4 }

b. { 1, 2,3,5,6}

c. {3,4,5}

d. {1,2,3}

e. {9}



Atividade 5

a. 234 – duzentos e trinta e quatro

b. 7092 – sete mil e noventa e dois

c. 123906 – cento e vinte e três mil, novecentos e seis

Atividade 6

a. 12.013

b. 2.223

Atividade 7

a. 44 , 45, 46

b. 238, 239 , 240

c. 108, 109, 110

d. 1089, 1090, 1091

e. 90908, 90909, 90910

Atividade 8

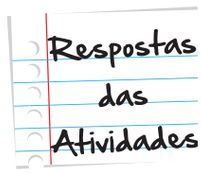
a. 1136

b. 48482

c. 1439

Atividade 9

12,00 + 3,00 + 3,00 = 18,00



Atividade 10

Marcos: 123 + 234 = 357

Felipe: 256 + 112 = 268

Atividade 11

34890 - 29670 = 5220 pontos

Atividade 12

1890,00 - 120,00 = 1770,00

Atividade 13

Coimo a sala de aula tem 5 fileiras e cada fileira tem 7 carteiras, podemos afirmar que a capacidade da sala de aula é 7 +7+7+7+7 = 5 x 7 = 35 alunos.

Atividade 14

Arme e efetue as operações:

a. 441

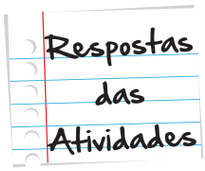
b. 5490

c. 8085814

Atividade 15

Construa o conjunto dos cinco primeiros múltiplos de cada valor dado:

a. M(5) ={0,5,10,15,20}



b. M(11) = {0,11,22,33,44}

c. M(7) = {0,7,14,21,28}

Atividade 16

a. 6

b. 10

Atividade 17

a. 149 resto 0

b. 21 resto 3

c. 26 resto 10

Atividade 18

Ache os divisores

a. D(8) = {1,2,4,8}

b. D(15) = {1,3,5,15}

c. D(22) = {1,2,11,22}

d. D(7) = {1,7}

Atividade 19

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,49

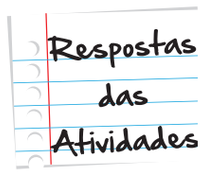
Atividade 20

Calcule as potências:

a. 4x4x4x4x4 = 1024

b. 3x3x3x3x3x3 = 729

c. 2x2x2x2x2x2x2x2=512



Atividade 21

Escreva os produtos em forma de potência

a. 6^7

b. 9^5

c. 10^5

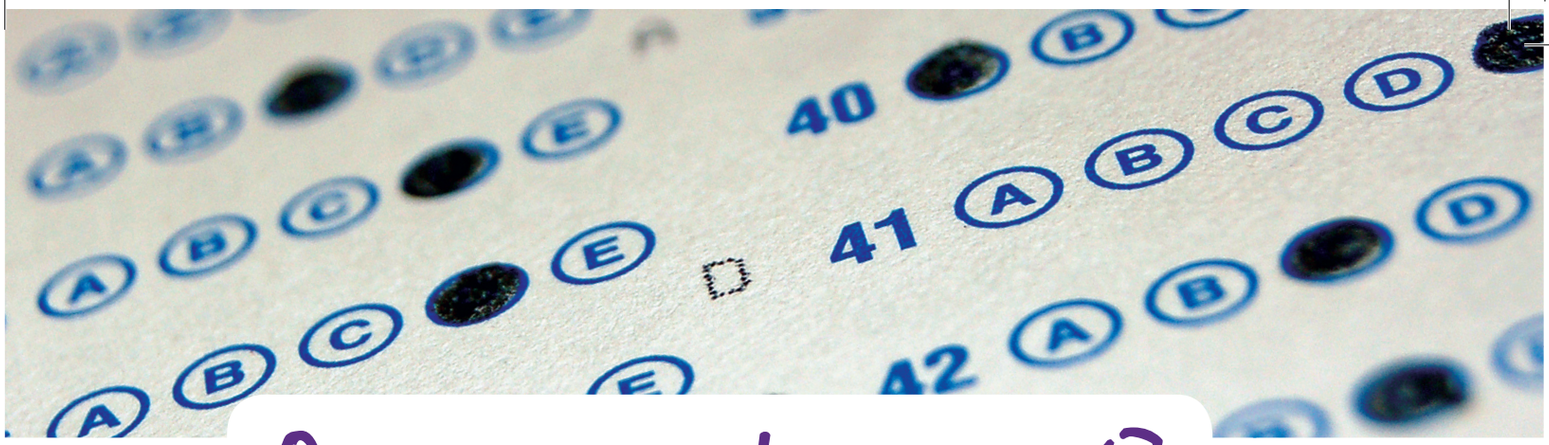
d. $2^4 \times 3^4$

Atividade 22

Decompor os números em fatores primos

a. $2x2x3x3 = 2^2 x3^2$

b. 2^4x3



O que perguntam por aí?

1. **SAERJ (adaptado)** Nas olimpíadas de Londres de 2012, o Brasil ganhou um total de 4 medalhas, sendo 1 de ouro e 3 de bronze. João empolgando com o resultado de seu país resolveu participar de um campeonato de judô na categoria juvenil, pesando 45kg. Cinco meses depois estava 4kg mais pesado e precisou mudar de categoria. Quanto ele estava pesando nesse período?

   a. 15 kg

   b. 41 kg

   c. 49 kg

   d. 85 kg

   Gabarito: Letra C

2. Num artigo de jornal, em que foram apresentados estudos sobre a população da Terra, foi publicado que, no ano 2000, a população chegou a 6,06 bilhões de pessoas. Este número também pode ser escrito como:

   a. 6 060 000 000

   b. 606 000 000

   c. 6 060 000

   d. (D) 606 000

   Gabarito: Letra A

3. SAERJ - A professora de João pediu para ele decompor um número e ele fez da seguinte forma:

4 x 1000 + 3 x 10 + 5 x 1

Qual foi o número pedido?

a. 4035

b. 4305

c. 5034

d. 5304

Gabarito: Letra A

4. Dona Lourdes acabou de lavar umas camisetas. Para pendurar 4 camisetas no varal, usou 5 prendedores de roupa. Quantos prendedores serão necessários para pendurar 18 camisetas?

Gabarito:

A questão proposta apresenta um problema cotidiano que leva o aluno a relacionar conceitos matemáticos ao seu dia a dia. Considerando que para cada quantidade de camisetas, dona Lourdes sempre coloca 1 pregador a mais, concluímos que para 18 ela irá usar 19 prendedores.

5. Luís tem uma coleção de bolinhas de gude. Ontem ele ganhou 24 bolinhas novas de seu primo e ficou com 150 bolinhas. Desse modo, podemos afirmar que, antes de ganhar esse presente do primo, Luís tinha:

a. 124 bolinhas

b. 125 bolinhas

c. 126 bolinhas

d. 174 bolinhas

Gabarito: Letra C

Circunferência e polígonos regulares

Para início de conversa...

Você já deve ter notado que existem algumas provas de atletismo em que os atletas largam desalinhados, no início de uma curva. Mas será que você já se perguntou se essa disposição dá a todos os atletas igualdade de condições para competir? Será que aquele atleta que está na pista externa realmente larga na frente e vai correr menos do que os demais?

Figura 1: Prova de atletismo

Nesta unidade, vamos aprender algumas propriedades geométricas das circunferências e dos círculos, para compreendermos bem esta e muitas outras situações cotidianas.

Objetivos de aprendizagem

Espera-se que, ao término desta unidade, você consiga:

- reconhecer uma circunferência e seus principais elementos;
- expressar e calcular o comprimento de uma circunferência em função da medida do seu raio;
- reconhecer o conceito de inscrição e circunscrição de polígonos.

Seção 1
Circunferência

Situações como a descrita anteriormente envolvem uma figura geométrica chamada circunferência. Chamamos circunferência o conjunto de pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto fixo deste plano, chamado centro da circunferência. Esta definição, que a princípio pode parecer muito abstrata ou formal, fica bem fácil de entender se usarmos um instrumento chamado compasso.

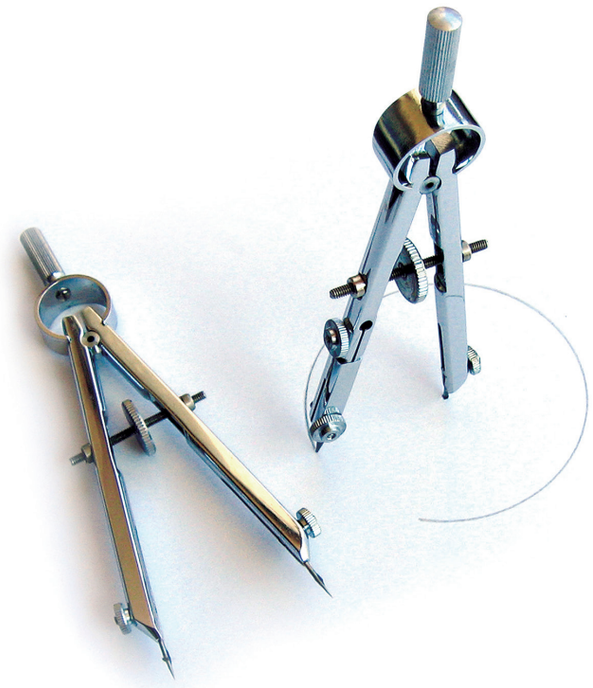


Figura 2: compasso

O compasso consiste basicamente em duas hastes rígidas, articuladas em uma das extremidades. A abertura entre as hastes pode ser regulada. Uma das hastes tem grafite na extremidade livre, enquanto a outra, chamada ponta seca, tem a extremidade livre metálica e pontiaguda – veja na Figura 3.

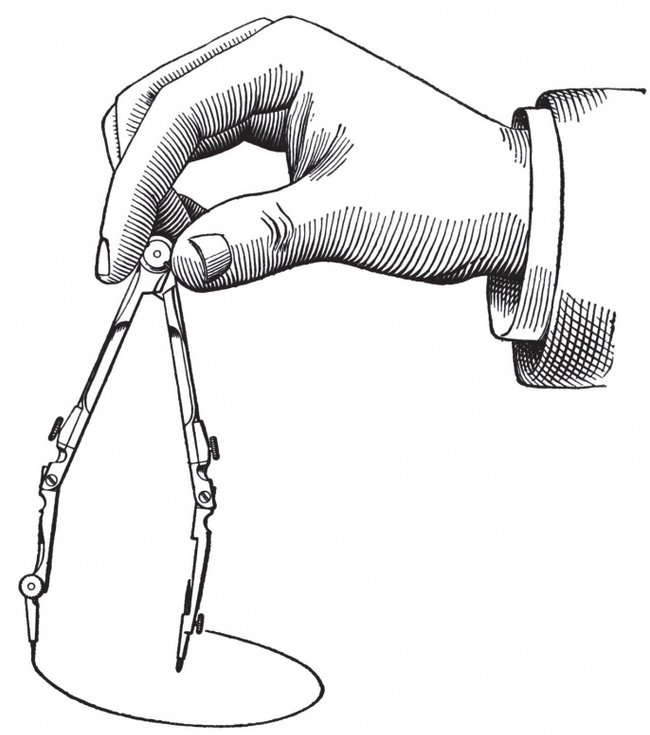


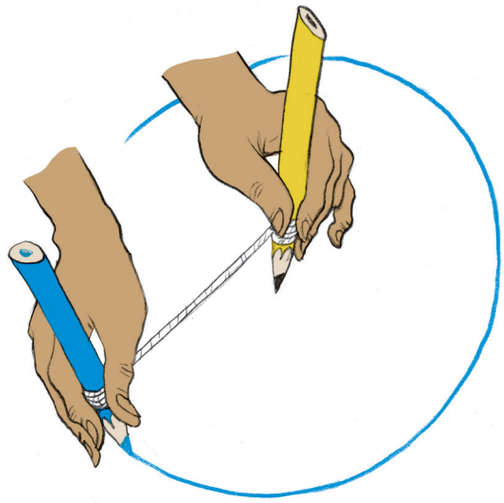
Figura 3: Desenhando uma circunferência com um compasso

Se posicionarmos a ponta seca perpendicularmente sobre um ponto do papel e rodarmos o compasso em torno deste ponto, fazendo com que a ponta que tem grafite encoste e comece a marcar o papel, veremos surgir o desenho de um círculo. Veja na Figura 3. Podemos dizer que a figura formada é uma circunferência justamente porque a distância entre cada ponto da figura e o ponto em que apoiamos a ponta seca é rigorosamente a mesma. Isto acontece porque a distância entre a ponta seca e a ponta com grafite – a abertura do compasso! – se mantém constante durante todo o processo de desenho.

Assim, na frase "o conjunto de pontos do plano que estão a mesma distância de um ponto fixo deste plano, chamado centro da circunferência", o conjunto de pontos é justamente o desenho feito pela ponta com o grafite, a distância é justamente aquela entre as hastes do compasso e o centro da circunferência é o ponto onde apoiamos a ponta seca. Entenderam?

Caso você não disponha de um compasso, também é possível traçar uma circunferência usando um lápis e um barbante! Amarre uma das extremidades do barbante no lápis e fixe a outra extremidade do barbante no ponto que será o centro. Para isso, você pode usar uma tachinha, um alfinete ou mesmo outro lápis. O princípio é o mesmo do compasso, mas é importante atentar para o barbante, que deve ficar esticado o tempo todo.

Saiba Mais



Vamos agora apresentar, mais formalmente, os principais elementos de uma circunferência.

Na circunferência à esquerda da Figura 4, os pontos A e B são pontos da circunferência. Já na circunferência à direita, os pontos C, D , E, F e G também são pontos da circunferência. Em ambas, o ponto O é chamado centro da circunferência.

Raio é o segmento que une o centro a um ponto da circunferência. Na Figura 4, à direita, os segmentos $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$ são exemplos de raios que podem ser traçados nesta circunferência.

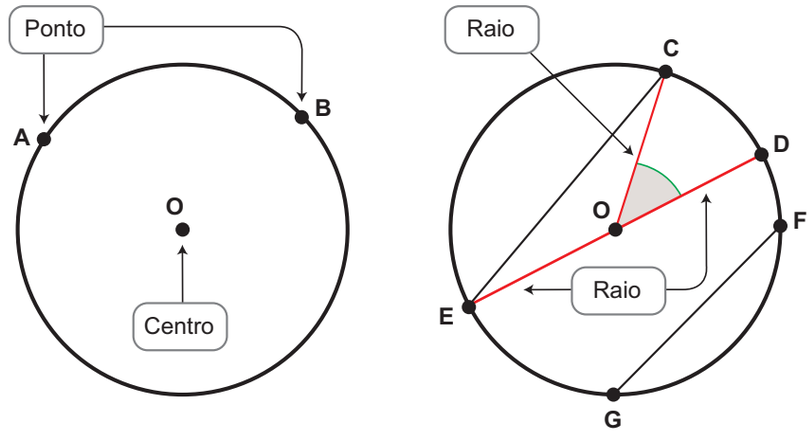


Figura 4: Circunferências com pontos, centros e raios marcados

Corda é o segmento de reta que une dois pontos distintos da circunferência. Na Figura 5, os segmentos $\overline{CE}$, $\overline{ED}$ e $\overline{FG}$ são cordas.

Diâmetro é uma corda que contém o centro da circunferência. A medida de um diâmetro é o dobro da medida de um raio. Entre as cordas mostradas na Figura 5, a única corda que pode ser chamada de diâmetro é $\overline{ED}$.

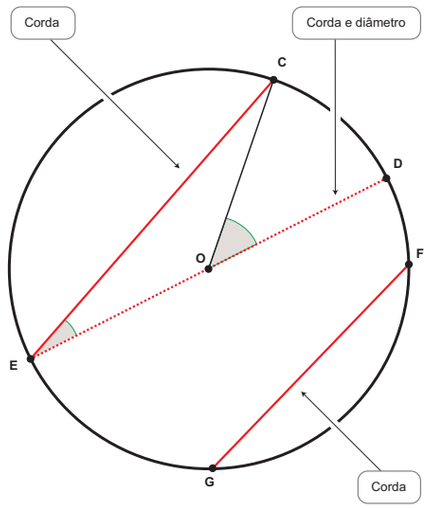


Figura 5: Circunferência com cordas e diâmetro ressaltados.

Dois pontos distintos sobre uma circunferência a dividem em duas partes denominadas arcos de circunferência. Na Figura 6, a parte da circunferência compreendida entre os pontos D e C, C e E, F e G são exemplos de arcos. Observe que o arco compreendido entre os pontos D e E determina uma semicircunferência. Para fazer a indicação do arco determinado pelos pontos C e F, por exemplo, usamos a notação $\overset{\frown}{CF}$.

Porém, podemos ficar na dúvida se estamos nos referindo ao maior ou ao menor arco determinado por eles. Para que não haja ambiguidade, podemos escrever $\overset{\frown}{CDF}$ para indicar o arco determinado pelos pontos C e F e que contém o ponto D.

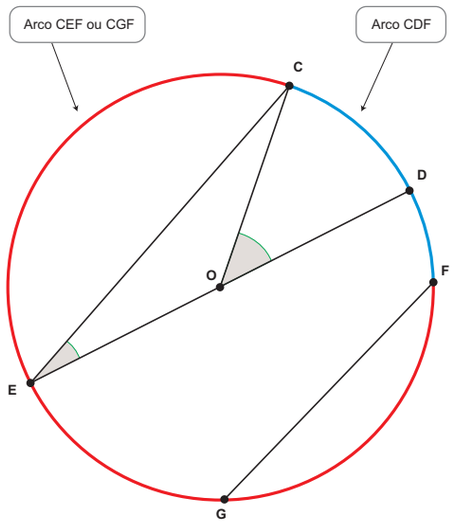


Figura 6: Circunferência com arcos marcados

Ângulo central é o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência. Na circunferência da figura 4, seria o ângulo CÔD.

Ângulo inscrito na circunferência é o ângulo cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados contêm cordas dessa circunferência. Na Figura 4, podemos identificar o ângulo CÊD.

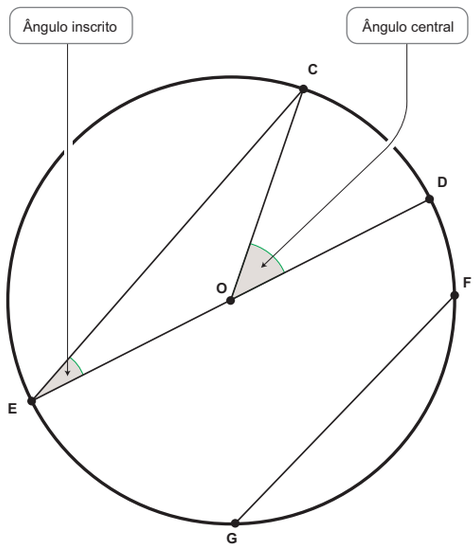


Figura 7: Circunferência com ângulos central e inscrito

Reta tangente à circunferência é a reta que intersecta a circunferência em um único ponto. Na Figura 7, a reta r é tangente à circunferência. O único ponto de intersecção dessa reta com a circunferência é H. Esse ponto é denominado ponto de tangência. Uma propriedade importante da reta tangente é que ela é sempre perpendicular ao raio, no ponto de tangência.

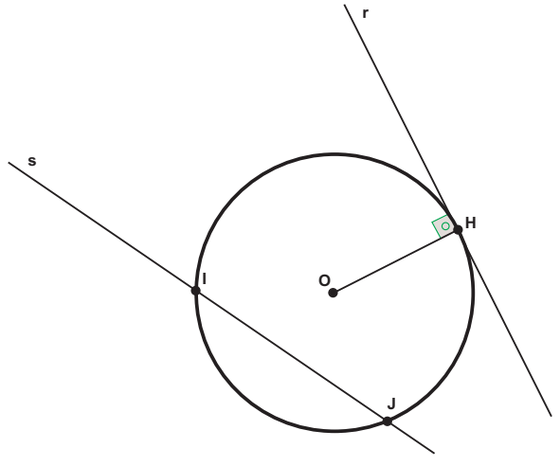
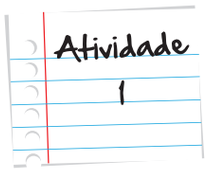
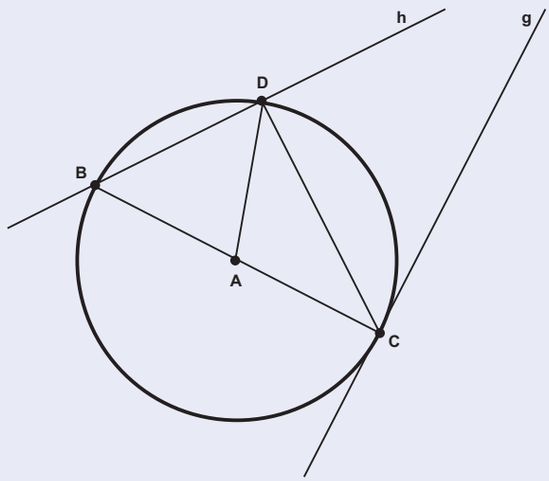


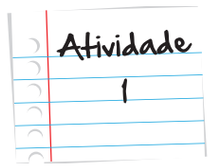
Figura 8: Circunferência com uma reta tangente (reta r) e uma reta secante (reta s). O segmento OH é perpendicular à reta r no ponto H.

Finalmente, reta secante à circunferência é a reta que intersecta a circunferência em dois pontos distintos. Na Figura 5, a reta s é uma secante. Observe que há dois pontos de intersecção, que denominamos de I e J.



Observe a figura a seguir e preencha as lacunas de acordo com a numeração da coluna à direita.





1) raio

2) corda

3) diâmetro

4) arco de circunferência

5) semicircunferência

6) reta tangente à circunferência

7) reta secante à circunferência

8) ângulo central

9) ângulo inscrito na circunferência

a) ( ) $\overline{AD}$

b) ( ) $\overset{\frown}{BC}$

c) ( ) $\overline{CD}$

d) ( ) $\overset{\frown}{CD}$

e) ( ) $D\hat{B}C$

f) ( ) $\overline{BD}$

g) ( ) $\overline{BC}$

h) ( ) $\overline{AC}$

i) ( ) h

j) ( ) g

l) ( ) $D\hat{A}C$

Anote suas respostas em seu caderno

Comprimento da circunferência

Figura 9: Medindo a circunferência de uma lata.

Medir o comprimento de uma circunferência significa verificar quantas unidades de comprimento tem o contorno dela. É possível determinar o comprimento exato de uma circunferência em função do seu raio. Podemos dizer que, para todas as circunferências, a razão entre o seu comprimento e o seu diâmetro é constante. Designaremos essa constante pela letra grega π.

Multimídia

Muitos povos da antiguidade perceberam que a relação entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência era independente do tamanho dessa circunferência. O primeiro método mais robusto para encontrar essa constante, que hoje chamamos de π, foi criado pelos gregos e consistia, basicamente, em fazer a divisão entre o diâmetro de um círculo e o perímetro de um polígono regular inscrito nesse círculo. Quanto maior o número de lados do polígono, maior a precisão do cálculo.

No endereço http://www.geogebratube.org/student/m44203, você encontrará uma tela interativa que permite a obtenção de aproximações para π através de polígonos. Partindo de um triângulo, você pode aumentar o número de lados do polígono até 200 e verificar, para cada um desses polígonos, o valor da razão entre o seu perímetro e o diâmetro da circunferência.

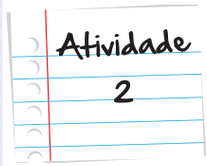
Utilizando uma formulação algébrica, se C indica o comprimento de uma circunferência cujo raio mede R (e o diâmetro 2R), temos que $\frac{C}{2R} = \pi$, ou seja, $C = 2\pi R$.

Assim, uma circunferência cujo raio mede 5 cm tem comprimento $C = 2\pi.5 = 10\pi$cm.

Eventualmente podemos usar para π o valor 3,14, mas somente faça essa substituição quando for solicitado, ok?

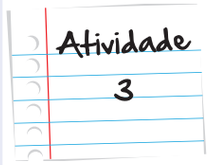
Calcule o comprimento da circunferência de raio 25 cm.

Anote suas respostas em seu caderno



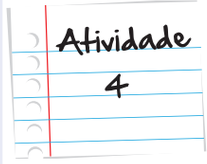
Dê um valor aproximado para o comprimento da circunferência de raio 7cm.

Anote suas respostas em seu caderno



Um corredor dá voltas em uma pista circular de raio 15 metros. Após dar 10 voltas nessa pista, quantos metros ele percorreu?

Anote suas respostas em seu caderno



José possui uma bicicleta aro 26. Isso indica que o diâmetro de suas rodas é de 26 polegadas.

1 - Considerando que uma polegada corresponde a 2,54 cm, calcule a medida do raio da roda.

2 - Qual foi a distância aproximada percorrida por José, sabendo que suas rodas deram exatamente 100 voltas completas?

3 - Quantas voltas deram as suas rodas sabendo que ele percorreu 1 km em sua bicicleta?

Atividade 4

Anote suas respostas em seu caderno

Agora que já sabemos calcular o comprimento de uma circunferência, também podemos calcular o comprimento de arcos de uma circunferência.

Por exemplo, considere uma circunferência de raio 3 cm. O seu comprimento é $2\pi.3 = 6\pi$cm. Se estabelecermos uma correspondência entre um arco de circunferência e o ângulo central que o determina, vemos que se tratam de grandezas proporcionais. Veja a figura a seguir.

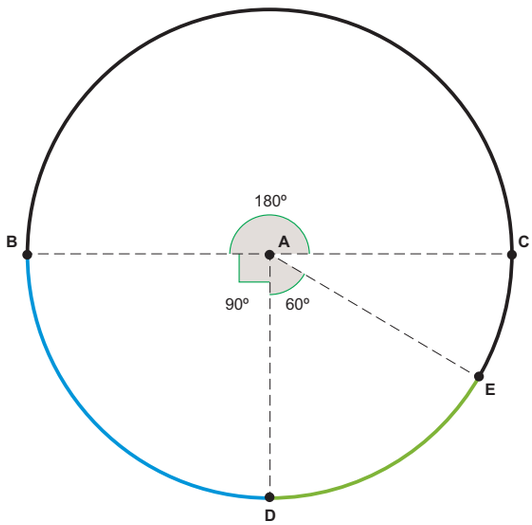


Figura 10: Circunferência de centro A, com ângulos de 180°, 90° e 60° assinalados

Como 180° é a metade de 360°, o comprimento do arco BC é a metade do comprimento da circunferência. Logo, BC = 6π/2 = 3πcm.

Como 90° é a quarta parte de 360°, o comprimento do arco BD é a quarta parte do comprimento da circunferência. Logo, BD = $\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ cm.

Sabe-se atualmente que π é um número irracional e, por isso, jamais poderemos conhecê-lo integralmente. Sua aproximação mais usual, com duas casas decimais, é 3,14. Mas você saberia dizer quantas casas decimais de π são conhecidas hoje? Acesse o endereço http://www.obm.org.br/opencms/fique_por_dentro/curiosidades/ e descubra a resposta.

Saiba Mais

Poderíamos, ainda, determinar os comprimentos desses arcos através de uma regra de 3. Para o arco DE, teríamos a seguinte tabela, que relaciona medidas de ângulos centrais e comprimentos de arcos de circunferência:

Medida do ângulo central	Comprimento do arco de circunferência
360°	6π cm
60°	x

Dessa forma, teríamos $\frac{360}{60} = \frac{6\pi}{x}; x = \frac{60 \cdot 6\pi}{360} = \pi$ cm

Como já sabemos calcular o comprimento de um arco de circunferência, podemos voltar à pergunta que abre esta aula: numa corrida em que os corredores largam numa curva, desalinhados, todos correm a mesma distância ou os corredores que estão na parte externa da curva largam na frente e correm menos do que os outros?

Bom, a primeira coisa a considerar é que, na pista de atletismo, cada trilha da curva é um arco de circunferência. Todos estes arcos são determinados por um ângulo de 180°, o que equivale à metade dos 360° da circunferência completa. Assim, se soubermos o raio de cada trilha, poderemos facilmente calcular seu comprimento. Vamos imaginar, por exemplo, que o comprimento raio da trilha interior é de 15 metros. Como ela é metade da circunferência — que, inteira, tem 2πr de comprimento — seu comprimento será de $\pi \cdot r = \pi \cdot 15 \cong 47m$. Suponha agora que a trilha externa tenha um raio de 21 metros. Usando o mesmo raciocínio, descobriremos que ela tem $\pi \cdot r = \pi \cdot 21 \cong 66m$. Veja na figura.

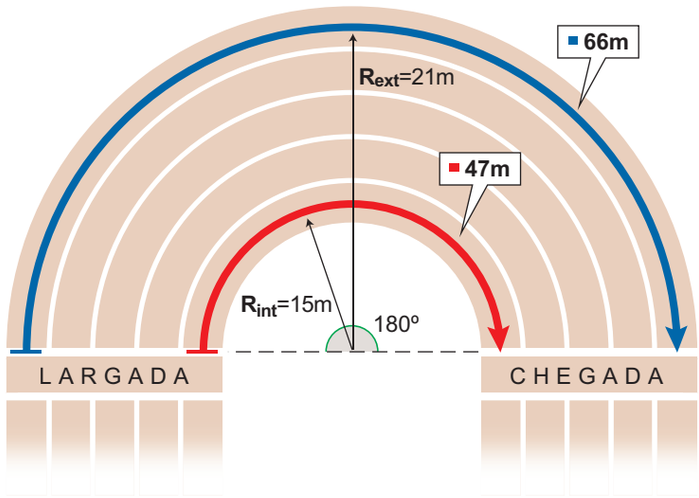


Figura 11: Pista de corrida com 5 trilhas, início e fim da corrida marcados. A trilha interior tem raio de 15 m e comprimento de 47 m e a trilha exterior tem raio de 21 m e comprimento de 66 m.

Concluímos então que, caso a corrida se restringisse à curva e os corredores largassem alinhados no início da curva, o corredor da pista interior correria 47 metros, uma distância bastante menor do que a percorrida pelo corredor da raia exterior, que teria percorrido 66 metros — o que convenhamos, é bastante injusto.

E é exatamente para compensar essa diferença que os corredores largam desalinhados na curva ! ! ! No nosso exemplo, para que o corredor da pista exterior possa correr os mesmos 47 metros do corredor da pista interior, ele precisará largar 19 metros na frente. Veja só:

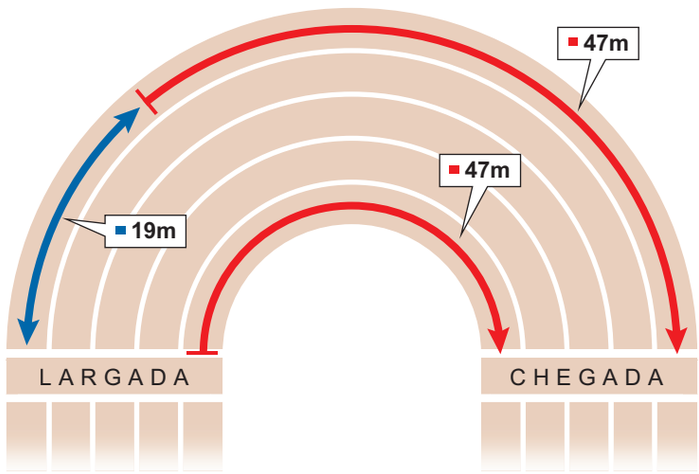


Figura 12: Pista de corrida com a posição de largada na pista externa alterada em 19 metros, para que o corredor desta pista corra a mesma distância que o corredor da pista interna.

Suponha ainda a corrida descrita nos exemplos anteriores: o percurso da prova se restringe à curva de uma pista de atletismo cujo raio da pista interna é de 15 metros e o da pista externa é de 21 metros. Imagine agora que um corredor está posicionado em uma das pistas intermediárias, que tem raio de 19 metros. Quantos metros à frente do corredor da pista interna ele deve largar para que ambos percorram a mesma distância durante a prova?

Atividade 6

Anote suas respostas em seu caderno

Seção 2
Polígonos inscritos e circunscritos

Se todos os vértices de um polígono pertencem a uma circunferência, dizemos que este polígono está inscrito na circunferência.

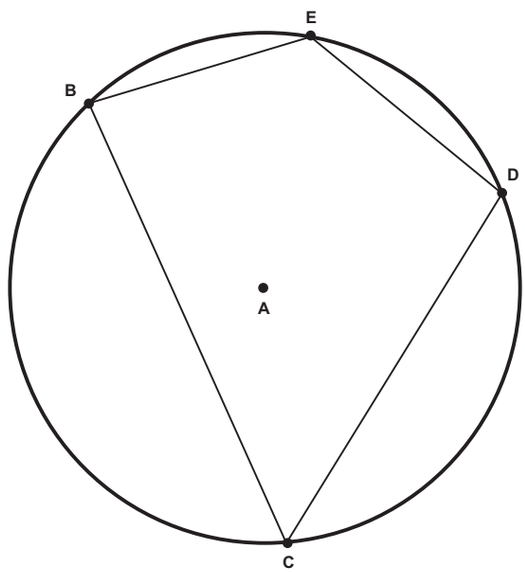


Figura 13: Quadrilátero inscrito em uma circunferência.

Note que os vértices B, C, D e E são pontos da circunferência. Logo, o polígono BCDE está inscrito na circunferência.

Dizemos que um polígono está circunscrito a uma circunferência se todos os lados do polígono tangenciam a circunferência. Veja na Figura 14: os lados EF, FG e GE do polígono EFG tangenciam a circunferência. Logo, o polígono EFG está circunscrito à circunferência.

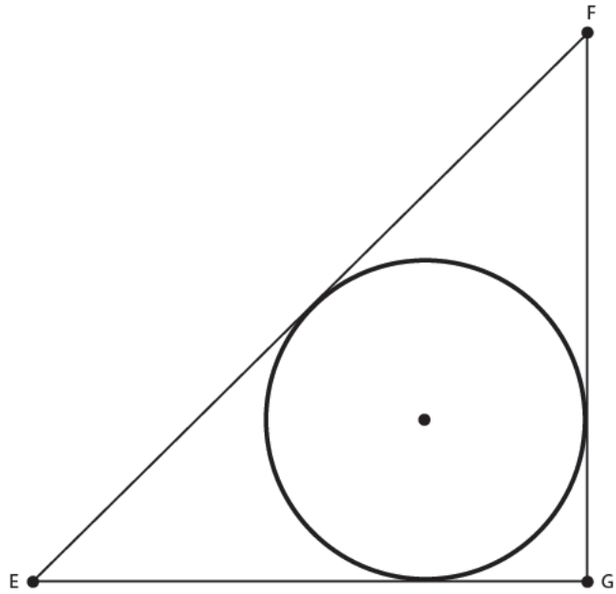


Figura 14: Polígono circunscrito a uma circunferência.

Resumo

- Circunferência é o conjunto de pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto fixo deste plano, chamado centro da circunferência.
- Raio é o segmento que une o centro a um ponto da circunferência.
- Corda é o segmento de reta que une dois pontos distintos da circunferência.
- Diâmetro é uma corda que contém o centro da circunferência.
- Dois pontos distintos sobre uma circunferência a dividem em duas partes denominadas arcos de circunferência.
- Ângulo central é o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

- Ângulo inscrito na circunferência é o ângulo cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados contêm cordas dessa circunferência.
- Reta tangente à circunferência é a reta que intersecta a circunferência em um único ponto. O raio de uma circunferência é sempre perpendicular à reta tangente, no ponto de tangência.
- Reta secante à circunferência é a reta que intersecta a circunferência em dois pontos distintos.
- O comprimento de uma circunferência cujo raio mede R é dado pela expressão $C = 2\pi R$.
- O número π é um número irracional e sua aproximação com duas casas decimais é 3,14.
- Se todos os vértices de um polígono pertencem a uma circunferência, dizemos que este polígono está inscrito na circunferência.
- Dizemos que um polígono está circunscrito a uma circunferência se todos os lados do polígono tangenciam a circunferência.

Imagens

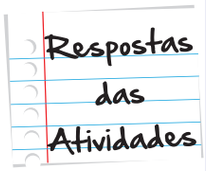
• http://www.sxc.hu/photo/475767 • Miguel Ugalde

• http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ASemifinal_odain.jpg

• http://www.freeimages.com/browse.phtml?f=download&id=835242

• http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ADrawing-a-circle-with-the-compasses.jpg

• http://www.sxc.hu/photo/517386 • David Hartman



Atividade 1

a. 1

b. 5

c. 2

d. 4

e. 9

f. 2

g. 3

h. 1

i. 7

j. 6

l. 8

Atividade 2

Como o raio r = 25cm, o comprimento dessa circunferência é $C = 2\pi . 25 = 50\pi$cm.

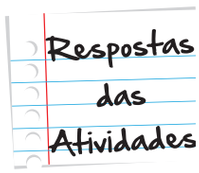
Atividade 3

Uma circunferência de raio r = 7cm tem comprimento $C = 2\pi.7 = 14\pi$cm. Como π é aproximadamente 3,14, temos que o comprimento aproximado dessa circunferência é 14.3,14 = 43,96cm.

Atividade 4

Se o raio da pista circular mede 15 m, o seu comprimento mede $2\pi.15 = 30\pi$m. Isso quer dizer que a cada volta, o corredor percorre uma distância de 30π metros. Após 10 voltas, a distância percorrida será $10.30\pi = 300\pi$m.

Atividade 5



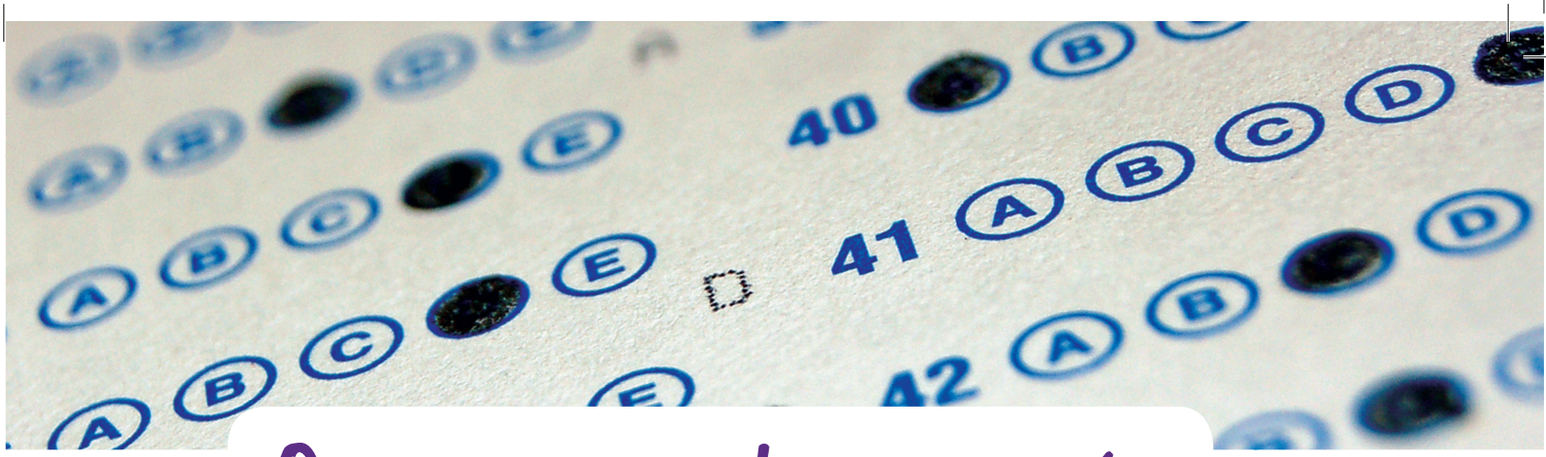
1. Se o diâmetro mede 26 polegadas, seu comprimento, em centímetros, será 26.2,54 = 66,04 cm. Logo, a medida do seu raio será 66,04 : 2 = 33,02 cm.

2. O comprimento da circunferência da roda é 2π.33,02 = 66,04 cm, cujo valor aproximado é 66,04.3,14 = 207,3656 cm. Isso quer dizer que, no momento em que a roda dá uma volta completa, a bicicleta percorre uma distância de 207,3656cm. Se as rodas deram 100 voltas, a distância percorrida foi 100.207,3656 = 20736,56 cm (aproximadamente 207,4 metros).

3. A distância percorrida foi de 1 km, que equivale a 100000 cm. Se uma volta completa da roda faz a bicicleta percorrer uma distância aproximada de 207,4cm, o número de voltas completas para percorrer os 100000 cm é 100000 : 207,4 = 482,16.

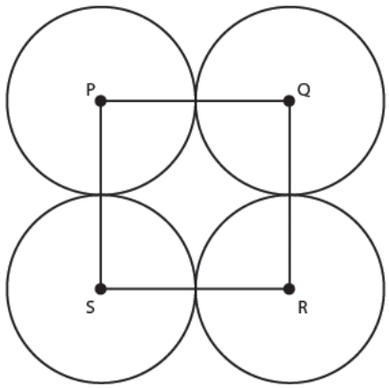
Atividade 6

Relembrando: como a pista interna tem 15 metros de raio, será de $\pi \cdot r = \pi \cdot 15 \cong 47m$. Como a pista intermediária tem um raio de 19 metros, seu comprimento será de $\pi \cdot r = \pi \cdot 19 \cong 59,6m$. Se largarem alinhados, o corredor da pista intermediária correrá 59,6-47=12,6 m a mais do que o corredor da pista interna. Assim, para que ambos corram a mesma distância, o corredor da pista intermediária deverá largar 12,6 m à frente do corredor da pista interna.



O que perguntam por aí...

1. **(Banco de Questões do Saerj/Saerjinho)** OS vértices P, Q, R e S do Quadrado abaixo correspondem aos centros de quatro cincunferências iguais e tangentes.



Sabendo que cada lado desse quadreado mede 2 cm, qual é a medida do raio de cada uma dessas circunferências?

a. 1 cm

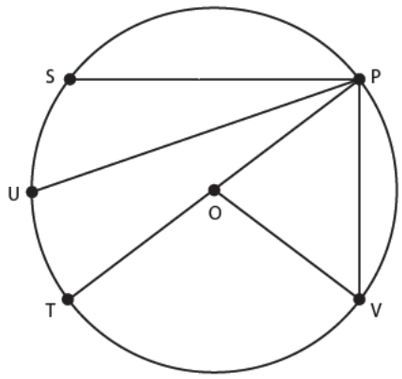
b. 2 cm

c. 4 cm

d. 8 cm

Gabarito: Se a medida de cada lado do quadrado corresponde ao dobro da medida do raio de cada um dos círculos, então concluímos que a medida desse raio é igual a 1 cm. A Alternativa correta é A).

2. (Questão do Banco de Provas Saerj/Saerjinho) Observe os segmentos traçados na circunferência abaixo



Qual desses segmentos é o diâmetro?

a. $\overline{PS}$

b. $\overline{PU}$

c. $\overline{PT}$

d. $\overline{VO}$

e. $\overline{PV}$

Gabarito: Essa questão pode ser considerada de resolução simples, embora não tenha sido explicitado que o ponto O é o centro da circunferência. Admitindo isto, basta observar que o segmento PT é o único que atende ao enunciado da questão, pois é uma corda que passa pelo centro.